Centro di massa

Una particella puntiforme ha una massa m, e tutti le forze che agiscono sulla particella si applicano al punto della particella. La particella ha solamente un moto di traslazione.
Un sistema di particelle o un corpo solido puo effetuare una rotazione insieme alla translazione. Ma un punto del sistema di particelle segue sempre un moto di translazione: è il centro di massa. Il centro di massa è il punto che si muove come se tutta la massa fosse concentrata il quel punto e come se fosse il punto d'azione di tutte le forze esterne. Le forze interne, per principio di azione e reazione, si cancellano due a due e non invervengono della dinamica del sistema di particelle. Un corpo solido puo essere considerato come un continuo di particelle.

$$x_{CdM} = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} d$$

Per un sistema di N particelle il centro di massa si definisce secondo la relazione :

$$\vec{r}_{CdM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

$$x_{CdM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i x_i, \quad y_{CdM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i y_i, \quad z_{CdM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i z_i$$

Un corpo rigido di massa *M* contienne un grande numero di particelle e puo essere considerato come una distribuzione.

$$x_{CdM} = \frac{1}{M}\int x\,dm\,, \quad y_{CdM} = \frac{1}{M}\int y\,dm\,, \quad z_{CdM} = \frac{1}{M}\int z\,dm$$

Se la massa è uniformemente distribuita, la massa volumica (densità) si scrive:

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V} \quad e \quad x_{CdM} = \frac{1}{V}\int x\,dV \;....$$

Se il corpo contiene elementi si simmetria (punto, asse…), il centro di massa sara localizato sul elemente di simmetria. Per esempio, il CdM di una sfera si trovo nel suo centro, il CdM di un cilindro si trovo sull'asse centrale …

Seconda legge di Newton per un sistema di particelle

Il centro di massa segue un moto di traslazione come se fosse una particella puntiforme.

$$\vec{r}_{CdM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + ... + m_N\vec{r}_N}{M}, \qquad M\,\vec{r}_{CdM} = m_1\vec{r}_1 + ... + m_N\vec{r}_N$$

$$M\,\frac{d\vec{r}_{CdM}}{dt} = m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + ... + m_N\frac{d\vec{r}_N}{dt}, \qquad M\,\vec{v}_{CdM} = m_1\vec{v}_1 + ... + m_N\vec{v}_N$$

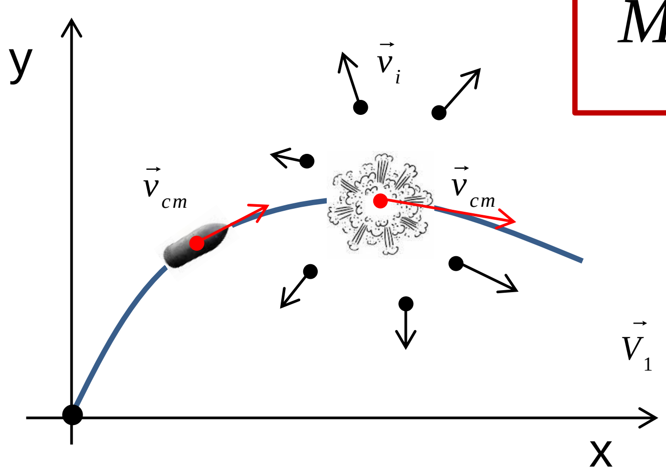
$$M\,\frac{d\vec{v}_{CdM}}{dt} = m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} + ... + m_N\frac{d\vec{v}_N}{dt}, \qquad M\,\vec{a}_{CdM} = m_1\vec{a}_1 + ... + m_N\vec{a}_N$$

$$M\,\vec{a}_{CdM} = \vec{F}_1 + ... + \vec{F}_N$$

F_1, ...F_N sono le forze esterne che agiscono su ogni particella

$$\boxed{M\,\vec{a}_{CdM} = \vec{F}_{ext}}$$

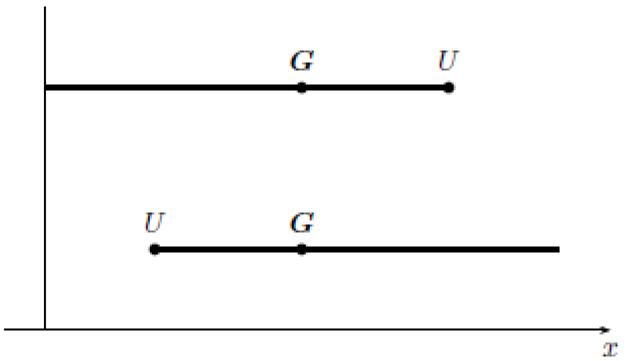
F_{ext} risultante delle forze esterne



Anche se delle forze interne fanno esplodere il corpo, il centro di massa delle particelle segue la sua traiettoria parabolica.

