

Mechanica dei fluidi

fluidi: liquidi e gas.

Sistemi non rigidi, non hanno elasticità: prendono la forma del contenitore. non sopportano una forza tangenziale alla loro superficie.

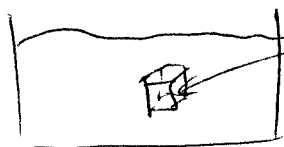
Materiali viscosi: intermedio fra fluido (liquido) perfetto e solido: materiali visco-elastici (es. il vetro)

Massa volumica e pressione

Mechanica dei solidi: si considera la massa e la forza perché il corpo ha un'estensione finita o finita.

Mechanica dei fluidi: si considera la massa volumica e la pressione.

Massa volumica ρ :



elemento di fluido volume ΔV , massa Δm

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

per un mezzo continuo (lunghezza $\gg$ inhomogeneità atomiche)

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (\rho \text{ uniforme})$$

ρ in kg/m^3

ρ è uno scalare.

es. aria: $\rho = 1.21 \text{ kg/m}^3$

vuoto tipico $\rho = 10^{-17} \text{ kg/m}^3$

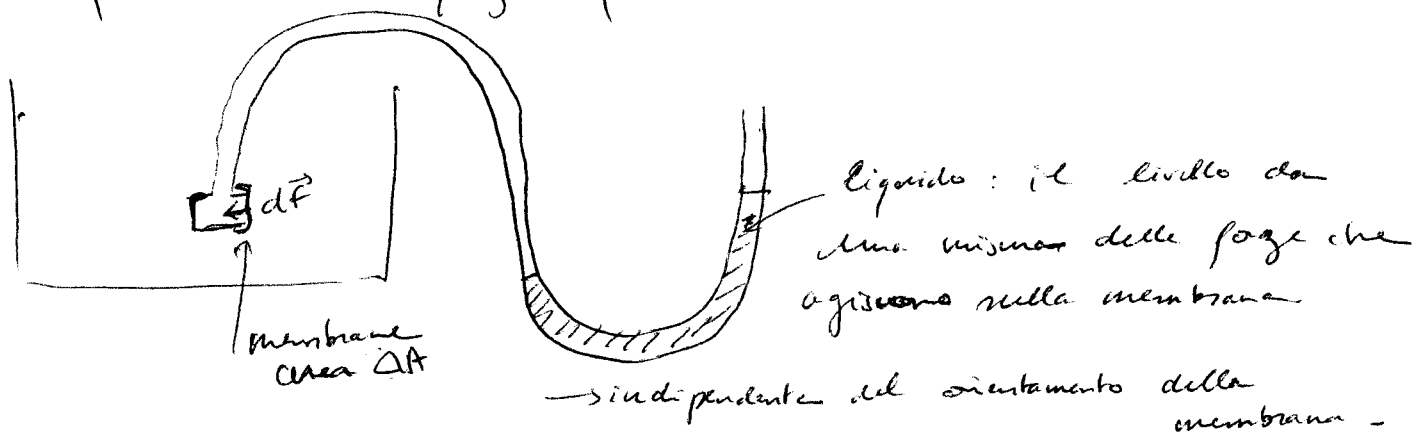
acqua pura a 20°C e 50 bar: $1.00 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$

mercurio: $\rho = 13.6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$

stella di neutroni: $\rho = 10^{18} \text{ kg/m}^3$

Pressione:

la pressione è una forza per unità di area:



$$P = \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

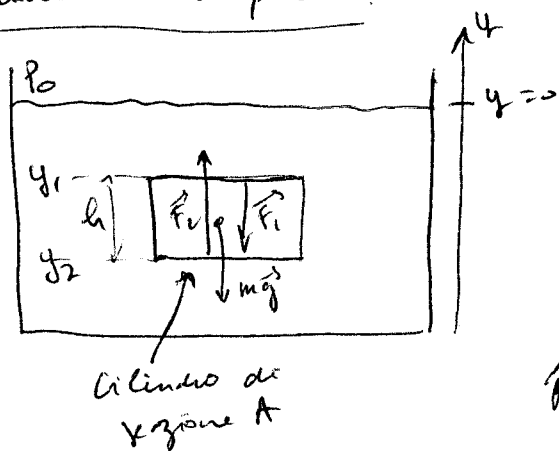
su un'area piana dovuta a una forza uniforme:

$$P = \frac{F}{A}$$

$$P \text{ in Pa} \equiv \text{N/m}^2$$

$$1 \text{ atm} = 1.01 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ Torr.}$$

fluido al riposo:



