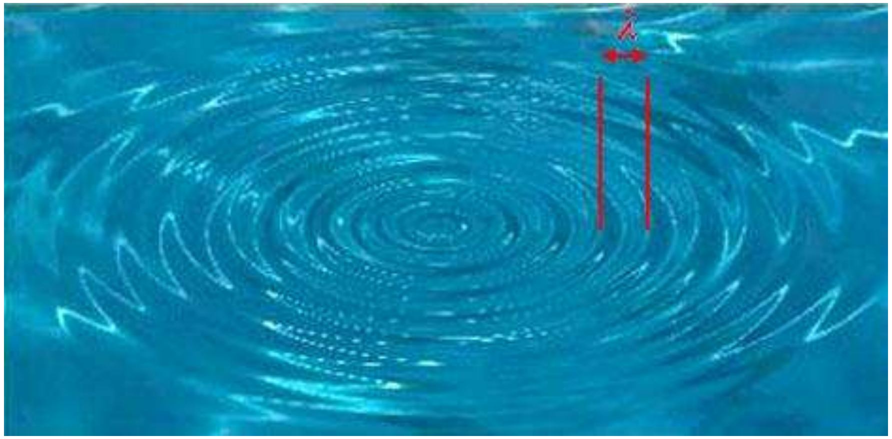
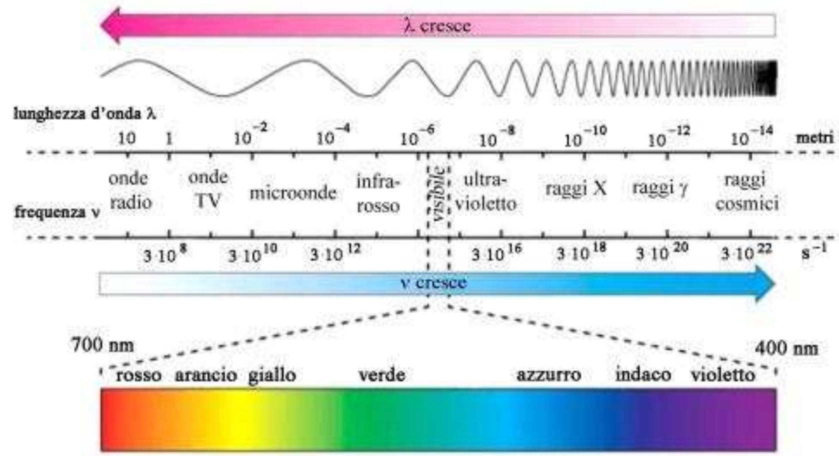
Onde



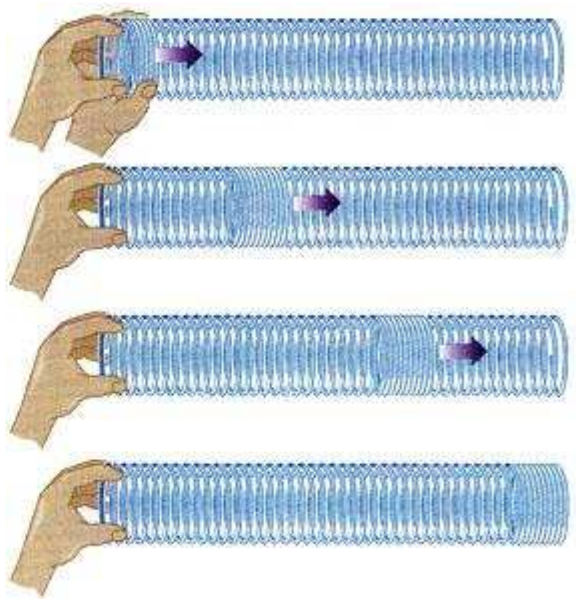


• Onde mecaniche : onde del mare, onde sismiche, onde acoustiche… sono trasportate dalla materia

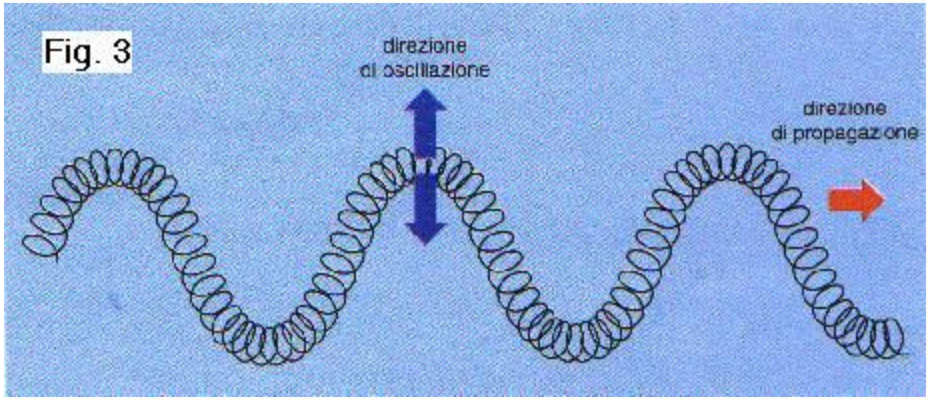
• Onde electromagnetiche : onde radio, micro-onde, luce, UV, raggi-X… non hanno bisogno di un mezzo materiale per esistere ; si propagano anche nel vuoto

• Onde di materia : elettroni, protoni, atomi…(~ particelle quantistiche) possono essere considerate come onde

