

Particle Detectors

Lecture 9

11/04/15

a.a. 2017-2018

Emanuele Fiandrini

Radiazione di transizione: considerazioni per i rivelatori

Due to the dependence of TR on $\gamma = E/m$, it is evident that there is a wide momentum range (1–100 GeV/c) where electrons (resp. positrons) are the only particles producing transition radiation.

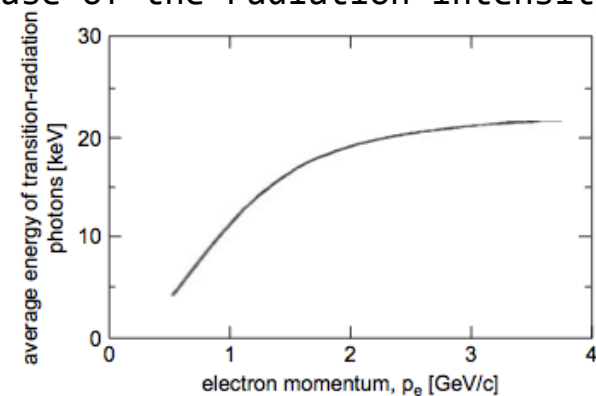
Kaons can also be separated from pions on the basis of TR in a certain momentum range (roughly 200–700 GeV/c) .

Protons start to emit at some 300 GeV, so e/p separation may be achieved up to hundreds of GeV (eg astroparticle experiments)

The attractive feature of transition radiation is that the energy radiated by TR photons increases with the Lorentz factor γ (i.e. the energy) of the particle, and is not proportional only to its velocity. Since most processes used for particle identification (energy loss by ionisation, time of flight, Cherenkov radiation, etc.) depend on the velocity, thereby representing only very moderate identification possibilities for relativistic particles ($\beta \rightarrow 1$), the γ -dependent effect of transition radiation is extremely valuable for particle identification at high energies.

An additional advantage is the fact that transition-radiation photons are emitted in the X-ray range. The increase of the radiated energy in transition radiation proportional to the Lorentz factor originates mainly from the increase of the average energy of X-ray photons and much less from the increase of the radiation intensity.

In Fig. the average energy of transition-radiation photons is shown in its dependence on the electron momentum for a typical radiator .



Particle Detectors: Particle Identification

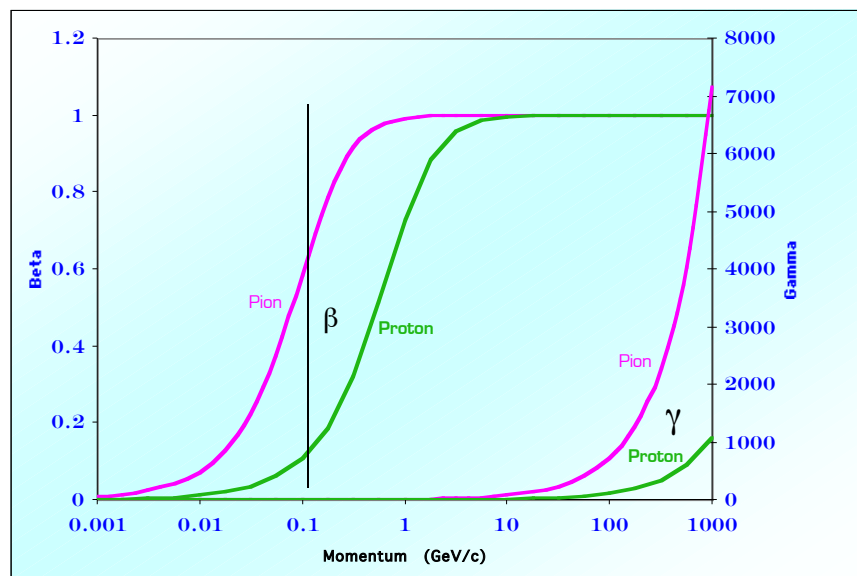
Cerenkov and Transition Radiation Detectors are Used primarily for Particle Identification

- At fixed momentum, Heavy particles radiate less than Light particles.
- Further: angular distribution of radiation varies with particle speed.

Cerenkov
Counters –
sensitive to β

$$\beta = v/c$$

$$= p/E$$



TRD Counters –
sensitive to γ

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$$

$$= E/m$$

Momentum (GeV/c)

E. Fiandrini Rivelatori di Particelle

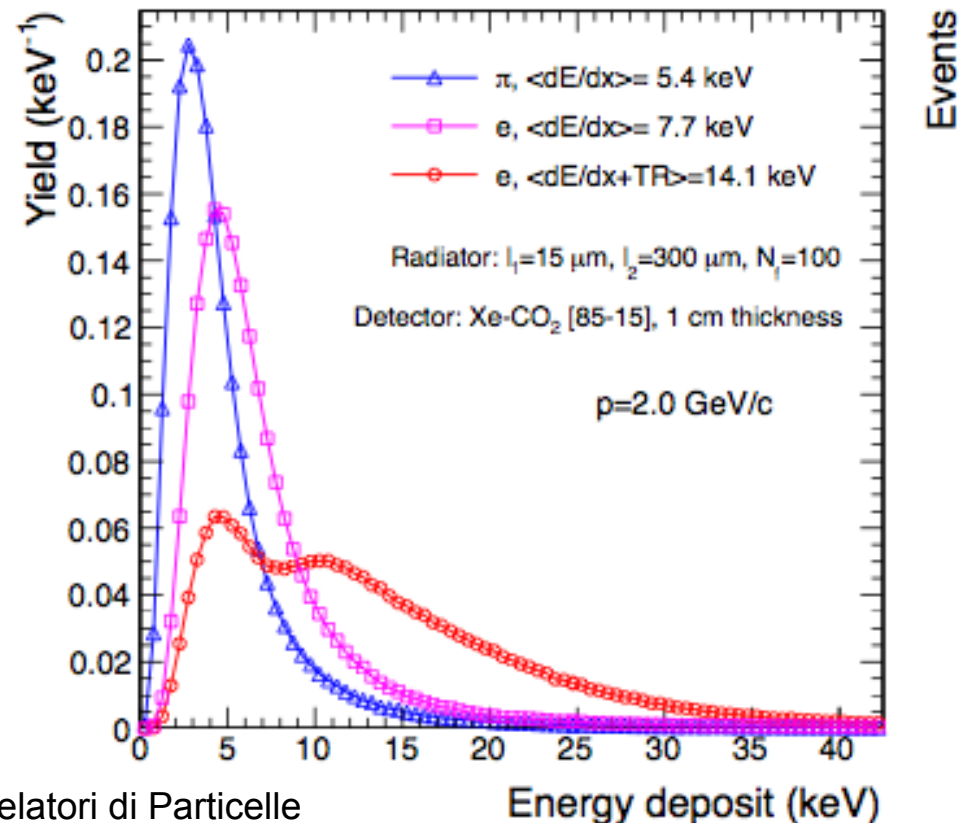
1718

It is important to emphasize that, due to the very small TR emission angle, the TR signal generated in a detector is overlapping with the ionization due to the specific energy loss dE/dx and a knowledge (and proper simulation) of dE/dx is a necessity for the ultimate understanding and modeling of any TRD. For pions, the energy loss in the gas is close to a Landau distribution due to ionization. For electrons, it is the sum of the ionization energy loss and the signal produced by the absorption of the TR photons.

X rays are detected by photoelectric absorption in different material with high Z (photoel absoption $\sim Z^5$) where ionization occurs too, typical material Xe/CO2.

The typical layout of a TRD detector is a sequence of low Z radiators, where TR is emitted, alternated to high Z absorbers where X-rays are absorbed and ionization by the incident particle occurs.

It is evident that due to the large tails in the energy loss spectrum for pions, the detector has to have many layers. In case the full charge signal is available the discrimination is done using either a normal mean, a truncated mean (discarding the highest measured value of the detector sets) or, preferably, a likelihood method.



