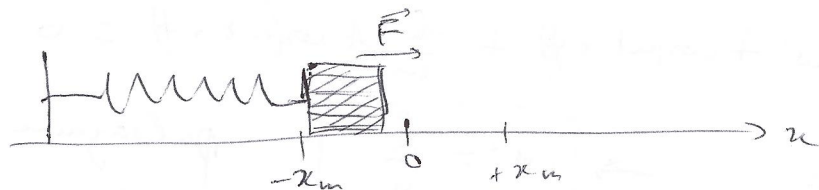


Moto oscillante.

Moto periodico intorno ad una posizione di equilibrio.
Esempio: pendolo del orologio, onde alla superficie del mare, atomi in vibrazione intorno alla loro posizione di energia minima...

Una particella in moto periodico intorno ad una posizione di equilibrio (avanti e indietro) è simmetrica rispetto alla posizione di equilibrio e non oscillatore armonico semplice.

Esempio della massa attaccata alla molla



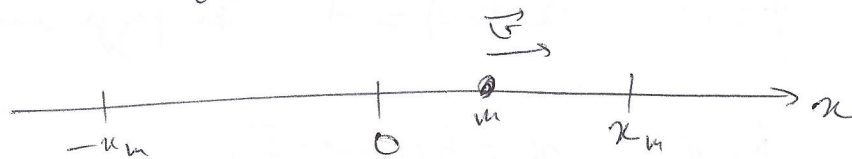
Massa sulla
intorno ad $x=0$

forza elastica $F = -kx$, conservativa.

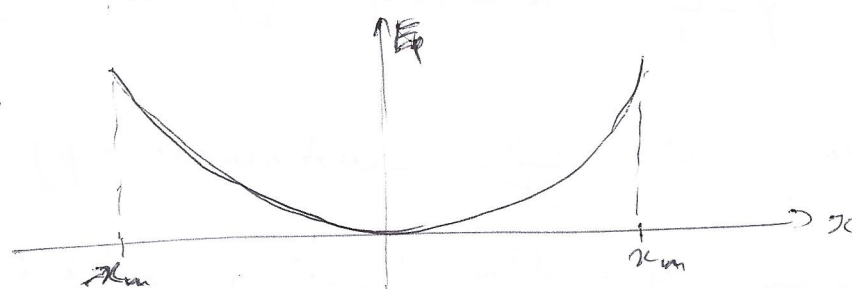
Energia potenziale elastica $E_p = \frac{1}{2} kx^2$

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x} = -kx$$

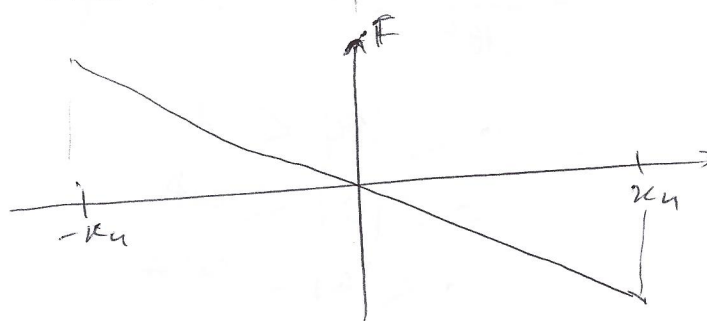
posizione



Energia
potenziale



forza



$$F = -kx = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Equazione della
dinamica si scrive:

$$\boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0} \quad (1)$$

Soluzione $x(t)$? Combinazioni lineari di seno e

coseno: $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$

ing: $\cos(\omega t + \phi) = \cos \phi \cos \omega t - \sin \phi \sin \omega t$
 $= a \cos \omega t + b \sin \omega t$

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$$

$$(1) \rightarrow -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) + \frac{k}{m} A \cos(\omega t + \phi) = 0$$

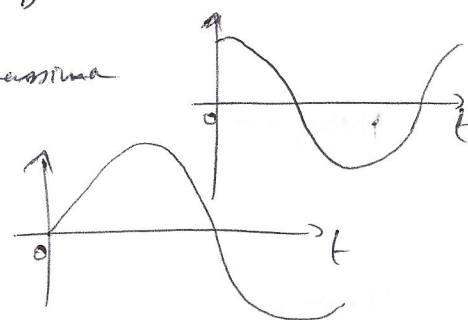
periodo $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{k}{m}}$ pulsazione angolare
 dell'oscillatore

