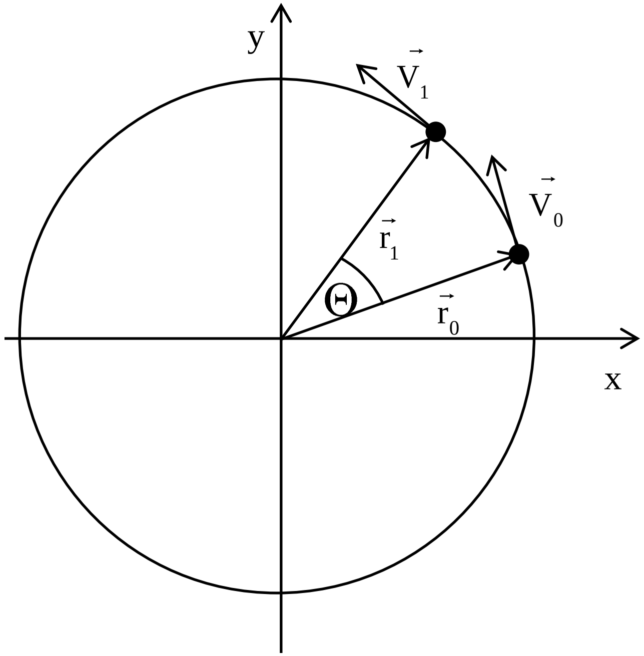
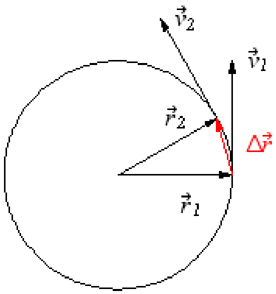
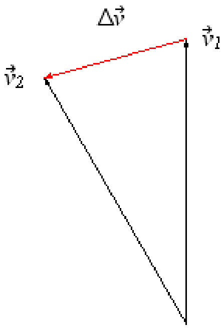
# Moto circolare uniforme

Il vettore velocità puo cambiare modulo, ma anche direzione. Tutti due sono legati ad un accelerazione.
Un cambio continuo di direzione di velocità (ma non di modulo) risulta in un moto circolare uniforme.

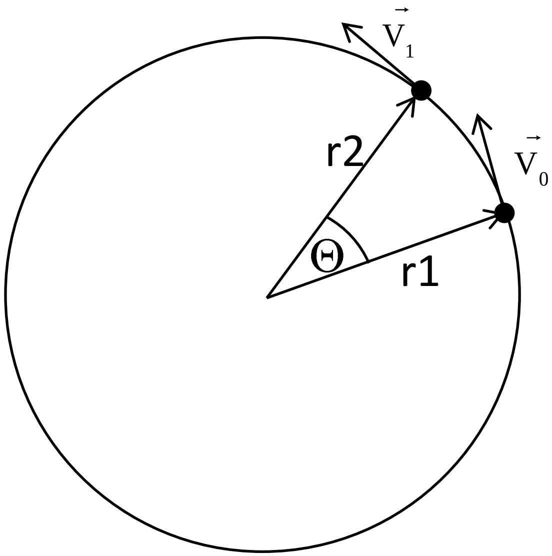


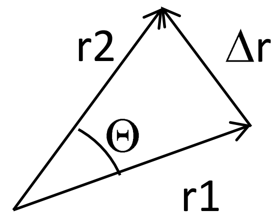



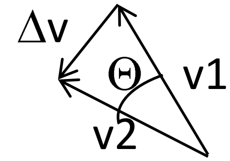




L'accelerazione derivata dal cambio di direzione del vettore velocità e sempre perpendicolare al vettore velocità (quindi perpendicolare alla tangente alla traiettoria) : e un'accelerazione centripeta.

# Accelerazione centripeta




$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r} = \frac{v\Delta t}{r}$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = a_c = \frac{v^2}{r}$$

Moto circolare uniforme : periodo di revoluzione $T = \dfrac{2\pi R}{V}$

Velocità angolare $\omega = \dfrac{d\Theta}{dt} = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{v}{r}$

Moto periodico

Periodo T (in s)

Frequanza $\nu$ (in $s^{-1}$ = Hertz (Hz) )

Velocita angolare (in rad/s)

