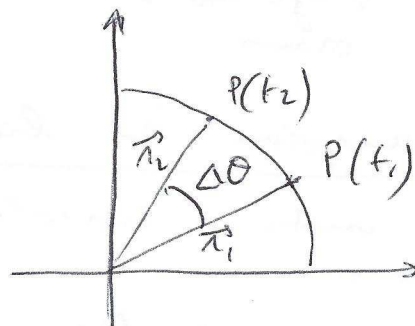
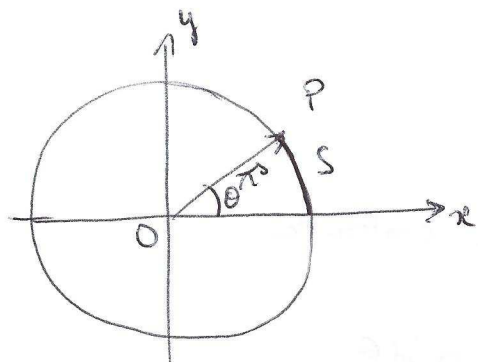


# Moto rotazionale

## y Cinematica di rotazione



P passa da  $\theta_1$  a  $\theta_2$ : durante  $\Delta t$ , si sposta angolarmente di  $\Delta\theta$

Velocità angolare media:  $\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$

\_\_\_\_\_ istantanea  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

Tutti i punti di un solido si spostano alla stessa velocità angolare  $\omega$  (tranne i punti dell'asse di rotazione), ma non come la stessa velocità lineare.

Accelerazione angolare:  $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

$$\rightarrow \omega = \alpha t + \omega_0$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \theta = \frac{1}{2} \alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0$$

eq. del moto rotazionale.

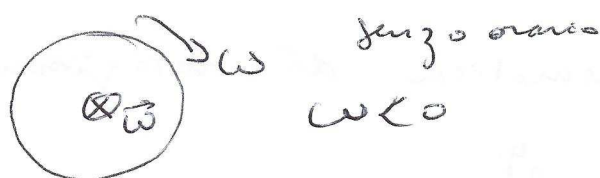
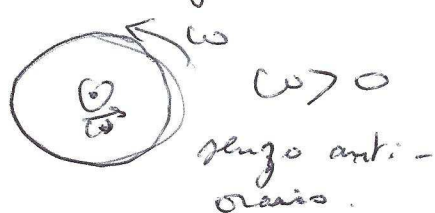
cf. moto traslazionale, i variabili sono  $\left\{ x, v, a \right.$   
 $\left. \begin{matrix} \vec{x}, \vec{v}, \vec{a} \end{matrix} \right.$

nota: uno spostamento angolare qualunque non è una quantità vettoriale. Solo uno spostamento angolare infinitesimo è vettoriale.

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}, \quad \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

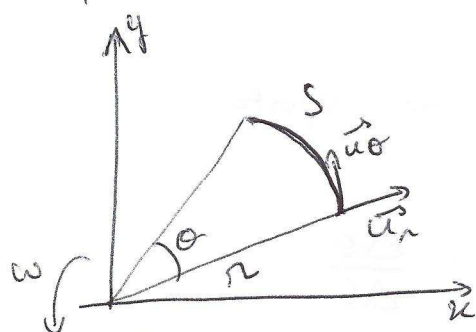
$\vec{\omega}, \vec{\alpha}$  collineari, lungo l'asse di rotazione.

Il verso della velocità angolare è determinato dalla regola della mano destra:



Variabili angolari e lineari:

per un moto circolare,  $r = \text{costante}$



$$s = \theta r$$

$$\frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt}$$

$$v = r\omega$$

$$\vec{r} = r\vec{u}_r$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = r\omega \vec{u}_\theta = \vec{v}$$

$$\underline{\vec{v} = r\omega \vec{u}_\theta}$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \omega \vec{u}_\theta$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\omega \vec{u}_r$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = r\omega \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + \vec{u}_\theta r \frac{d\omega}{dt}$$

$$\vec{a} = -\omega^2 r \vec{u}_r + \alpha r \vec{u}_\theta$$

Accelerazione centripeta  $\vec{a}_c = -\omega^2 r \vec{u}_r$   
(fa cambiare la direzione di  $\vec{v}$ )

Accelerazione tangenziale  $\vec{a}_T = \alpha r \vec{u}_\theta$   
(colineare con la velocità).

vettorialmente :

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \\ \vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_c \\ \vec{a}_T = \vec{\alpha} \times \vec{r} \\ \vec{a}_c = \vec{\omega} \times \vec{v} \end{cases}$$

## 2/ dinamica di rotazione

### • Energia cinetica

Se si considera il moto del centro di massa  $G$ :

$$E_c = \frac{1}{2} m v_G^2 = 0 \quad \text{perché il centro di}$$

massa è sull'asse di rotazione:  $v_G = 0$ . Per gli altri punti si muovono!

per un sistema di particelle, abbiamo:

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \dots + \frac{1}{2} m_N v_N^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$\text{e } v_i = \omega r_i$$

$$\rightarrow E_c = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{\sum_i m_i r_i^2}_{\text{momento d'inerzia}}$$

Si introduce il momento d'inerzia del sistema di particelle:

$$\boxed{I = \sum_i m_i r_i^2}$$

Nota:  $I$  dipende dall'asse di rotazione:  $r_i$  è la distanza di un punto (una delle particelle del sistema) rispetto all'asse.

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} I \omega^2}$$

Nota: non è una nuova forma di energia ma è il calcolo dell'energia cinetica di ogni particella del sistema in forma più gestibile.

