

Particle Detectors

Lecture 7

04/04/18

a.a. 2017-2018

Emanuele Fiandrini

Scattering multiplo

- La distribuzione di probabilita' $\Psi_{ms}(\theta, x)$ per gli angoli di diffusione obbedisce ad un'equazione analoga a quella per le fluttuazioni del deposito di energia:

Prob di deflessione di $\theta - \zeta$ a x

Prob di una deflessione qualsiasi in dx

$$\frac{\partial \Psi_{ms}}{\partial x}(\theta, x) = \int \underbrace{\Psi_{ms}(\theta - \zeta, x)}_{\text{Prob di deflessione di } \zeta \text{ in } dx} \underbrace{n_a \frac{d\sigma}{d\Omega}(\zeta) \zeta d\zeta}_{\text{Prob di una deflessione qualsiasi in } dx} + \Psi_{ms}(\theta, x) \int \underbrace{n_a \frac{d\sigma}{d\Omega}(\zeta) \zeta d\zeta}_{\text{Prob di una deflessione qualsiasi in } dx}$$

Prob di deflessione di ζ in dx

n_a = densita' di particelle del mezzo assorbitore

La distribuzione cumulativa dipende sia dalla "storia" della propagazione fino a x sia dalla distribuzione di probabilita' di deflessione per la singola particella.

Se si assume la diffusione di Rutherford, e' possibile trovare soluzioni analitiche (Moliere)

Scattering multiplo

$$\frac{\partial \psi_{ms}}{\partial x}(\theta, x) = \int \psi_{ms}(\theta - \zeta, x) n_a \frac{d\sigma}{d\Omega}(\zeta) \zeta d\zeta - \psi_{ms}(\theta, x) \int n_a \frac{d\sigma}{d\Omega}(\zeta) \zeta d\zeta$$

La soluzione puo' essere espressa in forma integrale

to be the small angle Rutherford cross section, becomes [22, 23]

$$\psi_{ms}(\theta, x) = \frac{1}{\theta_c^2} \int_0^\infty y dy J_0\left(\frac{\theta y}{\theta_c}\right) \exp\left[\frac{y^2}{4}\left(-b + \ln \frac{y^2}{4}\right)\right] \quad (2.89)$$

where J_0 is a Bessel function and θ_c is a characteristic angle given by

$$\theta_c^2 = \frac{4\pi n_a e^4 Z_1^2 Z_2 (Z_2 + 1) x}{(pv)^2} \quad (2.90)$$

The angle θ_c contains the dependence of ψ_{ms} on the macroscopic properties of the scattering medium. Note that θ_c^2 grows linearly with x . The quantity b is defined as

$$b = \ln(\theta_c/\theta_a)^2 + 1 - 2C_E \quad (2.91)$$

where C_E is Euler's constant. The dependence of the scattering on the

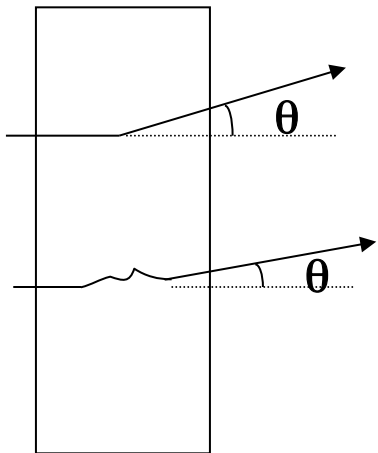
Scattering multiplo

- Non risolveremo l'equazione ma tratteremo in maniera separata e approssimata le varie regioni di diffusione
 - Singolo scattering: se l'assorbitore e' sottile cosi' che la probabilita' di piu' un singolo scattering e trascurabile, la distribuzione angolare e' data dalla sezione d'urto di Rutherford.
 - Scattering "plurale": se il numero medio di collisioni non e' sufficientemente elevato, $N < 20$, la distribuzione e' complicata perche' ne' la semplice formula di rutherford ne' metodi statistici possono essere applicati in modo semplice.
 - Scattering multiplo: se il numero medio di collisioni e' elevato, $N > 20$, e la perdita di energia e' trascurabile, il problema puo' essere trattato statisticamente (cioe' possiamo applicare il teorema del limite centrale).

Scattering multiplo

La diffusione di Rutherford e' limitata ad angoli molto piccoli, anche per un campo coulombiano di carica puntiforme e per particelle veloci si ha sempre $\theta_{\max} \ll 1$.

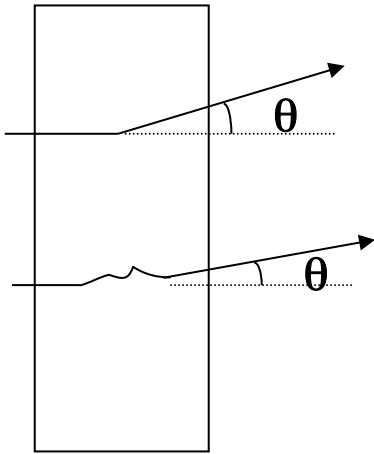
La prob di diff a piccoli angoli e' quindi molto elevata. Una particella che attraversa uno spessore finito subira' un gran numero di piccole deviazioni ed emergera' dalla lastra ad un piccolo angolo rispetto alla direzione di incidenza. L'angolo e' la sovrapposizione cumulativa statistica di un gran numero di piccole deflessioni singole.



Solo raramente la particella subira' una deviazione a grande angolo. Poiche' e' poco probabile, la particella non subira' praticamente mai piu' di una (o poche) di queste deviazioni (siamo nell'ipotesi che lo spessore sia piccolo rispetto al range)

Questa constatazione ci permette di dividere l'intervallo angolare delle deviazioni in due zone: una comprendente angoli relativamente grandi, in cui si presentano soltanto diffusioni singole e una zona comprendente angoli molto piccoli che contiene le diffusioni multiple o composte.

Scattering multiplo



Tradizionalmente si divide l'intervallo angolare delle deviazioni in due zone: una ad angoli relativamente grandi, in cui si hanno diffusioni singole, ed una ad angoli molto piccoli, che contiene le diffusioni multiple.

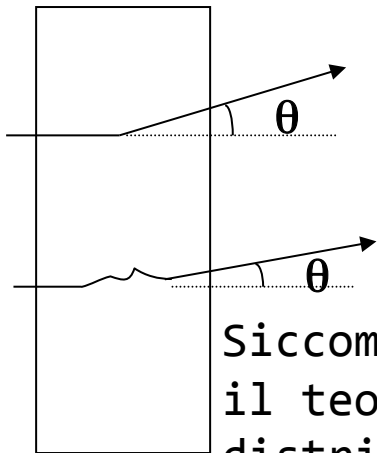
Ovviamente, noi osserviamo la deviazione finale dopo uno spessore x . Una particella può subire un solo scattering, o fare molti scattering coulombiani .

Non possiamo dire se l'angolo all'uscita dal materiale sia dovuto a un singolo scattering a grande angolo o a molti scattering a piccolo angolo

Scattering multiplo: regione a piccoli angoli

La grandezza determinante nella zona di diffusione multipla, dove la particella subisce numerose deflessioni a piccoli angoli, distribuite simmetricamente intorno alla direzione di incidenza, e' l'angolo quadratico medio di deflessione.