Un uomo di massa $m_1 = 75\,\mathrm{kg}$ si trova a poppa di una zattera di massa $m_2 = 200\,\mathrm{kg}$ e lunghezza $\ell = 10\,\mathrm{m}$ la cui prua si trova a contatto con un molo; l'uomo cammina sulla zattera per scendere sul molo; determinare la distanza fra la prua e il molo quando l'uomo ha raggiunto la prua.

Soluzione



Sul sistema materiale costituito dalla zattera e dall'uomo non agiscono forze esterne quindi il centro di massa del sistema, inizialmente fermo, resta fermo durante tutto il tempo in cui l'uomo U attraversa la zattera. Scelto come asse di riferimento una retta orientata avente origine sul molo (si veda la figura), si ha la situazione seguente. Inizialmente le ascisse dei centri di massa dell'uomo e della zattera sono

$$x_1 = \ell \quad , \quad x_2 = \frac{\ell}{2}$$

e quindi il centro di massa del sistema inizialmente si trova in un punto di ascissa

$$x_G = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1 + m_2}{m_1 + m_2}\frac{\ell}{2} .$$

Quando l'uomo si è spostato a prua la zattera si è allontanata dal molo di una distanza d; in questa situazione il centro di massa dell'uomo e quello della zattera si trovano nei punti di ascissa

$$x_1 = d \quad , \quad x_2 = d + \frac{\ell}{2}$$

quindi il centro di massa del sistema materiale è ora dato da

$$x_G = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 + m_2)d + \frac{m_2 \ell}{2}}{m_1 + m_2} .$$

Uguagliando questa espressione con quella trovata precedentemente si ottiene

$$\frac{2m_1 + m_2}{m_1 + m_2}\frac{\ell}{2} = \frac{(m_1 + m_2)d + \frac{m_2 \ell}{2}}{m_1 + m_2} \quad \longrightarrow \quad d = \frac{m_1 \ell}{m_1 + m_2} = 2.7\,\mathrm{m} .$$

Un corpo di massa $m = 12\,\mathrm{kg}$ si trova appoggiato ad un sostegno ad un'altezza h dal suolo; ad un certo istante il corpo esplode in due pezzi; un pezzo, di massa $m_1 = 9.2\,\mathrm{kg}$ viene trovato a una distanza $d_1 = 4.7\,\mathrm{m}$in direzione nord dal punto dell'esplosione; determinare il punto dove si trova il secondo pezzo.

Soluzione Sul corpo, inizialmente fermo, al momento dell'esplosione agisce la sola forza peso; quindi il suo centro di massa, per il teorema omonimo, deve essersi mosso sotto l'azione della forza peso e quindi trovarsi al suolo nel punto sulla verticale del punto dell'esplosione. Scelto tale punto come origine di un asse cartesiano orientato verso nord, il primo pezzo si trova nella posizione di ascissa $x_1 = d_1$; poiché il centro di massa ha ascissa nulla, la coordinata x_2 del secondo pezzo deve essere tale che sia

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0 \qquad \longrightarrow \qquad x_2 = -\frac{m_1}{m_2}\, d_1 = -15\,\mathrm{m}\ ;$$

il secondo pezzo, quindi, si trova a una distanza di 15 metri dal punto dell'esplosione, verso sud.

Quantità di moto

La quantità di moto è il prodotto della massa per la velocità: $\vec{p} = m\vec{v}$

Per un sistema di punti materiali, la quantità di moto totale è la somma delle quantità di moto di ogni particella : $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + ... \vec{p}_N = m_1\vec{v}_1 + ... + m_N\vec{v}_N$

$$\vec{P} = M\vec{V}_{CdM}$$

La seconda legge di Newton si scrive:

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

La rapidità di variazione del momento (quantita di moto) di una particella è proporzionale alla forza netta che agisce sulla particella e ha la stessa direzione di quella forza.