• il momento d'inerzia misura quanto un corpo si oppone al cambio del suo moto di rotazione, come la massa misura quanto il corpo si oppone al cambio del suo moto traslazionale.

$I$ : Momento d'inerzia calcolato per geometrie comuni (cf. tabella in fondo)

per un solido continuo:

$$I = \int_V r^2 dm$$

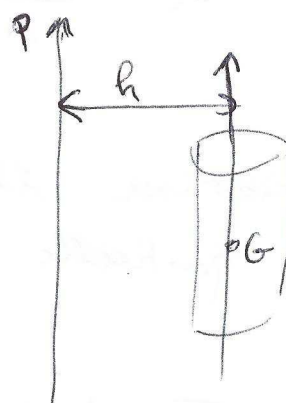
$I_G$  = momento d'inerzia calcolato per un asse che passa per il centro di massa.

$I$  rispetto ad un asse parallelo, che non passa per  $G$ :

$$I_P = I_G + M h^2$$

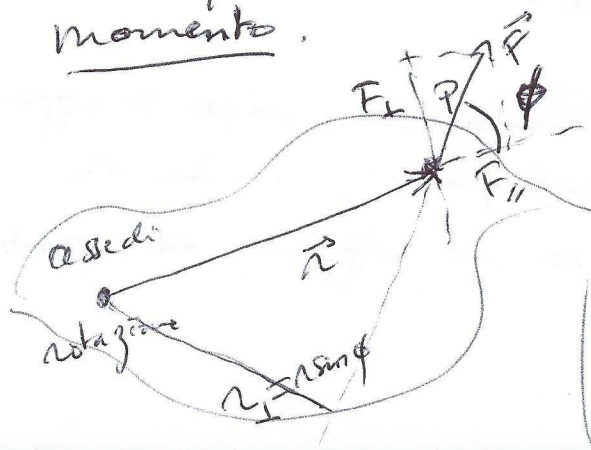
$R$ : rona del corpo  
 $h$ : distanza fra gli assi.

teorema delle asse parallele =  
 Huygens-Steiner.



## Momento di una forza.

Per un moto di rotazione: si deve tenere conto di come la forza è applicata rispetto all'asse di rotazione: direzione, distanza. Si definisce una quantità più rilevante della forza: il suo momento.



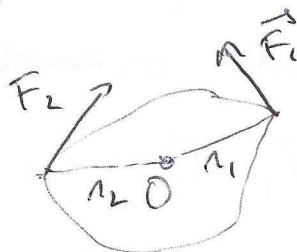
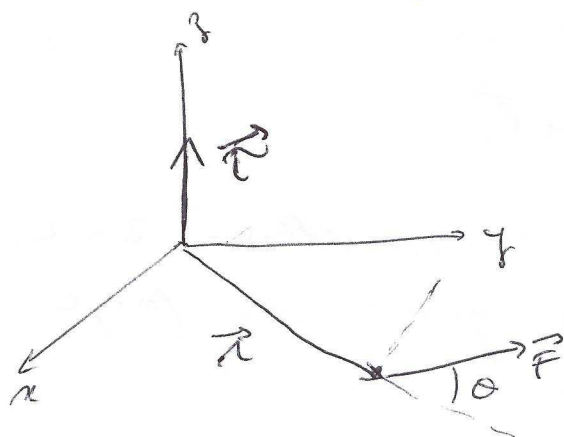
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\tau = r F \sin \phi \quad \text{unità: N.m}$$

$$\tau = r F_{\perp}$$

$$\text{ov. } \tau = r_{\perp} F$$

$\tau$  grandezza algebrica (e vettoriale!)



$$\tau_1 = r_1 F_{1\perp} > 0$$

già nel senso  
antiorario

$$\tau_2 = r_2 F_{2\perp} < 0$$

già nel senso  
orario.

## Momento angolare $\vec{L}$ ( $L$ )

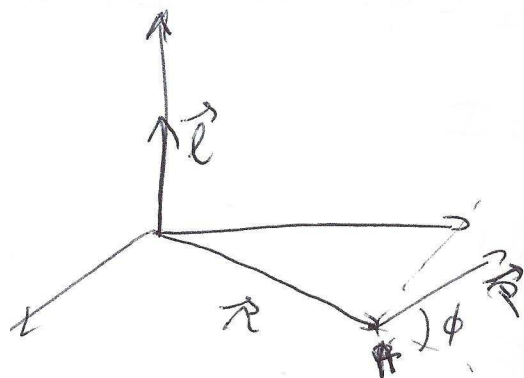
= momento della quantità di moto

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}}$$

Unità:  
 $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$

per una particella di massa  $m$ .



$$L = r m v \sin \phi$$

$$L = r m v_{\perp}$$

Seconda legge della dinamica:  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$= \underbrace{\vec{v} \times m\vec{v}} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$= 0$$

$$\boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

La variazione di momento angolare di una particella  $\vec{r}$  uguale al momento delle forze che agisce sulla particella o al momento della risultante.

Per un sistema di particelle:

$\vec{L}$  è una quantità vettoriale  $\rightarrow$

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_N$$

tutte le forze interne al sistema si cancellano 2 a 2, anche i momenti. Si considerano quindi solo forze esterne:

$$\boxed{\vec{\tau}_{\text{ext.}} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

Nota:  $\vec{\tau}$  e  $\vec{L}$  definite rispetto ad un asse di rotazione. L'equazione rimane valida anche per un corpo in traslazione.