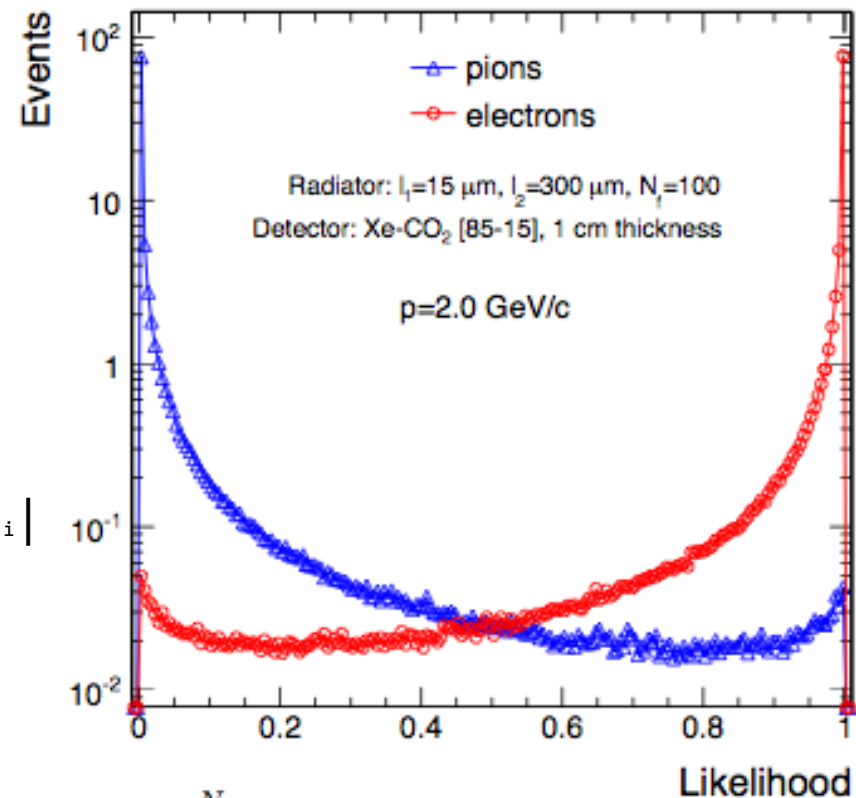
Radiazione di transizione

Likelihood distributions are constructed from the measured spectra of well identified particles (typically test beams). Taking these spectra (for each layer) as probability distributions for e^- ($P(E_i|e)$) and π ($P(E_i|\pi)$) to produce a signal of magnitude E_i , one constructs the likelihood (to be an e^-) as :

$$\text{likelihood} = \frac{P_e}{P_e + P_\pi}, \quad P_e = \prod_{i=1}^N P(E_i|e), \quad P_\pi = \prod_{i=1}^N P(E_i|\pi)$$

or, equivalently (also called log-likelihood) [51]:

$$\text{likelihood} = \sum_{i=1}^N \log \frac{P(E_i|e)}{P(E_i|\pi)}$$



Radiazione di transizione

The electron (or any other particle) identification performance of a TRD is quantified in terms of the pion efficiency at a given electron efficiency and is the fraction of pions wrongly identified as electrons.

The e- efficiency is the fraction of e- passing through the detector that are identified as electrons.

The pion efficiency depends strongly on the electron efficiency, which is a parameter that can be adjusted at the stage of the data analysis.

It is chosen such that the best compromise between electron efficiency and purity is reached. Usually 90% electron efficiency is the default value used to quote a TRD rejection power

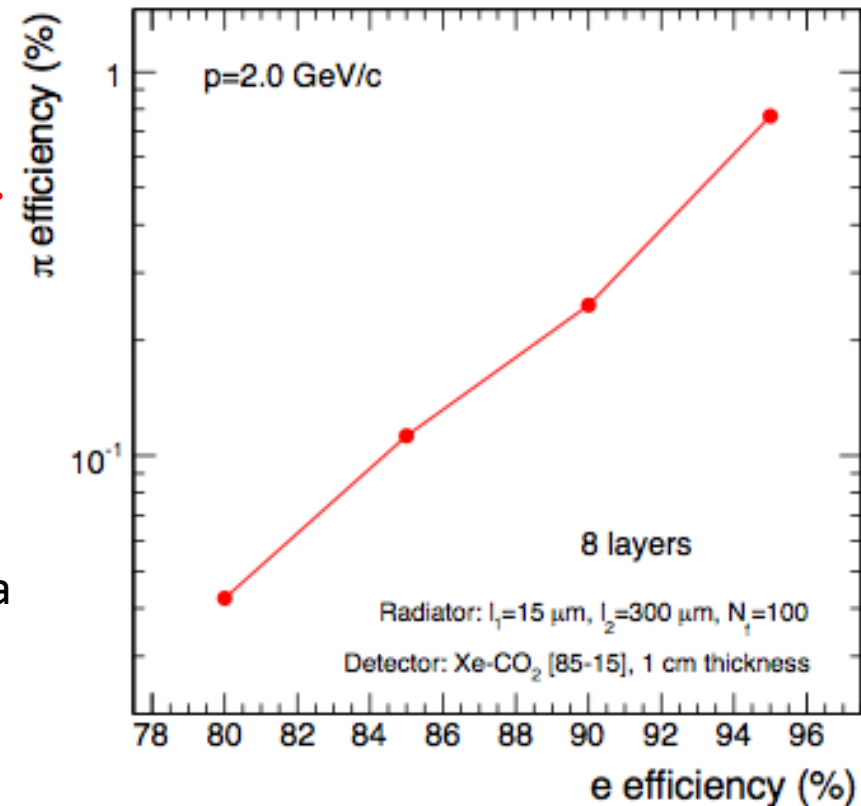


figure 7: Pion efficiency as a function of the electron efficiency (left panel).
number of layers (right panel).

Radiazione di transizione

Pion efficiency depends on momentum.
The rejection power improves dramatically between 0.5 and 1 GeV/c and slightly up to 2 GeV/c as a result of the onset of TR production in this momentum range.

Beyond 2 GeV/c TR yield saturates and the rejection power decreases as a consequence of the relativistic rise of the ionization energy loss of pions.

While in detail this behavior depends on the specific choice of the radiator, it is a generic feature of the TRD pion rejection capability.

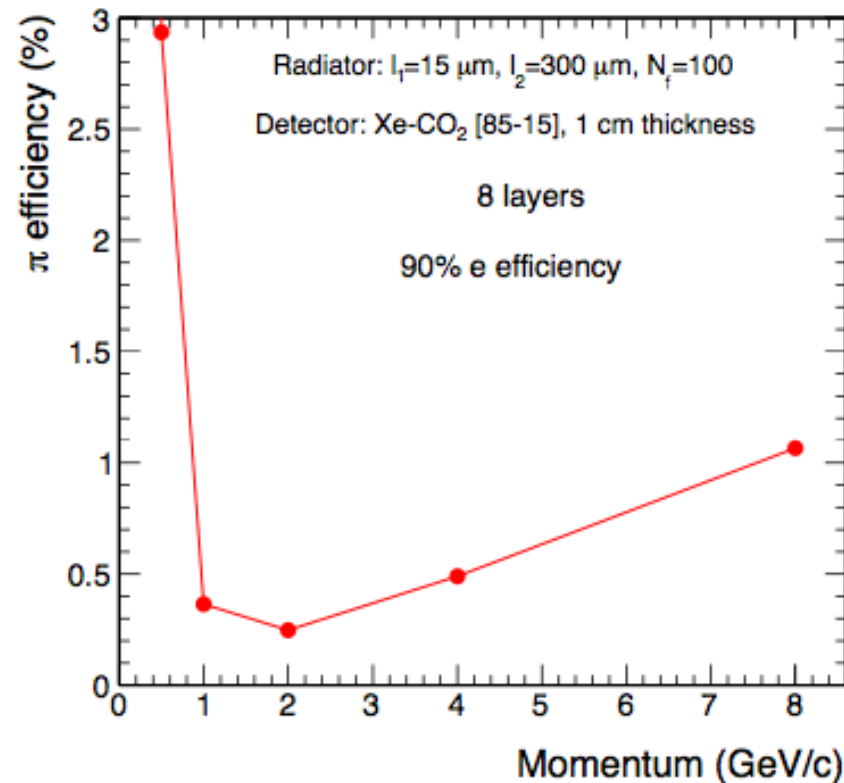


Figure 8: Pion efficiency as a function of momentum.

Radiazione di transizione: considerazioni per i rivelatori

The TRD is formed by a set of foils consisting of a material with an atomic number Z as low as possible. Because of the strong dependence of the photoabsorption cross section on Z ($\sigma_{\text{photo}} \propto Z^5$) the transition-radiation photons would otherwise not be able to escape from the radiator.

The transition-radiation photons have to be recorded in a detector with a high efficiency for X-ray photons. This requirement is fulfilled by a multiwire proportional chamber filled with krypton or xenon, i.e. gases with high atomic number for an effective absorption of X rays.

An obvious choice to detect transition radiation is a gaseous detector.

Affordability for large-area coverage, usually needed in (accelerator) experiments, is a major criterion.

In addition, a lightweight construction make gaseous detectors a widespread solution for TRDs (mandatory for space experiments). 8

Radiazione di transizione

The major factor in the performance of any TRD is its overall length. This is illustrated in Fig, which shows, for a variety of detectors, the pion efficiency at a fixed electron efficiency of 90% as a function of the overall detector length. The experimental data, covering a range of particle energies from a few GeV to 40 GeV, are rescaled to an energy of 10 GeV when possible.

Many recent TRDs combine particle identification with charged-track measurement in the same detector. This provides a powerful tool for electron identification even at very high particle densities.