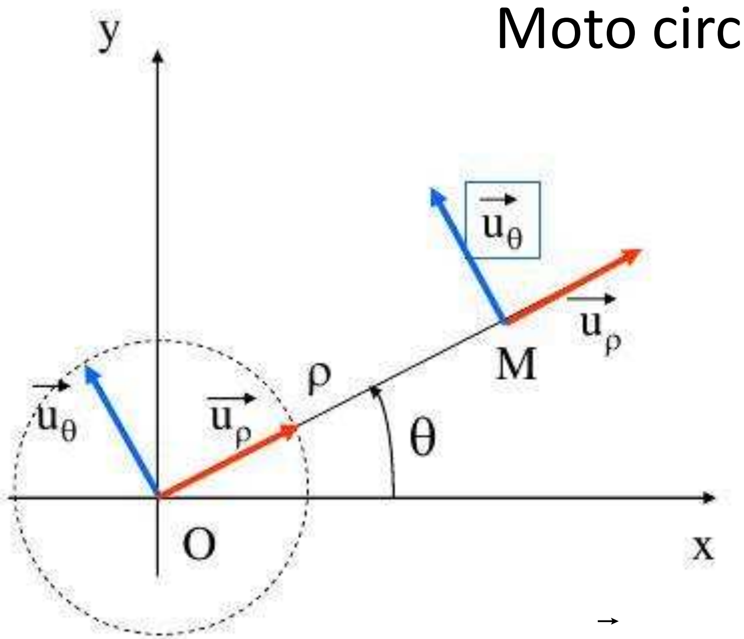
# Moto circolare non uniforme

Accelerazione centripeta (radiale) e tangenziale

$$a_T = \frac{dv}{dt} \qquad a_R = \frac{v^2}{r}$$

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_R^2}$$ Accelerazione istantanea

# Moto circolare e curvilineo - II




Coordinate polare : (**u**$_r$, **u**$_\Theta$), seguono il moto della particella : non sono costanti con il tempo !

Coordinate cartesiane : $\vec{R} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$

Coordinate polare: $\vec{R} = r\vec{u}_r$

$$x = r\cos(\Theta)$$
$$y = r\sin(\Theta)$$
$$r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$
$$\Theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\vec{u}_r = \cos(\Theta)\vec{i} + \sin(\Theta)\vec{j}$$
$$\vec{u}_\Theta = \cos\left(\Theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(\Theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{j}$$
$$\vec{u}_\Theta = -\sin(\Theta)\vec{i} + \cos(\Theta)\vec{j}$$
$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\Theta}{dt}\left(-\sin(\Theta)\vec{i} + \cos(\Theta)\vec{j}\right) = \frac{d\Theta}{dt}\vec{u}_\Theta$$
$$\frac{d\vec{u}_\Theta}{dt} = \frac{d\Theta}{dt}\left(-\cos(\Theta)\vec{i} - \sin(\Theta)\vec{j}\right) = -\frac{d\Theta}{dt}\vec{u}_r$$

Derivate dei versori in coordinate polare :

$$\boxed{\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \omega\vec{u}_\Theta \quad ; \quad \frac{d\vec{u}_\Theta}{dt} = -\omega\vec{u}_r}$$

Si definisce la velocita angolare : $\frac{\Delta\Theta}{\Delta t} = \overline{\omega}$ velocita angolare media

$\lim_{\Delta\Theta \to 0} \frac{\Delta\Theta}{\Delta t} = \frac{d\Theta}{dt} = \omega$ velocita angolare istantanea

Posizione $\vec{R} = r\,\vec{u}_r$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

Velocita: $\vec{V} = v_r\,\vec{u}_r + r\omega\,\vec{u}_\Theta$ Componenti radiale e tangenziale della velocita.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(V\vec{u}_\Theta)}{dt}$$

Moto circolare uniforme : r, ω costante

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt}\vec{u}_\Theta + V\frac{d\vec{u}_\Theta}{dt}$$

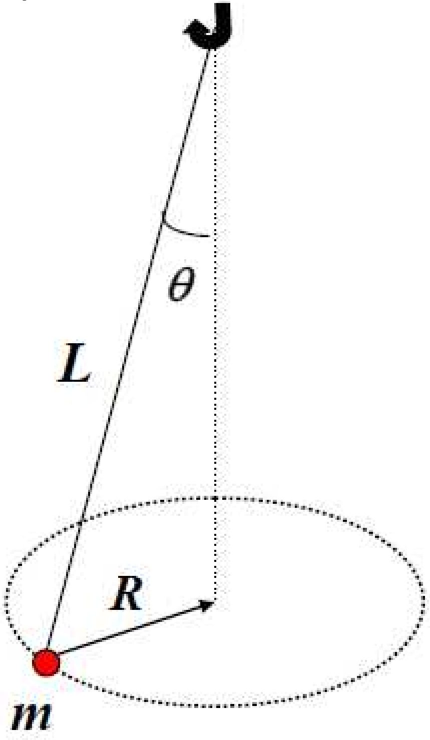
$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{dV}{dt}\vec{u}_\Theta - \frac{V^2}{r}\vec{u}_r \\ \vec{a} &= a_T\,\vec{u}_\Theta + a_c\,\vec{u}_r\end{aligned}}$$

$\mathbf{a_c}$: accelerazione centripeta, diretta verso il centro della traietoria risponsabile per il cambio di direzione della velocita.