Per un solido in rotazione intorno ad un asse

fisso (3):

$$L_z = \sum_i l_z = \sum_i m_i v_i r_{i\perp} = \sum_i m_i (\omega r_{i\perp}) r_{i\perp}$$

$$L_z = \omega \sum_i m_i r_{i\perp}^2 = \omega I$$

$$\text{Momento angolare } L_z = \omega I \quad \underline{L_z = \omega I}$$

$$\rightarrow \text{eq. della dinamica} \quad \vec{\tau}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\tau_{\text{ext}} = \frac{d\omega I}{dt} = I \frac{d\omega}{dt}$$

$$\boxed{\tau_{\text{ext}} = I \alpha}$$

Terza legge di conservazione:

$$\tau_{\text{ext.}} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

in assenza di forze esterne che agiscano sul sistema,  
= per un sistema isolato e chiuso, si conserva  
il momento angolare:  $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{L} = \text{costante}$

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f$$

per un solido in rotazione intorno ad un asse  
fisso:  $I_i \omega_i = I_f \omega_f$

• Lavoro, potenza e energia cinetica

teorema dell'energia cinetica:  $\Delta E_c = L_c + L_{n.c.}$

per un corpo in rotazione:

$$\frac{1}{2} I \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \omega_i^2 = L$$

lavoro di una forza lungo uno spostamento  
angolare da  $\theta_i$  a  $\theta_f$ :

$$L = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau_f \cdot d\theta$$

per una forza costante:  $L = \tau \cdot \Delta\theta$

Potenza  $P = \frac{dL}{dt} = \frac{d\tau \Delta\theta}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau \cdot \omega$

# Riassunto comparativo delle grandezze usate nel moto traslazionale e rotazionale

## traslazione

posizione

$x$

velocità

$$v = \frac{dx}{dt}$$

accelerazione

$$a = \frac{dv}{dt}$$

massa

$m$

forza

$F$

2<sup>da</sup> legge dinamica

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

quantità di moto

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Lavoro

$$L = \int F \cdot dx$$

potenza

$$P = F \cdot v$$

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}$$

## rotazione

angolo

$\theta$

velocità angolare

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

accelerazione angolare

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

momento d'inerzia

$I$

momento di forza

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{\tau}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

momento angolare

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$L = \int r \cdot d\theta$$

$$P = \tau \omega$$

$$L = I \omega$$

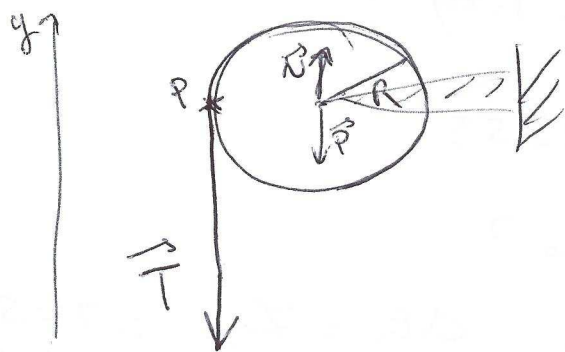
$$\tau_{\text{rot}} = I \alpha$$

## Esercizi svolti

Un disco omogeneo di massa  $M$  e raggio  $R$  gira liberamente intorno ad un asse che passa per il suo centro. Intorno al disco è avvolto un filo di massa trascurabile, su quale si esercita una forza di tensione  $\vec{T}$  verso il basso e  $T = 5 \text{ N}$ .

$$M = 2,5 \text{ kg}, R = 0,2 \text{ m}.$$

1) Calcolare l'accelerazione angolare del disco e l'accelerazione tangenziale di un punto del bordo del disco.



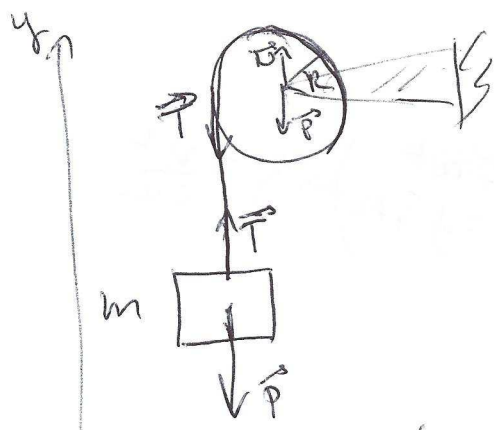
$$\tau = I\alpha \quad I = \frac{1}{2}MR^2$$

$$TR = \frac{1}{2}MR^2\alpha$$

$$\alpha = \frac{2T}{MR} = 20 \text{ rad/s}^2$$

$$a_p = R\alpha = 4 \text{ m/s}^2$$

2) Invece di tirare con una tensione costante  $T$ , si attacca al filo una massa di peso  $P = 5 \text{ N}$ . Calcolare di nuovo  $\alpha$  e  $a_p$ .



eq. dinamica sul blocco:

$$T - P = -ma$$

eq. dinamica sul disco:

$$\tau = I\alpha$$

e la relazione:  $a_p = R\alpha$

$$\text{si trova:} \quad a = \left( \frac{2m}{M+2m} \right) g = 2,85 \text{ m/s}^2$$

$$T = \left( \frac{M}{M+2m} \right) mg = 3,6 \text{ N}$$

nota:  $T < 5 \text{ N}$ !

$$\alpha = 14,3 \text{ rad/s}^2$$

3) Supponiamo che il disco rotol inizialmente al riposo.  
Calcolare il lavoro effettuato dalla forza sul  
disco dopo 2s, e l'aumento di energia cinetica  
del disco.

