Lavoro ed energia

- Lavoro di una forza
- Energia cinetica – teorema dell’energia cinetica
- Forze conservative e energia potenziale
- Forze non conservative ed energia totale
- Conservazione dell’energia

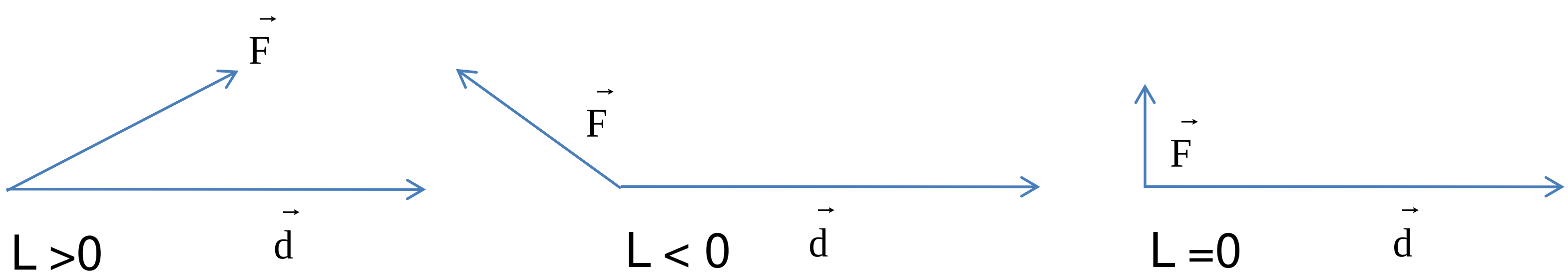
Il lavoro di una forza applicata ad un sistema **è la quantita di energia** che la forza scambia con quel sistema. Esso è una grandezza scalare ed è definito **dall'integrale del prodotto scalare della forza lungo lo spostamento**.

$$L = \vec{F} . \vec{d} = F \cdot d \cos(\Theta) = F \cos(\Theta) \cdot d$$

E la componente della forza parallella allo spostamento che compie lavoro.

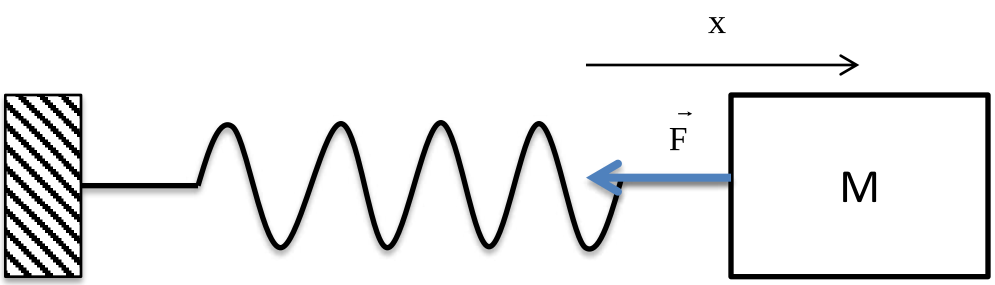
$$L = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}).d\vec{r} = \int_a^b F_x dx + F_y dy$$

L'unità di misura del lavoro è il Joule 1 J = 1 N.m. E una quantità algebrica :



Se piu forze agiscono sul sistema, il lavoro complessivo è la somma algebrica dei lavori di ogni forza.

Caso di una forza non costante : il caso della forza elastica



Una molla è caratterizzata dalla sua forza di richiamo

$$F = -k\,x$$

dove *k* è la costante elastica.

La forza elastica è definita dalla legge di Hooke. Il lavoro compiuto dalla forza elastica si ottiene calcolando

$$L_{x_1 \to x_2} = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx = \int_{x_1}^{x_2} (-kx)\,dx =$$

$$= -k\int_{x_1}^{x_2} x\,dx = -k\left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2}\right) = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2$$

Il lavoro compiuto dalla mano per allungare la molla di *x* risulta : $L_{0\to x} = \frac{1}{2}kx^2$

Per $x_1 < x_2$, $L > 0$ mentre per $x_1 > x_2$, $L < 0$. Per una corsa andata e ritorno, $L_{tot} = 0$.