Conservazione della quantità di moto : quando su un sistema di punti materiali la risultante delle forze esterne è nulla, la quantità di moto è costante.

$$\vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \text{costante} \;, \quad \vec{P}_i = \vec{P}_f$$

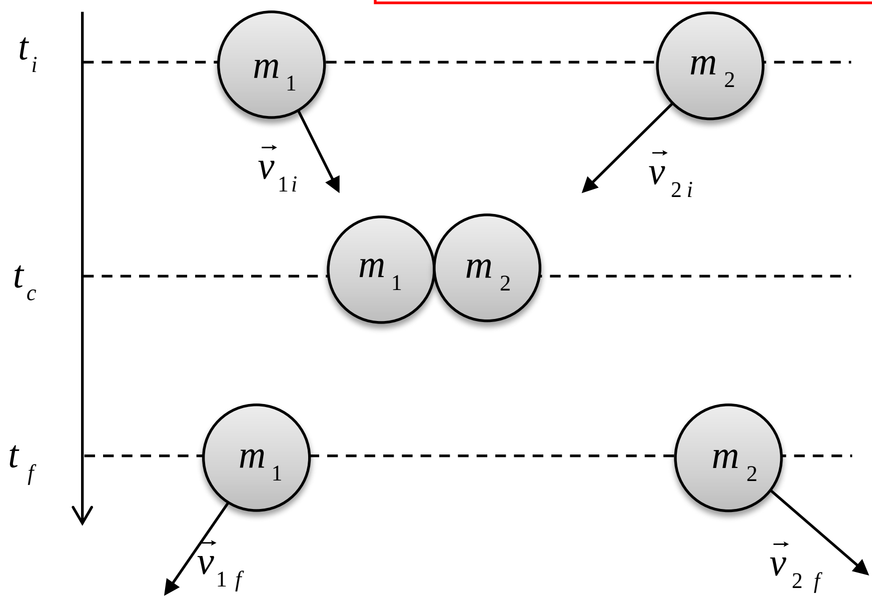
L'equazione è vettoriale : se in una direzione (ma non tutte) la risultante delle forze è nulla, allora la quantità di moto lungo quella direzione è costante.
Es.: la gravità in un moto bidimensionale.

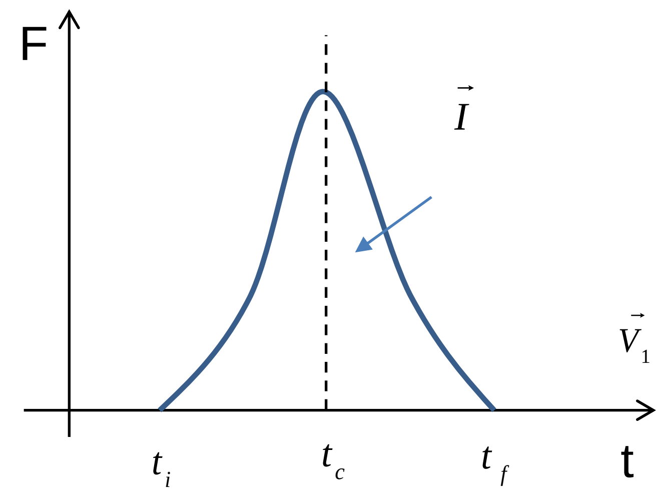
Urto

Un urto è un evento isolato nel quale una forza relativamente intensa agisce per un tempo breve su ciascuno dei due corpi che entrano in contatto fra loro.
Una forza d'urto non è necesseriamnete causata dal contatto ma puo essere una forza gravitazionale o nucleare. Al livello microscopico non c' è *contatto !*

Impulso della forza:

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\,dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\vec{P}}{dt}\,dt = \vec{P}_f - \vec{P}_i$$





L'impulso ***I*** è equivalente alla forza media moltiplicata per l'intervallo di tempo Δt

$$\vec{I} = \Delta\vec{P}$$

$$\Rightarrow \vec{I} = \frac{1}{\Delta t}\int \vec{F}\,dt \cdot \Delta t = \vec{F}_{media}\,\Delta t$$

Durante l'urto, le forza gravitazionale o di attrito sono debole rispetto alla forza d'urto e possono essere trascurati.