A : ampiezza del moto

ϕ : fase, data dalle condizioni iniziali.

es. $\phi = 0$ $x(t=0) = A$, ampiezza massima

$$\phi = \frac{\pi}{2} \quad x = A \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$



Velocità $v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$

accelerazione $a = \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$

$$0 < |x| < A$$

$$0 < |v| < \omega A$$

$$0 < |a| < \omega^2 A$$

Energia : ridistribuzione continua dell'energia fra energia potenziale e energia cinetica ma energia meccanica costante -

$$E = E_p + E_c = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

$$= \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2} k A^2 (\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi))$$

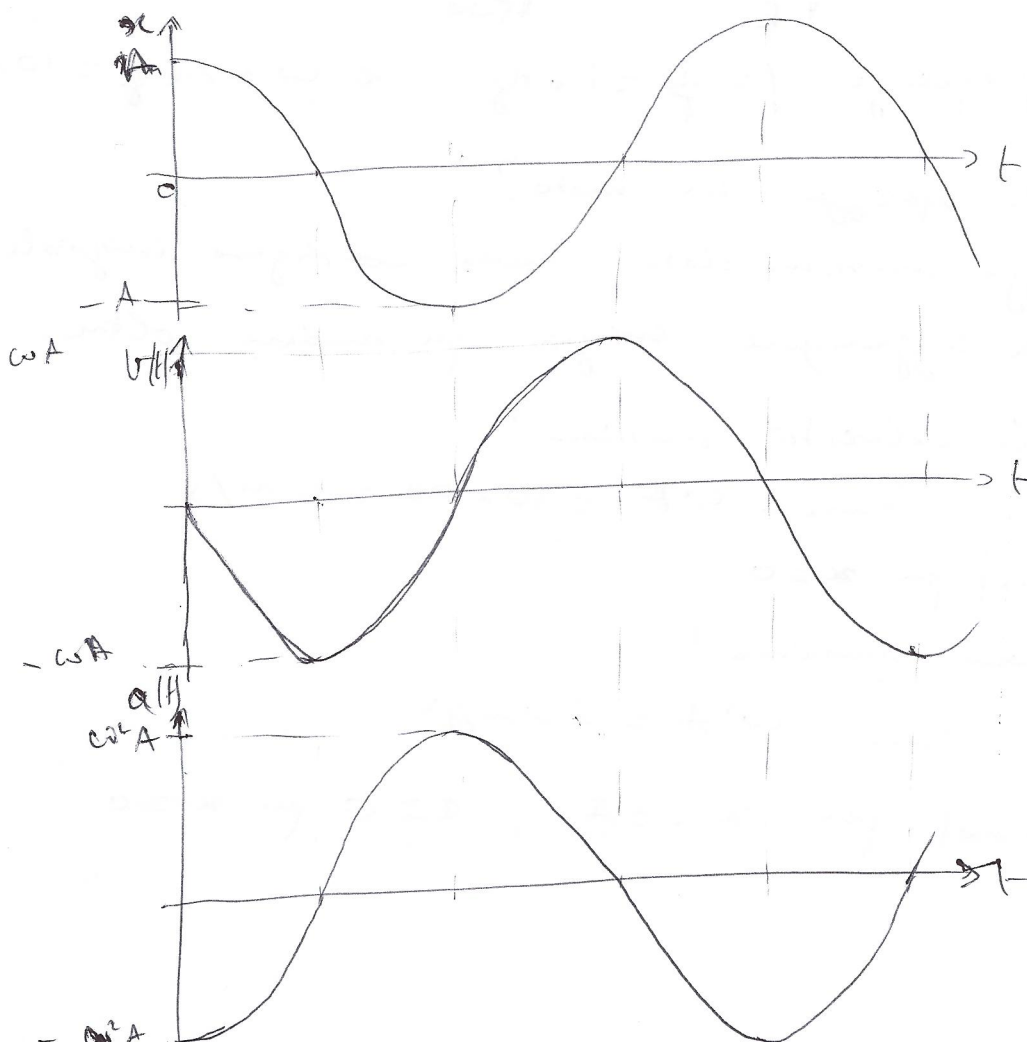
$$E = \frac{1}{2} k A^2 = \text{costante} -$$

l'energia totale di una particella in moto armonico semplice dipende dal quadrato dell'ampiezza