Sul disco:  $\tau = I\alpha = TR$

$T$  costante  $\rightarrow \alpha$  costante: moto uniformemente  
accelerato.

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0$$

$$L_T = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau \cdot d\theta = TR(\theta_f - \theta_i)$$

$$L_{T, 2s} = TR \left( \frac{1}{2} \alpha (t=2s)^2 \right)$$

$$L_{T, 2s} = 20.55$$

Energia cinetica del disco?

$$E_{ci} = 0 \quad \text{e} \quad \Delta E_c = L_T = 20.55$$

o ancora  $\Delta E_c = \frac{1}{2} I \omega_f^2 - 0$

$$= \frac{1}{2} I (\alpha t)^2 = 20.55$$

4) dimostrare che l'energia meccanica del sistema  
(blocco + disco) è conservata.

$$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p$$

$$\Delta E_p = -mgz \quad (\text{blocco}) : \quad \left. \begin{array}{l} v = at \\ z = \frac{1}{2} at^2 \end{array} \right\} \rightarrow z = \frac{v^2}{2a}$$

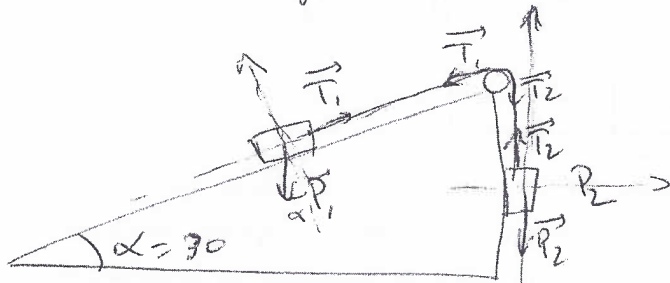
$$\Delta E_p = -mg \frac{v^2}{2a} = -mg \frac{v^2}{2 \times 2mg} (\pi + 2m)$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 - 0 - 0$$

$$= \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \pi R^2 \right) \frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{4} (2m + \pi) v^2$$

$$- \boxed{\Delta E_c = -\Delta E_p}$$

Una blocco di peso  $P_1 = 25 \text{ N}$  è appoggiato su un piano inclinato che ha un coefficiente di attrito  $\mu = 0.1$  ed è inclinato con un angolo di  $30^\circ$  con l'orizzontale. È attaccato ad un filo che passa intorno ad una puleggia di peso  $P_p = 9 \text{ N}$ , e all'estremità del quale è attaccata un altro blocco di peso  $P_2 = 80 \text{ N}$  nella direzione verticale. Calcolare l'accelerazione del secondo blocco, e le tensioni ad ogni estremità del filo.



eq. dinamica su blocco (1), (2) e disco:

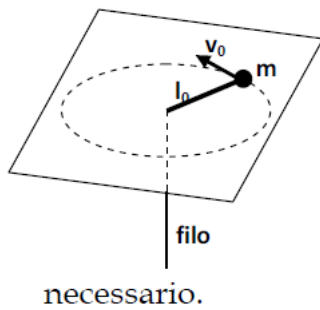
$$\begin{cases} T_1 - P_1 \sin \alpha - f_{at} = m_1 a & f_a = \mu P_1 \cos \alpha \\ T_2 - P_2 = -m_2 a \\ T_1 R - T_2 R = -\frac{I a}{R} \quad (\alpha R = a) \end{cases}$$

$$\rightarrow a = \frac{P_2 - P_1 (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{(m_1 + m_2 + \frac{1}{2})}$$

$$a = 5.8 \text{ m/s}^2$$

$$T_1 = 27.8 \text{ N}$$

$$T_2 = 32.6 \text{ N}$$



Un punto materiale di massa  $m=0.2\text{kg}$  attaccato ad un filo di massa trascurabile ruota senza attrito su di un piano orizzontale. La lunghezza del filo che è il raggio della traiettoria circolare è  $l_0=0.5\text{m}$  e la velocità è  $v_0=1\text{m/sec}$ . Successivamente si tira il filo e si riduce il raggio a  $l=0.25\text{m}$ . Si calcoli il lavoro

necessario.

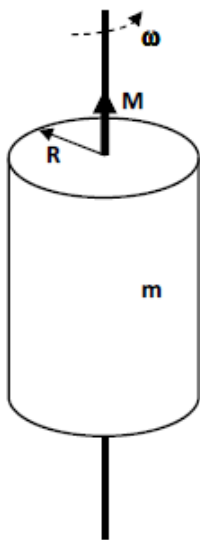
È un classico problema di conservazione del momento angolare o momento della quantità di moto. Quindi  $mv_0l_0 = mvl$ . Ma si ha anche una variazione di energia cinetica e allora  $L = T_f - T_i$ .

Allora si può scrivere  $v = v_0 \frac{l_0}{l}$  e quindi:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \left[ \left( \frac{l_0}{l} \right)^2 - 1 \right].$$

E numericamente  $L = 0.5 \cdot 0.2 \cdot 1 \left[ \left( \frac{0.5}{0.25} \right)^2 - 1 \right] = 0.3\text{joule}$ .

Un cilindro omogeneo di massa  $m=3\text{kg}$  e raggio  $R=40\text{cm}$  ruota con attrito attorno al suo asse. Supponendo costante la coppia frenante, calcolarne il valore sapendo che con una velocità angolare di  $3\text{rad/sec}$  il cilindro si arresta dopo avere compiuto un giro e mezzo.