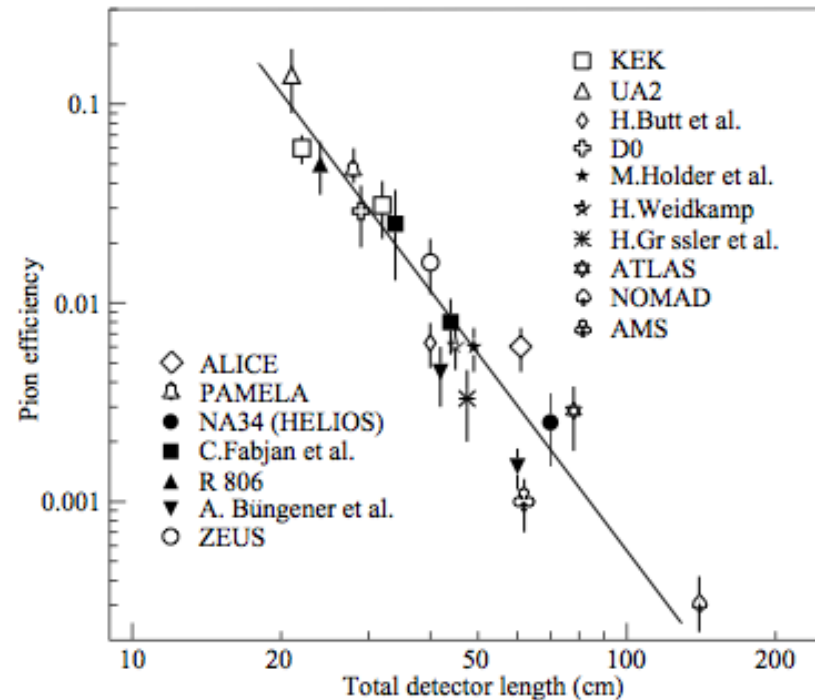


Figure 28.16: Pion efficiency measured (or predicted) for different TRDs as a function of the detector length for a fixed electron efficiency of 90%. The plot is taken from [102] with efficiencies of more recent detectors added [103].

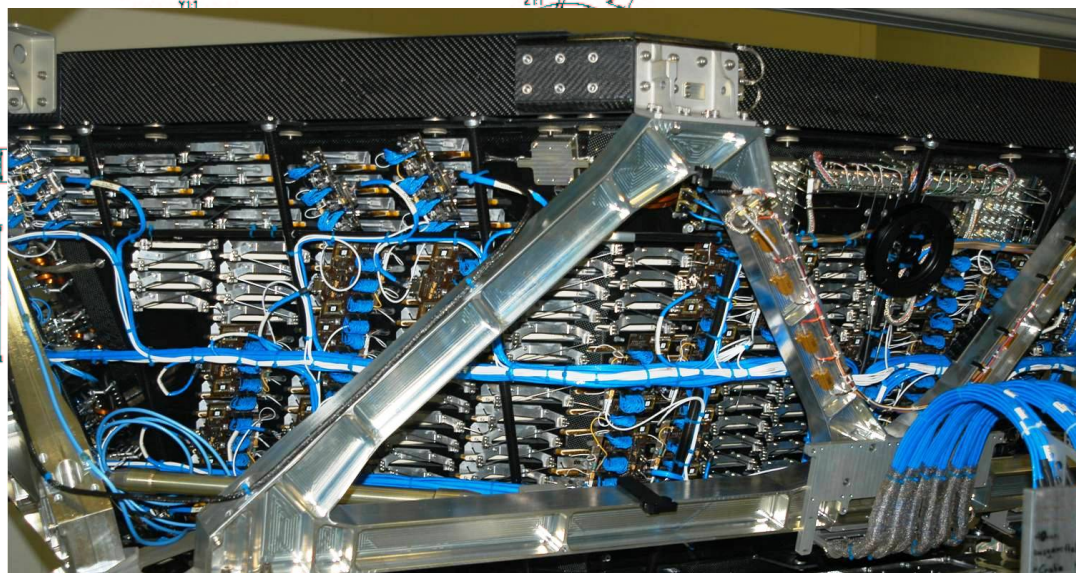
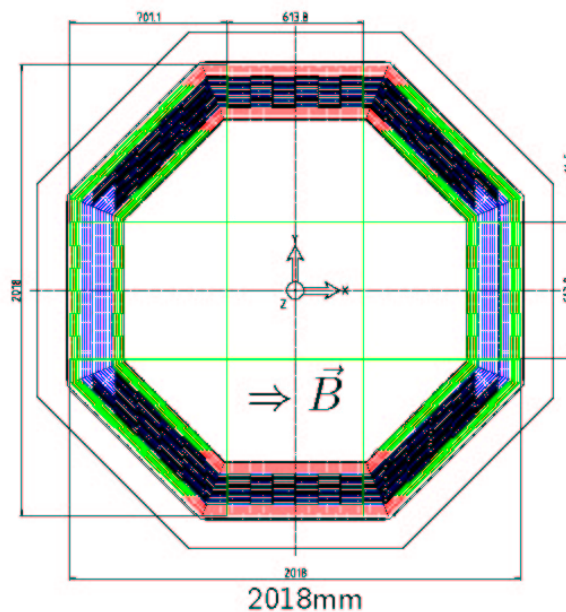
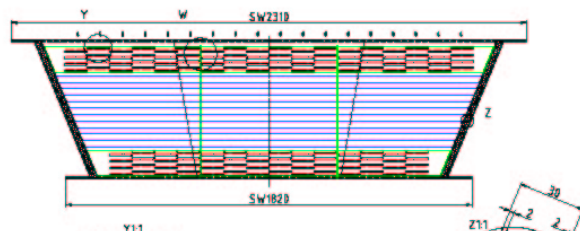
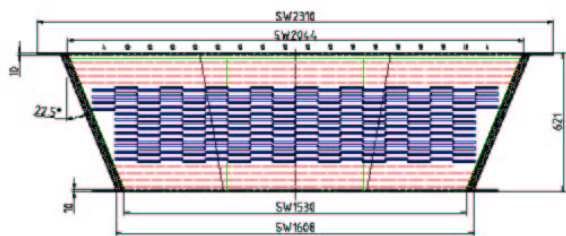
Radiazione di transizione

TRDs have been used and are currently being used or planned in a wide range of accelerator- based experiments, such as UA2 , ZEUS , NA31 , PHENIX , HE- LIOS , $D\bar{D}$, kTeV , H1 , WA89 , NOMAD, HERMES, HERA-B, ATLAS, ALICE, CBM and in astroparticle and cosmic- ray experiments: WIZARD, HEAT, MACRO, AMS, PAMELA, ACCESS.

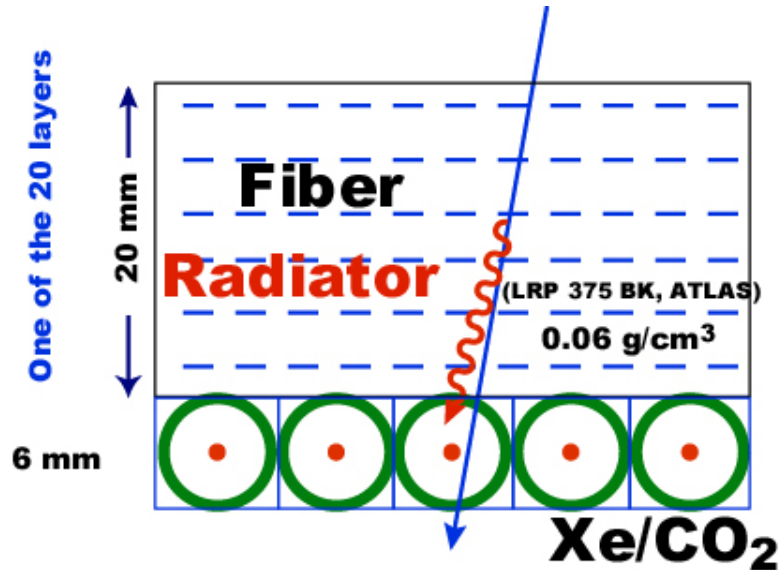
In these experiments the main purpose of the TRD is the discrimination of electrons from hadrons

AMS02 TRD

20 layers with 22mm radiator 6mm straw tube modules



TRD



A TRD is made usually of 2 components:

- Radiator where the photons are emitted
- photon and particle detectors where their energy deposit is measured

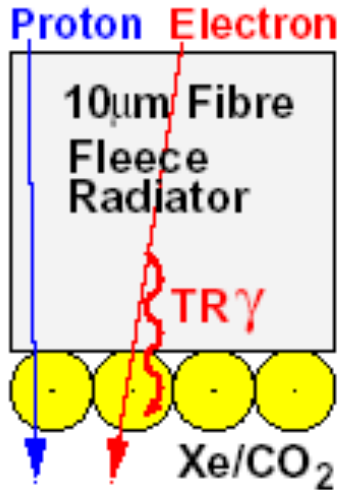
To increase the TR yield and minimize reabsorption of ph. in the radiator low, TRD are usually designed as a sandwich structure with alternating layers of radiators and photon detectors

Radiator: fleece fiber

Good photon (5–30KeV) detection: gas with high atomic number Z

The signal is the superposition of the dE/dX of the particle AND the deposited photon energy (if emitted)

TRD



- 20 layers 22 mm fleece-radiator
6mm straw-tubes Xe/CO₂(80/20)
- Tubewall 72µm Kapton-Al sandwich
- Wire 30µm W/au tensioned with 100g

**e^- , e^+ emit photons, protons do not in an energy interval
3-300 GeV**



- Pressure 1250 mbar
- Gas flow 1liter/h
- Gain 3000

- Modules 16 tubes
- 8 modules per gas-circuit

Event selection

•Single track event.