- pressione aumenta con la profondità

- diminuisce con l'aumento dell'altitudine

forze esercitate sul cilindro:

$$F_2 = F_1 + mg \quad (\text{risultante})$$

$$F_1 = p_1 A \quad \text{e} \quad F_2 = p_2 A$$

$$m = A(g_1 - g_2)$$

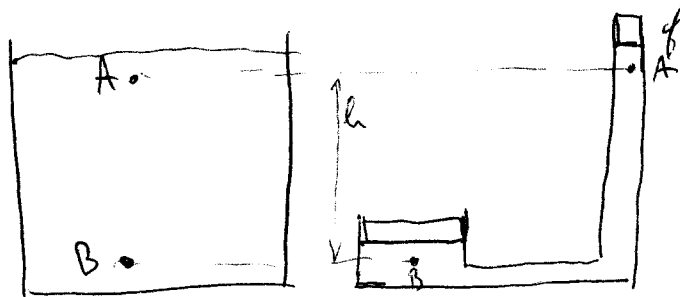
$$\rightarrow p_2 A = p_1 A + \rho A g (y_1 - y_2)$$

$$p_2 = p_1 + \rho g (y_1 - y_2)$$

$$p = p_0 + \rho g h$$

dipende solo di h (distanza alla superficie), non di A o della forma del contenitore.

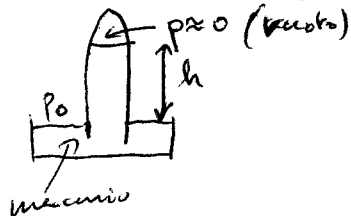
es.



$$p_B - p_A = \rho g h$$

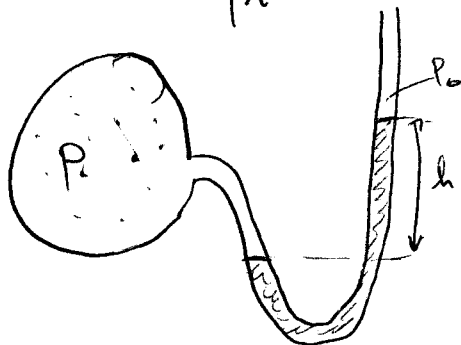
Misura della pressione

- barometro a mercurio



$$p_o = \rho g h$$

- manometro a tubo aperto : misura la sovrappressione o pressione relativa p_r



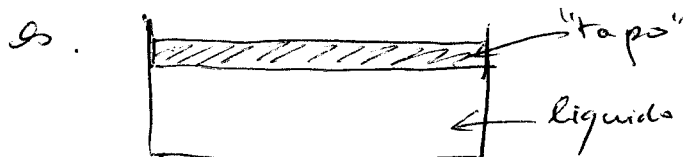
$$p_r = p - p_o = \rho g h$$

p_r : positiva o negativa.

Principio di Pascal

Un cambiamento di pressione applicato a un fluido confinato viene trasmesso inalterato a ogni porzione del fluido e alle pareti del recipiente che lo contengono.

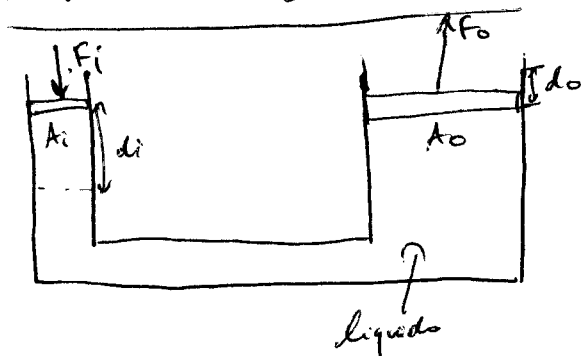
(-il fluido è un mezzo isotropico).



