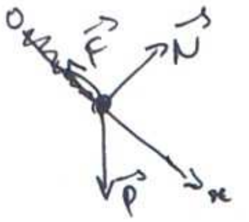
Correzione esame di Fisica I del 23/07/2014

1. Problema di meccanica.

1.



equilibrio : $\vec F + \vec N + \vec P = 0$

$$\vec F = -k(l - l_0)\,\vec e_x$$

$$\vec P = mg(\sin\alpha\,\vec e_x - \cos\alpha\,\vec e_y)$$

$$\vec N = N\,\vec e_y$$

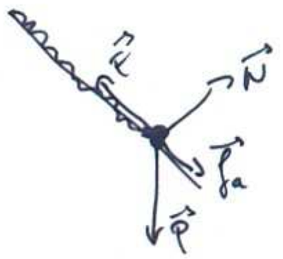
2. a l'equilibrio, $l = l_{eq}$

$$\rightarrow \begin{cases} -k(l_{eq} - l_0) + mg\sin\alpha = 0 \\ N - \cos\alpha\, mg = 0 \end{cases}$$

$$l_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}\sin\alpha$$

Molla in espansione + attrito.

1.



2. M immobile → equilibrio

$$\vec F + \vec N + \vec P + \vec f_a = 0$$

$$\begin{cases} -k(l - l_0) + mg\sin\alpha + f_a = 0 & \text{(I)} \\ -mg\cos\alpha + N = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

$$\text{(I)} \rightarrow f_a = k(l - l_0) - mg\sin\alpha = k\left(l - l_0 - \frac{mg}{k}\sin\alpha\right)$$

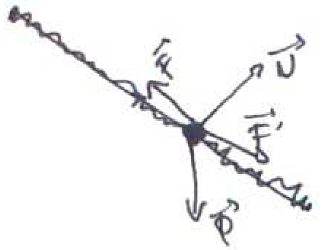
$$f_a = k(l - l_{eq})$$

3. $f_a \leq \mu_s N$ e (II) $\rightarrow N = mg\cos\alpha$

$$\rightarrow k(l - l_{eq}) \leq \mu_s mg\cos\alpha \rightarrow l \leq l_{eq} + \mu_s mg\cos\alpha$$

$$\rightarrow \boxed{l_c = l_{eq} + \mu_s \frac{mg}{k}\cos\alpha}$$

Massa attaccata a due molle

1. 

N.B. il verso di $\vec{F}$ e $\vec{F'}$ dipende di l_0, l_0', k e k' che non conosciamo.

$$\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{e}_x$$

$$\vec{F'} = k'(l' - l_0')\vec{e}_x \quad \text{(perché molla orientata all'incontrario)}$$

$$\vec{P} = mg(\sin\alpha\,\vec{e}_x - \cos\alpha\,\vec{e}_y)$$

$$\vec{N} = N\vec{e}_y$$

con $l = x$, $l' = L - x$.

2. $\vec{P}$ forza conservativa $\quad E_{p(\vec{P})} = mg(L-x)\sin\alpha = -mgx\sin\alpha + c$

$\vec{F}$, $\vec{F'}$ forze conservative $\quad E_p(\vec{F}) = \frac{1}{2}k(x - l_0)^2$

$$E_{p(\vec{F'})} = \frac{1}{2}k'(L - x - l_0')^2$$

3. $$E_p(x) = E_{p(\vec{P})} + E_{p(\vec{F})} + E_{p(\vec{F'})}$$

$$= -mgx\sin\alpha + \frac{1}{2}k(x - l_0)^2 + \frac{1}{2}k'(L - x - l_0')^2$$

N.B. mancava il segno $-$ davanti all'energia potenziale gravitazionale nel testo di esame. Sarà preso in considerazione nella correzione dei compiti.

All'equilibrio, $\frac{dE_p}{dx}(x_{eq}) = 0$

$$\rightarrow \; mg\sin\alpha + k(x_{eq} - l_0) - k'(L - x_{eq} - l_0') = 0$$

$$x_{eq}(k + k') = mg\sin\alpha + kl_0 - k'(l_0' - L)$$

$$x_{eq} = \frac{mg\sin\alpha + kl_0 - k'(l_0' - L)}{k + k'}$$

La posizione è stabile.

4. M oscilla intorno alla posizione di equilibrio.

Conservazione dell'energia meccanica $E_m = E_c + E_p = \text{cte}$

$$\frac{dE_m}{dt} = 0$$

$$\frac{1}{2}m\ddot{x}^2 + E_p = c$$

$$m\ddot{x}.\cancel{\dot{x}} - mg\sin\alpha\,\cancel{\dot{x}} + k(x - x_0).\cancel{\dot{x}} + k'(L - x - l_0').(-\cancel{\dot{x}}) = 0$$

$\rightarrow$

$$\ddot{x} + \frac{k+k'}{m}x = g\sin\alpha + \frac{k l_0}{m} - \frac{k'(l'_0 - L)}{m}$$

della forma $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = B$

5. con $\omega^2 = \frac{k+k'}{m}$ e $B = g\sin\alpha + \frac{k l_0}{m} - \frac{k'(l'_0 - L)}{m}$

6. ω è la pulsazione $[\omega] = s^{-1}$

$\frac{B}{\omega^2} = x_{eq}$ $\qquad [B] = L \cdot s^{-2}$

soluzione della forma : - soluzione generale con il secondo membro $= 0$

$\rightarrow x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

+ soluzione particolare della stessa forma del secondo membro = cte.