Secondary particles excluded.

Proton rejection

$$\frac{\text{Total number protons}}{\text{Selected protons}}$$

Electron efficiency

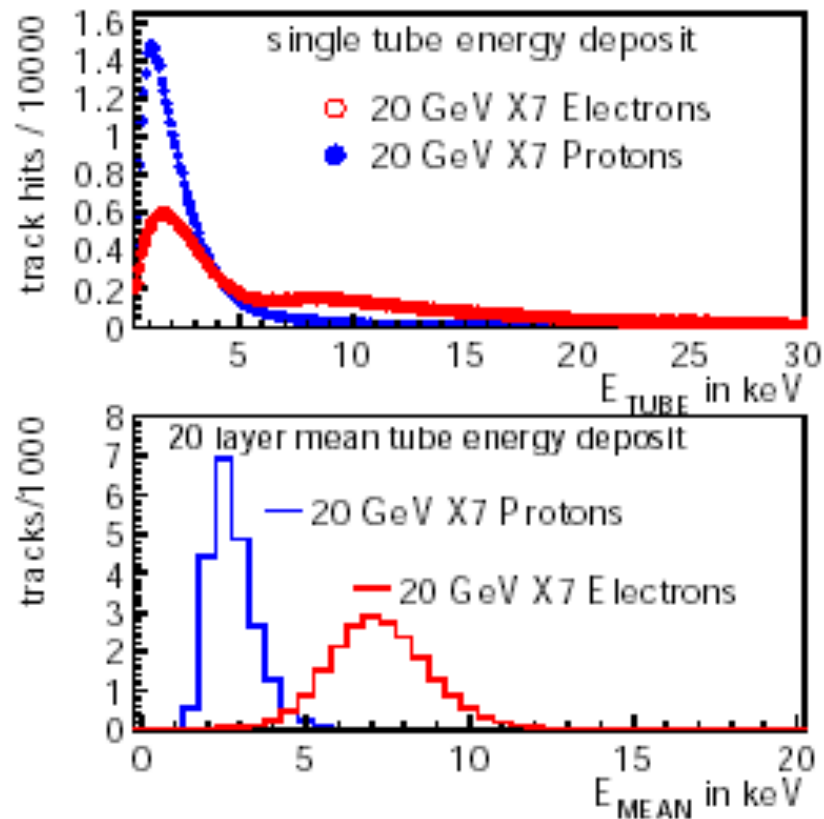
$$\frac{\text{Accepted electrons}}{\text{Total number of electrons}}$$



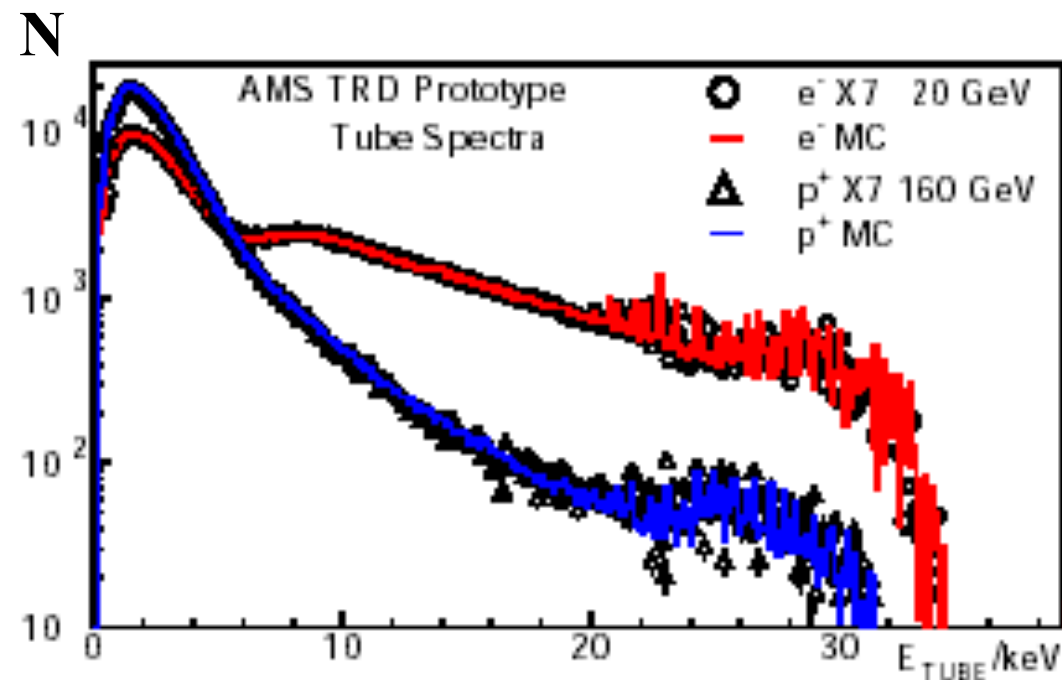
Measurement of proton rejection:

- Cluster counting Hit: $E_{\text{hits}} > 5-10 \text{ KeV}$, $N_{\text{hits}} > 6 \longrightarrow$ electron
 - Likelihood method energy deposit distribution normalized and for each hit $\longrightarrow P_{e,p}^i(E_i)$ prob. density function
- Combined probability $W_{e,p} = \prod_{i=1}^N P_{e,p}^i(E_i)$.

TRD beam test



TRD Beamtest Proton Rejection for 90% Electron efficiency



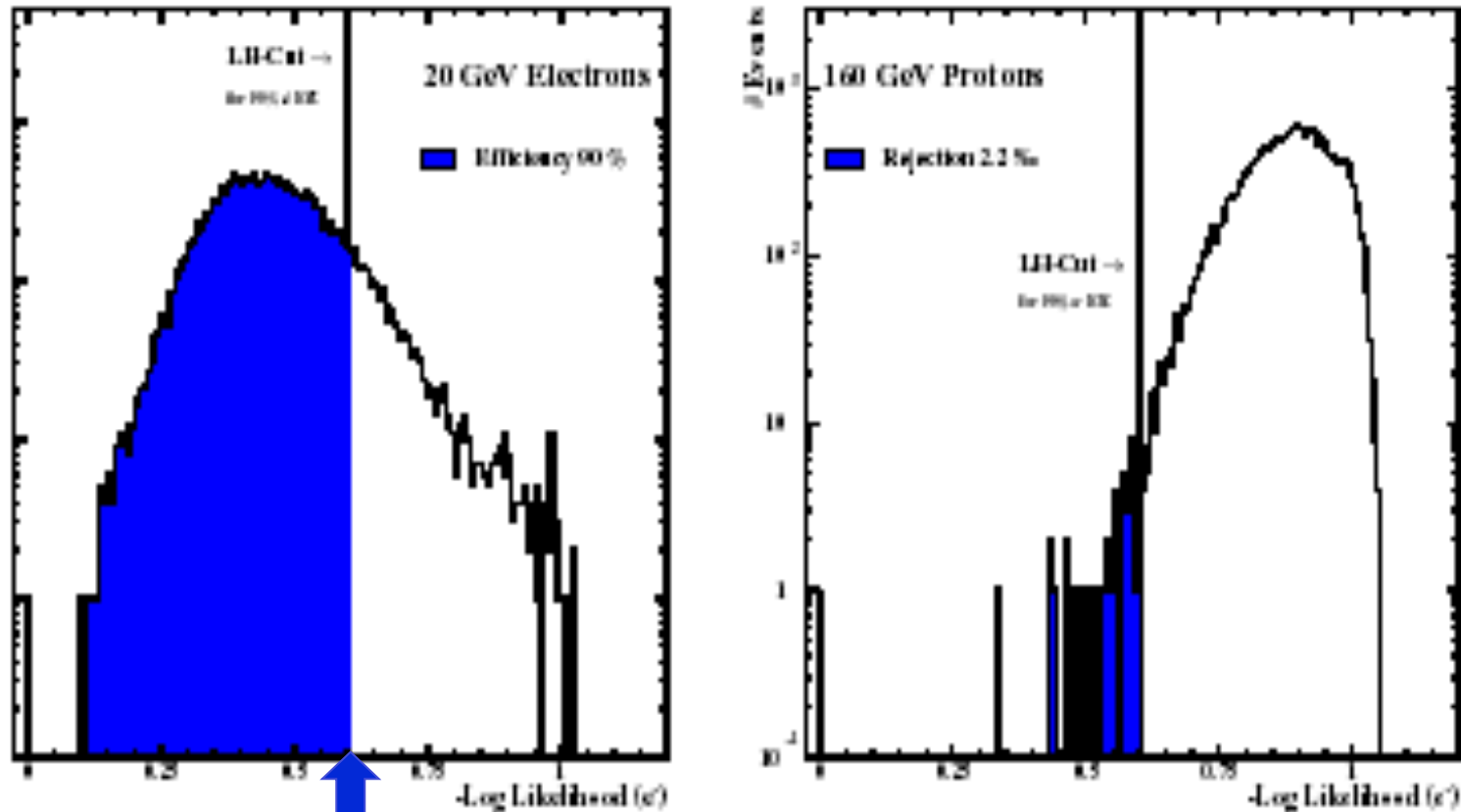
Single track preselection
with MC 90% efficiency
 p^+/e^- likelihood separation
with

