

Elasticità

Cui non consideriamo più il corpo come rigido ma deformabile.

Risposta di un corpo ad una sollecitazione tramite una forza: se la deformazione è proporzionale alla forza, allora siamo nel regime elastico e il corpo ritrova la sua forma iniziale quando la sollecitazione finisce. Al di là del limite di snervamento, non ritrova più la forma iniziale, e se la forza è troppo grande si raggiunge la soglia di rottura.

Più che la forza, si definisce lo sforzo o forza per unità di superficie, e la deformazione come relativa alle dimensioni iniziali.

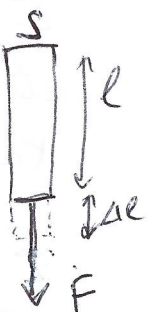
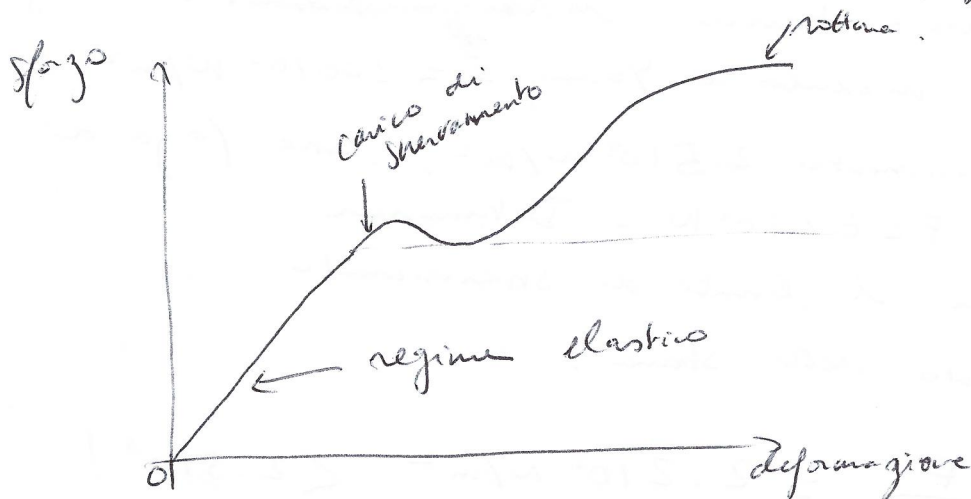
La legge di Hooke (es. molla) collega lo sforzo con la deformazione:

pers. nel caso di un allungamento:

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l}$$

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

sforzo
↓
Modulo elastico di Young
↓
deformazione



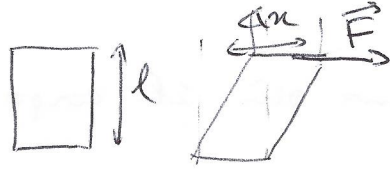
Modi di deformazioni

2

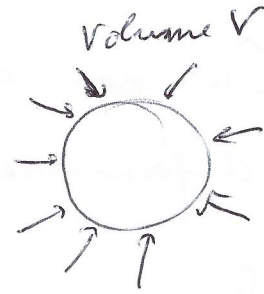


allungamento/
accorciamento
trazione/
compressione

Sfazio longitudinale
modulo di Young E
 $\sigma = E \epsilon$
 $\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$



Sfazio di taglio / sfazio trasversale
modulo di taglio
 $\tau = G \epsilon$
 $\epsilon = \frac{\Delta \alpha}{\alpha}$



Volume V
compressione
uniforme
Modulo di compressibilità
pressione $P = B \frac{\Delta V}{V}$
o: $P = \frac{1}{K} \frac{\Delta V}{V}$

Relazioni fra i diversi moduli elastici:

Si definisce il coefficiente di Poisson $\nu = -\frac{\epsilon_{tras.}}{\epsilon_{long.}}$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\nu = \frac{E}{2G} - 1$$

$0 < \nu < 0.5$ ma esistono anche materiali con $\nu < 0$!
→ si gonfiano quando si allungano.

Esercizio 1

si applica su una sbarra di raggio $R = 9.5 \text{ mm}$ e di lunghezza $L = 81 \text{ cm}$, di modulo di Young $E = 200 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$ e limite di snervamento $2.5 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$, una forza di trazione di $F = 6.2 \cdot 10^4 \text{ N}$. Determinare:

- se si sorpassa il limite di snervamento
- l'allungamento della sbarra.