In ogni urto singolo le deflessioni angolari seguono la legge di Rutherford, tra θ_{\min} e θ_{\max} con valore medio nullo, $\langle\theta\rangle = 0$ (se considerate rispetto alla dir di incidenza), e con un angolo quadratico medio $\langle\theta^2\rangle \neq 0$.



$$\langle\theta^2\rangle = \frac{\int \theta^2 \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega}{\int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega} \cong \frac{\int \frac{d\theta}{\theta}}{\int \frac{d\theta}{\theta^3}} \cong 2\theta_{\min}^2 \left[\ln\left(\frac{\theta_{\max}}{\theta_{\min}}\right) \right]$$

Siccome gli urti successivi sono statisticamente indipendenti, il teorema del limite centrale ci assicura che la distribuzione dopo un gran numero N di urti e' una gaussiana con deviazione standard data dalla somma (in quadratura) delle larghezze nelle singole collisioni:

$$\langle\Theta^2\rangle = N\langle\theta^2\rangle$$

Scattering multiplo: regione a piccoli angoli

Il numero di urti che una particella subisce nell'attraversare uno spessore x e' $N = n\sigma x$, dove σ e' la sez. d'urto totale di deflessione ed n e' la densita' di particelle del mezzo, percio'

$$\Rightarrow \sigma \cong \left(\frac{2zZ\alpha}{\beta p} \right)^2 \frac{1}{\theta_{\min}^2} \quad N \cong \pi n \left(\frac{2zZe^2}{pv} \right) \frac{x}{\theta_{\min}^2}$$

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{\int \theta^2 \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega}{\int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega} \cong \frac{\int \frac{d\theta}{\theta}}{\int \frac{d\theta}{\theta^3}} \cong 2\theta_{\min}^2 \left[\ln \left(\frac{\theta_{\max}}{\theta_{\min}} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \langle \Theta^2 \rangle = 2\pi n x \left(\frac{2zZe^2}{\beta p} \right)^2 \ln \left(\frac{\theta_{\max}}{\theta_{\min}} \right)$$

Non c'e' quasi piu' dipendenza da θ_{\min}

Considerando che $n = N_A \rho / A$

$$\Rightarrow \langle \vartheta_{ms}^2 \rangle \cong \frac{N_A \rho x}{A} \cdot 2\pi \left(\frac{2zZe^2}{\beta p} \right)^2 \cdot \ln \frac{2}{\alpha^2 A^{1/3} Z^{1/3}}$$

Se $A \sim 2Z$ il termine logaritmico diventa $2\ln(173Z^{-1/3})$.

Il fattore nel logaritmo cambia da autore ad autore (Le considerazioni svolte qui sono tratte dal Jackson, Elettrodinamica Classica, Cap. 13)

L'angolo quadratico medio cresce linearmente con il grammaggio attraversato ρx , avendo in mente che ρx e' comunque tale che le perdite di energia della particella sono trascurabili

Scattering multiplo: regione a piccoli angoli

A piccoli angoli, N e' molto grande e quindi si puo' applicare il teorema del limite centrale.

A piccoli angoli quindi la probabilita' di avere uno scattering fra θ e $\theta + d\theta$ e' una gaussiana di larghezza

$$\langle \Theta_{ms} \rangle = \langle \Theta^2 \rangle^{1/2}$$

$$P_M(\alpha) d\alpha \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2} d\alpha \quad \alpha = \frac{\theta}{\langle \theta_{RMS} \rangle}$$

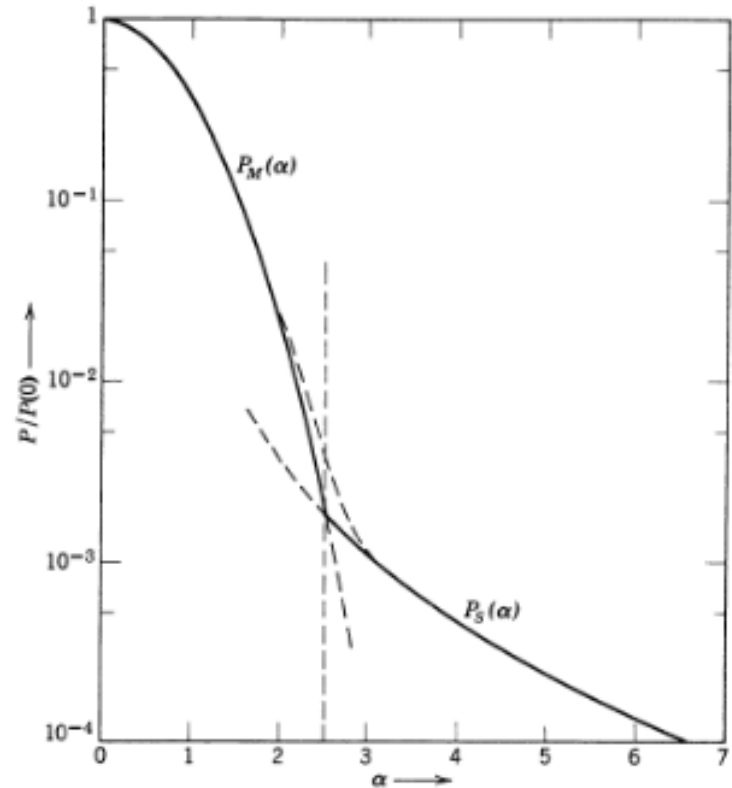


Figure 13.8 Multiple- and single-scattering distributions of projected angle. In the region of plural scattering ($\alpha \sim 2-3$) the dashed curve indicates the smooth transition from the small-angle multiple scattering (approximately Gaussian in shape) to the wide-angle single scattering (proportional to α^{-3}).

Scattering multiplo: regione a grandi angoli

La diffusione a grandi angoli e' dovuta a singoli (o pochi) scattering.

La distribuzione di probabilita' e' quella di singolo scattering

$$P_s d\Omega \approx \left(\frac{2zZe^2}{\beta p} \right)^2 \frac{d\Omega}{(\theta^2 + \theta_{\min}^2)^2}$$

nel limite di piccoli angoli (ie $\theta \ll 1$, $d\Omega = 2\pi\theta d\theta$) e vicini a θ_{\max} :

$$P_s d\theta \approx \left(\frac{2zZe^2}{\beta p} \right)^2 * \frac{2\pi\theta d\theta}{\theta^4}$$