Onde trasversali e longitudiali



longitudinale



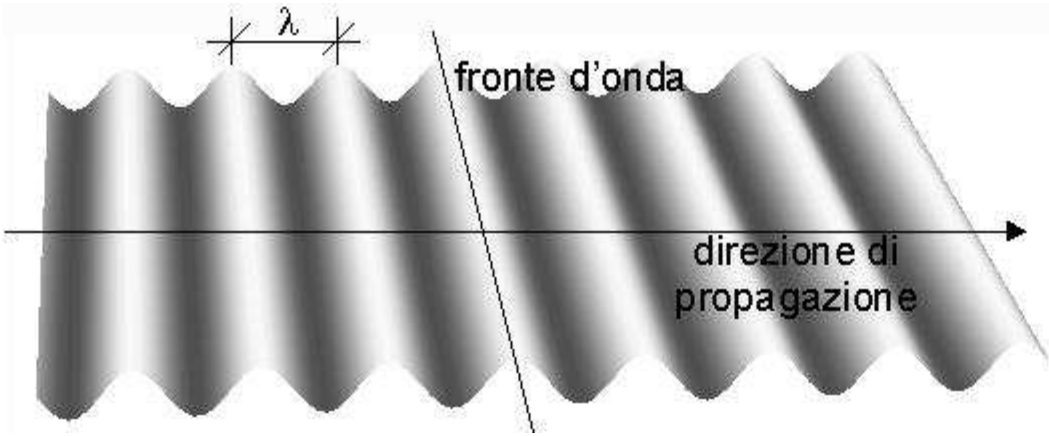
trasversale

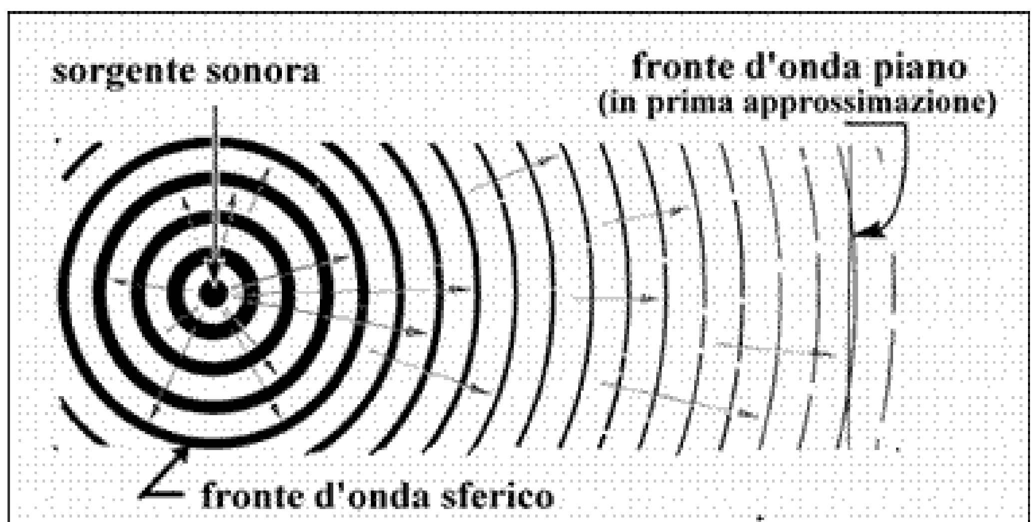
Onde a 1, 2 o 3 dimensioni a secondo delle dimensioni su quali si propagano l'energia dell'onde.

- 1D : onda lunga una corda
- 2D : onde alla superficie del mare
- 3D : onde luminose o acoustiche

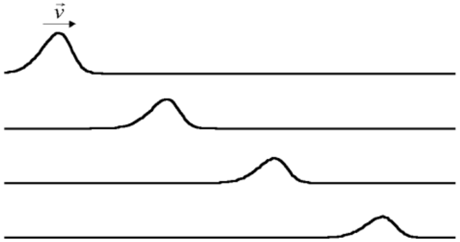
L'onde si propaga ma non la materia !

Fronte d'onda





Equazione dell'onda progressiva

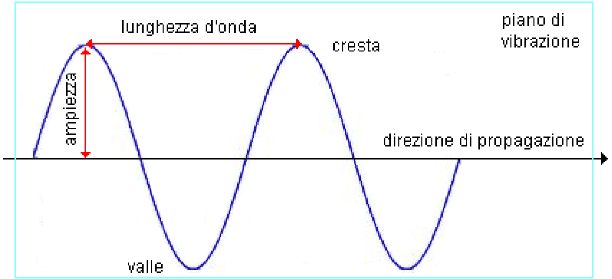


Un onda si propaga lungo una corda (asse delle x) con la velocita *v*

$$y = f(x - vt)$$ (un punto, es. il massimo dell'onda, si sposta lungo x con la velocita v)

$$y = y_m \sin \frac{2\pi}{\lambda} x$$ modulazione sinusoidale lungo x

$$y = y_m \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)$$ modulazione sinusoidale lungo x che si sposta alla velocita v



$$\lambda = v \cdot T$$ λ : lunghezza d'onda

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{e} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$ *k* : numero (vettore) d'onda

$$y = y_m \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) \quad \text{o} \quad \boxed{y = y_m \sin(kx - \omega t - \Phi)}$$

Onde

Modulazione periodica dello spazio e del tempo.
→ come tutti fenomeni periodici: si può scomporre in somma di seno e coseno

T: periodo temporale

λ: periodo spaziale o lunghezza d'onda.

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$; $T = \frac{1}{f}$; $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (f frequenza, ω pulsazione)

forma generale: $y = y_m \sin(kx - \omega t)$ (o $y = y_m \sin(kx - \omega t + \phi)$)

→ ogni volta che $kx = n \times 2\pi$ (per t costante) y ritrova la stessa ampiezza

→ ogni volta che $\omega t = 2n\pi$ (per x costante) y ritrova lo stesso valore.

a quale velocità si sposta un punto dell'onda?