$$\mathcal{L} = W_e / (W_e + W_p)$$

W_e, W_p
from single tube spectra

Likelihood cut

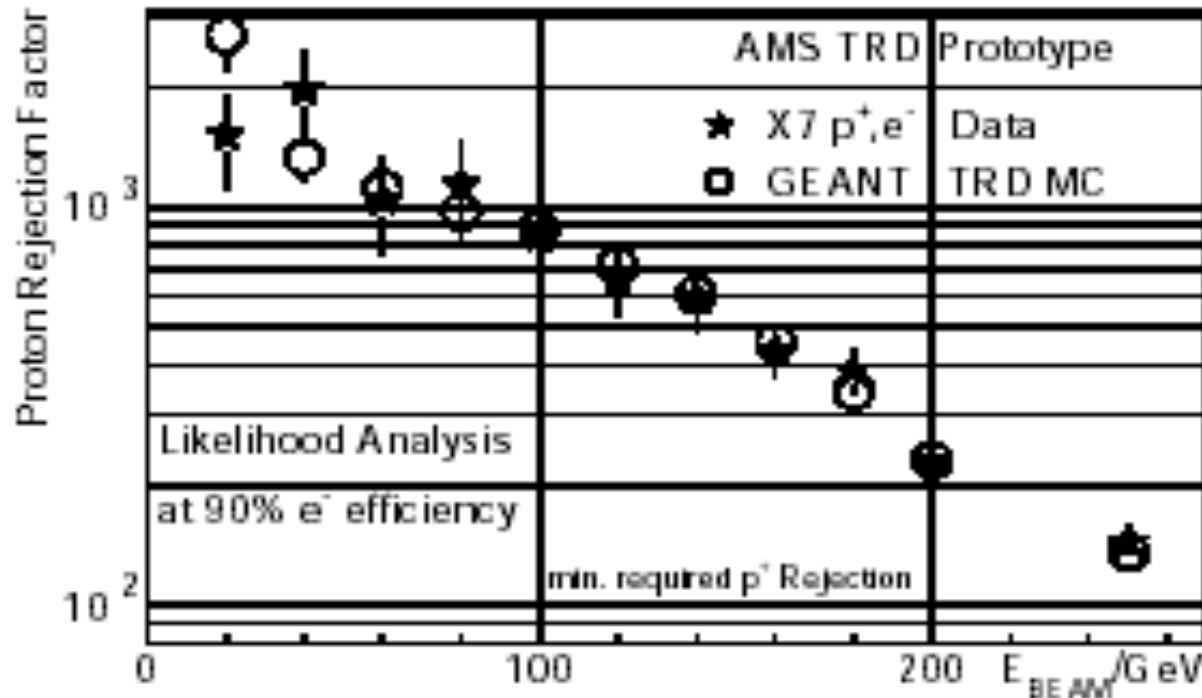
LH_{cut} Definition



Events with $\mathcal{L} = W_e / (W_e + W_p) < 0.6$ are light particles

TRD Testbeam

20 layer
prototype
tested with
 e^- , μ^- , π^+ , p^+



Proton rejection $>10^2$

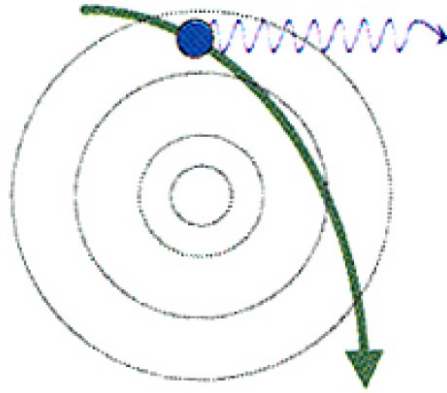
reached up to 250GeV with 90% electron efficiency

Processi radiativi

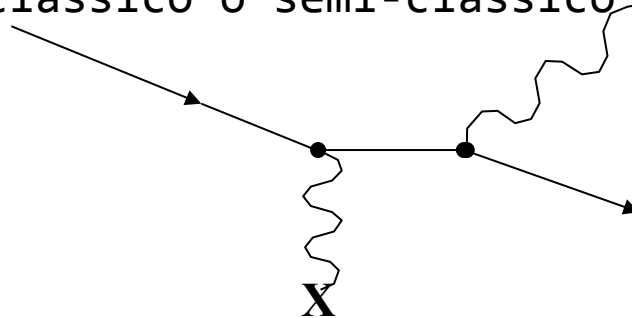
- Bremsstrahlung
- Interazioni fotoni-materia

Bremsstrahlung

La bremsstrahlung o radiazione di frenamento e' la radiazione associata con l'accelerazione di una particella carica in un campo elettrico.



La descrizione corretta e' quella quantistica poiche' possono essere emessi fotoni con energie paragonabili a quella della particella che emette, ma come nel caso della ionizzazione in molti casi si puo' usare un approccio classico o semi-classico (relativistico).



Particelle cariche emettono radiazione di brems quando attraversano un mezzo → processo di perdita di energia di cui va tenuto conto

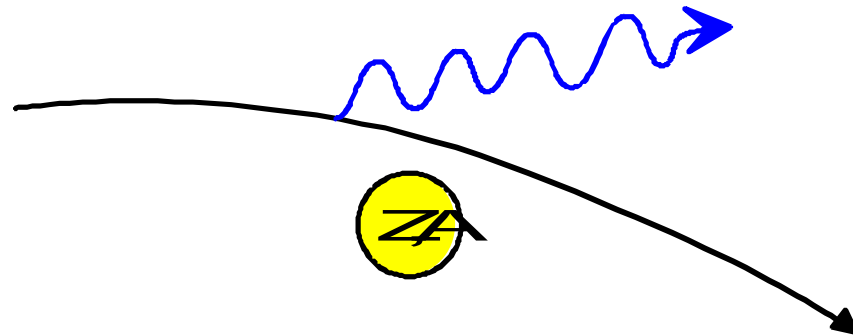
Bremsstrahlung

La particella incidente di alta energia viene accelerata dalla collisione col nucleo ed emette energia e.m.

Classicamente, la perdita di energia per collisioni col nucleo, come funzione del tempo è:

$$\frac{dE}{dt} = \left(\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \right) a^2$$

dove a è l'accelerazione.

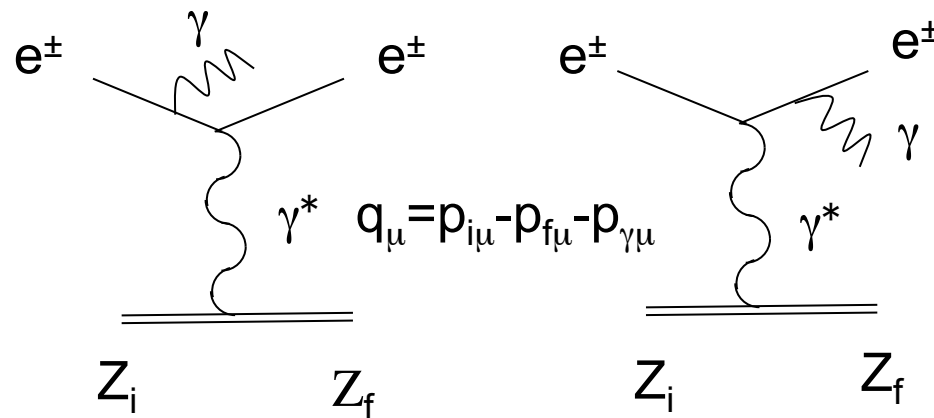


Brems e scattering multiplo

- Bisogna notare che il processo che da luogo alla brems e' l'urto delle particelle con i nuclei del mezzo attraversato.
- E' lo stesso processo responsabile dello scattering multiplo: la deviazione delle particelle incidenti
- Una particella che attraversa un mezzo perde energia ANCHE per emissione radiativa, mentre viene deviata e urta gli elettroni atomici. Se $\beta > 1/n$ emette anche luce cerenkov

Bremsstrahlung su nuclei

I diagrammi di Feynman all'ordine più basso che descrivono la Brems sono:



1. Dobbiamo scambiare un fotone virtuale con il nucleo per conservare il quadrimpulso.
2. L'interazione non dipende dal segno della carica della particella incidente $\rightarrow$ stessa sezione d'urto per particelle con la stessa $|Q|$, per es. $e^\pm$.