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{F}{\pi R^2} = 2.2 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2 < 2.5 \cdot 10^8!$$

$$\sigma = E \varepsilon = E \frac{\Delta l}{l}$$

$$\Delta l = \frac{\sigma l}{E} = 0.89 \text{ mm}$$

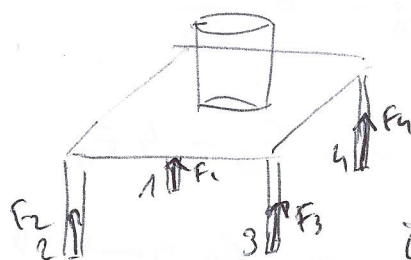
$$\frac{\Delta l}{l} = 0.11 \%$$

Esercizio 2

Un tavolo di legno ha quattro gambe di sezione $A = 1.0 \text{ cm}^2$ e di lunghezza $L = 1 \text{ m}$, tra cui una più lunga delle altre di 0.5 mm . Si appoggia un corpo sul tavolo ^(al centro) che, tramite il suo peso, rende il tavolo orizzontale. Qual'è il peso sopportato da ogni gamba?

$$E_{\text{legna}} = 1.3 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

La massa del tavolo + corpo è uguale a 290 kg .



$$L_1 = L_2 = L_3 = 1.0 \text{ m}$$

$$L_4 = 1.0005 \text{ m}$$

il tavolo è orizzontale $\rightarrow$ le gambe si accorciano di $\Delta L_1 = \Delta L_2 = \Delta L_3 = \Delta L_4 - \frac{0.5 \text{ mm}}{d}$

$$\Delta L_4 = \Delta L_3 + d$$

$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta L}{L} \rightarrow \frac{F_4 L_4}{AE} = \frac{F_3 L_3}{AE} + d$$

con l'approssimazione $L_3 = L_4$ e l'equilibrio delle forze:

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 - Mg = 0$$

$$3F_3 + F_4 - Mg = 0$$

$$\rightarrow (Mg - 3F_3) \frac{L}{AE} = \frac{F_3 L}{AE} + d$$

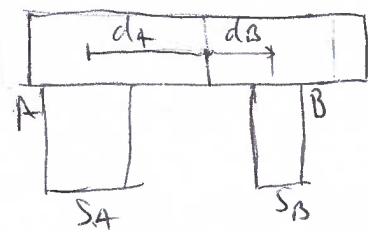
$$F_3 = \frac{Mg}{4} - \frac{AEd}{4L}$$

$$F_3 = 548 \text{ N}$$

$$F_4 = 1200 \text{ N}$$

Esercizio 3

Un tavolo, orizzontale, è sostenuto da 2 gambe di stessa lunghezza, ma sezione e modulo di Young diversi tale che $S_A = 2S_B$ e $E_A = 2E_B$. Come si



dove ripartire il peso per mantenere il tavolo orizzontale? a quale distanza (relativa) si devono trovare le gambe dal centro di massa del tavolo?

• • $L_A = L_B \rightarrow$ vogliamo quindi $\Delta L_A = \Delta L_B$

$$\frac{F_A}{S_A} = E_A \frac{\Delta L_A}{L_A}, \quad \frac{F_B}{S_B} = E_B \frac{\Delta L_B}{L_B}$$

$$\frac{F_A L_A}{S_A E_A} = \frac{F_B L_B}{S_B E_B} \rightarrow F_A = 4 F_B$$

La gamba A sopporta 80% del peso e la gamba B 20%.

• Scriviamo la somma dei momenti delle forze intorno ad un asse che passa per il centro di massa:

$$d_A F_A = d_B F_B \rightarrow d_B = 4 d_A$$

Esercizio 4

Una sbarra omogenea AB, di sezione S e lunghezza l , è posta su un piano orizzontale con un estremo B vincolato da un supporto fisso. All'estremo libero A viene applicata una forza costante F e distribuita uniformemente sulla sezione. Determinare la variazione di lunghezza nei due casi:

- in presenza di vincolo in B
- in assenza di vincolo in B.



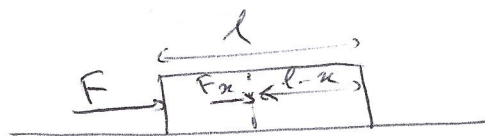
• con il vincolo f la forza si trasmette lungo la sbarra: $\frac{\Delta l_1}{l} = \frac{\sigma}{E}$, $\Delta l_1 = \frac{lF}{ES}$.

• Senza vincolo, la sbarra si muove con moto uniformemente accelerato. La sbarra si deforma in A ma non in B, e possiamo calcolare la deformazione di ogni elemento dx della sbarra.

L'accelerazione del centro di massa vale $a = \frac{F}{m} = \frac{F}{\rho l S}$

dove ρ è la densità.

in x , la forza che agisce sull'elemento di lunghezza $(l-x)$



si scrive $F_x = m_x a = \rho S(l-x) \frac{F}{\rho l S} = F(1 - \frac{x}{l})$

L'elemento di lunghezza dx alla posizione $(l-x)$ si deforma quindi della quantità:

$$d\zeta = \frac{F_x}{ES} dx = \frac{F}{ES} \left(1 - \frac{x}{l}\right) dx$$

La variazione totale di lunghezza della sbarra è data da:

$$\Delta l_2 = \int_0^l d\zeta = \int_0^l \frac{F}{ES} \left(1 - \frac{x}{l}\right) dx$$

$$\Delta l_2 = \frac{lF}{2ES}$$

sia la metà che nel primo caso.