→ y invariato → $kx - \omega t + \phi = 0$

derivata → $k\frac{dx}{dt} - \omega = 0$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v \quad \underline{\text{Velocità di fase}}$$

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f.$$

Velocità dell'onda su una corda tesa

per un'onda meccanica (= che si sposta su un mezzo materiale), la velocità dipende di 2 proprietà della materia: inerzia e elasticità.

lungo una corda: $v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$

τ: tensione della corda

μ: densità lineica.

• Senso di propagazione:

$$y = f(x - vt)$$ propagazione nella direzione $x > 0$

quando t aumenta, y riprende lo stesso valore per $x = vt$ che aumenta anche.

$$y = f(x + vt)$$: propagazione nella direzione $x < 0$.

t aumenta, y riprende lo stesso valore per un valore di x più piccolo ($x = -vt$).

Energia e potenza

$y = y_m \sin(kx - \omega t)$ onda su una corda

↳ elemento di corda attraversata dall'onda: segue un moto armonico semplice

la sua energia cinetica è massima per $y = 0$, minima per $y = y_m$

$$dE_c = \frac{1}{2} dm\, u^2$$ u spostamento trasverso.

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t)$$

$$dE_c = \frac{1}{2}(\mu dx)\left(-\omega y_m \cos(kx - \omega t)\right)^2$$

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2} \mu \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v} \omega^2 y_m^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

su un grande numero di periodi: $\overline{\cos^2(kx - \omega t)} = \frac{1}{2}$

$$\overline{\left(\frac{dE_c}{dt}\right)} = \frac{1}{4} \mu v \omega^2 y_m^2$$

per un sistema oscillante, abbiamo la proprietà $\overline{E_c} = \overline{E_p}$

→ potenza media $\overline{P} = \frac{d\overline{E_c}}{dt} + \frac{d\overline{E_p}}{dt}$

$$\boxed{\overline{P} = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 y_m^2}$$

$$P \propto \omega^2 \cdot y_m^2$$ potenza proporzionale alla frequenza al quadrato e all'ampiezza al quadrato.

principio di sovrapposizione

le onde si sommano algebricamente

→ si possono quindi avere delle interferenze.

$$y_1 = y_m \sin(kx - \omega t)$$
$$y_2 = y_m \sin(kx - \omega t + \phi)$$

2 onde di stesse caratteristiche ma sfasate di ϕ.

$$y' = y_1 + y_2$$

con $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$$y' = \underbrace{2y_m \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)}_{\text{ampiezza}} \sin(kx - \omega t + \phi/2)$$

per $\phi = 0$ $\quad y' = 2y_m \sin(kx - \omega t)$: interferenza costruttiva

$\phi = \pi$ $\quad y' = 0$ $\quad$ interferenza destruttiva!

Onde stazionarie

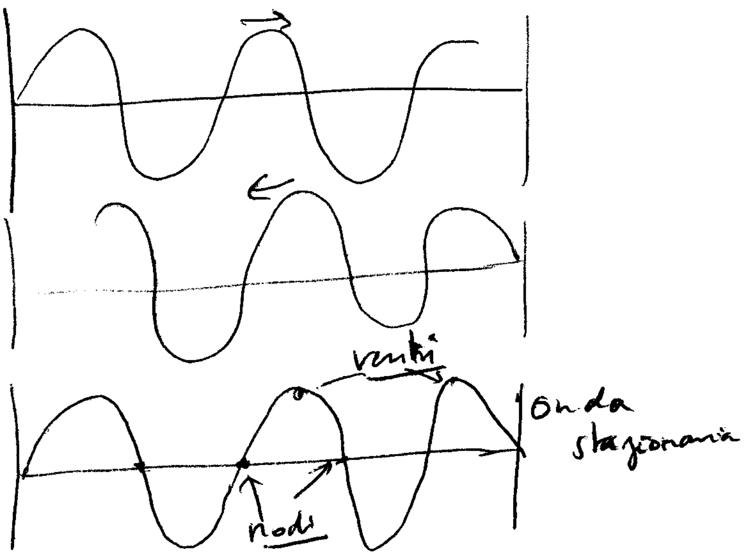
2 onde identiche (ampiezza, λ) si muovono lungo la stessa corda in direzione opposta:

$$y_1 = y_m \sin(kx - \omega t)$$
$$y_2 = y_m \sin(kx + \omega t)$$

$$y' = 2y_m \sin(kx) \cdot \cos(\omega t)$$

non c'è più propagazione!

ogni punto ~~x~~ della corda oscilla alla frequenza ω con l'ampiezza $2y_m \sin(kx)$.



• i nodi : ampiezza sempre 0.

dove sono? per $\sin(kx) = 0 \rightarrow kx = n\pi$

$$x = \frac{n\pi}{k} = n\frac{\lambda}{2}$$

$n = 0, 1, 2 \ldots$

• i ventri : ampiezza sempre massima :

per $kx = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \qquad n = 0, 1, 2 \ldots$

$$x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$$

Riflessione ad un estremità

- estremità fissa : l'impulso esercita una forza sull'estremità → l'estremità reagisce (per principio di azione e reazione) → si produce l'impulso sulla corda alla rovescia : onda sfasata di π
- estremità morbida : ricrea l'impulso all'identico sulla corda.