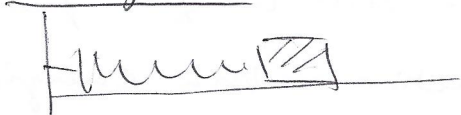
$$E_p + E_c = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\rightarrow v = \pm \sqrt{\frac{k}{m} (A^2 - x^2)}$$

v massima per $x=0$
 $v=0$ per $x=A$



Esercizio 1



Una molla si sposta di 0.05 m se uno gli applica una forza di 25 N .

Si attacca una massa di 5 kg e si allunga di 0.2 m lungo un piano orizzontale senza attrito. Si lascia la molla che oscilla secondo un moto armonico semplice.

1) Qual'è la costante elastica k della molla?

$$k = \frac{F}{x} = \frac{25}{0.05} = 500\text{ N/m}$$

2) Qual'è la forza che la molla esercita sulla massa al momento di rilasciare la massa?

$$F = -kx = -500 \times 0.2 = -100\text{ N}$$

3) Qual'è il periodo delle oscillazioni?

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{5}{500}} = 0.63\text{ s}$$

$$\text{frequenze } f = \frac{1}{T} = 1.6\text{ Hz} \quad \text{e } \omega = 2\pi f = 10\text{ rad/s}$$

4) Qual'è l'ampiezza del moto?

ampiezza massima data dalla condizione iniziale 0.2 m

Ci vorrebbe aggiungere energia per andare oltre.

5) Qual'è la velocità massima?

$$v_{\text{max}} = \omega A = 10 \times 0.2 = 2\text{ m/s}$$

$$|v_{\text{max}}| \text{ per } x=0$$

6) accelerazione massima?

$$a_{\text{max}} = \omega^2 A = 20\text{ m/s}^2$$

$$|a_{\text{max}}| \text{ per } x = \pm A, \quad a=0 \text{ per } x=0$$

7) Calcolare la velocità, l'accelerazione, l'energia potenziale e cinetica del corpo quando a percorso la metà della distanza che lo separa dalla posizione di equilibrio.

$$\rightarrow x = \frac{A}{2} = 0.1 \text{ m}$$

$$v = -\frac{2\pi}{T} \sqrt{A^2 - x^2} = -1.7 \text{ m/s}$$

$$a = -\omega^2 x = -\frac{k}{m} x = -10 \text{ m/s}^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = 7.5 \text{ J}$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = 2.5 \text{ J}$$

8) energia totale del sistema?

$$E = E_p + E_c = 10 \text{ J}$$

$$= \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m v_{\max}^2$$

9) esprimere $x(t)$,

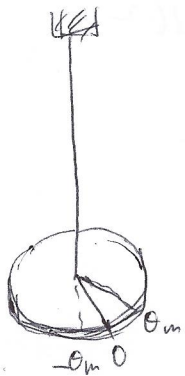
$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$A = 0.2 \text{ m}, \quad \omega = 10 \text{ rad/s}$$

$$\text{per } t = 0, \quad x = A, \quad \rightarrow \phi = 0$$

$$\underline{x(t) = 0.2 \cos 10t.}$$

Oscillatore armonico semplice angolare.



Un disco è attaccato ad un filo e oscilla intorno alla sua posizione di equilibrio. Il filo esercita sul disco un momento torcente τ della forma $\tau = -k\theta$ k è la costante di torsione

$$\tau = -k\theta = I\alpha = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

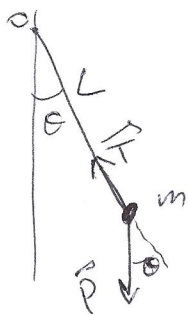
I - momento d'inerzia del disco.

$$\rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\kappa}{I} \theta = 0$$

soluzione della forma $\theta = \theta_m \cos(\omega t + \phi)$

$$\text{con } \omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}$$

pendolo semplice:



Una massa è attaccata ad un filo e
oscilla intorno alla verticale - la forza
peso prende il ruolo di forza di
richiamo.