Se aumenta il peso sopra al tappo $\rightarrow$ la forza è distribuita su tutta la superficie:

$\Delta p = \Delta p_{est.}$ indep. di $h =$ applicata a tutto il volume.

il martinetto idraulico



Si applica una forza a sinistra $F_i \rightarrow$ è trasmessa integralmente a destra.

$$\Delta p = \frac{F_i}{A_i} = \frac{F_o}{A_o}$$

$$\rightarrow F_o = F_i \times \frac{A_o}{A_i} \Rightarrow \text{la forza } F_o \text{ è moltiplicata per } \frac{A_o}{A_i}$$

fluido è incompressibile: $V = A_i d_i = A_o d_o$

$$\rightarrow d_o = d_i \frac{A_i}{A_o}$$

lavoro della forza:

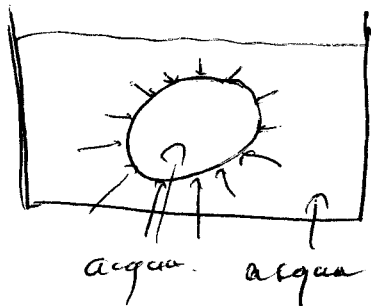
$$L = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_{\text{odo}} = \left(F_i \frac{A_o}{A_i} \right) \left(dr \frac{A_i}{A_o} \right) = F_i dr$$

↓
lavoro esercitato
sul pistone

lavoro esercitato
dal pistone
nell'esterno.

Principio di Archimede

solido immerso in un fluido:



pallone (di massa trascurabile) riempito
d'acqua: galleggia

però è sottoposto alla gravità: $\vec{P} = m\vec{g}$

→ spinta di galleggiamento $\vec{F}_A + \vec{P} = 0$

Se si considerano le forze di pressione esercitate $F_A = P$

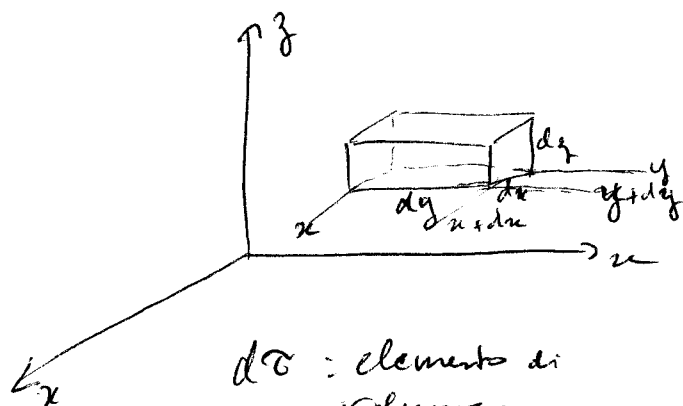
sulla superficie del pallone: la risultante è $\vec{F}_A$, diretta
verso l'alto, perché le forze di pressione sono più grandi in
basso che in alto.

$$F_A = m_f g : \text{spinta in un fluido} = \text{peso del fluido spostato}$$

- un corpo galleggia se il modulo della spinta eguaglia il modulo della forza gravitazionale.
- un corpo galleggiante sposta una quantità di fluido di peso pari al proprio.

Peso apparente in un fluido: $P_{\text{app}} = P - F_A$

- più avanzato: pressione di un fluido sottoposto a delle forze esterne.



$d\tau$: elemento di volume

$$d\tau = dx dy dz$$

elemento di fluido in equilibrio:

2 tipi di forze:

- le forze di contatto = la pressione P
- le forze esterne: il peso, il campo elettrico...

$$d\vec{F}_{\text{est.}} = \underbrace{f_{\text{est.}}}_{\text{densità di forza}} d\tau$$

lungo x :

$$P(x) dy dz - P(x+dx) dy dz + (f_{\text{est.}})_x dx dy dz = 0$$

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) dx dy dz + (f_{\text{est.}})_x dx dy dz = 0$$

Uguualmente

lungo y e z

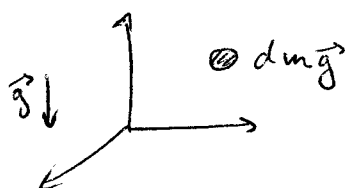
$$\rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = (f_{\text{est.}})_x \\ \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = (f_{\text{est.}})_y \\ \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right) = (f_{\text{est.}})_z \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} P = \vec{f}_{\text{est.}}}$$

$f_{\text{est.}}$: forza esterna per unità di volume

$\vec{\nabla}$: operatore vettoriale (gradiente: agisce come $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ su uno scalare).