# Dinamica del moto circolare uniforme

Dal secondo principio della dinamica, abbiamo F=ma, e per un moto circolare uniforme $a=v^2/R$ e centripeta. Per avere un moto circolare uniforme, ci vuole quindi una forza centripeta che permetta di avere tale accelerazione: la reazione vincolare, l'attrito, la grazitazione terrestre…

Esempio : il pendolo conico




Un piccolo corpo di massa $m$ gira su di un cerchio orizzontale con velocità costante $v$ all'estremità di una fune di lunghezza $L = 80$ cm.
Mentre il corpo gira, la fune descrive una superficie conica.
Se la fune forma un angolo $\theta = 30°$ con la verticale, si calcoli il tempo richiesto per una completa rivoluzione del corpo.

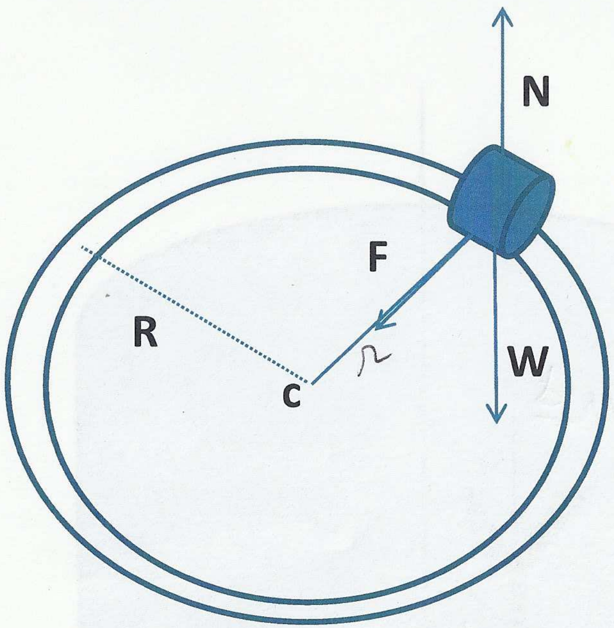
$$\tan \Theta = \frac{V^2}{Rg}$$

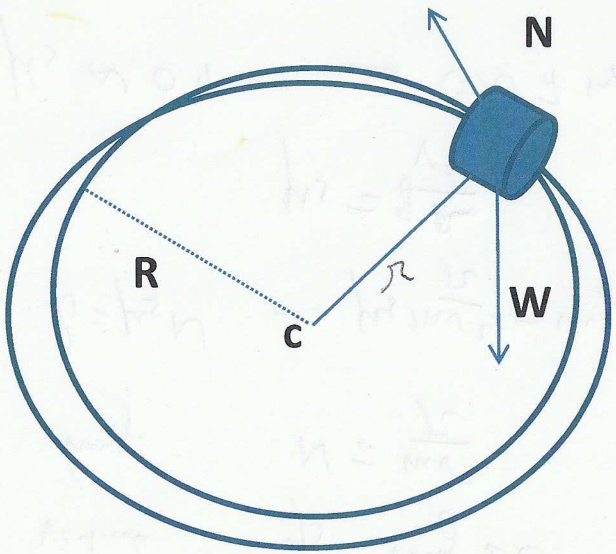
Angolo Θ indipendente della massa del corpo

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{L \cos \Theta}{g}}$$

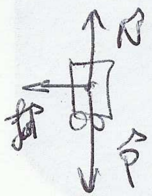
τ periodo del moto

# Esempio : curva stradale piatta e inclinata




Se la strada è piatta, è l'attrito delle ruote della machina a dare l'accelerazione centripeta.




$$\vec{N} + \vec{P} + \vec{f_s} = m\vec{a}$$

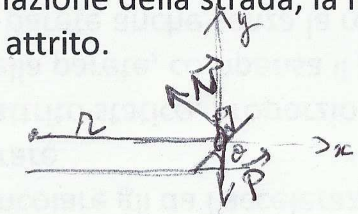
$$N - mg = 0$$

$$f_d = \frac{mv^2}{r}$$

$$f_d = \mu_d N \rightarrow v = \sqrt{r g \mu_d}$$

per $\mu_d \sim 0.5$ $v \simeq 12.1\ m/s = 43.6\ km/h$
$r = 30\ m$

Se la strada è inclinata, la componente della reazione vincolare proiettata sul interno della curva da l'accelerazione. Se la velocità è adatta e anche l'inclinazione della strada, la macchina puo girare anche senza attrito.