Energia cinetica

$$L = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}).d\vec{r} = \int_{x0}^{x} F_x dx$$

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad a = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{dV}{dx}\cdot V = V\cdot\frac{dV}{dx}$$

$$L = \int_{x0}^{x} F_x dx = m\int_{x0}^{x} V\cdot\frac{dV}{dx}dx = m\int_{x0}^{x} V\cdot dV = \frac{1}{2}mV^2(x) - \frac{1}{2}mV^2(x_0)$$

Si definisce l'energia cinetica : $\boxed{E_c = \frac{1}{2}mV^2}$

$\boxed{\sum L = \Delta E_c}$

Teorema dell'energia cinetica : il lavoro compiuto dalla risultante delle forze applicate sulla particella di massa *m* lungo un percorso è uguale alla variazione di energia cinetica lungo questo percorso.

Potenza : lavoro per unita di tempo $\qquad P = \frac{L}{\Delta t} \qquad P_{istantanea} = \frac{dL}{dt}$

Per una forza costante nel tempo : $\qquad P_i = \frac{\vec{F}\cdot\vec{d}}{t} = \vec{F}\cdot\frac{\vec{d}}{t} = \vec{F}\cdot\vec{V}$

Forze conservative e non conservative

Esistono due tipi di forze :

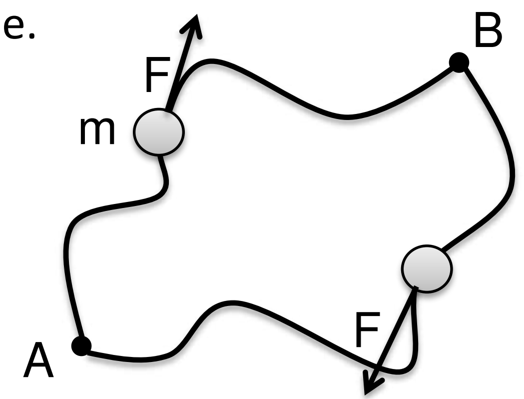
Forze conservative :

•Il lavoro compiuto è integralmente trasformato in energia cinetica, non c' è energia dissipata lungo il percorso.

•Il lavoro complessivo su una particella che si muove su un percorso chuiso è nullo.

•Il lavoro su una particella che si muove fra due punti qualsiasi non dipende del percorso seguito.

Lungo il percorso della particella sulla qualle agisce la forza conservativa, l'energia è conservata e si divide in energia cinetica e energia potenziale.



Esempio : forza elastica, forza gravitazionale.

Forze non conservative :

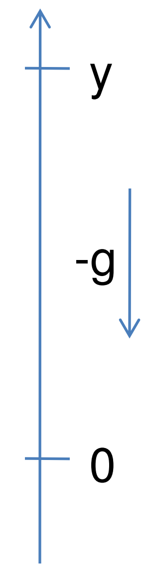
Il lavoro compiuto non è trasformato in energia cinetica ne potenziale ma dissipato in energia termica.

Esempio : attrito.

Energia Potenziale

L'energia potenziale è il lavoro che puo compiere un sistema a seconda della posizione delle sue componenti.

$$\boxed{\begin{aligned} L &= \Delta E_c = -\Delta E_p \\ \Delta E_p &= -\int_{x0}^{x} F(x)dx \end{aligned}}$$



Es. Forza gravitazionale

$$E_p(y) = -\int_0^y F(y)dy + E_p(0)$$

$$= -\int_0^y (-mg)dy + E_p(0) = mgy + E_p(0)$$

Prendiamo per convenzione : $E_p(0) = 0$ $\quad E_p(y) = mgy$

Es. Forza elastica :

$$E_p(x) = -\int_0^y -kxdx + E_p(0) = \frac{1}{2}kx^2$$

Prendiamo per convenzione $E_p(0)$ =0 per la posizione d'equilibrio della molla.

L'energia potenziale dipende solo della posizione della particella. Si nota che l'energia potenziale si definisce trane una costante, ma ci interessiamo principalmente alle sue variazioni. Anche l'energia cinetica, presso un altro sistema di riferimento in traslazione per esempio, sarà definita trane una costante.