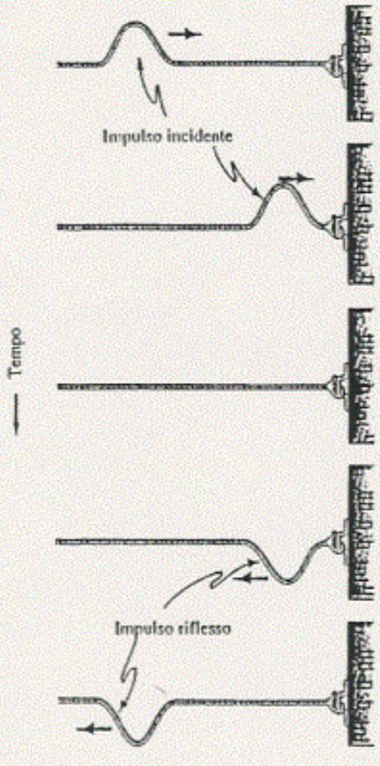


FIGURA 15-18 - Un impulso che incide su un estremo fissato di una corda si inverte. Se l'impulso è simmetrico, allora ci sarà un punto in cui la corda è piatta, perché l'impulso riflesso cancella l'impulso incidente per interferenza distruttiva.

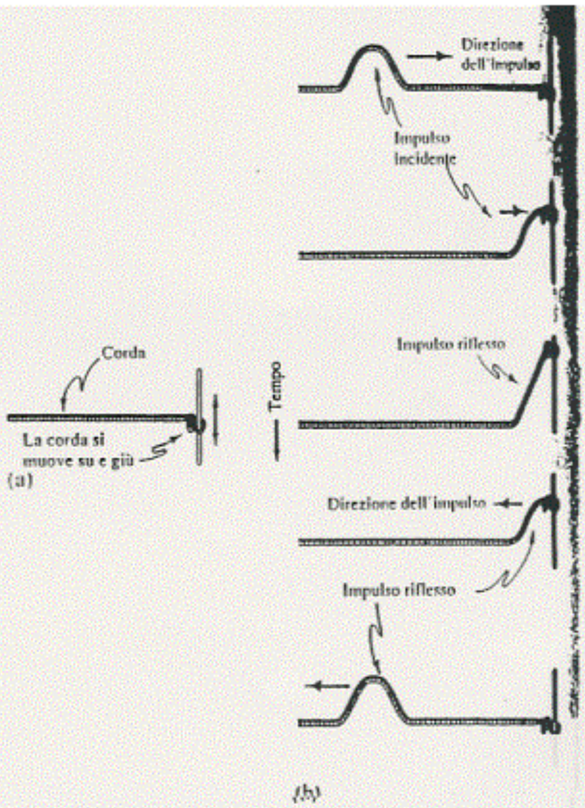


FIGURA 15-19 - (a) L'estremo destro della corda è libero di scivolare verticalmente; (b) la riflessione di un impulso incidente avviene senza inversione quando l'estremo della corda è libero di muoversi.

Onde stazionarie e risonanza

Le onde stazionarie su una corda di lunghezza finita possono stabilizzarsi se la lunghezza d'onda è compatibile con la lunghezza della corda.

per gli estremi fissi: l'onda deve avere un nodo all'estremità.

per gli estremi morbidi: l'onda deve avere un ventre.

(cf. dopo con le onde acustiche).

distanza fra 2 nodi: $\frac{\lambda}{2}$

lunghezza L della corda <u>fissata</u> alle sue 2 estremità:

$$L = n\frac{\lambda}{2}$$: bisogna avere un numero intero di semi periodi.

$$\text{o } \lambda = \frac{2L}{n}$$

in termini di frequenza: $\lambda = \frac{v}{f}$ $\quad v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

$$\boxed{f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}}$$ $n = 1, 2, 3 \dots$ infinito.

Sono le frequenze di risonanza della corda di lunghezza L

$n=1$: frequenza fondamentale o prima armonica

$n=2$: seconda armonica

⋮

Onde acustiche

sono onde meccaniche longitudinali

frequenze audio : 20 Hz → 20 kHz

infrasuoni (sotto i 20 Hz), es. onde sismiche

ultrasuoni (sopra i 20 kHz), es. oscillazioni piezoelettriche

Velocità del suono

$$v = \sqrt{\frac{\text{proprietà elastica}}{\text{inerzia}}}$$

proprietà elastica dell'aria (o di un gas in generale):

Modulo di compressibilità : $B = -\dfrac{\Delta p}{\left(\frac{\Delta V}{V}\right)}$ $\qquad \left(B = -V\left(\dfrac{\partial p}{\partial V}\right)_T \right)$

B grande : poco comprimibile

B piccolo : molto comprimibile $\qquad \boxed{v = \sqrt{\dfrac{B}{\rho}}}$

ρ : densità

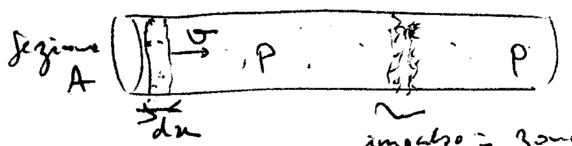
es. aria : $v = 343$ m/s (20 °C)

acqua : $v = 1480$ m/s (20 °C)

$\rho_{acqua} \simeq 1000\, \rho_{aria}$ ma B_{acqua} molto più grande di B_{aria}!