Se si applica al campo gravitazionale:



$$\vec{f}_{\text{est.}} = \rho \vec{g}$$

$$\vec{\nabla} P = \rho \vec{g}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 ; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 ; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

$$\rightarrow \underline{P = P_0 - \rho g z}$$

Si ritrova la

stessa legge della pressione in funzione della profondità.

Fluidi ideali in movimento

2 modi di descrivere un fluido in movimento:

- punto di vista Lagrangiano: si prende un elemento di fluido α e lo segue nel tempo
a t_0

$$\begin{cases} x = x(t, x_0, y_0, z_0, t_0) \\ y = y(t, x_0, y_0, z_0, t_0) \\ z = z(t, x_0, y_0, z_0, t_0) \end{cases}$$

del tipo: "si segue ogni particella del fluido".

- punto di vista Euleriano: (il nostro!)

si fissa una posizione e si osserva quello che succede al passare del tempo:

si cerca di conoscere $\begin{cases} p(x, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) \end{cases}$ in tutti i punti del fluido.

Il caso il più semplice:

- condizioni stazionarie: in un punto P la velocità $\vec{v}$ è costante $\vec{v} = \vec{v}(x) \quad \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_x = 0$

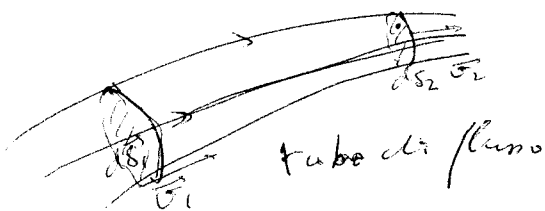
il flusso è laminare e non turbolento.

- irrotazionale: se ci si mette una pallina, è trascinata e non gira su se stessa: non ci sono vortici o turbolenze.
- fluido perfetto: incompressibile e non viscoso.

Nota dei fluidi e linee di corrente.

(4)

se si introduce nel fluido delle particelle eterogenee (piccole rispetto alle dimensioni del movimento) per esempio fosforescenti, e si fa una foto con tempi di pausa più o meno lunghi, si visualizzano le linee di corrente; linea immaginaria all'interno del fluido tale che in ogni suo punto la velocità del fluido in quel punto è tangente alla linea.



consideriamo il tubo di flusso:

durante dt , entrano le particelle dL_1, dS_1
 $dm_1 = \rho \underbrace{v_1 dt}_{dL_1} dS_1$

escono in dS_2 : dL_2, dS_2

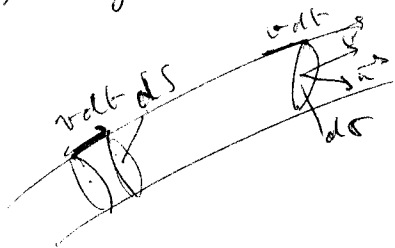
$$dm_2 = \rho v_2 dt dS_2$$

per un fluido incompressibile: $dm_1 = dm_2$ Conservazione della massa

$$\rightarrow v_1 dS_1 = v_2 dS_2$$

$$\left| \frac{v_1}{v_2} = \frac{dS_2}{dS_1} \right|$$

si definisce la portata:



$$dQ = \rho v \cos \theta dS dt = \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dt$$

$$Q = \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \int_S v dS$$

$S \rightarrow$ superficie normale alla linea di flusso.