Il momento delle forze peso intorno al punto
O si scrive: $\tau = -Lmg \sin\theta$

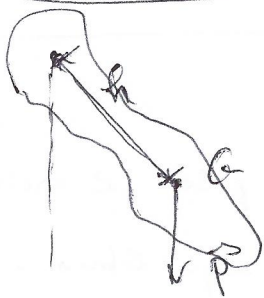
e se le oscillazioni sono piccole $\sin\theta \approx \theta$

abbiamo quindi: $I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -Lmg \sin\theta$, $I = mL^2$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0$$

periodo delle oscillazioni: $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

pendolo reale:



centro di massa

$$\tau = -mgh\theta = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I} \theta = 0$$

periodo delle oscillazioni

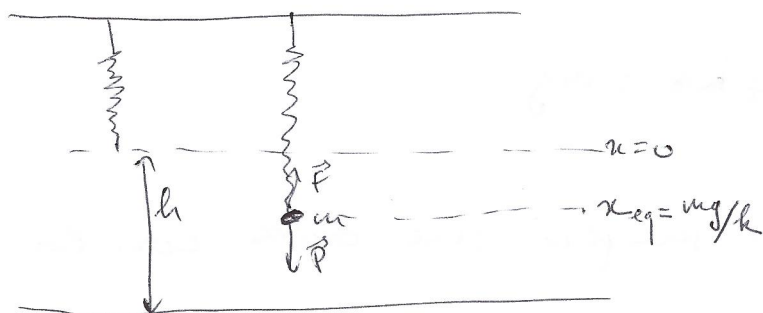
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}}$$

→ Si ottiene un oscillatore armonico semplice per una particella che subisce un'accelerazione proporzionale allo spostamento, di verso opposto.

7

Esercizio 2

Molla verticale in campo gravitazionale uniforme.



Si attacca ad una molla verticale una massa m che si mette ad oscillare intorno alla sua posizione di equilibrio.

1) posizione di equilibrio?

$$\vec{P} + \vec{F} = 0$$

$$mg - kx_{eq} = 0$$

$$\underline{x_{eq} = \frac{mg}{k}}$$

2) equazione del moto:

$$ma = m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - kx$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = g$$

Soluzione = soluzione dell'equazione omogenea ($f=0$) + soluzione particolare (costante)

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) + C$$

$$\text{con } C = \frac{mg}{k}$$

la massa oscilla con frequenza $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

→ in presenza del campo gravitazionale (molla verticale), solo la posizione di equilibrio è cambiata. I valori di a , v , ω , f rimangono identici a quelli della stessa molla orizzontale.

3) Considerando la conservazione dell'energia, ricavare l'equazione del moto.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + mg(h-x) = C$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}m \underbrace{v \frac{dv}{dt}}_{\frac{dx}{dt}} + \frac{1}{2}k \underbrace{2x \frac{dx}{dt}}_{\frac{dx}{dt}} - mg \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{\frac{dx}{dt}} = 0$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = mg$$

4) lunghezza del pendolo semplice che oscilla con lo stesso periodo?



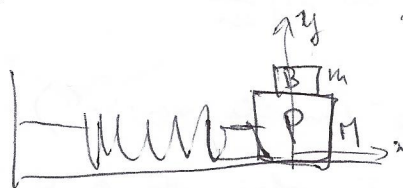
pendolo semplice oscilla con il periodo $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{mg}}$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Vogliamo: $\sqrt{\frac{m}{k}} = \sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow L = \frac{mg}{k} = x_{eq}!$

Esercizio 3

Un blocco P descrive un moto armonico semplice di frequenza $f = 1.5 \text{ Hz}$, scivolando lungo una superficie liscia orizzontale. Un blocco B è in quiete, ed il coefficiente di attrito statico fra il blocco B e P è $\mu_s = 0.6$. Determinare la massima ampiezza di oscillazione del sistema costituito dai due blocchi, senza che B scivoli su P.



in un sistema di riferimento (non inerziale) legato al blocco P, vogliamo per il blocco B un'accelerazione nulla:

$$\sum \vec{F} - m \underbrace{\vec{a}_P}_{\text{accelerazione del sistema di riferimento}} = m \vec{a}_B = 0$$

accelerazione del sistema di riferimento

lungo x : $-f_s + m a_B = 0$

(f_s opposta al movimento,
a in senso opposto allo spostamento).

$$a_B \leq \frac{f_s}{m}$$

$$f_s = \mu m g$$

molla: $a_{B_{\max}} = \omega^2 A$

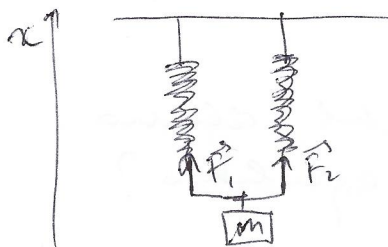
A ampiezza dell'oscillazione

$$\rightarrow A \leq \frac{\mu g}{\omega^2} = 0.066 \text{ m.}$$

Esercizio 4

molle in parallelo e in serie.