dimostrazione :

tubo di aria :



si applica il secondo principio di Newton alla fetta di aria Δx che circola in un tubo

quando entra nella zona di pressione : subisce una forza $(p+\Delta p)A$

durante l'intervallo Δt in cui l'elemento Δx entra nella zona di compressione, la forza netta è :

$$F = pA - (p+\Delta p)A = -\Delta p A$$

massa del elemento : $\Delta m = \rho A \Delta x$

$= \rho A v \Delta t$

↳ velocità

accelerazione $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

$F = ma \longrightarrow \quad -\Delta p \cdot A = \rho A v \Delta t \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}$

$$\rho v^2 = \frac{\Delta p}{\Delta v / v}$$

Volume $V = A v \Delta t$

compressione : $\Delta V = A \Delta v \Delta t \longrightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{A \Delta v \Delta t}{A v \Delta t} = \frac{\Delta v}{v}$

$$\rho v^2 = -\frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V}} = B \qquad \boxed{v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}}$$

propagazione dell'onda acustica : spostamento e pressione

onda acustica longitudinale : spostamento lungo x

la notazione sarebbe $x = f(x, t)$

per non confondersi si usa $s(x, t) = s_m \cos(kx - \omega t)$

per trattare direttamente con la pressione :

$$\Delta p(x, t) \qquad \Delta p = -B \frac{\Delta V}{V} \qquad V = A \Delta x$$
$$\Delta V = A \Delta s$$

$$\Delta p = -B \frac{A \Delta s}{A \Delta x}$$

quando l'elemento viene spostato : le 2 superficie subiscono una posizione diversa $\rightarrow \Delta V$

al limite $\rightarrow \quad \Delta p = -B \frac{\partial s}{\partial x}$

$$= -B \frac{\partial}{\partial x} \left(s_m \cos(kx - \omega t) \right)$$

$$= B k s_m \sin(kx - \omega t)$$

della forma $\Delta p = \Delta p_m \sin(kx - \omega t)$

$$B k s_m = v^2 \rho k s_m \qquad e \qquad v = \frac{\omega}{k}$$

$$\Delta p_m = B k s_m = v \rho \omega s_m$$

lo spostamento massimo dell'aria e il massimo di pressione sono sfasati di π lungo l'asse di propagazione.

Intensità e livello sonoro

intensità: $I = \frac{P}{A}$ potenza per unità di area.

per l'onda trasversale avevamo $P = \frac{1}{2}\mu v \omega^2 y_m^2$

per un onda acustica: $P = \frac{1}{2}\rho A v \omega^2 s_m^2$

demo. energia cinetica $dE_c = \frac{1}{2} dm\, v_s^2$

$$v_s = \frac{\partial s}{\partial t} = -\omega s_m \sin(kx - \omega t)$$

$$dE_c = \frac{1}{2}(\rho A dx)(-\omega s_m \sin(kx-\omega t))^2$$

$$= \frac{1}{2}\rho A dx\, \omega^2 s_m^2 \sin^2(kx-\omega t)$$

$$P = \left(\frac{d\bar{E}_c}{dt}\right) \times 2$$

media nel tempo, $\bar{E}_c = \bar{E}_p$ $\Big) \longrightarrow$ $P = \frac{1}{2}\rho v A \omega^2 s_m^2$

$$I = \frac{P}{A} = \frac{1}{2}\rho v \omega^2 s_m^2 \quad \text{in } W/m^2.$$

tenendo conto, per un caso reale, del allontanamento della sorgente: ampiezza $s_m \propto \frac{1}{r}$ (r distanza alla sorgente)

$$I = \frac{P_s}{4\pi r^2}$$ per una sorgente puntiforme che emette isotropicamente.

Unità:

spostamenti variano da 10^{-4} a 10^{-5} metri: 6 ordine di grandezza!

$\rightarrow$ l'intensità varia di 12 ordine di grandezza!

si usa una scala log.

livello sonoro $\beta = \log_{10}\frac{I}{I_0}$ β in bel.

dove I_0 è l'intensità standart di riferimento

$\longrightarrow$

(livello min. audibile) $I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$

per $I = I_0$ $\quad \beta = \log_{10}(1) = 0$

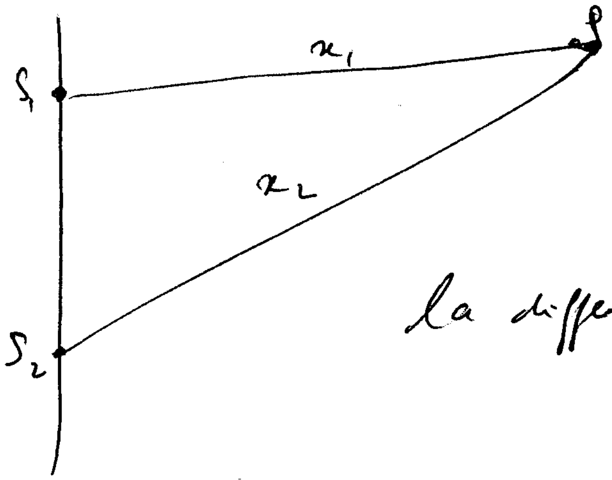
β cresce di 1 bel ogni volta che l'intensità è moltiplicata per 10.

$\beta = 4\,B = 40\,dB$ (si usa il decibel)

Interferenze

Le onde longitudinali, come quelle trasversali, si sommano algebricamente → fanno interferenze.

consideriamo 2 sorgenti puntiformi che emettono in fase:



la fase dell'onda di S_1 al punto P vale: $\phi_1 = kx_1 - \omega t$

per l'onda di S_2: $\phi_2 = kx_2 - \omega t$

la differenza di fase vale:

$$\Delta\phi = k(x_1 - x_2)$$

$\Delta l = x_1 - x_2$

avremo interferenze costruttive se:

$$k\Delta l = n \cdot 2\pi$$

$$\frac{\Delta l}{\lambda} = n \qquad \boxed{\Delta l = n\lambda}$$

→ la differenza di cammino Δl è un numero intero di lunghezze d'onda → interf. costruttive.

per $\Delta\phi$ = multiplo dispari di π:

$$\Delta\phi = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\cdot 2\pi \qquad n = 0, 1, 2 \dots$$

$$\frac{\Delta L}{\lambda} = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)$$ → interferenze distruttive

Onde stazionarie

Come per le onde trasversali, la riflessione su un tubo chiuso o aperto si fa:

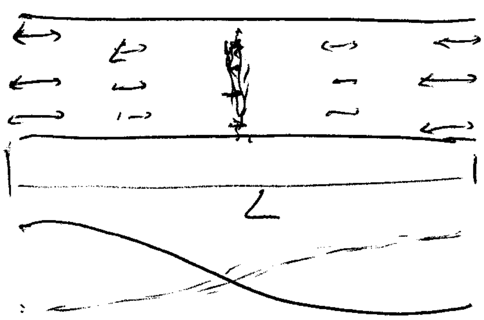
- con una fase di π per un tubo chiuso
- a l'identico per un tubo aperto.