$\rightarrow x(t) = x_{eq} + A\cos(\omega t + \phi)$.

2. Problema sulle onde.

1. $\lambda = 12$ cm , $\lambda = \frac{v}{\nu}$ $\qquad v = \lambda\nu = 1.44$ m/s.

2. $d_{AS} = 24$ cm $= 2\lambda$

$d_{BS} = 30$ cm $= 2.5\lambda$

$d_{CS} = 42$ cm $= 3.5\lambda$

A in fase con il moto di S, B e C in opposizione di fase.

A e B, A e C in opposizione di fase, B e C in fase.

Problema di termodinamica

Rendimento di un ciclo reversibile triangolare

Ricordiamo che il rendimento η di un motore termico è definito dal rapporto del lavoro prodotto all'esterno e dalla somma di tutte le quantità di calore positive ricevute durante il ciclo.

Consideriamo una mole di un gas perfetto monoatomico che subisce il ciclo triangolare di trasformazione così descritto.

1. Dare l'espressione dei valori delle capacità specifiche C_V e C_P per questo gas.

gaz parfait monoatomique $C_V = \dfrac{3}{2}R$ e $C_P = \dfrac{5}{2}R$

2. Calcolare in funzione di V_0 e P_0, le temperature T_A, T_B e T_C di ogni stato A, B e C.

$T_A = \dfrac{P_0V_0}{R}$, $T_B = \dfrac{3P_0V_0}{R}$ e $T_C = \dfrac{2P_0V_0}{R}$

3. Determinare le quantità di calore e i lavori scambiati fra il gas e l'esterno durante le trasformazioni AB e CA in funzione di P_0V_0.

$$W_{AB} = 0\ ,\ W_{CA} = -P_0(V_0 - 2V_0) = P_0V_0$$

$$Q_{AB} = C_V(T_B - T_A) = \frac{3}{2}(3P_0V_0 - P_0V_0) = 3P_0V_0$$

$$Q_{CA} = C_P(T_A - T_C) = \frac{5}{2}(P_0V_0 - 2P_0V_0) = -\frac{5}{2}P_0V_0$$

Studio della trasformazione BC

4. Dimostrare che il segno del calore scambiato rimane sempre uguale durante i processi AB e CA.

da A a B $\delta Q = C_V dT$ la temperatura aumenta e rimane inferiore a T_B quindi $\delta Q > 0$

da C a A $\delta Q = C_P dT$ la temperatura diminuisce e rimane superiore a T_A quindi $\delta Q < 0$

5. Scrivere l'equazione della retta (B, C) nel piano P, V

$P = aV + b$ con $3P_0 = aV_0 + b$ e $P_0 = 2aV_0 + b \to P = -\dfrac{2P_0}{V_0}V + 5P_0$

5. Determinare il lavoro scambiato durante la trasformazione BC in funzione di P_0V_0.

$$\delta W_{BC} = -PdV = \left(\frac{2P_0}{V_0}V - 5P_0\right)dV \to W_{BC} = \left[\frac{P_0}{V_0}V^2 - 5P_0V\right]_{V_0}^{2V_0} = -2P_0V_0$$

6. Calcolare δQ, il calore scambiato durante la trasformazione infinitesimale lungo BC quando il volume passa da V a $V + dV$, (si può scrivere δQ in funzione di dV solamente. Si ricordi che dall'equazione di stato si può scrivere : $RdT = PdV + VdP$)

$\delta Q = C_V dT + PdV = \dfrac{3}{2}(PdV + VdP) + PdV$ anche : $dP = -\dfrac{2P_0}{V_0}dV$, quindi $\delta Q = \dfrac{5}{2}PdV - \dfrac{3P_0V}{V_0}dV = \left(-\dfrac{8P_0V}{V_0} + \dfrac{25}{2}P_0\right)dV$

7. In base ai punti precedenti, dedurre che esiste lungo BC un punto D (si noti V_D il volume corrispondente) in cui lo scambio di calore cambia di segno. Dimostrare che $V_D = \frac{25}{16}V_0$.

Il punto D corrisponde al punti in cui δQ diventa 0. Dalla domanda 6 si trova : $V_D = \dfrac{25}{16}V_0$.

Calcolo del rendimento

8. Calcolare la somma di tutte le quantità di calore positive in funzione di P_0V_0.

$$\sum Q = Q_{AB} + Q_{BD} \text{ con } Q_{AB} = 3P_0V_0 \text{ e } Q_{BD} = \left[-\frac{8P_0}{V_0}\frac{V^2}{2} + \frac{25}{2}P_0V\right]_{V_0}^{V_D} = \frac{324}{256}P_0V_0 = \frac{81}{64}P_0V_0$$

$$\sum Q = \frac{273}{64}P_0V_0$$

9. Calcolare il rendimento η di questo motore.

$\eta = \dfrac{-W_{tot}}{\sum Q}$ avec $W_{tot} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} = -2P_0V_0 + P_0V_0 = -P_0V_0 < 0 \to \eta = \dfrac{64P_0V_0}{273P_0V_0} = 0.234$