$$\alpha = \frac{\theta}{\langle \theta_{RMS} \rangle}$$

$$P_s d\alpha \approx \frac{1}{8 \ln(173Z^{-1/3})} * \frac{d\alpha}{\alpha^3}$$

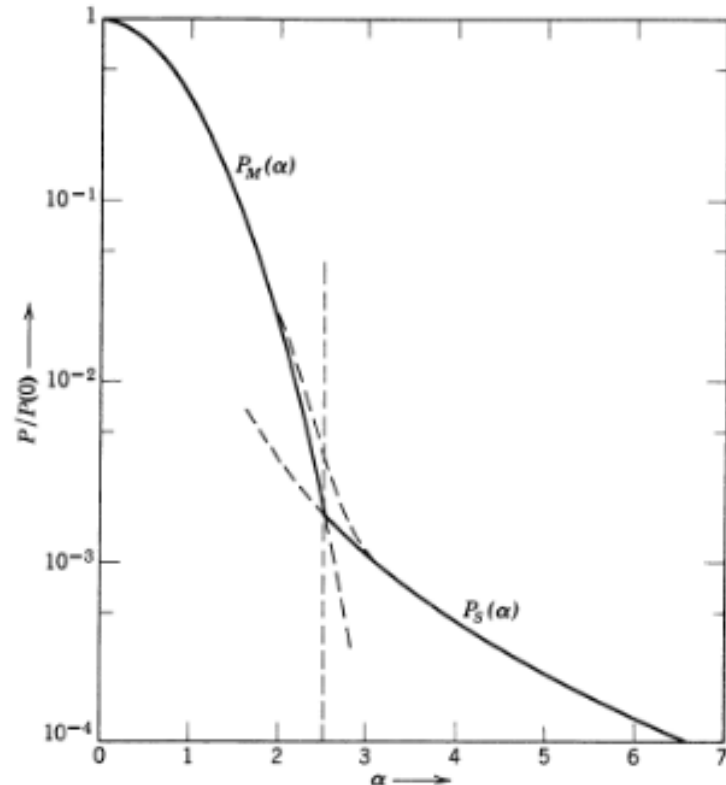


Figure 13.8 Multiple- and single-scattering distributions of projected angle. In the region of plural scattering ($\alpha \sim 2-3$) the dashed curve indicates the smooth transition from the small-angle multiple scattering (approximately Gaussian in shape) to the wide-angle single scattering (proportional to α^{-3}).

An Early Measurement with Electrons

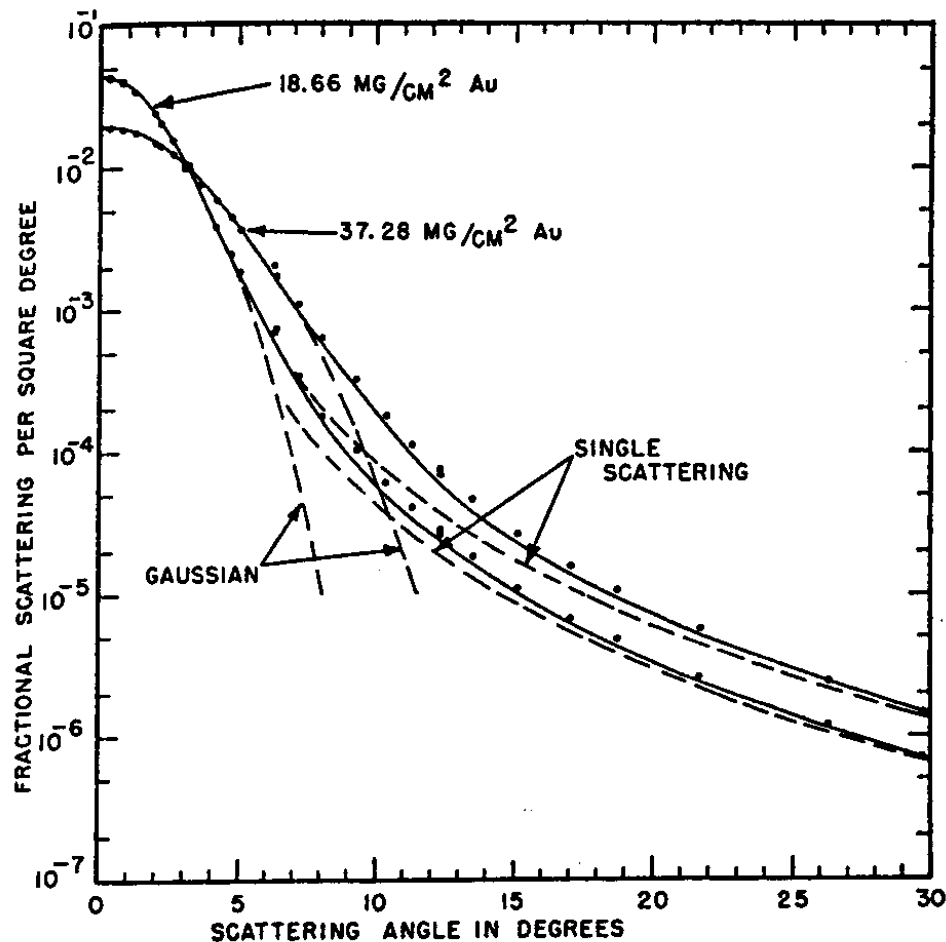


FIG. 3. Angular distribution of electrons from thick and thin gold foils from 0° to 30°. The solid line represents the theory of Molière extrapolated through the region where his small and large angle approximations give different values. The dotted lines at small angles represent the continuation of the gaussians of Fig. 1. At larger angles, the dotted line represents the single scattering contribution.

- Continuous line is the exact solution of the transport differential equation.
- At small angles the gaussian approximation is very good
- The single scattering distribution approximates well the data only at very large angles

Scattering multiplo

Tradizionalmente si scrive l'angolo di scattering in termini della lunghezza di radiazione X_0 .

Attenzione X_0 è definita per processi radiativi. Lo scattering multiplo non è un processo radiativo $\rightarrow \theta_{ms}$ e' espressa in funzione di X_0 solo per fini pratici poiche' X_0 e' facilmente misurabile e nota per tutti i materiali

$$\begin{aligned} \langle \theta_{ms}^2 \rangle &= z^2 \frac{x}{X_0} \frac{2\pi}{\alpha} \frac{m_e^2 c^4}{\beta^2 p^2} \quad \text{ed in termini di energia} \\ \theta_{ms} &= z \frac{E_s}{\beta c p} \sqrt{x/X_0} \quad \left(E_s = \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha}} \cdot mc^2 \approx 21 \text{ MeV} \right) \end{aligned}$$

(1)

Radiation Length (cfr. Bremsstrahlung)

■ Define Radiation Length, X_0 :

$$-\left.\frac{dE}{dX}\right|_{rad} = \frac{E}{X_0} \quad \text{where} \quad \frac{1}{X_0} = 4\alpha N_A r_e^2 \frac{Z^2}{A} \ln \frac{183}{Z^{1/3}}$$

$$\Rightarrow E = E_0 e^{-x/X_0}$$

Units of X_0 : g cm⁻²

Divide by density ρ to get X_0 in cm

■ Radiation length is the the mean distance over which a high-energy electron loses all but 1/e of its energy by bremsstrahlung.