legge di continuità: $v_m = \frac{Q}{S}$ velocità media sulla superficie S

$$\boxed{v_m S = cte}$$

portata costante

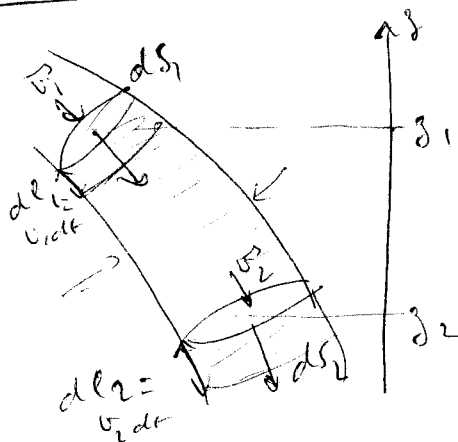
formalmente

$$\nabla \cdot \vec{p} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

fluido incompressibile
($\rho = \text{cte}$)

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Teorema di Bernoulli: (cf. teorema dell'energia cinetica).



1) forze di pressione su dS_1 :

$$dL_1 = p_1 dS_1 dl_1 = p_1 v_1 dS_1 dt$$

2) pressione su dS_2

$$dL_2 = -p_2 v_2 dS_2 dt$$

3) pressioni laterali: non esercitano lavoro perché sono perpendicolari al moto.

4) peso: = differenza di energia potenziale fra inizio e fine: si può considerare solo la parte di fluido che si è 'spostata':

$$\begin{aligned} dL_4 &= \rho (dS_1 dl_1) g z_1 - \rho dS_2 dl_2 g z_2 \\ &= \rho dS_1 v_1 (z_1 - z_2) g dt \end{aligned}$$

→ $dL = (p_1 - p_2) v_1 dS_1 dt + \rho (z_1 - z_2) g v_1 dS_2 dt$

lavoro complessivo

Variazione di energia cinetica =

$$\begin{aligned} dE_c &= \frac{1}{2} (\rho dS_2 v_2 dt) v_2^2 - \frac{1}{2} (\rho dS_1 v_1 dt) v_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) v_1 dS_1 dt \end{aligned}$$

$$\rightarrow p_1 - p_2 + \rho (z_1 - z_2) g = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2)$$

$$\boxed{p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 = \text{cte}}$$

$$\boxed{p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{cte}}$$

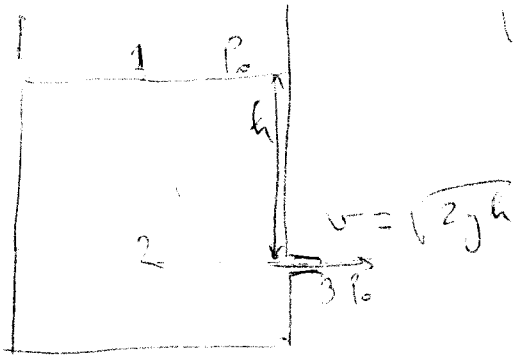
costante di pressione /
energia potenziale e
energia cinetica per
unità di volume è
costante.

a altitudine costante:

$$P + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{cte}$$

→ se aumenta v , diminuisce P .

ex. 16.14 (Halliday ecc)



$$1) P_0 + \rho gh = P_0 + \frac{1}{2} \rho v^2$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

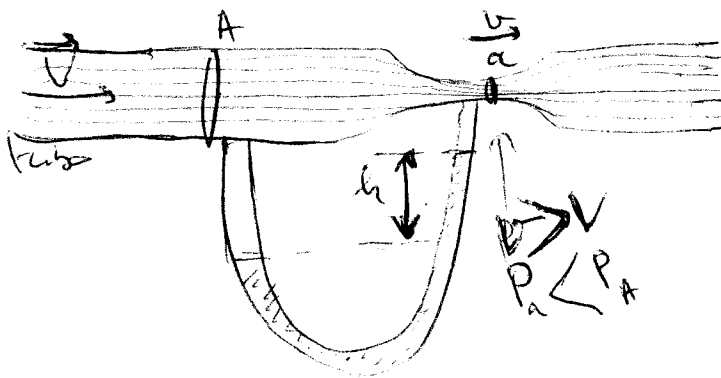
Legge di Torricelli

se il liquido esce da un piccolo foro

v eguale alla velocità acquistata da un corpo che cade sotto l'azione del suo peso per il dislivello h .