Conservazione dell’energia

Esempio : un blocco arriva su una molla con un energia cinetica Ec. Comprime la molla perdendo tutta la sua energia cinetica. La molla compressa ha immagazzinato energia potentiale. La molla allora si distende e il blocco ritrova la sua energia cinetica iniziale. L’energia cinetica del blocco è stata trasferita alla molla in energia potenziale e ri-trasferrita al bloco in energia cinetica, perche la forza elastica (di richiamo) della molla è conservativa e non dissipa energia. Il lavoro complessivo compiuto dalla forza elastica sul percorso del blocco è nullo.

Se solamente forze conservative agiscono sulla particella, la variazione dell’energia cinetica compensa la variazione di energia potenziale o **l’energia mecanica è conservata** :

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0$$

Per le forze non conservative : la variazione di energia mecanica è uguale al lavoro delle forze dissipative:

$$\Delta E_c + \Delta E_p = \sum L_{\vec{f}\,nc}$$

La forza dissipativa produce energia interna (calore).

Ma l’energia totale è conservata :

$$\Delta E_{mecanica} + \Delta U_{int\,erna} = 0$$

Esercizi svolti durante le lezioni

Lavoro ed energia

1/ Vogliamo portare una massa di 10 kg in cima ad un piano inclinato di 5 m di lunghezza. Se non c'è attrito fra il blocco e il piano inclinato, quanto lavoro si deve fare, applicando una forza F parallela al piano e muovendo la massa a velocità costante?

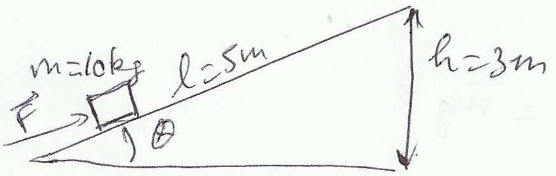
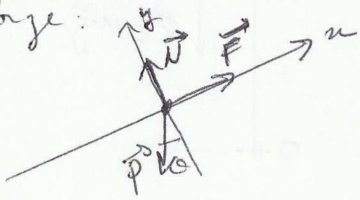


diagramma delle forze:



lavoro della forza F:

$$\mathcal{L}_F = \vec{F}\cdot d\vec{s} = F \times l$$

Velocità costante $\rightarrow a_x = a_y = 0$ $\quad \sum \vec{F} = m\vec{a}$ si scrive lungo x:

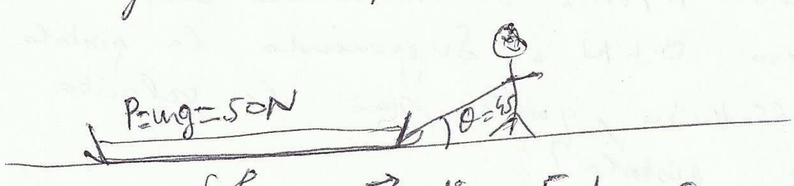
$$F - mg\sin\theta = 0$$

$$\mathcal{L}_F = mgl\sin\theta \qquad \mathcal{L}_F = 294\,J$$

quanto lavoro ci vuole per elevare la massa verticalmente della stessa altezza?

$$\mathcal{L}_F = mg \times h \qquad \mathcal{L}_F = 294\,J$$

2/ Un ragazzo tira una slitta di 50N, a velocità costante, su una distanza orizzontale di 10m. Quanto lavoro fa, sapendo che il coefficiente di attrito vale $\mu = 0.2$ e tira con una fune che fa un angolo di 45° rispetto all'orizzontale?



$$\mathcal{L}_F = \vec{F}\cdot d\vec{s} = F.d\cos\theta$$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \longrightarrow F\cos\theta - f_d = 0 \quad \text{(lungo x)}$$

$$N - mg + F\sin\theta = 0 \quad \text{(— y)}$$

$$f_d = \mu_d N$$

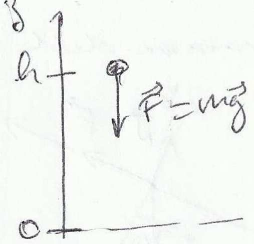
$\rightarrow N = mg - F\sin\theta$

$$F\cos\theta - \mu_d mg + \mu_d F\sin\theta = 0 \qquad F = \frac{\mu_d mg}{(\cos\theta + \mu_d \sin\theta)} = 0.2N$$

$$\mathcal{L} = 83.4\,J$$

3/ Un oggetto cade da un'altezza h, con velocità iniziale nulla. Quanto vale la sua velocità quando tocca il suolo?