Il problema può essere risolto ricordando che

$$\sum L_C + \sum L_{NC} = T_2 - T_1.$$

Nel caso in esame  $L_C=0$  quindi ci saranno solo forze non conservative (il momento frenante) ad opporsi al moto.

Quindi si scriverà

$$L_{NC} = - \int_0^{\alpha_f} M d\alpha = -M\alpha_f$$

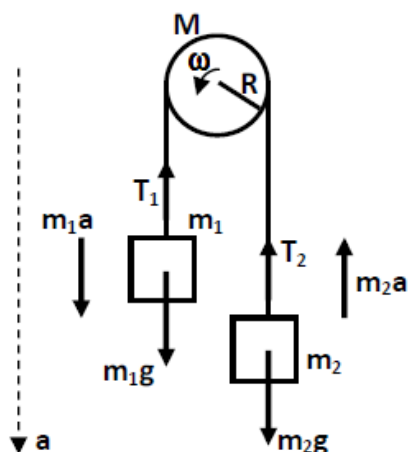
dove  $M$  è la coppia frenante e  $\alpha$  è pari a  $3\pi$  radianti (ovvero un giro e mezzo).

Per quanto concerne l'energia cinetica  $T_2 - T_1 = 0 - \frac{1}{2}I\omega^2$  con  $I = \frac{1}{2}mR^2$ .

Sostituendo il tutto  $-M\alpha_f = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\omega^2$  da cui si può ricavare

$$M = \frac{1}{4} \frac{mR^2\omega^2}{\alpha_f} = \frac{1}{4} \frac{3(0.4)^2(3)^2}{3\pi} = 0.1146\text{Nm}.$$

Una puleggia di raggio  $R$  e massa  $M=1kg$  è libera di ruotare senza attrito intorno al suo asse. Su di esso è posto un filo inestensibile che sostiene alle estremità due masse:  $m_1=5kg$  e  $m_2=3kg$ . Lasciando le masse libere si determini il valore della accelerazione di caduta di  $m_1$ .



Il moto è chiaramente accelerato e la puleggia ruoterà con una accelerazione angolare  $\dot{\omega} = \frac{a}{R}$ .

Applicando la seconda equazione cardinale alla puleggia si ha:

$$\sum M = (T_1 - T_2)R = I_p \dot{\omega} = I_p \frac{a}{R}$$

Ora essendo  $I_p = \frac{1}{2}MR^2$  si ha  $T_1 - T_2 = \frac{1}{2}Ma$ .

Poi si applica il secondo principio della dinamica alle due masse e si ha:

$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - T_1 \\ -m_2 a = m_2 g - T_2 \end{cases}$  e quindi  $\begin{cases} m_1 a = m_1 g - T_1 \\ m_2 a = -m_2 g + T_2 \end{cases}$  e sommando le equazioni:

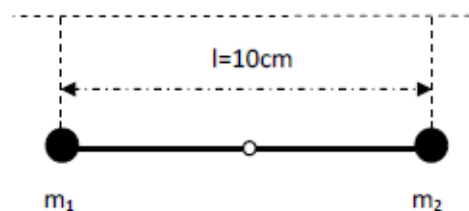
$$m_1 a + m_2 a = m_1 g - m_2 g - T_1 + T_2$$

Ora sostituendo l'espressione trovata per la puleggia:

$$(m_1 + m_2)a = (m_1 - m_2)g - \frac{1}{2}Ma \quad \text{da cui} \quad a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M}g \quad \text{e, quindi,}$$

$$\text{numericamente } a = \frac{5-3}{5+3+\frac{1}{2}1}9.8 = 2.3m/sec^2.$$

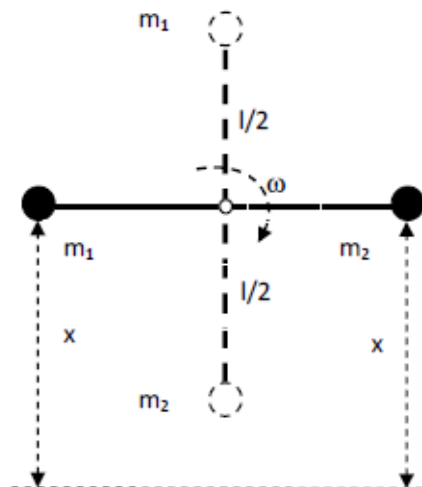
Alle estremità di una barra indeformabile e priva di massa sono poste due masse di valore  $m_1=100gr$  e  $m_2=200gr$ . La barra può ruotare, senza attrito, rispetto ad un perno centrale. Inizialmente essa è bloccata. La si liberi e si calcoli la sua velocità angolare quando passa per la verticale.



Il principio da applicare è certamente quello della conservazione della energia meccanica, principio che può essere scritto come  $\Delta T + \Delta U = 0$ .

Ora si consideri la seguente schematizzazione supponendo che inizialmente entrambe le masse siano ad una quota  $x$ . Si avrà

$$U_1 = -m_1gx - m_2gx$$



Dopo  $1/4$  di giro si avrà

$$U_2 = -m_1g\left(x + \frac{l}{2}\right) - m_2g\left(x - \frac{l}{2}\right)$$

Ed infine

$$\Delta U = U_1 - U_2 = m_1g\frac{l}{2} - m_2g\frac{l}{2}$$

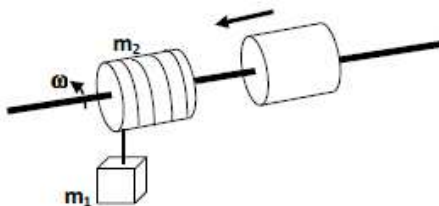
Per quanto riguarda la variazione di energia cinetica, essendo la barra inizialmente ferma, si avrà  $\Delta T = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left[m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]\omega^2$ .