Relazione fra q e b

I fotoni hanno massa perche' sono virtuali. Il loro range e' dell'ordine di $b \sim h/q$

→ il momento minimo trasferito corrisponde a $b_{\max}$ classico: $b_{\max} \sim h/q_{\min}$

→ il momento max trasferito corrisponde ad un urto centrale classico: $b_{\min} \sim h/q_{\max}$

L'impulso minimo trasferito e' $q_{\min} = \hbar\omega m^2 c^3 / 2E_i E_f$

corrisponde al caso in cui l'e- nello stato finale e il fotone emesso viaggiano nella stessa direzione iniziale dell'e-

Brems: sez d'urto su Ze

La sezione d'urto differenziale esatta a livello di Born di un e- di alta energia che colpisce un nucleo di carica Ze e'

$$d\sigma = 4Z^2\alpha r_e^2 \cdot \frac{d\omega}{\omega} \cdot \frac{1}{E_i^2} [(E_i^2 + E_f^2 - \frac{2}{3}E_i E_f) (\ln \frac{2E_i E_f}{mc^2 \hbar \omega} - 1/2)]$$

= probabilita' di emettere un fotone di frequenza tra ω e $\omega+d\omega$ da parte di un e- di energia iniziale E_i e finale $E_f = E_i - \hbar\omega > 0$

Nel caso in cui la particella incidente ha $q = Z_1 e$ e massa M , nella sez d'urto compare un termine $Z_1^4 / (M/m_e)^2$

Sezione d'urto $\sim 1/M^2 \rightarrow$ importante solo per particelle leggere, cioe' $e^\pm$, ma anche μ a LHC

In approssimazione di Born, e' valida ad alte energie $E_i \gg mc^2$, dove l'effetto del campo di Coulomb del centro di scattering sull'e- entrante e uscente e' trascurabile, ie il nucleo "serve" solo a conservare il 4-momento durante il processo

Nel limite di basse frequenza dei fotoni emessi, $\hbar\omega \ll E_i \rightarrow E_i \approx E_f$

$$d\sigma \approx (16/3)Z^2\alpha r_e^2 \cdot \frac{d\omega}{\omega} \cdot (\ln \frac{2E_i^2}{mc^2 \hbar \omega} - 1/2) = (16/3)Z^2\alpha r_e^2 \cdot \frac{d\omega}{\omega} \cdot (\ln \frac{2mc^2 \gamma^2}{\hbar \omega} - 1/2)$$

Coincide con quella classica (a parte il fattore 1/2)

Bremsstrahlung su atomi

L'atomo, come centro di scattering, può essere considerato come centro di un potenziale la cui forma è

$$V = Ze/r - e\sum_j |\vec{r} - \vec{r}_j|^{-1}$$

Con $\vec{r}$ posizione dell'elettrone diffuso ed $\vec{r}_j$ posizione dell' j -esimo elettrone atomico

La presenza degli e^- atomici fa sì che sia necessario includere nel processo anche le transizioni atomiche e la ionizzazione durante lo scattering

La presenza degli e^- atomici è fattorizzata da fattori di forma (atomici) nella sezione d'urto differenziale che tengono conto dell'effetto di schermo degli e^- sulla carica nucleare Ze

Brems: sez d'urto differenziale

La sezione d'urto brems di un e- che colpisce un atomo che si ottiene e'

$$d\sigma = \Phi(\omega)d\omega = \alpha r_e^2 \cdot \frac{d\omega}{\omega} \cdot \frac{1}{E_i^2} [(E_i^2 + E_f^2)\phi_1 - \frac{2}{3}E_i E_f \phi_2] d\omega$$

Le ϕ_i sono i fattori di forma atomici, che fattorizzano la struttura dell'atomo (Ze + nuvola di e-), e dipendono da E_i , E_f e $\hbar\omega$ e non hanno in generale una forma semplice, se non nel caso di atomo completamente ionizzato o completamente schermato .

Nel caso di sistema di scattering di carica Ze, senza elettroni (atomo ionizzato), i fattori di forma si riducono a $\phi_1 = \phi_2 = Z^2 \phi_u$

con $\phi_u = 4 \ln\left(\frac{2E_i E_f}{mc^2 \hbar\omega} - 1/2\right)$ cioè $d\sigma$ si riduce a

$$d\sigma = 4Z^2 \alpha r_e^2 \cdot \frac{d\omega}{\omega} \cdot \frac{1}{E_i^2} [(E_i^2 + E_f^2) - \frac{2}{3}E_i E_f] \left(\ln \frac{2E_i E_f}{mc^2 \hbar\omega} - 1/2\right)$$

I fattori di forma dipendono dal 4-impulso trasferito al nucleo durante lo scattering $\mathbf{q} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_k - \hbar\mathbf{k}$

Brems: fattori di forma

$$d\sigma = \Phi(\omega)d\omega = \alpha r_e^2 \cdot \frac{d\omega}{\omega} \cdot \frac{1}{E_i^2} [(E_i^2 + E_f^2)\phi_1 - \frac{2}{3}E_i E_f \phi_2]$$

$$\phi_u = 4 \ln\left(\frac{2E_i E_f}{mc^2 \hbar \omega} - 1/2\right)$$

L'effetto di schermo degli e- atomici e' parametrizzato da $\Delta = r_a/b_{\max} = r_a q_{\min}/\hbar$

La figura mostra le ϕ in funzione del parametro di screening Δ
per l'atomo di idrogeno

$$q_{\min} = \hbar \omega m^2 c^3 / 2E_i E_f$$

$$\Delta = \frac{100mc^2}{Z_2^{1/3}} \frac{\hbar \omega}{E_i E_f} = \frac{100mc^2}{Z_2^{1/3}} \frac{\hbar \omega / E_i}{E_i \left(1 - \hbar \omega / E_i\right)}$$

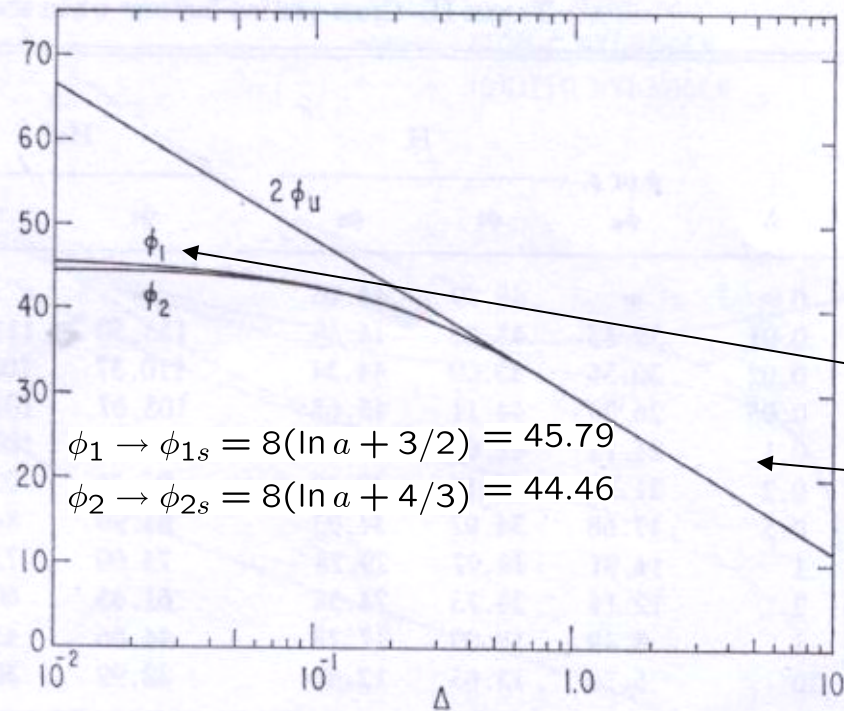


FIG. 9. The functions ϕ_1 and ϕ_2 for atomic hydrogen, as well as the unshielded function $2\phi_u$.