teorema dell'energia cinetica →

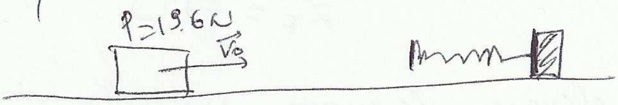


$$\Delta E_c = \mathcal{L}_{\vec{F}}$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \cancel{\frac{1}{2}mv_i^2}_{0} = mgh$$

$$v_f = \sqrt{2gh}$$

4/ Un corpo che pesa 19.6 N scivola senz'attrito lungo un tavolo orizzontale con una velocità di $v_0 = 2\,m/s$. Si immobilizza comprimendo una molla di costante elastica $k = 2\,N/m$.
Di quanto viene compressa la molla?



$$\Delta E_c = \mathcal{L}_{\vec{F}_{molla}}$$

$$0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_0^d -kx\,dx = -\frac{1}{2}kd^2$$

la molla è compressa di: $d = \sqrt{\frac{m}{k}}\,v_0 = 2\,m.$

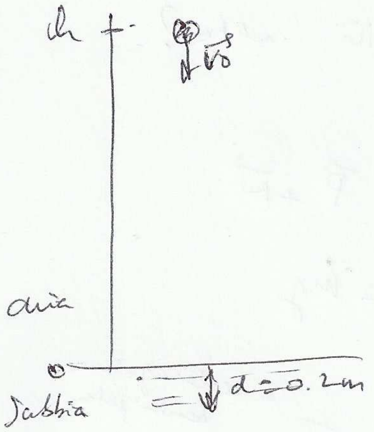
5/ La molla di una pistola è compressa di 5,0 cm, e ha una costante elastica di $k = 700\,N/m$. Si introduce contro la molla un proiettile di peso 0.1 N. Supponendo la pistola orizzontale e trascurando l'attrito, quale sarà la velocità del proiettile all'uscita della pistola?

$$\Delta E_c = \mathcal{L}_{\vec{F}}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}}\,x = 13.1\,m/s$$

6/ Da un altezza di 240m, si lancia verso il basso un oggetto con una velocità iniziale $v_0 = 14\,m/s$. L'oggetto affonda nella sabbia su una distanza di 0.2m. Trovare il modulo della forza di resistenza media che la sabbia esercita sull'oggetto.



Velocità a terra v_T:

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0$$

$$\frac{1}{2} m v_T^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = mgh$$

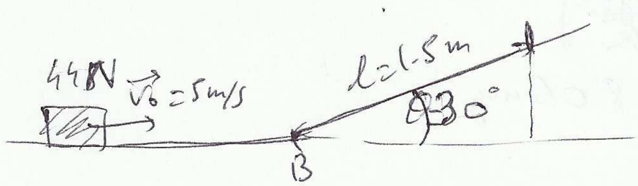
$$v_T^2 = v_0^2 + 2gh$$

Nella sabbia: $\underbrace{\cancel{E_f}}_{0} - E_{c_T} = \mathcal{L}_{F_{sabbia}} = -Fd$

$$\frac{1}{2} m v_T^2 = Fd \qquad F = \frac{m v_0^2}{2d} + \frac{mgh}{d}$$

$$F = 1.2\,10^4\,N.$$

7/ Si spinge un blocco di 44N per dargli una velocità di 5 m/s. Sale un piano inclinato a 30° e si ferma dopo 1.5 m e riscende. Calcolare la forza di attrito che agisce sul blocco lungo il piano inclinato e la velocità del blocco quando ripassa in basso del piano (B).



$$\Delta E_p + \Delta E_c = \mathcal{L}_{F_{n.c.}(\text{attrito})}$$

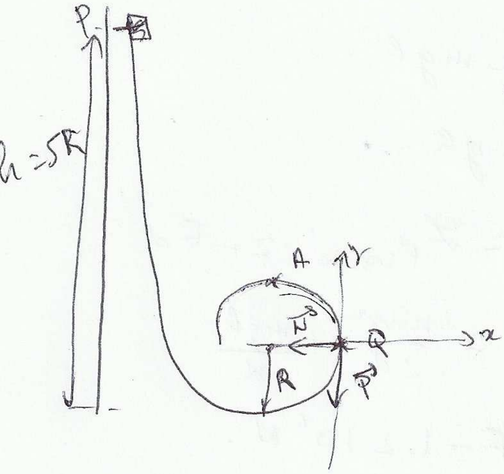
$$mgl\sin\theta - 0 + 0 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -f_d \times l$$