Condizioni per la stabilizzazione di onde stazionarie:

- ventro di spostamento per un tubo aperto
- nodo di spostamento per un tubo chiuso

Tubo aperto:

$n=1$



$L = \frac{\lambda}{2}$ (fondamentale)

(! la rappresentazione dell'onda longitudinale è scomoda: si usa quella trasversa equivalente)

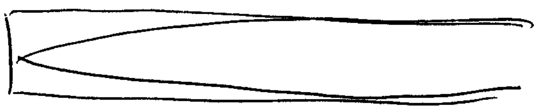
$n=2$

$L = 2\frac{\lambda}{2}$

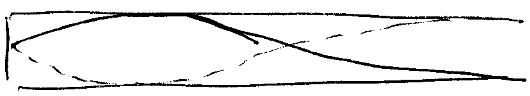
$\rightarrow \boxed{L = n\frac{\lambda}{2}}$ $n = 1, 2, 3 \ldots$

$\lambda = \frac{2L}{n}$ $f = \frac{nv}{2L}$

Tubo aperto/chiuso:



$L = \frac{\lambda}{4}$



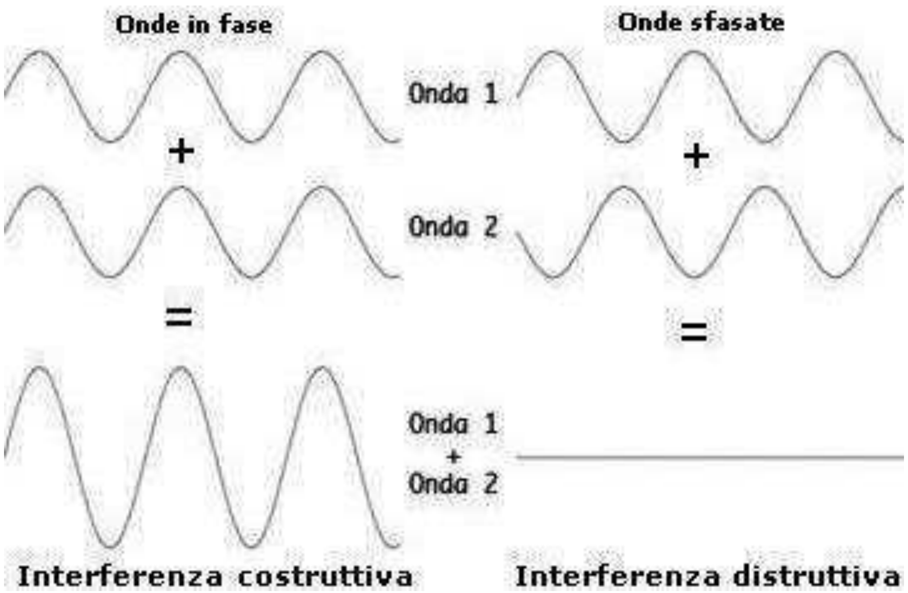
$L = 3\frac{\lambda}{4}$

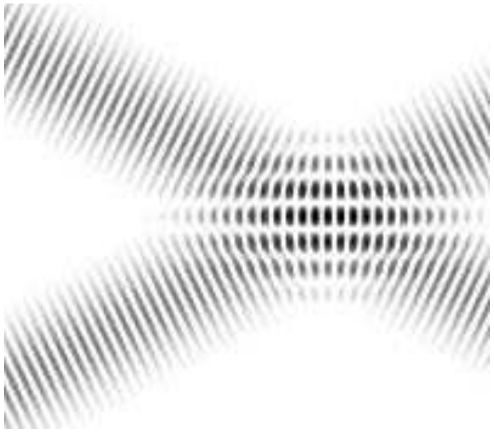
$L = \frac{n\lambda}{4}$ $n = 1, 3, 5 \ldots$