E conservando l'energia, ovvero  $\Delta T = -\Delta U$ , si avrà

$$(m_1 + m_2)\frac{l^2}{8}\omega^2 = (m_2 - m_1)g\frac{l}{2}$$

$$\text{da cui } \omega = 2\sqrt{\frac{(m_2 - m_1)g}{(m_1 + m_2)l}} = 2\sqrt{\frac{(200 - 100)9.8}{(100 + 200)0.1}} = 11.43 \text{ rad/sec.}$$

Un cilindro omogeneo di massa  $m_2=5\text{kg}$  e raggio  $r$  può ruotare senza attrito intorno ad un asse passante per il suo asse di simmetria. Su tale cilindro sono avvolti  $l=10\text{m}$  di filo inestensibile e di massa trascurabile. Ad una estremità del filo è legato un corpo di massa  $m_1=5\text{kg}$ . Il tutto è in quiete e ad un certo istante si libera  $m_1$  che cadrà sotto l'azione della gravità srotolando tutto il filo. A questo punto un secondo cilindro identico al primo scivola sull'asse e si salda istantaneamente al primo. Si calcoli il lavoro compiuto dalle forze interne all'atto dell'unione dei due cilindri.



È utile osservare che la prima parte del problema, ovvero la determinazione della velocità angolare del primo cilindro, può essere affrontata in termini energetici o con l'uso della seconda equazione cardinale. Si farà vedere che, in entrambi i casi, il risultato sarà lo stesso.

In termini squisitamente energetici siamo in un campo conservativo e la caduta della massa  $m_1$ , a seguito dello srotolamento della corda di lunghezza  $l$ , comporta una variazione di energia potenziale quantificabile come  $\Delta U = U_1 - U_2 = m_1gx - m_1g(x - l) = m_1gl$ .

Tale variazione di energia potenziale sarà trasformata in energia cinetica, quindi

$$m_1gl = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}m_1(\omega R)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}m_2R^2\omega^2.$$

Da cui è ovvio ricavare  $\omega^2 = \frac{4m_1gl}{(2m_1+m_2)R^2}$ .

Al contatto dei due cilindri possiamo applicare il principio di conservazione del momento angolare e scrivere

$$I\omega = 2I\omega_f.$$

Pertanto si avrà  $\omega_f = \frac{\omega}{2}$ . È evidente che il lavoro delle forze interne sarà un lavoro frenante che provocherà il dimezzamento della velocità angolare, quindi

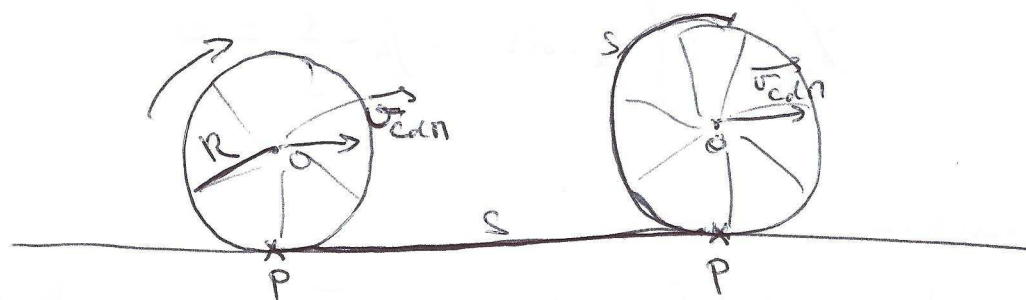
$$L_i = T_2 - T_1 = \frac{1}{2}2I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega^2 = I\left[\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\omega^2\right] = -\frac{1}{4}I\omega^2.$$

E sostituendo l'espressione prima trovata per la velocità angolare si ha

$$L_i = -\frac{1}{4}I \frac{4m_1gl}{(2m_1+m_2)R^2} = -\frac{1}{4}\frac{1}{2}m_2R^2 \frac{4m_1gl}{(2m_1+m_2)R^2} = -\frac{1}{2}m_2 \frac{m_1gl}{(2m_1+m_2)} = -\frac{1}{2}5 \frac{5(9.8)10}{15} = -81.6 \text{ joule}.$$

# Moto di rotolamento

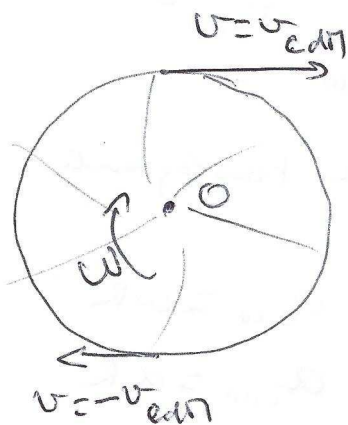
Esempio: una ruota di raggio  $R$  che percorre una strada rettilinea.