■ e.g. Pb: $Z=82$, $A=207$, $\rho=11.4$ g/cm³:

- $X_0 \approx 5.9$ g/cm²

- Mean penetration distance: $x = X_0/\rho = 5.9/11.4 = 5.2$ mm

Scattering multiplo

$$\langle \theta_{ms}^2 \rangle = z^2 \frac{x}{X_0} \frac{2\pi}{\alpha} \frac{m_e^2 c^4}{\beta^2 p^2} \text{ ed in termini di energia}$$

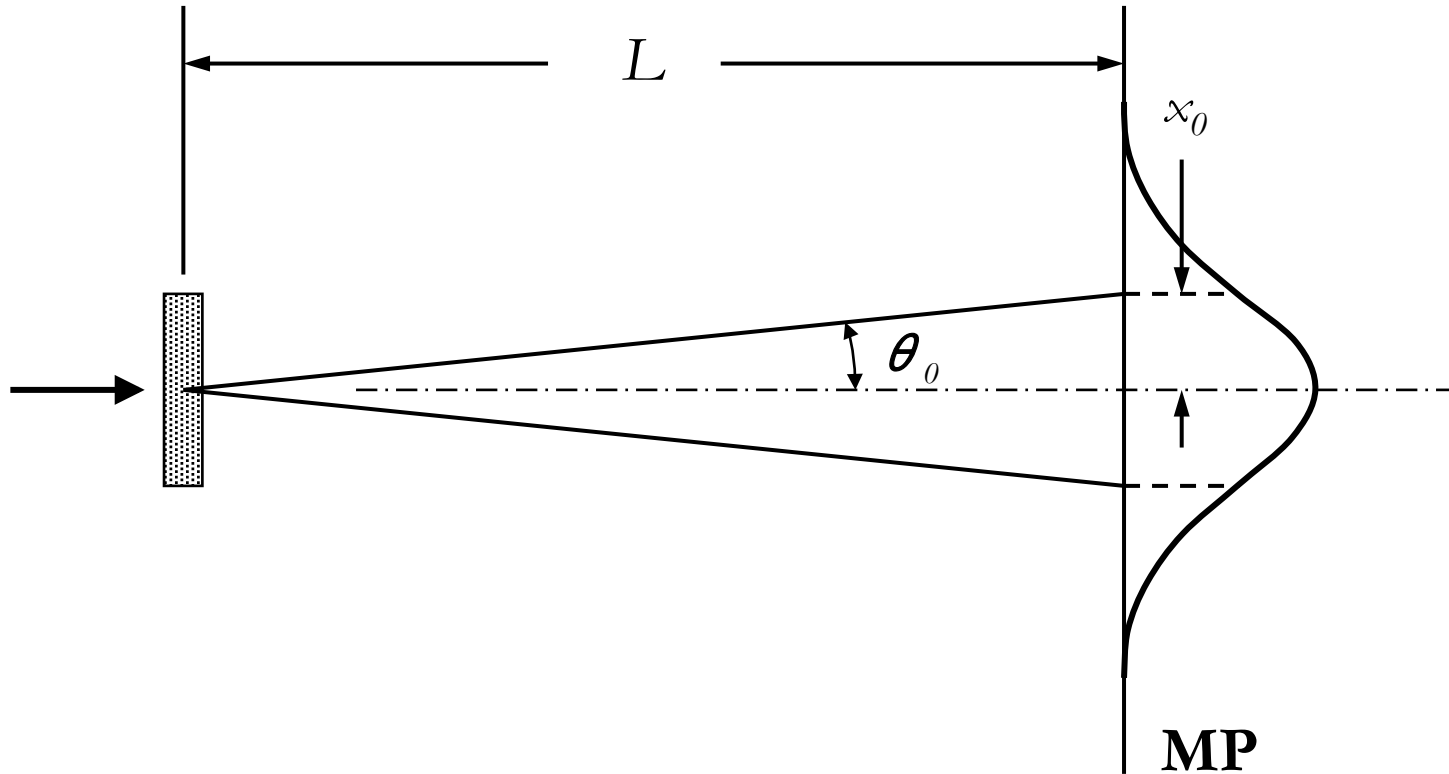
$$\theta_{ms} = z \frac{E_s}{\beta c p} \sqrt{x/X_0} \quad \left(E_s = \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha}} \cdot mc^2 \approx 21 \text{ MeV} \right)$$

Valida solo se attraverso molte lunghezze di radiazione, altrimenti è una sovrastima di θ_{ms} . Più accurata:

$$\theta_{ms} = z \frac{19.2}{\beta c p} [MeV] \sqrt{x/X_0} \left(1 + 0.038 \ln \left(\frac{x}{X_0} \right) \right)$$

Formule valide per piccoli angoli. Non tengono conto delle code non gaussiane dovute ai singoli scattering

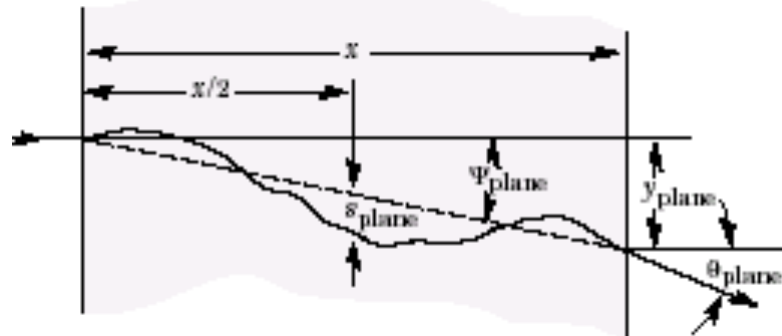
Multiple Scattering



When protons pass through a slab of material they suffer millions of collisions with atomic nuclei. The statistical outcome is a *multiple scattering angle* whose distribution is approximately Gaussian. For protons, this angle is always small so the projected displacement in any measuring plane **MP** is also Gaussian. The width parameter of the angular distribution is θ_0 . The corresponding displacement, x_0 , can easily be measured by scanning a dosimeter across the MP. The task of multiple scattering theory is to predict θ_0 given the scattering material and thickness, and the incident proton energy.

Scattering multiplo

La deviazione angolare causata dallo scattering multiplo produce anche uno spostamento laterale della posizione di uscita della particella rispetto al punto di ingresso, dopo aver attraversato uno spessore x di materiale.