- A due molle identiche, di $k = 20 \text{ N/m}$, viene attaccata una massa $m = 0.3 \text{ kg}$. Si calcoli il periodo del moto di tale sistema, trascurando le forze d'attrito.



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$F = -kx - kx = -2kx$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}} = 0.84 \text{ s}$$

generalizzazione: per più molle in parallelo, le costanti elastiche si sommano.

- invece per molle in serie:



molla 1 si allunga di $x_1 \rightarrow F = -k_1 x_1$
 2 $x_2 \rightarrow F = -k_2 x_2$

$$x = x_1 + x_2, \quad F = -kx$$

$$\frac{F}{k} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}$$

$$\boxed{\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$

L'inverso delle costanti elastiche si sommano.

Esercizio 5

10

Si calcoli il periodo delle oscillazioni della massa attaccata a 2 molle identiche nella configurazione:

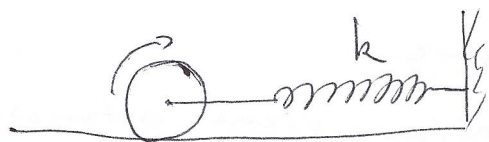


$$m = 0.3 \text{ kg} \\ k = 20 \text{ N/m}$$

$$F = -kx - kx = -2kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}} = 0.54 \text{ s}$$

Esercizio 6



Un cilindro pieno è attaccato ad una molla (senza massa) in modo che possa rotolare senza strisciare sulla superficie orizzontale. $k = 3 \text{ N/m}$. Si lascia il sistema, inizialmente a riposo, da una posizione di 0.25 m dalla posizione di equilibrio.

1) E_c di traslazione e di rotazione del cilindro quando passa per la posizione di equilibrio?

A ampiezza del moto

si considera l'energia cinetica di rotazione intorno

al punto di contatto: $E_c = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{mR^2}{2} + mR^2 \right) \frac{v^2}{R^2}$

$$E_c = \frac{3}{4} m v^2$$

v : velocità del centro di massa

al punto di equilibrio: $E_c = \frac{1}{2} k A^2$

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{k}{m} A^2}$$

$$E_{c \text{ traslazione}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \times \frac{2}{3} \frac{k}{m} A^2 = \frac{1}{3} k A^2$$

$$E_{c \text{ rotazione}} = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{mR^2}{2} \times \frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{4} m \times \frac{2}{3} \frac{k}{m} A^2 = \frac{1}{6} k A^2$$

2) dimostrare che il centro di massa effettua un moto oscillante armonico semplice con $T = 2\pi \sqrt{\frac{3\pi}{2k}}$ 11

Intorno a P: $\tau = I_P \alpha = FR = -kR^2\theta$ (per θ piccolo)

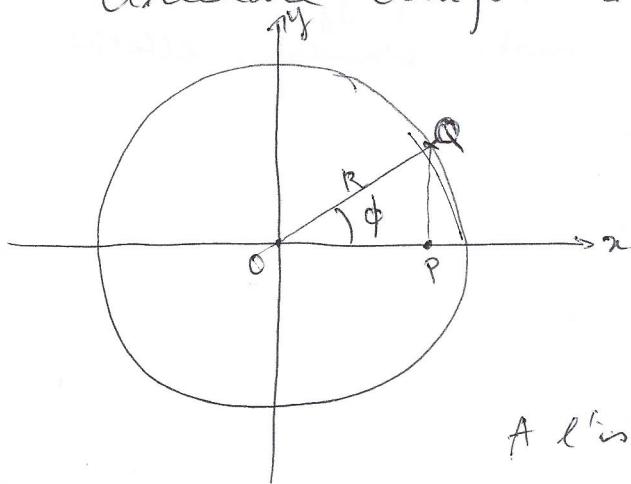
$$I_P = \frac{3}{2} \pi R^2$$

$$\frac{3}{2} \pi R^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + kR^2\theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2}{3} \frac{k}{\pi} \theta = 0$$

→ moto oscillante di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{3\pi}{2k}}$

Relazione fra il moto armonico semplice e il moto circolare uniforme.