Data una frequenza ω , si vede la transizione da screening completo, $\Delta \ll 1$ (i.e. e- con $E_i \rightarrow \infty$), a screening debole $\Delta \gg 1$ (i.e. e- con $E_i \rightarrow 0$, in pratica bassa energia ma ancora relativistico). $2\phi_u$ e' la sez d'urto di un e- su un nucleo di H non schermato + la sez d'urto su un e- (libero) non schermato

$d\sigma$ e' ridotta a bassi Δ a causa dello screening della carica nucleare

Perdita di energia di $e^\pm$

$$\Delta = \frac{100mc^2}{Z_2^{1/3}} \frac{\hbar\omega}{E_i E_f} = \frac{100mc^2}{Z_2^{1/3}} \frac{\hbar\omega/E_i}{E_i \left(1 - \hbar\omega/E_i\right)}$$

E_i ed E_f sono l'energia iniziale e finale dell'elettrone. Δ è ottenuto dividendo il raggio dell'atomo $r_a = \hbar/(\alpha mc Z^{1/3})$ per il massimo valore permesso della distanza efficace $\hbar/q$. (essendo q il momento trasferito dall'elettrone al nucleo)

Si ha schermatura completa per $\Delta \approx 0$, condizione quasi sempre verificata tranne che per $\hbar\omega/E \sim 1$, cioè quando l'elettrone trasferisce tutta la sua energia al fotone irraggiato.

Brems: spettro di energia

$$d\sigma = \Phi(\omega)d\omega = \alpha r_e^2 \cdot \frac{d\omega}{\omega} \cdot \frac{1}{E_i^2} [(E_i^2 + E_f^2)\phi_1 - \frac{2}{3}E_i E_f \phi_2]$$

Per illustrare l'andamento di $d\sigma/d\omega$ conviene usare la frazione di energia emessa $\hbar\omega = E_f - E_i \equiv \epsilon E_i$ e per evitare la divergenza a $\omega=0$ usiamo lo spettro di energia $dE/d\omega = \hbar\omega d\sigma/d(\hbar\omega)$

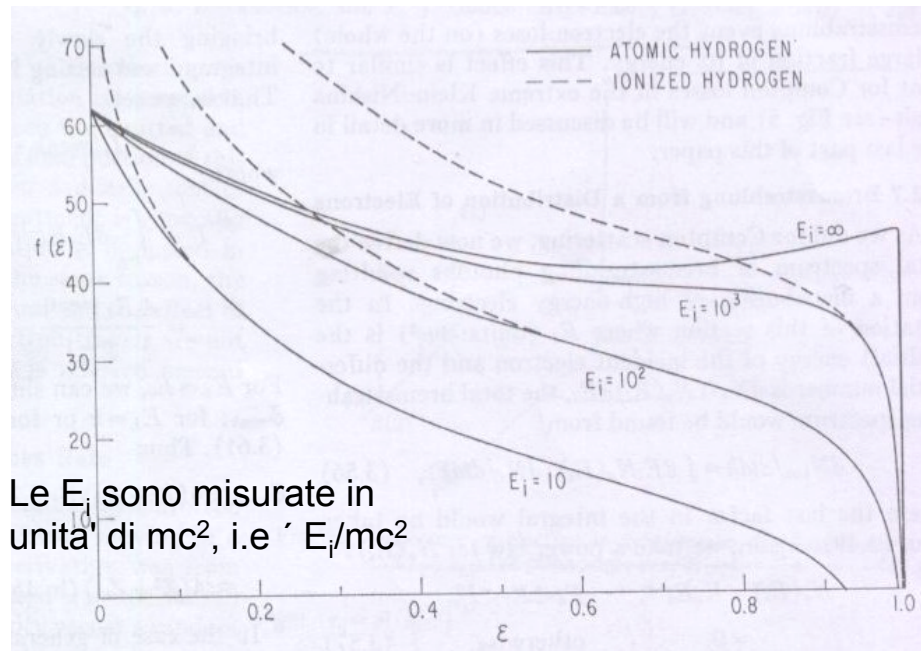
La dipendenza da ϵ si ottiene per sostituzione

$$\hbar\omega \frac{d\sigma}{d(\hbar\omega)} = \Phi(\omega) = \alpha r_e^2 \cdot \frac{1}{E_i^2} [(E_i^2 + E_f^2)\phi_1 - \frac{2}{3}E_i E_f \phi_2] = \alpha r_e^2 f(\epsilon)$$

$$f(\epsilon) = [1 + (1 - \epsilon)^2]\phi_1 - \frac{2}{3}(1 - \epsilon)\phi_2$$

La f non dipende da $\hbar\omega$ o da E_i , ma solo dalla frazione di energia emessa.

La f dipende dal parametro di screening Δ tramite Φ_1 ed Φ_2 . Fissato Δ , la f è "universale". Il numero di fotoni emessi diverge ma l'energia rimane finita.



- Quando $E_i \rightarrow \infty$ lo spettro diventa piatto con un netto cutoff a $\epsilon = 1$
- Lo stato del mezzo (ionizzato o no) è importante a basse frequenze $d\sigma/d\omega$:
emissione maggiore per mezzo ionizzato

Perdita di energia di $e^\pm$

- i. Ad alta energia i fotoni sono emessi $\sim$ collineari con l'elettrone incidente essendo l'angolo medio di emissione $\langle\theta\rangle=mc^2/E$, indipendente dall'energia del fotone emesso.
- ii. I fotoni emessi sono polarizzati con il vettore di polarizzazione $\perp$ al piano formato dal fotone e l'elettrone incidente; la polarizzazione del γ dipende inoltre dalla polarizzazione dell' e incidente.
- iii. La σ differenziale, integrata sugli angoli di emissione del γ e di scattering della particella incidente di carica z_1 e massa M . è (nel caso di schermatura completa):

$$\frac{d\sigma}{d\omega} \approx \frac{4\alpha r_e^2}{\omega} z_1^4 z_2^2 \left(\frac{m}{M}\right)^2 \left[\left(1 + w^2 - \frac{2}{3}w\right) \cdot \ln \frac{183}{Z_2^{1/3}} + \frac{w}{9} \right]$$

$$\text{dove } w = \frac{(E_i - \hbar\omega)}{E_i} \quad \text{e} \quad E_i \gg mc^2$$

Perdita di energia di $e^\pm$

$$\frac{d\sigma}{d\omega} \approx \frac{4\alpha r_e^2}{\omega} z_1^4 z_2^2 \left(\frac{m}{M}\right)^2 \left[\left(1 + w^2 - \frac{2}{3}w\right) \cdot \ln \frac{183}{Z_2^{1/3}} + \frac{w}{9} \right] \quad \xrightarrow{M = m, z_1 = 1} \quad \frac{d\sigma}{d\omega} \approx \frac{4\alpha r_e^2}{\omega} z_2^2 \left[\left(1 + w^2 - \frac{2}{3}w\right) \cdot \ln \frac{183}{Z_2^{1/3}} + \frac{w}{9} \right]$$

- ❑ La sezione d'urto va come $1/M^2 \rightarrow$ importante solo per $e^\pm$. (Nel seguito considereremo solo elettroni, massa m e carica $z_1 = 1$)
- ❑ Dipende dal mezzo attraversato tramite $z_2 \rightarrow$ elementi più pesanti fanno perdere più energia. La Bremss. avviene anche sugli elettroni dell'atomo $\rightarrow z^2 \rightarrow z(z+1)$ essendoci z elettroni nell'atomo.
- ❑ Decresce al crescere dell'energia del fotone ($1/\omega$).

L'importanza principale degli elettroni atomici è il loro effetto di schermo. Classicamente quando il parametro d'impatto è $>$ del raggio atomico ci attendiamo una σ molto piccola in quanto gli e^- schermano la carica del nucleo $\rightarrow$ la particella incidente vede una carica più piccola. $b_{\max}$ (fisso $\hbar\omega$) si ottiene per $q_{\min}$ (q = impulso trasferito al nucleo) e $q_{\min}$ è determinato dal raggio dell'atomo, più che dal minimo valore cinematico che può assumere.

Questo fenomeno si chiama schermatura completa.

Quanto detto è vero anche per una trattazione quantistica perché possiamo sempre definire una distanza efficace della particella incidente dal nucleo $= \hbar/q$.