La deviazione quadratica media della proiezione su un piano (che e' di solito quella che si misura) è data da :

$$\langle y_{plane}^2 \rangle \cong \frac{1}{6} \langle \vartheta_{ms}^2 \rangle x^2$$

Scattering multiplo

Vediamo di ricavare $\langle y_{plane}^2 \rangle \cong \frac{1}{6} \langle \vartheta_{ms}^2 \rangle x^2$

A tale scopo consideriamo un elemento di spessore dx a profondità x e vediamo il contributo di dy^2 a $\langle y^2 \rangle$

$$y(x+dx) = y(x) + \vartheta_y(x) dx$$

$$\vartheta_y(x+dx) = \vartheta_y(x) + \delta\vartheta$$

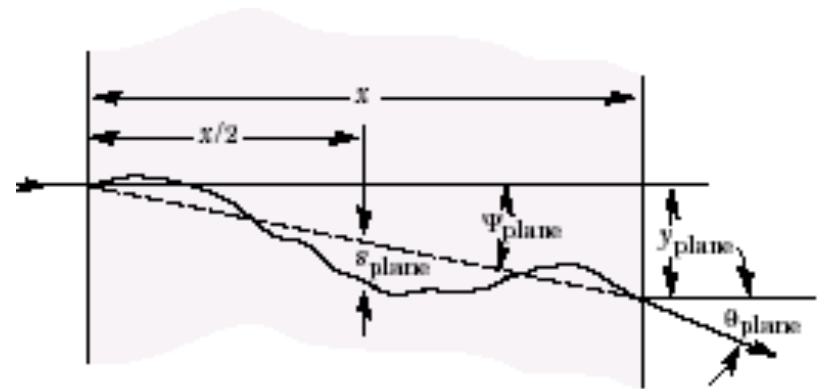
$$\langle y^2(x+dx) \rangle = \langle y^2(x) \rangle + 2\langle y(x)\vartheta_y(x) \rangle dx$$

$$d\langle y^2 \rangle = 2\langle y(x)\vartheta_y(x) \rangle dx$$

$$d\langle \vartheta_y^2 \rangle = \langle \delta\vartheta^2 \rangle$$

$$d\langle y\vartheta \rangle = \langle \vartheta_y^2 \rangle dx \quad \text{infatti } y(x+dx)\vartheta_y(x+dx) \cong y(x)\vartheta_y(x) + \vartheta_y^2(x)dx + y(x)\delta\vartheta$$

$$\langle y(x+dx)\vartheta_y(x+dx) \rangle - \langle y(x)\vartheta_y(x) \rangle = \langle \vartheta_y^2(x) \rangle dx + \langle y(x)\delta\vartheta \rangle$$



il $\langle \rangle$ dell'ultimo termine e' = 0 perche' $\langle d\theta \rangle = 0$ ed e' indipendente da y

Scattering multiplo

Ora:

$$\langle \vartheta_y^2 \rangle = \frac{\langle \vartheta_{ms}^2 \rangle}{2} = k \cdot s / 2 \quad \text{con} \quad k = \left(21 [MeV] \frac{1}{p\beta} \right)^2$$

$$\langle y\vartheta \rangle = \int_0^s kx \, dx = k \frac{s^2}{4} = \frac{1}{4} s \langle \vartheta_{ms}^2 \rangle$$

Con $s = X/X_0$

$$\langle y^2 \rangle = 2 \int_0^s kx^2 \frac{1}{4} dx = \frac{1}{6} ks^3 = \frac{1}{6} \langle \vartheta_{ms}^2 \rangle s^2$$

$$\langle y_{plane}^2 \rangle \cong \frac{1}{6} \langle \vartheta_{ms}^2 \rangle s^2$$

In genere lo spostamento e' piccolo

Scattering multiplo

Notiamo: lo scattering multiplo è un fattore limitante per le misure.

- **Misure d' impulso** precisione della misura limitata dallo scattering multiplo.
- **Sciami elettromagnetici** dimensioni trasverse dello sciame dovute allo scattering multiplo.

Effect of Multiple Scattering on Resolution

■ Approximate relation (PDG):

$$\theta_0 = \theta_{plane}^{RMS} \approx \frac{13.6 MeV}{p\beta c} z \sqrt{\frac{L}{X_0}} \quad \text{i.e.} \quad \theta_0 \propto \frac{1}{p} \sqrt{\frac{L}{X_0}}$$

Charge of incident particle Radiation length of absorbing material

■ Apparent sagitta due to multiple scattering (from PDG):

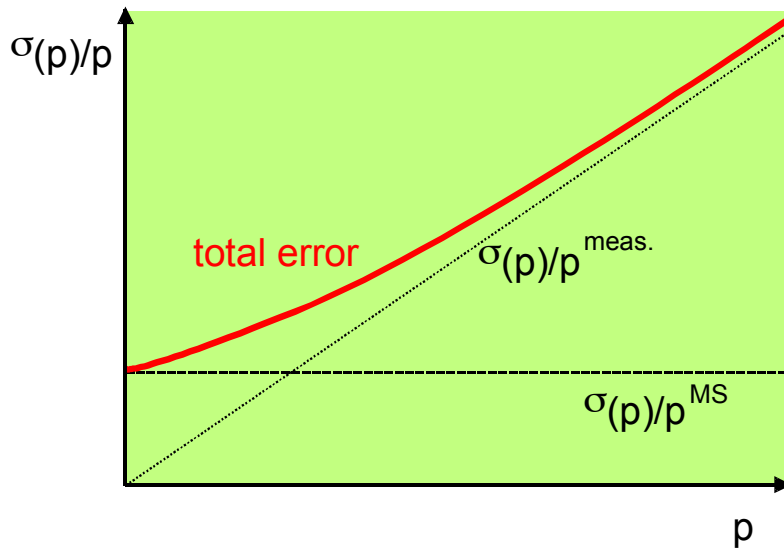
$$s_{plane} = \frac{L\theta_0}{4\sqrt{3}}$$

■ Contribution to momentum resolution from multiple scattering:

$$\left. \frac{\sigma_p}{p} \right|_{MS} = \frac{s_{plane}}{s} \approx \frac{0.05}{B\sqrt{LX_0}} \quad \text{using } s \approx \frac{0.3BL^2}{8p_T} \quad \text{i.e.} \quad \left. \frac{\sigma_p}{p} \right|_{MS} \propto \frac{1}{B\sqrt{LX_0}}$$

Independent of p!

Effect of Multiple Scattering on Resolution



■ Example:

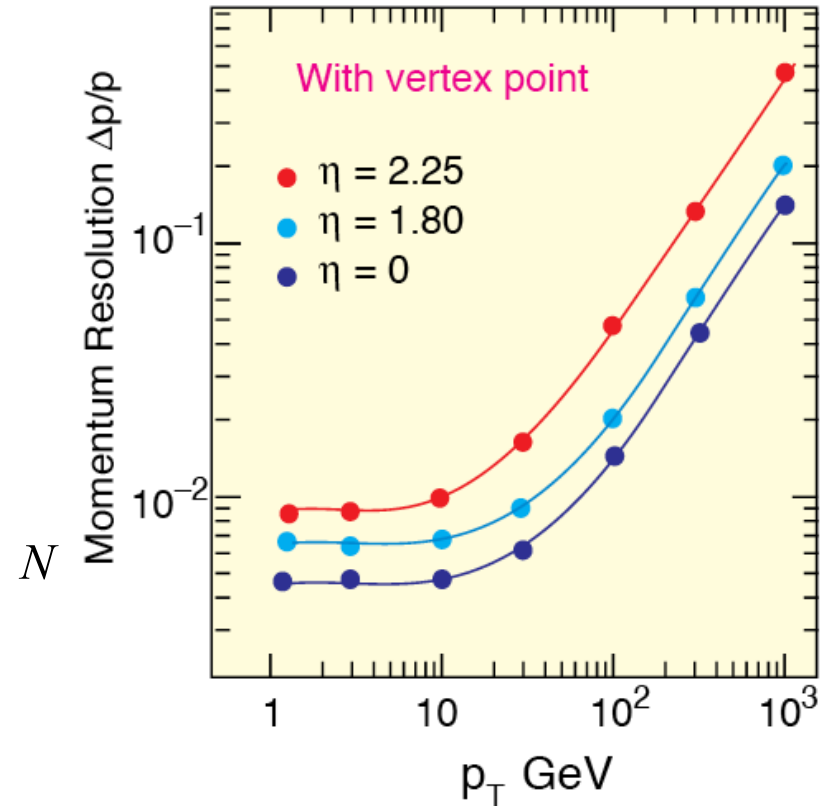
- $p_T = 1 \text{ GeV}/c$, $L = 1\text{m}$, $B = 1 \text{ T}$,
 $= 10$, $\sigma_x = 200\mu\text{m}$:

$$\left. \frac{\sigma_p}{p} \right|_{\text{meas}} \approx 0.5\%$$

- For detector filled with Ar, $X_0 = 110\text{m}$:

$$\left. \frac{\sigma_p}{p} \right|_{\text{MS}} \approx 0.5\%$$

Estimated Momentum Resolution vs p_T in CMS



Emissione Cherenkov e di radiazione di transizione

- Per rivelare e identificare particelle cariche due processi di emissione di radiazione elettromagnetica sono importanti in **mezzi diversi dal vuoto**:
 - emissione cherenkov
 - emissione di radiazione di transizione

(Cenni di) Emissione di radiazione elm nella materia condensata

- Per discutere i processi di emissione Cherenkov e di radiazione di transizione e' necessario fare alcuni brevi richiami di elettrodinamica classica

Equazioni di Maxwell (unita' Gauss)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1) \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad (2) \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4)$$

Da (1), si puo' definire un potenziale vettore **A** t.c. $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

Da (4) segue che esiste un potenziale scalare Φ t.c. $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

Da (3) e (2) si ottengono le equazioni dei potenziali

$$\vec{\nabla}^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}) = -4\pi\rho$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Potenziali elm (1)

$$\vec{\nabla}^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}) = -4\pi\rho$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Grazie all'invarianza di gauge ($\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \chi$, $\Phi \rightarrow \Phi - \partial \chi / \partial t \rightarrow$ **stessi campi E, B**) si possono scegliere i potenziali in modo da "semplificare" le equazioni:

Gauge di Lorentz $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$

Gauge di Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

In questo gauge, $\vec{\nabla}^2 \Phi = -4\pi\rho$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}_t$$

Il potenziale scalare e' "statico", mentre quello vettore si propaga come un'onda la cui sorgente e' la componente trasversa della corrente

- Per gli immancabili entusiasti: le soluzioni...

Potenziali elm: soluzioni

Gauge di Lorentz $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$

$$\vec{\nabla}^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -4\pi \rho$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

4 Equazioni (3 \mathbf{A} , 1 ϕ) d'onda non omogenee disaccoppiate di forma

$$\vec{\nabla}^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\vec{x}, t) \quad f(\vec{x}, t) = \rho, j_i/c$$

Soluzione:

soluzione dell'equ. omogenea associata + soluzione particolare della non omogenea

Soluzione omogenea: l'equazione omogenea e' quella delle onde \rightarrow

$$\vec{A} = A_{k1} \vec{\epsilon}_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} + A_{k2} \vec{\epsilon}_2 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

Onda piana lungo \mathbf{k} con vel. c

ϵ vettori di polarizzazione

$\Phi \equiv 0$ Nel nostro caso e' sufficiente solo \mathbf{A} , cioe' posso fare una ulteriore trasformazione (ristretta) di gauge t.c. $\phi' = 0$ (non \mathbf{A} perche' c'e' solo una funzione scalare χ arbitraria che si puo' aggiungere

k ed ω sono legate dalla relazione di dispersione, necessaria affinche' A sia soluzione dell'equazione

$$k = \frac{\omega}{c}$$

Potenziali elm: soluzioni (2)

$$\vec{A} = \int [A_{k1} \vec{\epsilon}_1 e^{i(kx - \omega t)} + A_{k2} \vec{\epsilon}_2 e^{i(kx - \omega t)}] d^3k$$

La condizione di Lorentz ($\Phi = 0$)

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = i\vec{k} \times \vec{A} \quad (1)$$

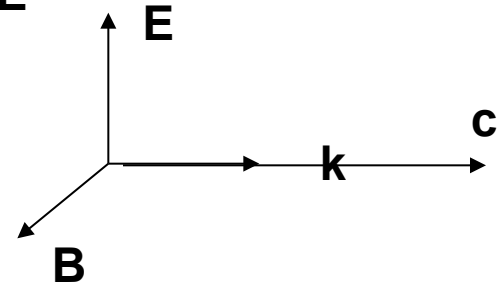
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = ik\vec{A} \quad (2)$$

dice che $\vec{k} \cdot \vec{A} = 0$
 $\rightarrow \mathbf{k} \perp \mathbf{A}$

Da (1) e (2) segue che $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$, $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$, $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$ e $\mathbf{k} \perp \mathbf{E}$

Le onde elettromagnetiche sono trasversali



Potenziali elm: propagatore

$$\vec{\nabla}^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\vec{x}, t) \quad (1)$$

La soluzione particolare si ottiene con il propagatore **G(x,t;x',t')**

$$\psi = \int G(\vec{x}, t; \vec{x}', t') f(\vec{x}', t') d^3 x' dt'$$

Facciamo le trasformate di Fourier nel tempo per eliminare la dipendenza esplicita da t della (1)

$$\psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad f(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\psi(\vec{x}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\vec{x}, t) e^{i\omega t} dt \quad f(\vec{x}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{x}, t) e^{i\omega t} dt$$

Sostituisco in (1)

$$\vec{\nabla}^2 \psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{\nabla}^2 \tilde{\psi}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\psi}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$



$$(\vec{\nabla}^2 + k^2) \tilde{\psi} = -4\pi \tilde{f}(\vec{x}, \omega)$$

Equazione di Helmholtz, per ciascun valore di ω , con $k=\omega/c$

Potenziali elm: propagatore (2)

$$(\nabla^2 + k^2)\tilde{\Psi} = -4\pi\tilde{f}(\vec{x}, \omega) \quad \text{Equ. ellittica derivate parziali che si riduce a quella di Poisson per } k=0$$

Posto $\tilde{\Psi}(\vec{x}, \omega) = \int \tilde{G}_k(\vec{x}, \vec{x}') \tilde{f}(\vec{x}', \omega) d^3x'$

L'equazione che $\tilde{G}_k(\vec{x}, \vec{x}')$ soddisfa e' $(\nabla_{\vec{x}}^2 + k^2)\tilde{G}_k(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')$

NB: l'operatore ∇ agisce sulle coordinate \vec{x} non su \vec{x}'

Nel vuoto, senza superfici di confine essa puo' dipendere solo da $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ e poiche' deve esserci simmetria sferica a causa della omogeneita' e simmetria dello spazio

$$\tilde{G}_k(\vec{x}, \vec{x}') = \tilde{G}_k(|\vec{x} - \vec{x}'|) = \tilde{G}_k(R)$$