$$f_d = \frac{1}{2l} m v_0^2 - mg\sin\theta \qquad f_d = 16N$$

il blocco riscende: $0 - mgl\sin\theta + \frac{1}{2} m v_B^2 = -f_d l$

$$v_B = 2\,m/s.$$

8) Un blocchetto di massa m può scorrere lungo la pista a spirale. Se è lasciato cadere da fermo dal punto P, quale sarà la forza netta che agisce su di esso nel punto Q? da quale altezza sopra il punto più basso della spirale si dovrebbe lasciare cadere il blocchetto per far sì che stia per perdere contatto con la pista nel punto più alto?



in Q: forza netta $\vec{F} = \vec{P} + \vec{N}$

$F = \sqrt{P^2 + N^2}$ $\qquad P = mg$

N?

si proietta $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ — accelerazione centripeta

lungo x: $-N = ma_x = ma_c = -\dfrac{mv_Q^2}{R}$ per il moto circolare

(lungo y: $-mg = ma_y = ma_T$ ↳ accelerazione tangenziale)

$N = \dfrac{mv_Q^2}{R}$ $\qquad v_Q?$ $\quad \Delta E_c + \Delta E_p = 0$

$\longrightarrow \dfrac{1}{2} m v_Q^2 + mgR - 5mgR = 0$

$v_Q^2 = 8gR.$

$F = \sqrt{(mg)^2 + \left(\dfrac{m \cdot 8g\cancel{R}}{\cancel{R}}\right)^2}$

$= mg \cdot \sqrt{65} = 8.06\, mg$

per perdere contatto in A: significa che $N=0$

in A $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ lungo y si scrive:

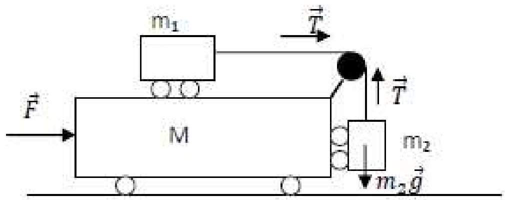
$-mg - N = -\dfrac{mv_A^2}{R}$

$N = \dfrac{mv_A^2}{R} - mg \longrightarrow v_A^2 = gR$

$\dfrac{1}{2} m v_A^2 + mg(R-h) = 0$

$v_A^2 = 2g(h-R) = gR$

$h = \dfrac{5R}{2}$.



Trascurando tutti gli attriti e considerando carrucole, carrelli e funi ideali, quale deve essere la forza **F** perché m_1 e m_2 non si muovano relativamente a **M**?

Tutto il sistema si muove di moto uniformemente accelerato con accelerazione a. Quindi $(M + m_1 + m_2)a = F$.

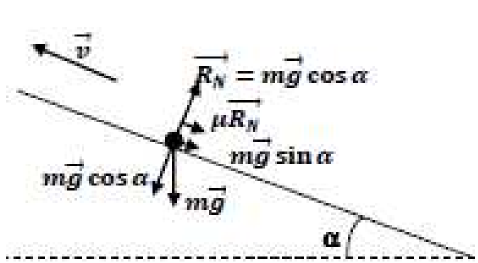
Essendo la fune ideale e inestensibile è evidente che il modulo della tensione della fune è lo stesso nei vari punti.

Inoltre se m_1 deve essere fermo rispetto a **M** dovrà essere: $m_1 a - T = 0$.

Anche m_2 deve fermo rispetto a **M**, quindi: $m_2 g - T = 0$. Se sostituiamo **T** si ha: $a = \frac{m_2}{m_1} g$ e quindi $\boldsymbol{F = (M + m_1 + m_2)\frac{m_2}{m_1} g}$.

Una sciovia è installata su un pendio con un angolo α=20° rispetto all'orizzontale. A pieno carico essa trascina 80 sciatori con un peso medio di 80kg. Supponendo che il coefficiente di attrito degli sci valga μ=0.06 e trascurando tutte le altre forze passive, calcolare la potenza del motore se si vuole una velocità di risalita di 2m/sec.