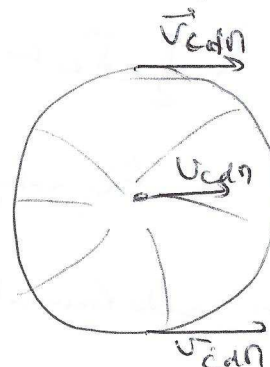
$$S = R\theta$$

$$v_{cm} = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

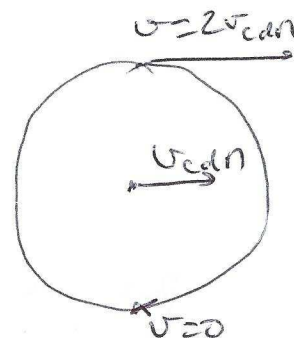
Rotolamento = combinazione di rotazione e traslazione



+



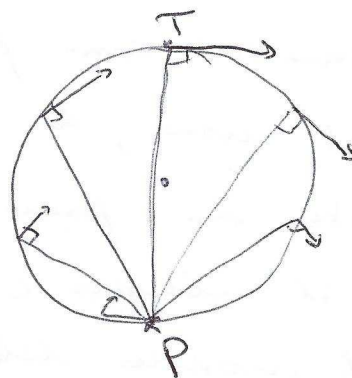
=



rotazione pura intorno a O + traslazione a velocità del centro di massa

Rotolamento

può anche essere visto come una rotazione intorno al punto di contatto P (asse istantaneo di rotazione):



$$v(P) = 0$$

$$v(T) = \omega \times 2R = 2v_{cm}$$

- La velocità del punto di contatto P è sempre nulla.
- Il moto di rotolamento avviene grazie al attrito statico.

• la forza di attrito, necessario per avere il moto di rotolamento, non lavora perché il punto P è sempre fermo  $\rightarrow$  spostamento nullo

$$L_{f_a} = \int f_a \cdot ds = f_a \cdot \int_0^u du = 0$$

Energia cinetica:

$$E_c = \frac{1}{2} I_P \omega^2$$

$I_P$  = momento d'inerzia rispetto a P

$$= \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} \underbrace{M R^2 \omega^2}_{v_{cm}^2}$$

$$E_c = \frac{1}{2} I_O \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$$

$$= E_{c \text{ rotazionale}} + E_{c \text{ traslazionale}}$$

per il moto di rotolamento puro:  $v_{cm} = \omega R$

$$a_{cm} = \alpha R$$

se striscia: l'attrito diventa dinamico e  $a_{cm} \neq \alpha R$ .

Esercizio 1.

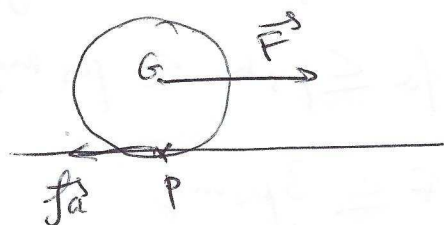
Si consideri un cilindro omogeneo di massa  $m = 6.3 \text{ kg}$  e raggio  $R = 64 \text{ cm}$  che rotola su un piano orizzontale scabro sotto l'azione di una forza  $\vec{F}$  orizzontale applicata al baricentro G del disco, di modulo  $F = 12 \text{ N}$ . Sapendo che il cilindro parte da fermo e che il coefficiente di attrito statico fra il cilindro e il piano è  $\mu_s = 0.55$ , determinare:

- 1 - il modulo della sua velocità dopo  $t = 4.25$
- 2 - l'energia cinetica all'istante  $t$
- 3 - il lavoro fatto dalla forza agente sul cilindro
- 4 - il modulo massimo che la forza può avere perché il rotolamento avvenga senza strisciare.

Soluzioni:

3

1.



$$\vec{F} + \vec{f}_a = m \vec{a}_G$$

$$\sum \tau_G = I_G \alpha$$

$$I_G = \frac{1}{2} m R^2$$

$$F - f_a = m a_G$$

$$f_a R = \frac{1}{2} m R^2 \alpha$$

$$e \quad a_G = R \alpha$$

$$\rightarrow a_G = \frac{2F}{3m}$$

$$v_G = a_G t \quad \text{per } t = 4.2 \text{ s}, \quad v_G = 5.3 \text{ m/s}$$

o anche si può considerare la rotazione intorno a P:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \tau_P = I_P \alpha \rightarrow F \cdot R = \frac{3}{2} m R^2 \alpha \\ I_P = I_G + m R^2 \end{array} \right. \quad a_G = \frac{\alpha}{2}$$

$$\rightarrow a_G = \frac{2F}{3m}$$

2. energia cinetica

$$E_c = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 = \frac{3}{4} m v_G^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} I_P \omega^2$$

$$\text{per } t = 4.2 \text{ s}, \quad E_c = 1.3 \cdot 10^2 \text{ J}$$

3.  $f_a$  non lavora

$F$  lavora:  $L_F = F \times s$

$$s(t) = \frac{1}{2} a_G t^2 = \frac{F t^2}{3m}$$

$$L = 1.3 \cdot 10^2 \text{ J} = +\Delta E_c$$

$$o \quad L_F = \int_0^\theta \tau_F d\theta \quad \text{con } \theta = \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad e \quad \tau_F = FR$$

$$4. \quad F - f_a = m a_G = \frac{2F}{3}$$

$$f_a = \frac{F}{3}$$

$m$  ha puro rotolamento finché  $f_a$  non raggiunge il suo valore massimo:  $f_a \leq \mu_s N \leq \mu_s mg$

$$\rightarrow F \leq 3\mu_s mg$$

$$F_{max} = 1.0 \cdot 10^2 N$$

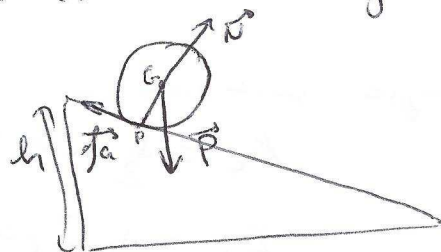
## Esercizio 2

Una sfera di massa  $m = 26 \text{ kg}$  parte da ferma alla cima di un piano inclinato scabro di altezza  $h = 3.5 \text{ m}$  scendendo rotolando senza strisciare. Sapendo che l'angolo di inclinazione del piano è  $\theta = 23^\circ$  e che il coefficiente di attrito statico fra la sfera e il piano è  $\mu_s = 0.3$ , determinare:

- 1 - la velocità della sfera in fondo al piano
- 2 - il modulo della forza di attrito agente sulla sfera
- 3 - l'angolo di inclinazione massimo che consente il rotolamento senza strisciare.