• tubo di Venturi o venturimetro ex. 49P Halliday p. 350

è una sezione di tubo di diametro variabile, orizzontale e permette di misurare la portata o la velocità di un fluido.



$$P + \rho gz + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{cte}$$

$$z = \text{cte}$$

$$\begin{cases} P + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{cte} \\ vS = \text{cte} \end{cases}$$

$$V = v \frac{a}{A}$$

$$P_A + \frac{1}{2} \rho V_A^2 = P_a + \frac{1}{2} \rho v_a^2$$

$$P_A - P_a = \frac{1}{2} \rho (v_a^2 - V_A^2) = \frac{1}{2} \rho v^2 \left(1 - \frac{a^2}{A^2} \right)$$

$$v = \sqrt{\frac{2A^2 \Delta P}{\rho(A^2 - a^2)}}$$

A.N. : $A = 64 \text{ cm}^2$
 $a = 32 \text{ cm}^2$
 $P_A = 55 \text{ kPa}$
 $P_B = 41 \text{ kPa}$

qual è la portata?

$$Q = Va = \sqrt{\frac{2A^2 \Delta P}{\rho(A^2 - a^2)}} \times a$$

$$Q = \sqrt{\frac{2 \times 14 \cdot 10^3}{1000 \left(\frac{1}{32 \cdot 10^{-4}} - \frac{1}{64 \cdot 10^{-4}} \right)}} = 1.9 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}$$

Adesso $A = 5 \text{ m}$
 $\frac{A}{a} = 5$
 $P_A = 2.0 \text{ bar}$

calcolare V e v per $P_a = 0$

$$v = \sqrt{\frac{2 \Delta P}{\rho \left(1 - \frac{a^2}{A^2} \right)}} = \sqrt{\frac{2 \times 2 \cdot 10^2}{1000 \left(1 - \frac{1}{25} \right)}} = \sqrt{\frac{4 \times 25 \cdot 10^2}{24}}$$

$$v = 20.4 \text{ m/s}$$

$$V = v \frac{a}{A} = \frac{v}{5} = 4.08 \text{ m/s}$$

$$Q = \pi \frac{D^2}{4} \times V = \pi \frac{0.05^2}{4} \times 4.08 = 8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

Il tubo che Peter ha 51 P.
 È un piccolo ostacolo che si mette nel
 flusso per misurare la velocità.



In A il fluido è in quiete

Bernoulli: in A P_1
 in B: $P + \frac{1}{2} \rho v^2$

$$P_1 - P = \rho g h = \frac{1}{2} \rho v^2$$

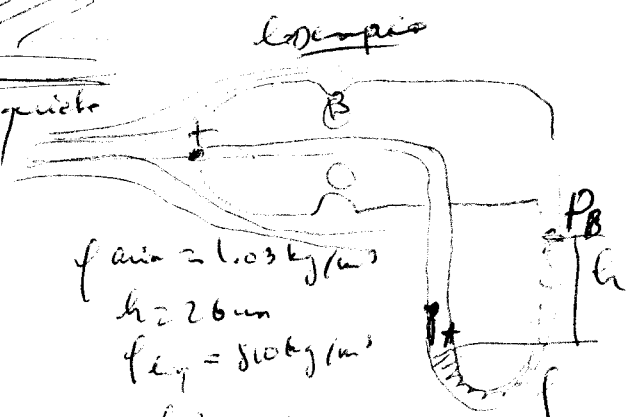
$$v = \sqrt{\frac{2 \rho g h}{\rho_{\text{aria}}}}$$

$\rho_{\text{aria}} = 1.03 \text{ kg/m}^3$

$h = 26 \text{ cm}$

$\rho_{\text{Hg}} = 810 \text{ kg/m}^3$

$v = 6.33 \text{ m/s}$

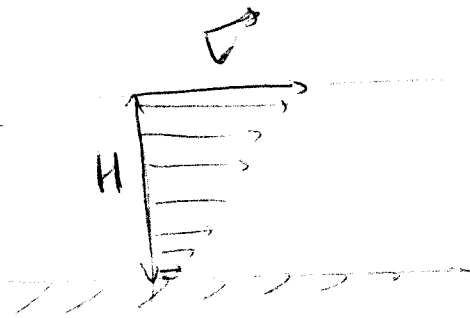


Flusso dei liquidi reali

(11)