In coord. sferiche $\nabla^2 = \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} R \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} R \tilde{G}_k(R) + k^2 \tilde{G}_k(R) = -\delta(R)$

In tutti i punti tranne che in $R=0$, G soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2} (R \tilde{G}_k) + k^2 (R \tilde{G}_k) = 0 \quad \longrightarrow \quad R \tilde{G}_k(R) = A e^{ikR} + B e^{-ikR}$$

Potenziali elm: propagatore (3)

$$\tilde{\Psi}(\vec{x}, \omega) = \int \tilde{G}_k(\vec{x}, \vec{x}', \omega) \tilde{f}(\vec{x}', \omega) d^3x' \quad (\nabla_{\vec{x}}^2 + k^2) \tilde{G}_k(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2}(R\tilde{G}_k) + k^2(R\tilde{G}_k) = 0$$

R ≠ 0

$$R\tilde{G}_k(R) = Ae^{ikR} + Be^{-ikR}$$

La δ influisce solo nel limite $R \rightarrow 0$, ma in questo limite, $kR \ll 1$ e l'equazione si riduce a quella dell'elettrostatica, per cui

$$\lim_{R \rightarrow 0} \tilde{G}_k(R) = \frac{1}{R}$$

e' la condizione di normalizzazione corretta

La soluzione e' quindi

$$\tilde{G}_k(R) = A\tilde{G}_k^{(+)}(R) + B\tilde{G}_k^{(-)}(R) \quad \text{con} \quad \tilde{G}_k^{\pm}(R) = \frac{e^{\pm ikR}}{R}, \quad \mathbf{A+B=1}$$

- = onda sferica che esce dall'origine, += onda sferica entrante

La scelta di A e B dipende dalle condizioni al contorno nel tempo per il problema fisico in questione: e', ovvio che se una sorgente e' "spenta" fino ad un tempo $t=0$, la funzione di Green corretta e' quella di un'onda sferica uscente

Ora dobbiamo trovare la dipendenza temporale delle funzioni di Green

Potenziali elm: propagatore (4)

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\vec{x}, t) \quad (1)$$


$$\Psi = \int G(\vec{x}, t; \vec{x}', t') f(\vec{x}', t') d^3 x' dt'$$

Sostituendo Ψ in (1) si ottiene subito l'equazione soddisfatta da G

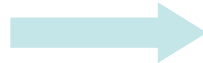
$$(\nabla_x^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) G = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t')$$

Posto $G(R, t, t') = \int \tilde{G}_k(R, t') e^{-i\omega t} d\omega$ e $\delta(t - t') = \int e^{-i\omega(t-t')} d\omega$ Si ha

$$(\nabla_x^2 + k^2) \tilde{G}_k(R, t') = -4\pi \delta(R) e^{i\omega t'}$$

E' la stessa equazione di prima con un fattore di fase 

$$\tilde{G}_k^\pm(R) = \frac{e^{\pm i k R}}{R} e^{i\omega t'}$$



$$G^\pm(R, t, t') = \int \frac{e^{\pm i k R}}{R} e^{i\omega t'} e^{-i\omega t} d\omega$$

$$G^\pm(R, t, t') = \frac{1}{R} \int e^{\pm i \frac{\omega R}{c}} e^{-i\omega(t-t')} d\omega$$



$$G^\pm(R, t, t') = \frac{1}{R} \int e^{-i\omega(t-t' \mp \frac{R}{c})} d\omega$$

$$= \frac{1}{R} \delta(t - t' \mp \frac{R}{c})$$

$\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'(t')$

E' il propagatore cercato: - = funzione ritardata, + funzione anticipata

La soluzione particolare e' quindi: $\Psi = \int \frac{1}{R} \delta(t' - (t \mp \frac{R}{c})) f(\vec{x}', t') d^3 x' dt'$

Potenziali elm: propagatore (5)

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\vec{x}, t)$$

$$\psi = \int G(\vec{x}, t; \vec{x}', t') f(\vec{x}', t') d^3 x' dt'$$

$$\vec{R}(t) = \vec{x} - \vec{x}'(t')$$

$$G^\pm(R, t, t') = \frac{1}{R} \delta(t - t' \mp \frac{R}{c})$$

$$\psi = \int \frac{1}{R} \delta(t' - (t \mp \frac{R}{c})) f(\vec{x}', t') d^3 x' dt'$$

La funzione di Green ritardata mostra il comportamento causale associato ad una perturbazione ondulatoria: l'argomento della δ indica che l'effetto in un punto x all'istante t e' dovuto all'azione di una sorgente ad un istante precedente o ritardato $t'=t-R(t')/c$.

La differenza temporale $t - t' = R/c$ e' semplicemente interpretata come propagazione a velocita' c della perturbazione da un punto all'altro dello spazio

Potenziali ritardati (1)

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \int \frac{1}{cR} \delta(t' - (t - \frac{R}{c})) \vec{j}(\vec{x}', t') d^3x' dt'$$

$$\Phi(\vec{x}, t) = \int \frac{1}{R} \delta(t' - (t - \frac{R}{c})) \rho(\vec{x}', t') d^3x' dt'$$

Correnti e densità in x' contribuiscono a x all'istante t , solo agli istanti $t' = t - R/c$, cioè con un ritardo R/c dovuto alla velocità di propagazione finita delle onde elm

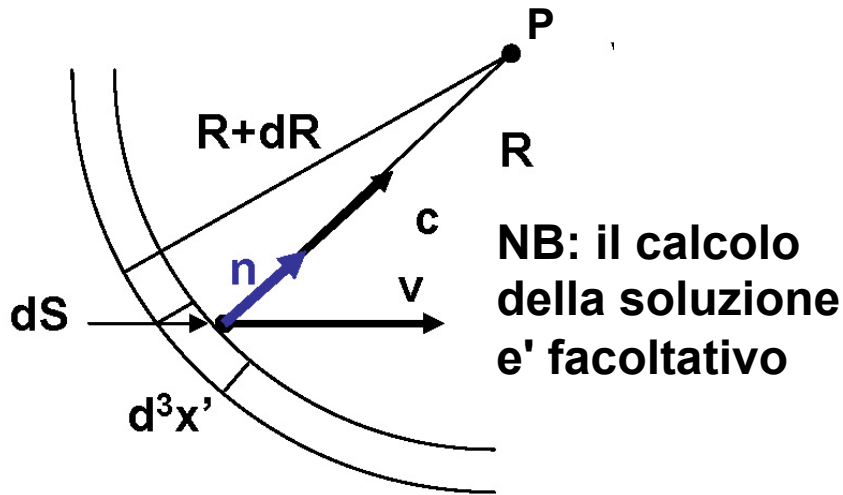
$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \int \frac{1}{cR} \delta(t' - (t - \frac{R}{c})) \vec{j}(\vec{x}', t') d^3x' dt' \quad \Phi(\vec{x}, t) = \int \frac{1}{R} [\rho(\vec{x}', t')]_{rit} d^3x'$$

Dove con $[\mathbf{F}]_{rit} \equiv \mathbf{F}(\mathbf{r}', t - (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/c)$, i.e. va usato il valore ritardato $t' = t - R(t')/c$

Gli integrandi non rappresentano (a parte il termine R al denominatore) la carica e la corrente nel volume, come nel caso statico, dato che gli elementi di carica in $d^3\mathbf{x}'$ contribuiscono a istanti t' diversi al potenziale in x , cioè l'integrale va valutato con $t' = t'(\mathbf{x}')$ mentre la carica totale nel volume V è pari all'integrale con $t' = \text{cost}$.