$$\vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}$$

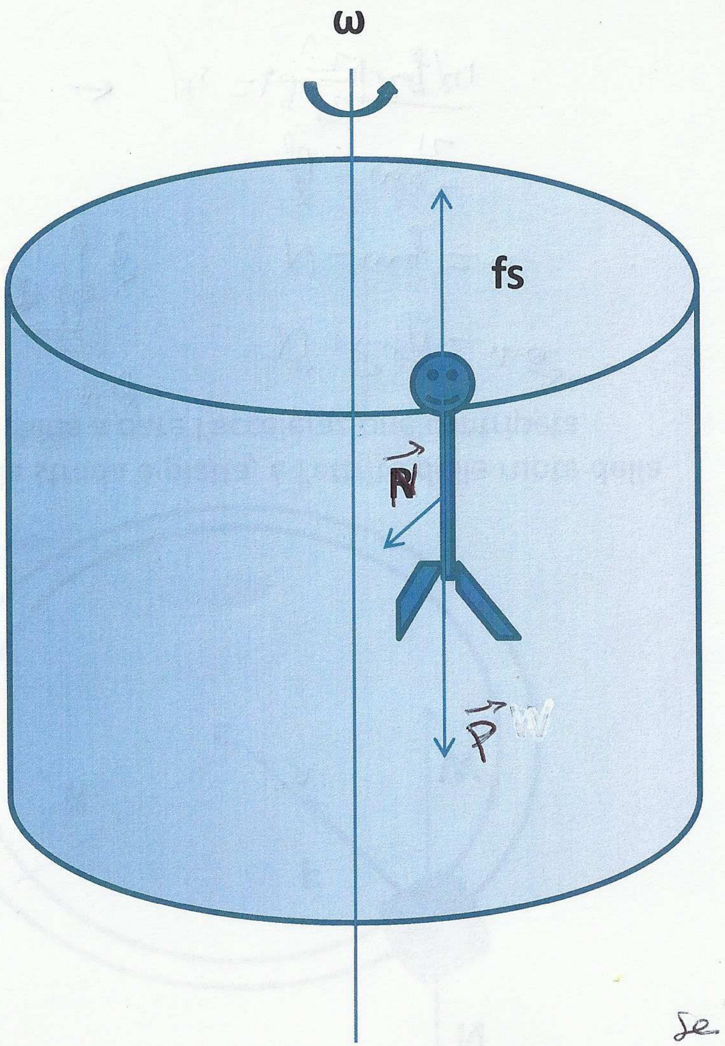
(y) $N\cos\theta - mg = 0$

(x) $N\sin\theta = \frac{mv^2}{r}$

$$\rightarrow v^2 = g r \tan\theta$$

per $\theta = 30°$, $r = 30\ m$ $v \simeq 13\ m/s$.

## Vasca rotativa




La vasca ruota con la velocità angolare ω. L'uomo, che risente l'accelerazione del « suo sistema di riferimento » è proiettato verso l'esterno. La reazione vincolare gli da l'accelerazione centripeta che lo fa girare.

L'attrito statico, proporzionale alla reazione vincolare della parete, compensa il peso e lo mantienne contro la parete anche senza la reazione vincolare del suolo.

$$\vec{f_s} + \vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}$$

verticale: $f_s - mg = 0$

horiz. $N = \frac{mv^2}{R}$ → la reazione vincolare aumenta con la velocità.

$f_s = \mu_s N$ → $\mu_s \frac{mv^2}{R} = mg$

$$\mu_s = g\frac{R}{v^2}$$

se $\mu_s \sim 0.4$ → $v \sim 7\ m/s$ per non cadere!

# Sistemi non inerziali

I principi della dinamica newtoniana sono sempre validi se si tiene conto delle forze d'inerzia o apparenti che traducono il fatto che il sistema di riferimento e' accelerato rispetto ad un sistema galileano.

Per una particella che si muove con la veolictà lineare **V i**n un sistema di riferimento B in rotazione alla velocità angolare **ω** (vettore diretto lungo l'asse di rotazione) rispetto ad un sistema di riferimento d'inerzia, l'accelerazione nel sistema di riferimento A si scrive :

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + 2\vec{\varpi} \times \vec{V} + \vec{\varpi} \times (\vec{\varpi} \times \vec{r})$$

Il secondo termine dell'equazione è l'accelerazione di Coriolis ($a_{Co}$), e il terzo è l'accelerazione centrifuga ($a_{tr}$). La particella rissente quest'accelerazioni come delle "forze" che vengono chiamate fittizie o d'inerzia perche non hanno un origine fisica come la grazitazione o la reazione vincolare ma sono dovute all'accelerazione del sistema di riferimento.

Il secondo principio della dinamica si puo scrivere in un sistema di riferimento non inerziale :

$$\vec{F} - m\vec{a}_{Co} - m\vec{a}_{tr} = m\vec{a} \quad \text{o} \quad \vec{F} - \vec{F}_{fittizie} = m\vec{a}$$