Viscosità

Viscosità: responsabile delle forze tangenziali all'interno del liquido = attrito fra uno strato e l'altro del liquido.



$$\frac{dv}{dy} = \frac{v}{H}$$

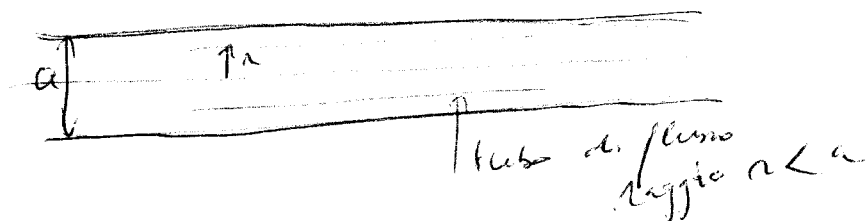
$$\tau = \eta \frac{\Delta v}{H}$$

Consideriamo un tubo di

raggio a e lunghezza l

A pila diff. dr porzione fra le estremità

calcoliamo la velocità del liquido in funzione della distanza r dall'asse del tubo e la portata Q



flusso laminare

→ stazionario

$$v = v(r)$$

indip. di t .

inoltre stazionario → risultante delle forze $\Sigma F = 0$

forze di pressione $\Sigma F_p = \pi r^2 (p_1 - p_2) = \pi r^2 \Delta p$

attrito: $-\eta A \frac{dv}{dr} = -\eta 2\pi r l \frac{dv}{dr}$

$$\pi r^2 \Delta p + \eta 2\pi r l \frac{dv}{dr} = 0$$

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{r \Delta p}{2\eta l}$$

$$v = -\frac{r^2 \Delta p}{4\eta l} + c$$

in $v = 0$ per $r = a \rightarrow v = \frac{\Delta p (a^2 - r^2)}{4\eta l}$

portata: $S = 2\pi r dr$

$$Q = \int_0^a 2\pi r v dr = \int_0^a \frac{2\pi \Delta p}{4\eta l} r (a^2 - r^2) dr$$

$$Q = \frac{\pi a^4 \Delta p}{8\eta l}$$

formula di Poiseuille
portata $\propto \Delta p, a^4, 1/\eta, 1/l$

- Transizione laminare $\rightarrow$ turbolento
quando?
per $Re \approx 2000$

$$Re = \frac{\rho v}{\eta}$$

contiene tutti i parametri fluidici che entrano in gioco nel equazione del moto del fluido. $\therefore$ si può descrivere il moto avendo solo Re come parametro $\rightarrow$ molto utile per fare modellini

(tipo macchina, aerostato) per sapere se il flusso del modello sarà caratteristico della realtà $\rightarrow$ basta riprodurre un modello con lo stesso numero di Reynolds

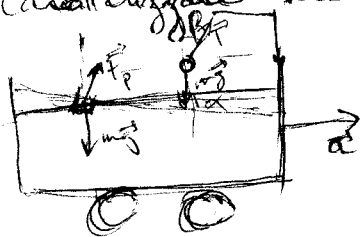
per $Re \leq 2000$: moto laminare
 ≈ 2000 : — zona di transizione
 > 2000 : — turbolento

$$Re \approx \frac{\text{forze d'inerzia}}{\text{forze viscosi}}$$

Esercizi

1) Un contenitore riempito di liquido di densità ρ è sopra un carrello che si muove con ~~accelerazione~~ accelerato di accelerazione a rispetto alla terra (ref. galileano)