$f = \frac{nv}{4L}$ $n = 1, 3, 5 \ldots$

Interferenze

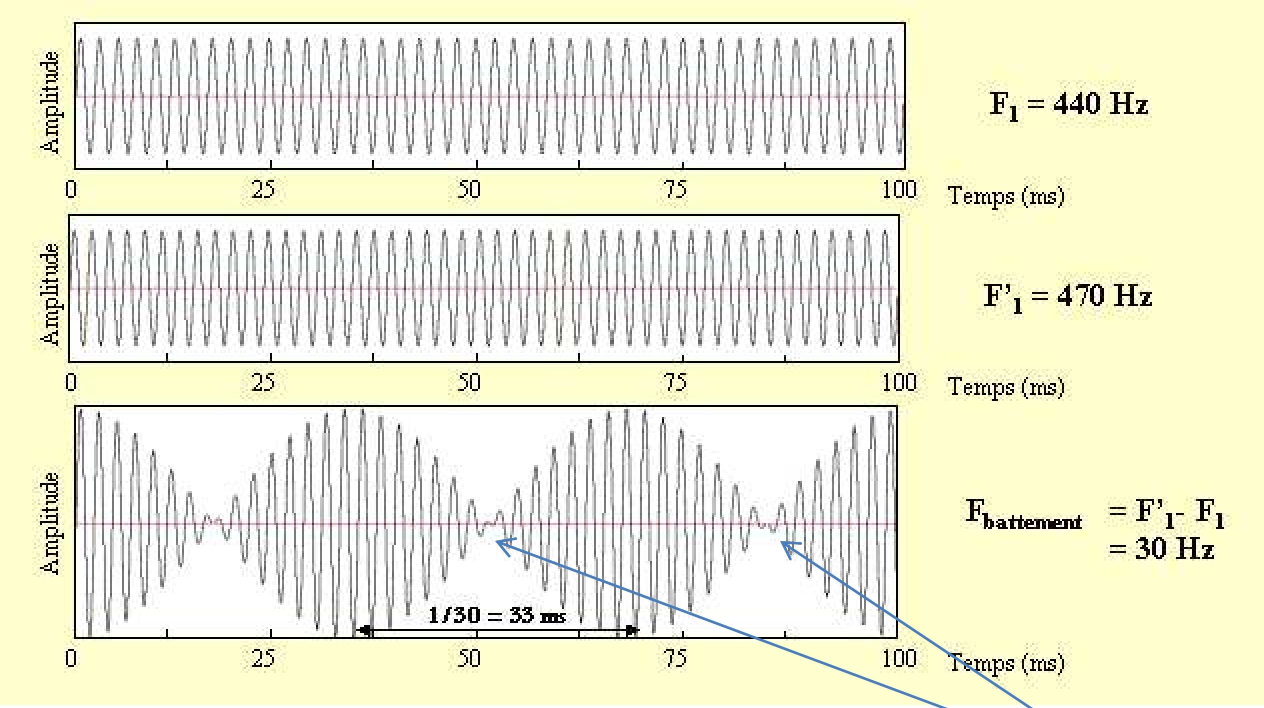
Principio du sovraposizione : onde sovraposte si sommano algebricamente per formare un'onda risultante.





Animazione onde stazionarie :
http://win.deltabeta.it/portale/3ot/onde_stazionarie.htm

battimento



Somma algebrica di due onde di frequenza poco diversa :

Si nota l'inversione di fase ogni volta che l'inviluppo cambia segno

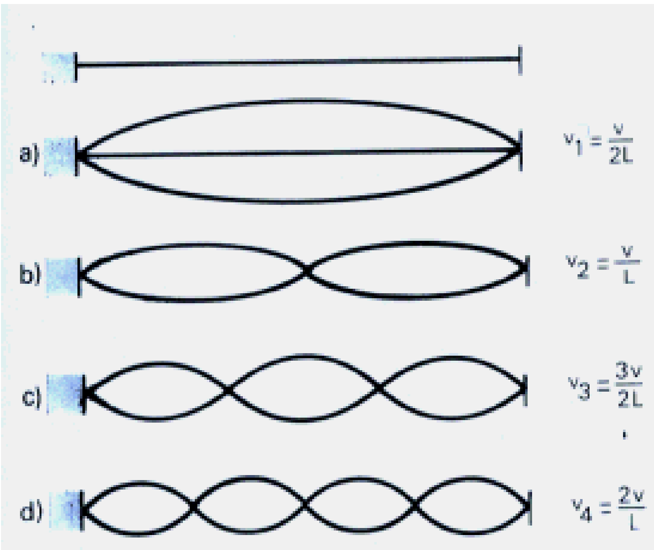
$$s = s_1 + s_2 = s_m \cos(kx - \omega_1 t) + s_m \cos(kx - \omega_2 t)$$

$$s = 2 s_m \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_1}{2}\right) t \cdot \cos\left(kx - \frac{\omega_1 + \omega_1}{2}\right) t$$

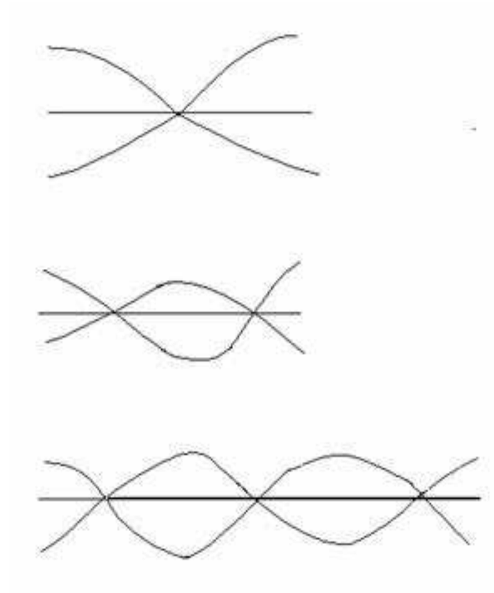
Inviluppo : modulazione dell'ampiezza a frequenza (ω 1- ω 2) !! Il doppio della frequenza del coseno, perche agisce come una multiplicazione dell'onda propagativa.

Onda che si propaga alla frequenza media (ω1+ ω 2)/2

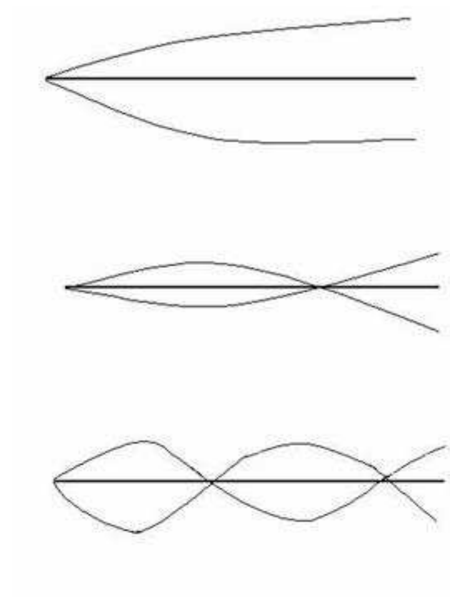
Onde stazionarie



Esempio di onda stazionaria su una corda tesa fra 2 punti. Ad ogni estremita si trova un nodo. Ugualmente per l'onda acustica che si riflette lungo un tubo chiuso.