Per un sistema chiuso e isolato, non c'è scambio di massa o di energia con l'esterno, la **quantità di moto è conservata prima e dopo l'urto**.

Ci sono due tipi di urto :

-**urto elastico** : anche l'energia cinetica è conservata. L'energia cinetica di ciascuno corpo puo cambiare ma non l'energia cinetica totale.

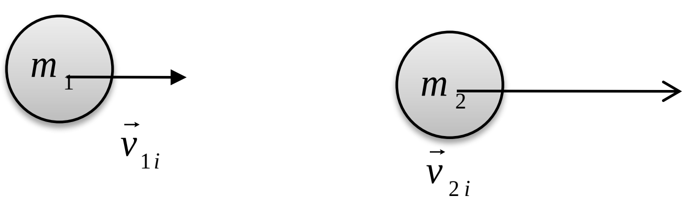
-**urto anelastico** : l'energia cinetica non è conservata : si crea energia termica, acoustica…. l'energia totale è sempre conservata.

In ogni caso, la velocità del centro di massa non cambia :

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{costante} = m\vec{v}_{CdM}$$

$$\vec{v}_{CdM} = \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{m_1 + m_2}$$

Esempio di collisione elastica 1D:



$$\begin{cases} m_1 v_{i,1} = m_1 v_{f,1} + m_2 v_{f,2} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{i,1} = \frac{1}{2} m_1 v_{f,1} + \frac{1}{2} m_2 v_{f,2} \end{cases}$$

$$v_{f,1} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{i,1} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{i,2}$$

$$v_{f,2} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{i,1} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{i,2}$$

$$m_1 = m_2 \Rightarrow v_{f,1} = v_{i,2}, \quad v_{f,2} = v_{i,1}$$

$$per \quad v_{i,2} = 0 :$$

$$m_1 << m_2 \Rightarrow v_{f,1} = -v_{i,1}, \quad v_{f,2} = 2\frac{m_1}{m_2} v_{i,1}$$

$$m_1 >> m_2 \Rightarrow v_{f,1} \approx v_{i,1}, \quad v_{f,2} = 2v_{i,1}$$

Un uomo getta orizzontalmente fuori dal bordo di una barca un oggetto di massa $m = 25\,\mathrm{kg}$ con una velocità di modulo $v = 12\,\mathrm{m/s}$ sapendo che la barca è inizialmente ferma, che la massa della barca è $m_1 = 50\,\mathrm{kg}$ e che la massa dell'uomo è $m_2 = 70\,\mathrm{kg}$ determinare la velocità della barca, con a bordo l'uomo, dopo il lancio.

Soluzione

Si tratta di un caso di esplosione del sistema materiale; considerando la barca, l'uomo e l'oggetto come un unico sistema materiale, non vi sono forze esterne agenti sul sistema; quindi la quantità di moto totale deve rimanere costante. Prima del lancio dell'oggetto fuori bordo i tre corpi erano fermi e quindi la quantità di moto totale iniziale era nulla; pertanto deve essere nulla anche la quantità di moto totale dopo il lancio. Vale quindi

$$(m_1 + m_2)\boldsymbol{V} + m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \qquad \longrightarrow \qquad \boldsymbol{V} = -\frac{m}{m_1 + m_2}\,\boldsymbol{v}$$

la velocità della barca ha verso opposto a quello della velocità con cui viene lanciato l'oggetto e ha modulo