1.

$$I_{O(\text{sfera})} = \frac{2}{5} m R^2$$



$$E_c = \frac{1}{2} I_P \omega^2$$

$$I_P = \frac{2}{5} m R^2 + m R^2 = \frac{7}{5} m R^2$$

$$E_c = \frac{7}{10} m R^2 \frac{v_G^2}{R^2}$$

$$E_p = m g h$$

$$v_G = \sqrt{\frac{10}{7} g h}$$

nota:  $v_G < \sqrt{2gh}$   
 $\downarrow$   
 traslazione  
 pura

$$2. \quad \begin{cases} \sum \vec{F} = m \vec{a} \\ \tau_o = I_o \alpha \end{cases}$$

$$-f_a + m g \sin \alpha = m a_c$$

$$f_a R = I_o \alpha = I_o \frac{a}{R}$$

$$a = \frac{R^2 f_a}{I_o} = \frac{5}{2} \frac{f_a}{m}$$

$$-f_a + m g \sin \alpha = \frac{5}{2} f_a$$

$$f_a = \frac{2}{7} m g \sin \alpha = 26 \text{ N}$$

3. angolo massimo di inclinazione:

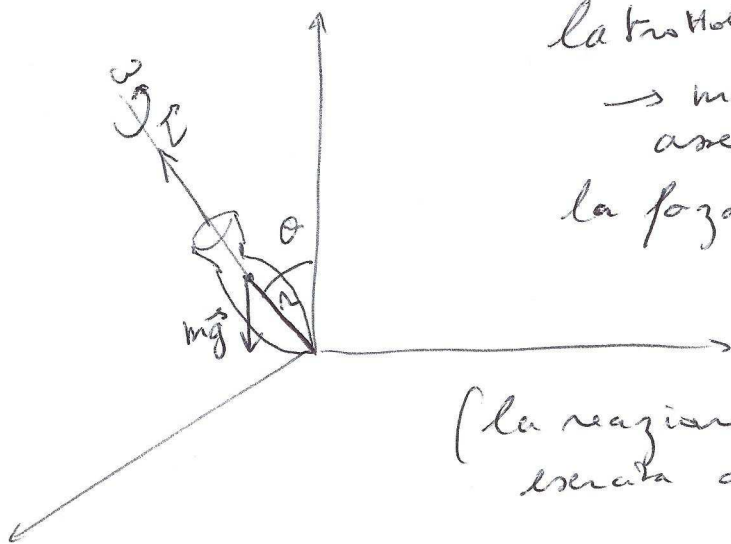
$$f_a \leq \mu_s N \leq \mu_s mg \cos \alpha$$

$$\rightarrow \frac{2}{7} mg \sin \alpha \leq \mu_s mg \cos \alpha \quad \rightarrow \quad \frac{\tan \alpha \leq \frac{7}{2} \mu_s}{\alpha \leq 46^\circ}$$

## Effetto giroscopico

Cambio di direzione del momento angolare dovuto a un momento di forza che gli è perpendicolare  $\rightarrow$  moto di precessione.

Esempio: la trottola



la trottola ha una velocità angolare  $\omega$   
 $\rightarrow$  momento angolare  $\vec{L}$  lungo il suo asse

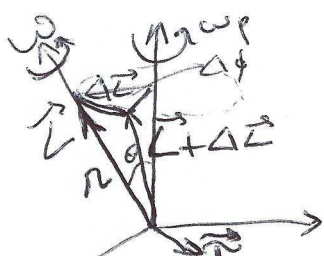
la forza peso esercita su la trottola un momento di forza rispetto al punto O.

(la reazione vincolare del piano non esercita alcun momento)

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (1)$$

$\vec{\tau} = mgr \sin \theta$  è ortogonale a  $\vec{L}$ ; cambia la sua direzione ma non il suo modulo.

Calcolo della velocità angolare di precessione  $\omega_p$ :



$$\omega_p = \frac{\Delta \phi}{\Delta t}$$

da (1) :  $\Delta L = \tau \Delta t$

$$\Delta L = r \Delta \phi = L \sin \theta \Delta \phi$$

$$\Delta \phi = \frac{\Delta L}{L \sin \theta}$$

$$\rightarrow \Delta \phi = \frac{\tau \Delta t}{L \sin \theta}$$

$$\rightarrow \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \frac{mgr \sin \theta}{L \sin \theta}$$

$$\omega_p = \frac{mgr}{L} \approx \frac{mgr}{I\omega}$$

(nell'approssimazione  
in cui  $I = I_{rotazione}$   
si trascura  $I_{precessione}$ ) -

$$\rightarrow \omega_p \propto \frac{1}{\omega}$$

• effetto giroscopico : radrezza la bici che sta per cadere!

• la Terra ha un moto di precessione con periodo di 27725 anni dovuto al momento residuo delle forze di attrazione del Sole e della Luna perché la Terra non è sferica.