- Ricordiamo che la potenza è $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$, quindi si deve calcolare la forza di trascinamento.



Riferendoci allo schema a lato è evidente che la forza di trascinamento, per avere una velocità di risalita costante, dovrà essere pari a:

$$F = mg \sin\alpha + \mu R_N$$

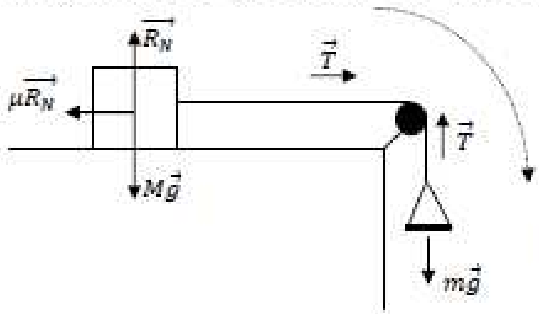
e quindi $F = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$.

A questo punto la potenza sarà data da:

$P = Fv = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)v = 80(80)(9.8)(\sin 20° + 0.06\cos 20°)2 = 50kW$.

Su un piano ruvido è appoggiato un corpo di massa M=1kg. Ad esso è attaccato un filo inestensibile e di massa trascurabile passante per una carrucola ideale. All'altro estremo del filo c'è un piattello in cui sono posate in successione delle piccole masse. Nel momento in cui inizia il moto si ha m=0.5kg. Supponendo che il coefficiente di attrito dinamico sia i $\frac{2}{3}$ di quello statico, definire il moto di M.

Distinguiamo il problema in due fasi. Nella prima fase siamo al momento del distacco e quindi il moto ancora non è iniziato. In tale situazione possiamo scrivere per le due masse: $\begin{cases} 0 = T - \mu_S Mg \\ 0 = mg - T \end{cases}$. Allora possiamo subito ricavare il coefficiente di attrito statico risolvendo il precedente sistema e avere: $\mu_S = \frac{m}{M}$. Ma essendovi una nota relazione tra il coefficiente di attrito statico e quello dinamico si ha, in definitiva: $\mu_D = \frac{2}{3}\mu_S = \frac{2}{3}\frac{m}{M}$.



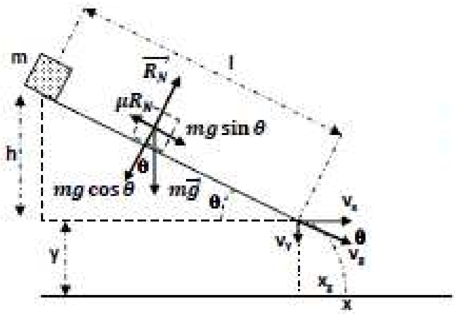
Nella seconda fase inizia il moto che sarà di tipo accelerato. Pertanto si possono scrivere le equazioni della dinamica per entrambe i corpi, e si avrà:

- per la massa M: $Ma = T - \mu_D Mg = T - \frac{2}{3}\frac{m}{M}Mg = T - \frac{2}{3}mg$
- per la massa m: $ma = mg - T$

Risolvendo il sistema, eliminando T tra di esse, si ha:

$Ma = mg - ma - \frac{2}{3}mg$ e quindi $a = \frac{1}{3}\frac{mg}{m+M} = 0.15 m/sec^2$.

Un corpo puntiforme di massa $m=1kg$ è posto in cima ad un piano inclinato con $\theta=30°$. Il piano è lungo $l=10m$ e la sua base è posta ad una altezza $y=2m$ dal suolo. Supponendo che il piano abbia un coefficiente di attrito $\mu=0.3$ si calcoli a che distanza dall'origine del piano cadrà il corpo, una volta liberato.