- caratterizzare la superficie



per $a = 0 : \alpha = 0$

per $a \neq 0$

Su un elemento della superficie dm : pressione sempre perpendicolare alla superficie (se non c'è equilibrio)

$$\vec{F}_p + m\vec{g} = 0$$

lungo $y : F_p \cos \alpha - dm g = 0$

$$F_p = \frac{dm}{\cos \alpha} g$$

$x : F_p \sin \alpha = dm a$

$$\rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha = \frac{a}{g}$$

- inclinazione del pendolo:

$$mg = T \cos \beta$$

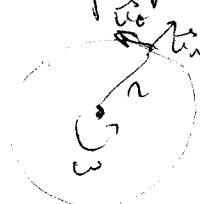
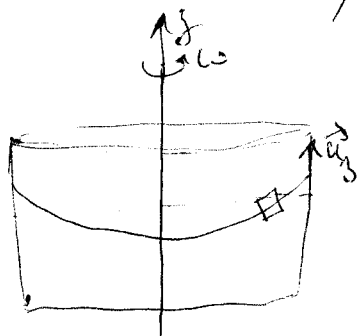
$$ma = T \sin \beta \rightarrow \tan \beta = \frac{a}{g} \rightarrow \beta = \alpha!$$

pendolo perpendicolare alla superficie

- se il pendolo tocca l'acqua, ma la sua densità è più elevata: la direzione rimane la stessa (peso $\Rightarrow$ peso apparente, ma la direzione è indipendente dalla massa).

2) ... liquido in un recipiente in rotazione

caratterizzare la forma della superficie -



Andiamo sulle forze fittizie quando il
referenziale non è galileiano.

principio della dinamica $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}$

Esempio della rotazione: o prendiamo un

referenziale fisso e l'accelerazione è

centripeta: $-\omega^2 r \hat{u}_r$

o prendiamo un referenziale legato a l'oggetto

in rotazione che subisce la "forza centrifuga"

$\vec{f} = +\omega^2 r \hat{u}_r$ e si applica il

principio della dinamica:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{f} = m\vec{a}_{\text{re}} \quad \text{se l'oggetto è in equilibrio}$$

$$\vec{f} = \vec{f}_{\text{trasinerti}} + \vec{f}_{\text{centrifuga}} + \vec{f}_{\text{Coriolis}}$$

in quel caso: $\vec{f}$ parte spinto in equilibrio nel referenziale in rotazione rispetto a quel referenziale

o ci mettiamo in un referenziale legato a un
elemento di fluido; quello è in equilibrio.

$$\vec{\nabla} P = \rho \vec{g} + \vec{f}_{\text{tranti}}$$

$$= -\rho g \hat{u}_z + \rho \omega^2 r \hat{u}_r$$

$$\text{proiettato: } \begin{cases} \hat{u}_r: \frac{\partial P}{\partial r} = \rho \omega^2 r \\ \hat{u}_\theta: \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \\ \hat{u}_z: \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \end{cases}$$

Sulla superficie: $P = P_0 = \text{cte} \rightarrow dP = 0$

$$\text{differenziale} \quad dP = \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right) dr + \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) d\theta + \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) dz = 0$$

$$\rho \omega^2 r dr - \rho g dz = 0$$

$$dz = \frac{\omega^2}{g} r^2 dr$$

$$z - z_0 = \frac{\omega^2}{2g} r^2$$

parabola.

Modello di un'atmosfera isoterma

atmosfera Gas perfetto isoterma (T costante lungo z)
calcolare la pressione $P(z)$

$$\vec{\nabla} P = \rho \vec{g} \quad \rightarrow$$

$$PV = nRT$$

~~$P =$~~

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$m = nM$$

$$\frac{n}{V} = \frac{P}{RT_0}$$

$$\rho = \frac{M}{RT_0} P$$

$$\rho(z) = \frac{M}{RT_0} P(z)$$

$$dP = \left(\frac{dP}{dz} \right) dz$$

$$\frac{dP}{dz} = -\rho(z) g$$

$$= -g \frac{M}{RT_0} P(z)$$

$$\frac{dP}{P} = -g \frac{M}{RT_0} dz \quad \rightarrow \quad \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -g \frac{M}{RT_0} z$$

$$\text{con } P(z=0) = P_0$$

$$P = P_0 \exp\left(-g \frac{M}{RT_0} z\right)$$

anche $\frac{P_0}{P_0} = \frac{M}{RT_0} \quad \text{a } z=0$

$$\rightarrow P = P_0 \left(e^{-\frac{P_0}{P_0} g z} \right)$$