Sia una particella Q in moto circolare uniforme lungo un cerchio di raggio R con la velocità angolare ω . Al istante $t=0$, la particella fa un angolo ϕ con l'orizzontale.

A l'istante t , si trova a l'angolo $\phi + \omega t$,

e le sue coordinate (x, y) si scrivano:

$$x(t) = R \cos(\omega t + \phi)$$

$$y(t) = R \sin(\omega t + \phi)$$

→ la proiezione del moto circolare uniforme sull'asse x segue un moto armonico semplice.

$$\begin{cases} v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega R \sin(\omega t + \phi) \\ a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 R \cos(\omega t + \phi) \end{cases}$$

L'ampiezza del moto oscillante è il raggio del moto circolare.

12
nota: la proiezione lungo y è anche un moto armonico semplice

Reciprocamente, il moto circolare uniforme si può descrivere come la combinazione di 2 moti armonici lungo x e y , con le stesse ampiezze e la fase giusta.

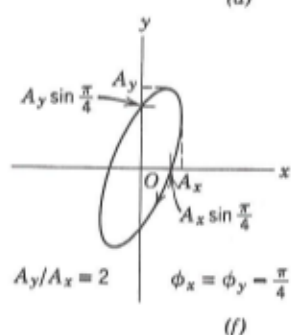
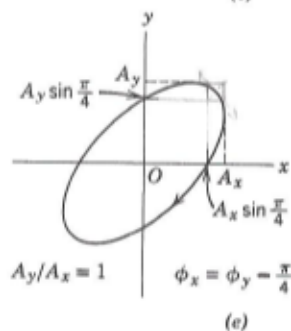
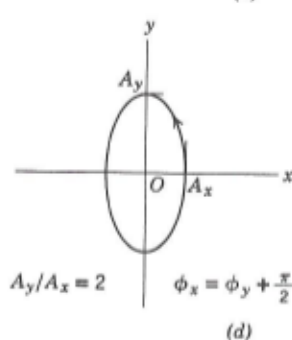
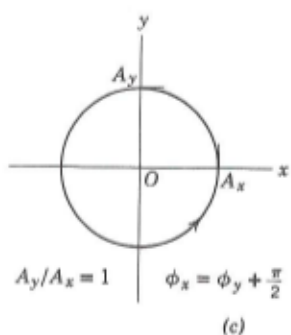
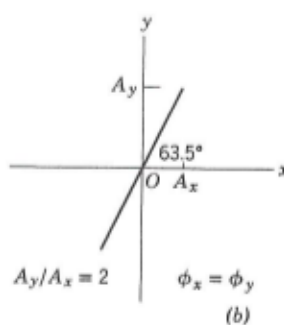
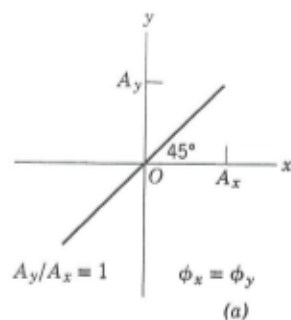
$$\begin{cases} x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \\ y(t) = A \cos(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}) = A \sin(\omega t + \phi) \end{cases}$$

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \quad ; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = A$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega A$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \omega^2 A$$

La combinazione di moti armonici con ampiezze diverse e fase diverse permette di descrivere moti circolari, ellittici, lineari con angolo con l'orizzontale...



Moto armonico smorzato

Il moto armonico, in casi reali, è sempre smorzato. Il più spesso subisce un attrito viscoso, dovuto all'attrito del fluido (aria, acqua...) che lo circonda.