- Lungo il piano inclinato agiscono forze non conservative (*attriti*) e conservative (*forza peso*). Allora devo applicare il principio generale del lavoro e dell'energia cinetica:

$$L_{nc} + L_c = \Delta T$$

- Nel caso in esame:
  - $L_c = mgh$ (*è solo la forza peso che compie tale lavoro e uso la variazione di energia potenziale coinvolta*)
  - $L_{nc} = -\mu R_N l = -\mu mg\cos\theta\, l$ (*si oppone al moto*)
  - Pertanto si ha

$$mgl\sin\theta - \mu mg\cos\theta\, l = \frac{1}{2}mv_g^2 - 0$$

$$2gl(\sin\theta - \mu\cos\theta) = v_g^2$$

$$v_g = \sqrt{2gl(\sin\theta - \mu\cos\theta)} = \sqrt{2(9.8)(10)(\sin 30° - 0.3\cos 30°)}$$
$$\cong 6.86 m/sec$$

  - Ora siamo in presenza di un moto uniformemente accelerato sulla componente verticale della velocità, quindi:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + v_y t = \frac{1}{2}gt^2 + v_g\sin\theta\, t$$

  - Ma lungo l'asse x ho $x_g = v_x t = v_g\cos\theta\, t$ e allora $t = \frac{x_g}{v_{g\cos\theta}}$ e sostituendo

$$\frac{1}{2}g\left(\frac{x_g}{v_{g\cos\theta}}\right)^2 + v_g\sin\theta\frac{x_g}{v_{g\cos\theta}} = y$$

$$\frac{1}{2}g\frac{x_g^2}{v_g^2(\cos\theta)^2} + x_g\tan\theta = y$$

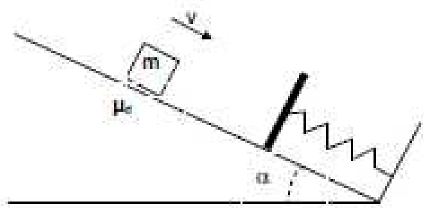
$$0.14x_g^2 + 0.58x_g = 2$$

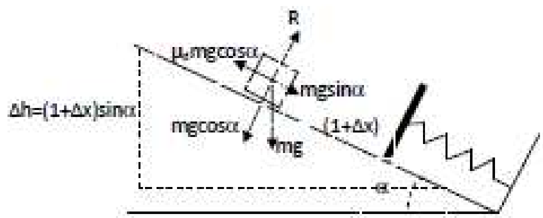
$x_g = \frac{-0.58\pm\sqrt{0.58^2-4(0.14)}}{0.28} = 2.24$m (*solo la soluzione positiva*)

  - E in definitiva

$$x = x_g + l\cos\theta = 2.24 + 10\cos 30° = 10{,}9m$$

Un corpo di massa m=5kg scivola lungo un piano inclinato con α=30° e coefficiente di attrito μ_d=0.2. Il corpo possiede una velocità (*nella direzione del moto*) in modulo pari a v=1m/sec. Dopo avere percorso un metro incontra una molla avente K=1000 N/m. Si calcoli la massima compressione della molla.





Il problema può essere risolto sfruttando il teorema del lavoro e dell'energia cinetica con la presenza di forze non conservative, quindi

$$\sum L_C + \sum L_{NC} = \Delta T$$

Ora nel caso in esame sarà lavoro dovuto a forze conservative la variazione di energia potenziale. La variazione di quota è esprimibile come $\Delta h = (1 + \Delta x)sin\alpha$ essendo Δx la compressione della molla. Quindi si avrà $L'_C = mg(1 + \Delta x)sin\alpha$.

Lavoro conservativo è anche quello relativo alla compressione della molla e pari all'energia elastica in essa immagazzinata. Tale lavoro è però contrario al moto. Quindi $L''_C = -\frac{1}{2}K(\Delta x)^2$.

Il lavoro non conservativo sarà solo quello dovuto all'attrito che esercita una azione frenante. Pertanto $L_{NC} = -\mu_d mgcos\alpha(1 + \Delta x)$.

Per quanto riguarda la variazione di energia cinetica si può scrivere $\Delta T = T_2 - T_1 = 0 - \frac{1}{2}mv^2$.

Allora il bilancio energetico si scriverà

$$mg(1 + \Delta x)sin\alpha - \frac{1}{2}K(\Delta x)^2 - \mu_d mgcos\alpha(1 + \Delta x) = -\frac{1}{2}mv^2$$

Sostituendo tutti i valori numerici si giunge alla seguente equazione nella incognita Δx:

$$500\Delta x^2 - 16\Delta x - 18.5 = 0$$

Risolvendola (*considerando la sola soluzione positiva*) si ha $\Delta x = \frac{16+\sqrt{256+37000}}{1000} = 0.21m$.