Gravitazione Universale

Alcune date

•Greci : sistema geocentrico (di Tolomeo, ~120 aC)

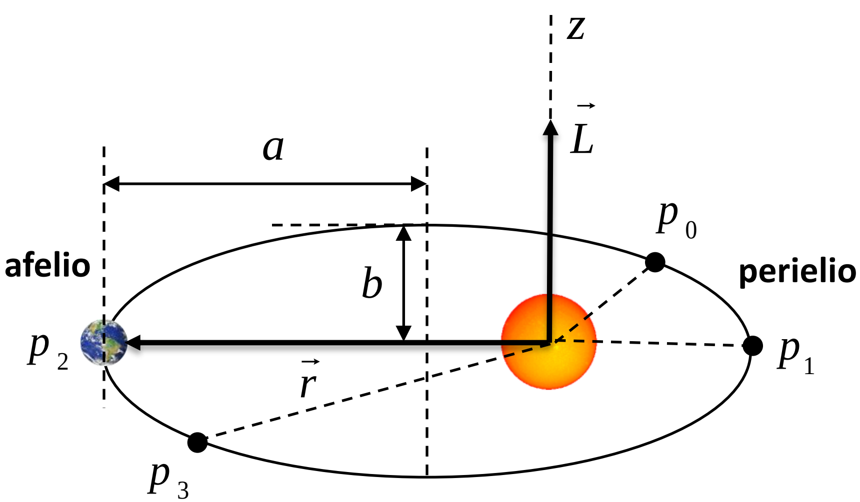
•Copernicus (1473-1543) : sistema eliocentrico

•Osservazioni di Brahe (1546-1601)

•Leggi di Keppler (1571-1630)

•Legge della gravitazione universale di Newton (1665)

Le LEGGI DI KEPLER derivano dalla conservazione del momento angolate orbitale dei pianeti.



1.L'orbita dei pianeti è piana e descritta da un ellisse in cui il Sole occupa uno dei due fuochi.

2.La velocità ***aerolare*** è costante ovvero il raggio vettore che parte dal sole e punta al pianeta spazza aree uguali in tempi uguali. In altre parole, il tempo impiegato per percorrere l'arco $\boldsymbol{P_0P_1}$ è lo stesso tempo impiegato per percorrere l'arco $\boldsymbol{P_2P_3}$.

3.Il cubo del semiasse maggiore ***a*** diviso il quadrato del periodo di rotazione ***T*** è costante.

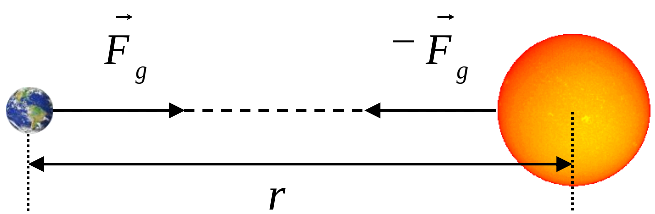
$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r^3$$

M : massa del pianeta centrale

La legge di gravitazione universale

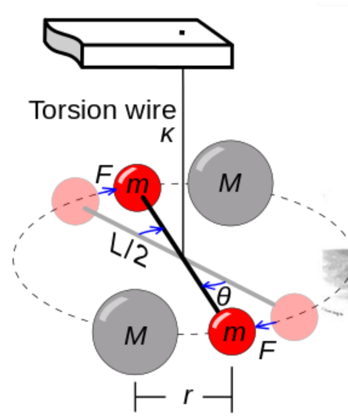
Ogni corpo esistente nell'universo attira ogni altro corpo con una forza gravitazionale. Le forze di gravitazione esistenti tra due punti materiali (tra loro opposte per il principio di azione e reazione) hanno come retta di applicazione la retta individuata dalle posizione dei due punti, intensita proporzionale al prodotto delle masse dei punti materiali e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza.

$$\boxed{F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}}$$



$$\boxed{G = 6.67428 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2}$$

La costante G è detta costante di gravitazione universale che fu misurata da Henry Cavendish con la bilancia di torsione intorno al 1797-1798.



Tramite la costante G, conoscendo l'accelerazione di gravità g ed il raggio terrestre, si può ricavare la massa della terra

$$F = G\frac{m_T \cancel{m_c}}{R_T^2} = \cancel{m_c} g \quad \Rightarrow \quad G\frac{m_T}{R_T^2} = g \quad \Rightarrow \quad m_T = \frac{gR_T^2}{G} = 5,9736 \times 10^{24} Kg$$

Es. La mela che cade sulla Terra e accelerata con ~9.8 m/s2, mentre la Terra e accelerata verso la mela con l'accelerazioen ~ 10^{-25} m/s^2 !