L'attrito viscoso si rappresenta come una forza che si oppone al moto ed è proporzionale alla velocità:

$$F_{av} = -b \frac{dx}{dt}$$

L'equazione del moto dell'oscillatore smorzato si scrive:

$$-kx - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

e ammette come soluzione:

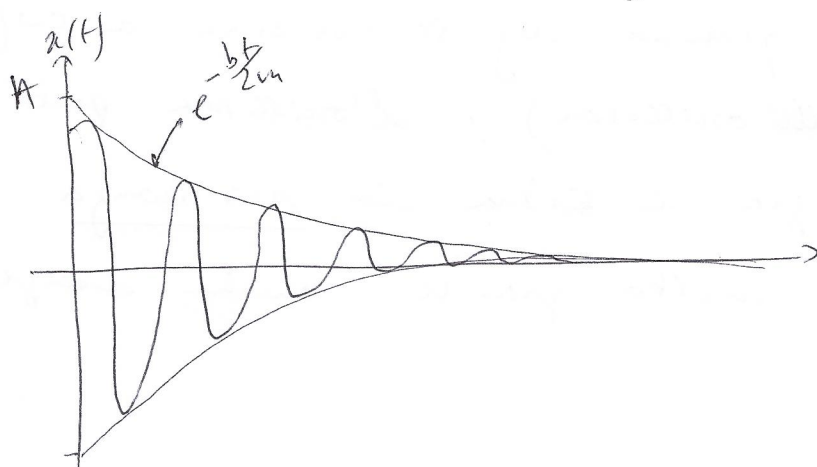
$$x(t) = A e^{-\frac{bt}{2m}} \cos(\omega' t + \phi)$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

nel caso di

$$\left(\frac{b}{2m}\right)^2 \ll \frac{k}{m}$$

$$b \ll \sqrt{4km}$$



nota: $\omega' < \omega$
 oscilla a frequenza
 leggermente più piccola.

Energia meccanica totale: si riduce con
 l'ampiezza al quadrato:

$$E(t) \approx \frac{1}{2} k A^2 e^{-\frac{bt}{m}}$$

Oscillatore forzato e risonanza

Consideriamo il caso in cui l'oscillatore non è sollecitato solo a $t=0$ ma regolarmente nel tempo, per esempio con una forza periodica di pulsazione ω_f :

$$F = F_m \cos(\omega_f t)$$

L'equazione del moto diventa:

$$-kx - b \frac{dx}{dt} + F_m \cos(\omega_f t) = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_m}{m} \cos(\omega_f t)$$

La soluzione si scrive:

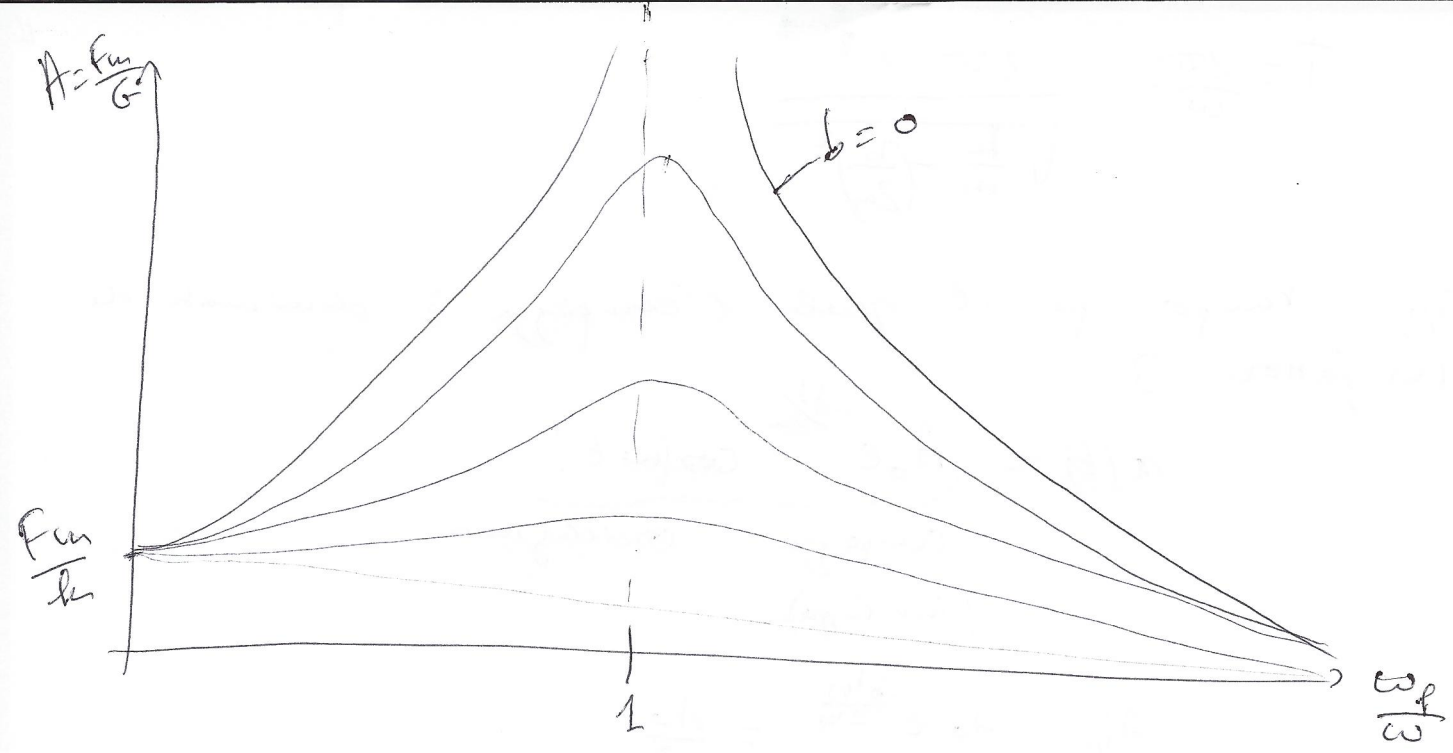
$$x(t) = \frac{F_m}{G} \sin(\omega_f t - \phi)$$