Perdita di energia di $e^\pm$

1. $d\sigma/d\omega \rightarrow \infty$ per $\omega \rightarrow 0$ divergenza infrarossa, eliminata con effetti di interferenza $\rightarrow$ la formula non è valida per $k \rightarrow 0$
2. $d\sigma/d\omega$ dipende da $w=E_f/E_i$, non esplicitamente dall'energia dell'elettrone
3. dipende dal mezzo attraversato (Z_2^2)

$$\frac{d\sigma}{d\omega} \approx \frac{4\alpha Z_2^2 r_e^2}{\omega} \left[\left(1 + w^2 - \frac{2}{3}w \right) \cdot \ln \frac{183}{Z_2^{1/3}} + \frac{w}{9} \right]$$

Brems: perdita di energia

La perdita totale di energia in uno spessore dx in un materiale con densità n_s si ottiene considerando che, per definizione di sez d'urto, la perdita di energia nel volume di interazione $dV = d\sigma dx$ e' $-dE = \epsilon d\sigma dx$, $d\sigma$ e' la sez d'urto per l'emissione di fotoni con $\epsilon = h\nu$ fra ϵ e $\epsilon+d\epsilon$. La perdita totale si ha integrando su tutte le possibili perdite fra 0 ed E_i

Esprimiamo tutto in funzione di ϵ

$$h\nu = E_f - E_i = \epsilon E_i$$

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dx} &= n_s \int_0^{E_i} h\nu \frac{d\sigma_s}{d(h\nu)} d(h\nu) = n_s \alpha r_e^2 \int_0^{E_i} [1 + (1 - \epsilon)^2] \phi_1 - \frac{2}{3}(1 - \epsilon) \phi_2 d(h\nu) \\ &= n_s \alpha r_e^2 E_i \left\{ \int_0^1 [1 + (1 - \epsilon)^2] \phi_1 - \frac{2}{3}(1 - \epsilon) \phi_2 \right\} \frac{d(h\nu)}{E_i} = n_s \alpha r_e^2 E_i \int_0^1 f(\epsilon) d\epsilon \end{aligned}$$

L'integrale e' un numero, che determina l'intensita' assoluta dell'emissione ma non la sua forma e dipende dal parametro di screening

→ la potenza totale emessa dipende linearmente da E_i

Bisogna scegliere le ϕ_i in accordo alla situazione fisica: l'intensita' dell'emissione dipende dallo stato di ionizzazione del mezzo (cioe' se si ha shielding forte ($\Delta \ll 1$) o shielding debole ($\Delta \gg 1$)) e dall'energia della particella incidente

Perdita di energia di $e^\pm$

Nel caso di **screening completo** (il piu' frequente) la perdita specifica di energia per bremsstrahlung di un **eletttrone** che attraversa del materiale è:

$$-\left.\frac{dE}{dx}\right|_{Br} = \int_0^{k_{\max}} kn_a \cdot \frac{d\sigma}{dk} dk = 4\rho N_A \frac{Z_2^2}{A} r_e^2 \alpha E_i \ln \frac{183}{Z_2^{1/3}} \quad \text{ovvero}$$

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{E}{L_0}$$

$k_{\max} = E_i - mc^2$ è la massima energia possibile del fotone.

con

$$L_0 = \frac{A}{4\alpha N_o \rho Z_2^2 r_e^2 \ln \frac{183}{Z_2^{1/3}}} \quad (cm)$$

n_a =numero di atomi per cm^3 .

N_A è il numero di Avogadro

$X_0 = L_0 \rho$ e' la lunghezza di radiazione espressa in g/cm^2 A è il peso atomico

Un' approssimazione utile per i calcoli è:

ρ è la densità del materiale

$$X_0 = \frac{716.4 \cdot A}{Z_2^2 \ln \frac{287}{Z_2^{1/2}}} \quad (g/cm^2)$$

Perdita di energia di $e^\pm$

La formula $-dE/dx=E/X_0$ è molto utile in quanto esplicita la dipendenza della perdita di energia della particella incidente dalle proprietà del materiale attraversato contenute in X_0 .

Integrando otteniamo:

$$E=E_0 e^{-x/X_0}$$

Questa funzione descrive come varia l'energia di un elettrone in funzione dello spessore attraversato: l'attenuazione esponenziale dell'energia degli elettroni per Bremsstrahlung. Dopo avere attraversato un tratto $x=X_0$ l'energia si è ridotta di un fattore $1/e$.

La X_0 di un composto può essere approssimata da:

$$X_0 = 1/\sum_i (f_i / X_{0i})$$

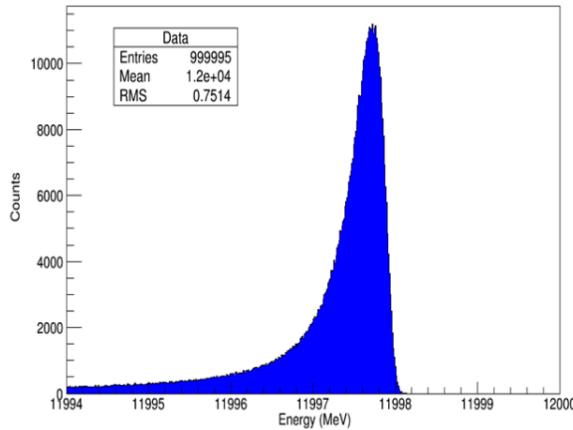
Dove f_i sono le frazioni in massa dei componenti con lunghezza di radiazione X_{0i}

La lunghezza di radiazione è espressa in g/cm^2 , ma dividendo per la densità si ottiene L_R = lunghezza di radiazione in cm.

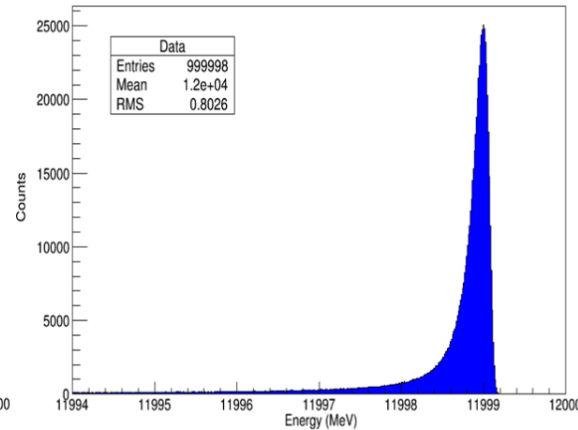
Si trovano normalmente tabulate sia X_0 che L_R .

Ricordiamo che la perdita di energia è in realtà $\propto 1/M^2$ della particella incidente $\rightarrow$ importante solo per elettroni (e μ di alta energia). Nel definire la lunghezza di radiazione abbiamo considerato elettroni come particelle incidenti (r_e^2). In ogni caso X_0 ed L_R sono sempre tabulate per elettroni

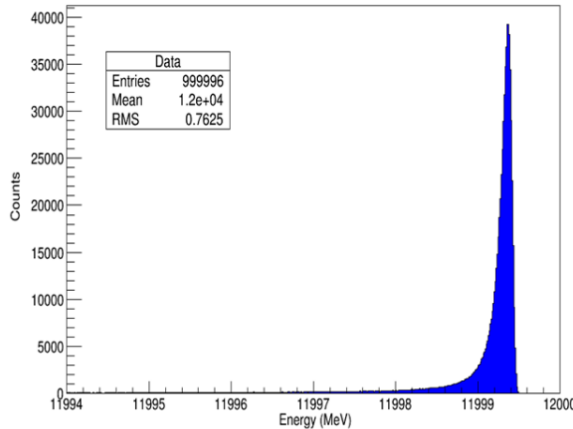
Energy Histogram - Graphite - 6.9 mm



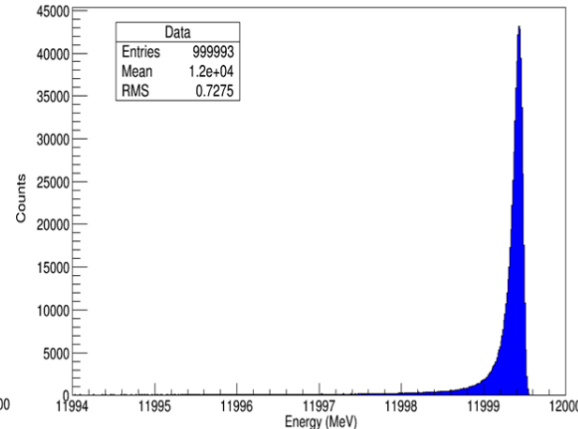
Energy Histogram - Silicon - 3.1 mm



Energy Histogram - Titanium - 1.15 mm



Energy Histogram - Iron - 600 um



$E = E_0 e^{-x/X_0}$ e' l'energia media alla profondita' x/X_0 . La distribuzione intorno al valore medio e' complicata.

Le code sono dovute all'emissione di fotoni energetici e sono di solito parametrizzate con simulazioni MonteCarlo.

Occorre minimizzarle in tutti i rivelatori che effettuano misure non distruttive, minimizzando lo spessore del materiale x/X_0 in unita' di X_0 ,

$$x/X_0 \ll 1$$

Si noti che X_0 e' lo stesso parametro che determina distribuzione dello scattering multiplo nel materiale

$$\theta_{ms} = z \frac{19.2}{\beta c p} [MeV] \sqrt{x/X_0} \left(1 + 0.038 \ln \left(\frac{x}{X_0} \right) \right)$$

$$\left. \frac{\sigma_p}{p} \right|_{MS} \propto \frac{1}{B \sqrt{L X_0}}$$