$$V = \frac{m}{m_1 + m_2}\,v = 2.5\,\mathrm{m/s}\ .$$

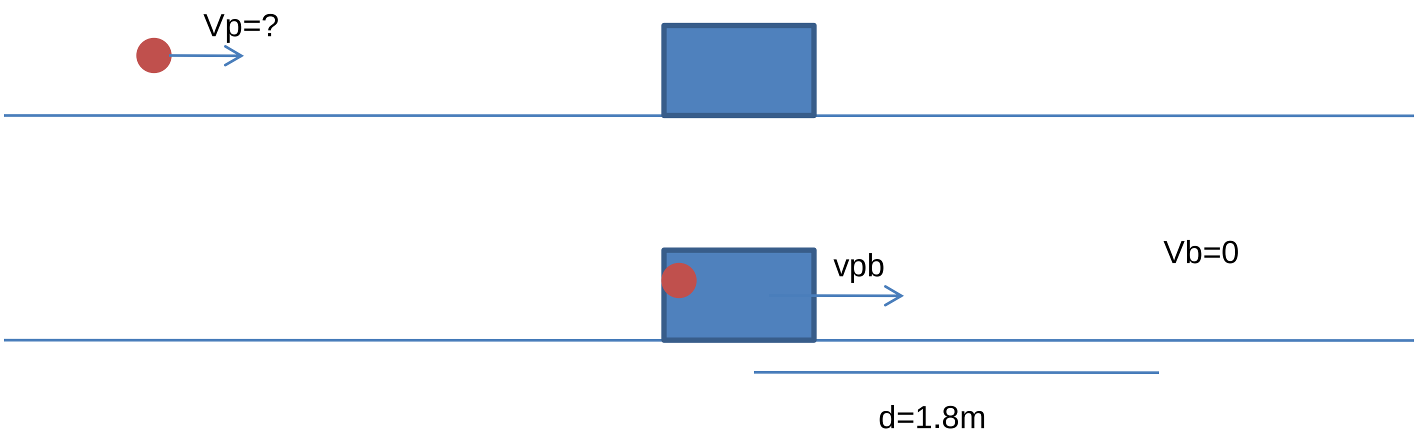
Un carro di massa $m_1 = 350\,\mathrm{kg}$ si muove con velocità $v_1 = 7.2\,\mathrm{m/s}$ quando un fanciullo, di massa $m_2 = 43\,\mathrm{kg}$, corre incontro al carro e vi salta su con una velocità avente verso opposto alla velocità del carro e modulo $v_2 = 3.7\,\mathrm{m/s}$; determinare il modulo v della velocità finale del carro con sopra il fanciullo.

Soluzione

Quando il fanciullo salta sul carro, non vi sono altre forze esterne agenti; quindi la quantità di moto totale si conserva; poiché dopo il salto carro e fanciullo hanno la stessa velocità, deve valere, tenendo conto dei versi delle velocità;

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v \qquad \longrightarrow \qquad v = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 6.0\,\mathrm{m/s}\ .$$

Si spara con una pistola un proiettile du massa mp=4.5 10^{-3} kg su un blocco immobile di mb=1.8 kg, appogiato su una superficie orizzontale. Il coefficiente di attrito dinamico fra il blocco e la superficie vale μ=0.2. Dopo l'urto, il proiettile rimane incastrato nel blocco, che si sposta di una distanza d=1.8 m prima di fermarsi. Determinare la velocita del proiettile prima che colpisca il blocco.



Conservazione della quantita di moto : $m_p v_p = (m_p + m_b) v_{pb}$

Conservazione del''energia dopo l'urto: $\frac{1}{2}(m_p + m_b) v_{pb}^2 = L_{att} = \mu (m_p + m_b) g d$

$$v_{pb} = \sqrt{2\mu g d} = 2.65\ m/s$$

$$v_p = \frac{(m_p + m_b)}{m_p} v_{pb} = 1062\ m/s$$

☞ **Es. 4** — Un vagone di massa $m_1 = 6.0 \cdot 10^3\,\mathrm{kg}$ si muove con velocità di modulo $v_1 = 3.5\,\mathrm{m/s}$ su un piano orizzontale; percorre quindi un dislivello di $h = 12\,\mathrm{m}$ e raggiunge un secondo vagone che stava viaggiando con velocità di modulo $v_2 = 6.7\,\mathrm{m/s}$ nella stessa direzione; dopo l'urto i due vagoni restano agganciati e continuano a muoversi con velocità iniziale di modulo $V = 9.5\,\mathrm{m/s}$ e finiscono per fermarsi dopo $t = 60\,\mathrm{s}$ a causa di una forza di attrito costante; determinare

a) la massa del secondo vagone;

b) la potenza sviluppata dalla F di attrito.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)V$$

$$m_1 \sqrt{v_1^2 + 2gh} + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)V$$

$$m_2 = \frac{m_1 \sqrt{v_1^2 + 2gh} - V}{(V - v_2)} = 13.310^3\,kg$$

$$P = \frac{L}{\Delta t} = \frac{-\Delta E_c}{\Delta t} = 14.5\,kW$$