con $G = \sqrt{m^2(\omega_f^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega_f^2}$

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{b\omega_f}{G}\right)$$

Se b è piccolo, quando ω_f si avvicina a ω (= frequenza naturale dell'oscillatore), l'oscillatore può assorbire molta energia e entra in risonanza.

L'ampiezza diventa molto grande, anche diverge se $b=0$.

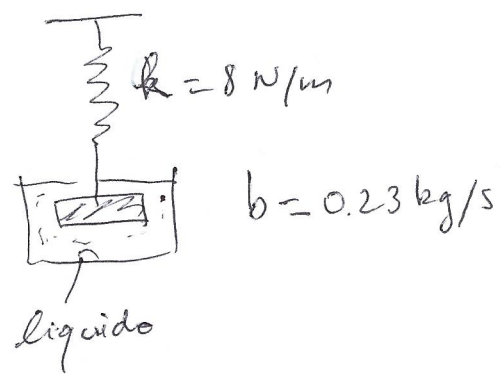


Lontano dalla risonanza $\omega_f^2 \ll \omega^2$, l'ampiezza

diventa
$$A = \frac{F_m}{G} = \frac{F_m}{\sqrt{m^2(\omega_f^2 - \omega^2)^2 + b^2}} \approx \frac{F_m}{k}$$

Se A diventa troppo grande, si può superare il limite di elasticità, poi di rottura

Esercizio : oscillatore smorzato



Spingendo sulla molla si abbassa la massa (dentro l'acqua) di 12 cm, poi si lascia il sistema oscillare liberamente.

Quante oscillazioni effettua la massa prima che l'ampiezza dell'oscillazione diventi un terzo dell'ampiezza iniziale?

$$N_{osc} = \frac{t_{1/3}}{T}$$

T periodo dell'oscillazione

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}}$$

$t_{1/3}$ = tempo per il quale l'ampiezza è diminuita di un fattore 3

$$x(t) = \underbrace{A_0 e^{-\frac{bt}{2m}}}_{\text{ampiezza (inviluppo)}} \underbrace{\cos(\omega' t)}_{\text{oscillazione}}$$

$$A_{1/3} = A_0 e^{-\frac{bt_{1/3}}{2m}} = \frac{A_0}{3}$$

$$\rightarrow t_{1/3} = \frac{2m}{b} \ln 3$$

$$N_{osc} = \frac{t_{1/3}}{T} = \frac{2 \times 1.5}{0.23} \times \frac{\ln 3}{2\pi} \times \sqrt{\frac{8}{1.5} - \left(\frac{0.23}{2 \times 1.5}\right)^2}$$

$$= 5.3 \text{ oscillazioni.}$$