Esempio di onda stazionaria su una corda con estremita mordide, o onda acustica in tubo aperto.



Esempio di onda stazionaria in un tubo semi-aperto.

Effetto doppler

Quando si sente la sirena della polizia si sente un suono diverso secondo se la macchina della polizia è ferma, si allontana o si avvicina.

↓ f inferiore ↓ f superiore

Valido per tutti tipi di onde ma usato principalmente per quelle acustiche.

f frequenza emessa

f' ——— rivelata

S sorgente

R rivelatore

v : velocità del suono in aria

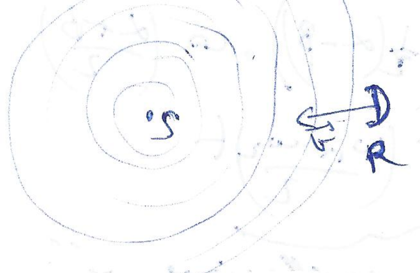
$$\boxed{f' = f \frac{v \pm v_r}{v \pm v_s}}$$

$f' > f$ se sorgente e rivelatore si avvicinano

$f' < f$ se sorgente e rivelatore si allontanano.

Valido per v_r e $v_s < v$

- demo
  - rivelatore in movimento



R conta più fronti d'onda che se fosse fermo.

$$\lambda = vT = \frac{v}{f}$$

se il rivelatore è fermo: durante il tempo t, conta un numero di λ $N = \frac{vt}{\lambda}$

$\rightarrow$ frequenza $f = \frac{N}{t} = \frac{vt/\lambda}{t} = \frac{v}{\lambda}$

Se si muove verso la sorgente con velocità v_R

$\rightarrow$ ne conta $\frac{v_R t}{\lambda}$ di più

$\rightarrow$ frequenza $f' = \frac{vt/\lambda + v_R t/\lambda}{t} = \frac{v+v_R}{\lambda}$

$$f' = f\left(\frac{v+v_R}{v}\right) = f\left(1+\frac{v_R}{v}\right)$$

Se il rivelatore si allontana: ne conta $\frac{v_R t}{\lambda}$ di meno

$$\rightarrow f' = \frac{v-v_R}{\lambda} = f\left(1-\frac{v_R}{v}\right)$$

- Sorgente in movimento: S si avvicina, i fronti d'onda sono più vicini uno degli altri

T il tempo fra 2 fronti d'onda:

$$f = \frac{1}{T}$$

Se S si muove,

durante il tempo T: l'onda percorre la distanza vT
e la sorgente $v_S T$

la distance fra il primo e il secondo fronte d'onda è

$$\lambda' = vT - v_S T$$

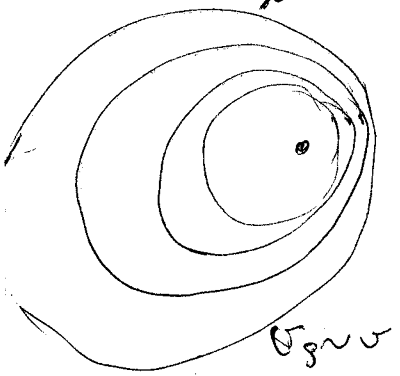
R capta la frequenza $f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{vT - v_S T} = \frac{v}{v/f - \frac{v_S}{f}}$

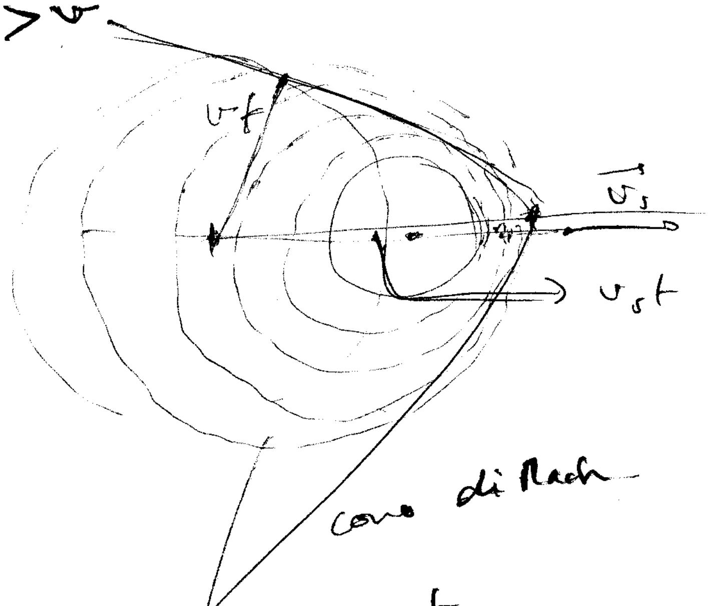
$$f' = f\left(\frac{v}{v-v_S}\right)$$

Se la sorgente si allontana: $f' = f\left(\frac{v}{v+v_S}\right)$

Velocità supersoniche e onde d'urto:

se la sorgente viaggia a velocità più alta del suono : $v_s > v$.





$$\sin\theta = \frac{vt}{v_s t} = \frac{v}{v_s}$$

Numero di Mach $\frac{v_s}{v}$

v_s = velocità della sorgente

v = velocità del suono

i fronti d'onda si raggruppano per formare un cono

→ creano un alta pressione seguita di una bassa pressione

→ onde d'urto

Es. aereo supersonico, proiettile, esplosione, frusta agitata con rapidità.