Accelerazione gravitazionale terrestre g :

$$g = \frac{GM_T}{R_T^{\,2}} \approx 9.8 m/s^2$$

M_T= 5.97 10^{24} kg
R_T=6.7 10^6 m

A l'altitudine *h* :

$$F = \frac{GM_T m}{(R_T + h)^2}$$

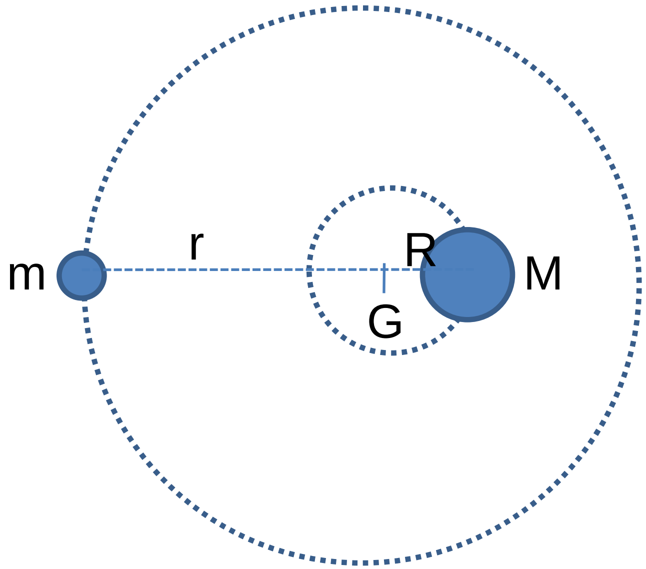
$$g_h = \frac{g_0}{\left(1 + {}^{h}\!/_{R_T}\right)^2}$$

$$\frac{dg}{g} = -2\frac{dr}{r}$$

Attenzione ! G e' uno scalare, unita Nm^2/kg^2 mentre **g** e un vettore di cui il modulo si esprime in m/s^2.

Esempio di orbite circolari

Consideriamo due sfere di masse M e m, G il loro centro di massa, r e R le distanze delle sfere rispetto a G. Per definizione abbiamo mr=MR.



Le sfere interagiscono tramite la forza di gravitazione, hanno un moto circolare uniforme. L'accelerazione centripeta ugualia la forza di grazitazione:

$$F_{12} = F_{21} = \frac{GmM}{(r+R)^2} = m\omega_1^2 r = M\omega_2^2 R \quad \rightarrow \omega_1 = \omega_2$$

$$per \quad M >> m, \quad R << r$$

$$\frac{GM}{r^2} = \omega^2 r \quad e \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

Si ritrova la terza legge di Keppler.

Esercizi

Calcolare la velocità orbitale e il periodo del Telescopio Spaziale (HST), che compie orbite circolari intorno alla Terra alla quota di 600 km.

Il raggio dell'orbita di HST si ottiene dalla somma del raggio terrestre e della quota di HST rispetto alla superficie terrestre:

r = 6378 km + 600 km = 6978 km = 6,978•106 m

La velocità orbitale si ottiene tramite la formula precedente, dove M è la massa della Terra:

vc = 7562 m/s

Il periodo si trova anche:T = 2 pi r / vc = 2 • 3,14 • 6,978•106 m / 7562 m/s = 5795 s

I satelliti geostazionari sono detti così perché sono fermi rispetto alla superficie terrestre; essi sono utilizzati per telecomunicazioni intercontinentali o per osservazioni meteorologiche. Per ottenere questo comportamento, i satelliti geostazionari si devono trovare in orbita equatoriale ad una distanza dalla Terra tale che il loro periodo orbitale risulti esattamente uguale al periodo di rotazione terrestre.
Utilizzando la terza legge di Keplero, calcolare a quale distanza dalla Terra si devono trovare questi satelliti.

Come termine di confronto conviene usare la Luna, di cui si hanno dati precisi. Dalla terza legge di Keplero, indicando con il pedice s i dati relativi al satellite e con il pedice L quelli relativi alla Luna, si ha:

Ts^2 / TL^2 = rs3 / rL3

Ts = 1 giorno = 3600 s • 24 h = 86.400 s = 8,64•104 s.

Poiché il periodo orbitale della Luna è 27d 7h 43m 11s e il raggio orbitale medio 384.000 km, si ha:

TL = 27 d • 86.400 s + 7 h • 3600 s + 43 m • 60 s + 11 s = 2.360.591 s = 2,36•106 s

rL = 3,84•108 m.

Risolvendo quindi la formula di Keplero rispetto a rs3, si ha:

rs3 = (8,64•106 s)^2 • (3,84•108 m)3 / (2,36•106 s)^2 = 7,585•1022 m3

Per ottenere rs bisogna ora estrarre la radice cubica del risultato (vedi Nota 2):

rs = = 42,33•106 m = 42.330 km

Questa è la distanza dei satelliti dal centro della Terra; la quota h rispetto alla superficie si ottiene sottraendo da questa distanza il raggio terrestre:

h = 42.330 km - 6378 km = 35.952 km