Bisogna esprimere $[\dots]_{rit}$ in funzione della carica TOTALE contenuta nel volume che contribuisce al potenziale in P all'istante t :
per questo occorre tenere conto del moto delle cariche

Potenziali ritardati (2): Lienard e Wiechert



Per farlo consideriamo una sfera centrata in P che si contrae con velocità c e che raggiunge P proprio all'istante t , l'equazione oraria della sfera è

$$R(t') = c(t - t')$$

L'istante in cui i punti della distribuzione di carica in d^3x' contribuiscono al punto P all'istante t sono quelli che vengono raggiunti dalla sfera quando essa attraversa l'elemento d^3x' , cioè $t' = t - R/c$. Parte della carica sfugge dall'elemento di volume $d^3x' = dr \phi dS$ nel tempo impiegato dalla sfera a spazzarlo e va sottratta a quella presente a t'

Il tempo impiegato dalla sfera a spazzare il volume fra R e $R+dR$ è $dt' = dR/c$

La carica che sfugge dalla superficie nel tempo dt' è $dq' = \vec{j} \cdot \vec{n} dt' dS$ con $\vec{j} = \rho \vec{v}$

$$dq' = \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dt' dS = \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \frac{dR}{c} dS = \rho \vec{n} \cdot \frac{\vec{v}}{c} d^3x' \quad \text{All'istante } t' = t - R/c$$

Quindi la carica che contribuisce è

$$dq = \rho d^3x' - dq' = \rho d^3x' - \rho \vec{n} \cdot \frac{\vec{v}}{c} d^3x' = \rho d^3x' \left(1 - \vec{n} \cdot \frac{\vec{v}}{c} \right)$$

Potenziali ritardati (3): L&W

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \int \frac{1}{cR} [\vec{j}(\vec{x}', t')]_{rit} d^3x' \quad \Phi(\vec{x}, t) = \int \frac{1}{R} [\rho(\vec{x}', t')]_{rit} d^3x'$$

$$dq|_{t-r/c} = [1 - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{n}] \rho(\vec{x}', t')|_{t-r/c} d^3x'$$

Quindi $\rho(\vec{x}', t')|_{t-r/c} d^3x' = \frac{dq}{[1 - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{n}]}|_{t-r/c}$

$$\Phi(\vec{x}, t) = \int \frac{dq}{[R(1 - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{n})]|_{t-r/c}} \quad \vec{A}(\vec{x}, t) = \int \frac{\vec{v}|_{t-r/c} dq}{[cR(1 - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{n})]|_{t-r/c}}$$

Sono i **potenziali di Lienard e Wiechert** per una distribuzione di cariche in moto arbitrario

Potenziali di Lienard e Wiechert (1)

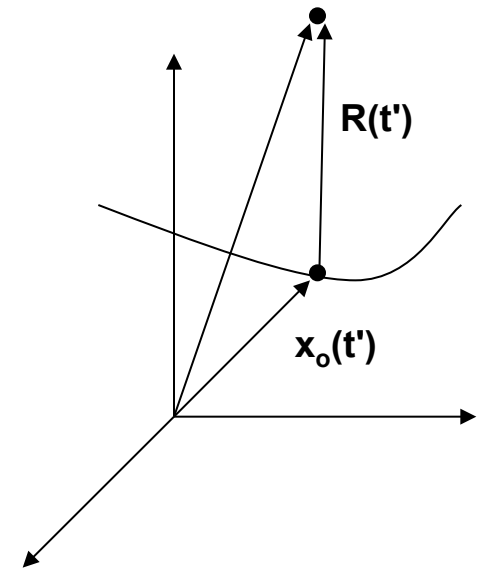
Nel caso di una particella puntiforme che si muove lungo una traiettoria

$\vec{x}(t) = \vec{x}_0(t)$ con velocità $\vec{\dot{x}}(t) = \vec{\dot{x}}_0(t)$, le densità di carica e corrente sono date da

$$\rho(\vec{x}, t) = q\delta(\vec{x} - \vec{x}_0(t)) \quad \vec{j}(\vec{x}, t) = q\vec{\dot{x}}\delta(\vec{x} - \vec{x}_0(t)) \quad \vec{R}(t) = \vec{x} - \vec{x}_0(t') \quad P$$

La funzione δ ha la proprietà di localizzare carica e corrente e di dare le cariche e correnti totali

$$q = \int \rho(\vec{x}, t) d^3x \quad q\vec{v} = \int \vec{j}(\vec{x}, t) d^3x$$



Potenziali di Lienard e Wiechert (2)

I potenziali elm hanno la forma $\Psi = \int \frac{1}{R} \delta(t' - t + \frac{R}{c}) f(\vec{x}', t') d^3x' dt'$

dove $\Psi = \Phi, \mathbf{A}_i$ e $\mathbf{f} = \rho, \mathbf{j}_i/c, i=1,2,3$

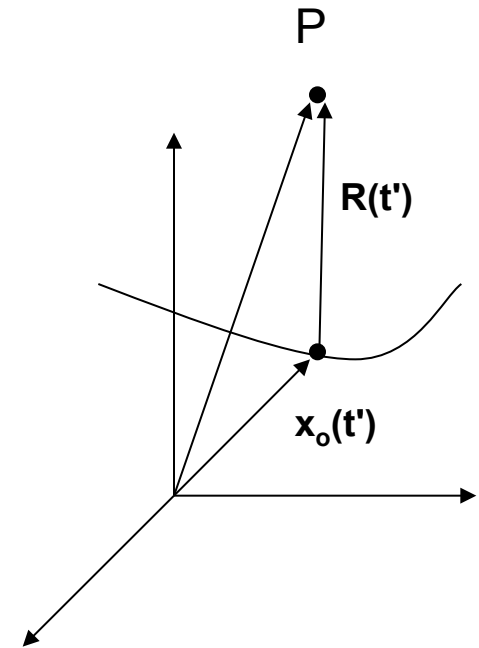
Possiamo usare la δ per effettuare l'integrazione nello spazio d^3x'

$$\rho(\vec{x}, t) = q\delta(\vec{x} - \vec{x}_0(t))$$

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = q\vec{\dot{x}}\delta(\vec{x} - \vec{x}_0(t))$$

$$\Phi = q \int \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_o(t')|} \delta(t' - t + \frac{|\vec{x} - \vec{x}_o(t')|}{c}) dt'$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{q}{c} \int \frac{\vec{v}(t')}{|\vec{x} - \vec{x}_o(t')|} \delta(t' - t + \frac{|\vec{x} - \vec{x}_o(t')|}{c}) dt'$$



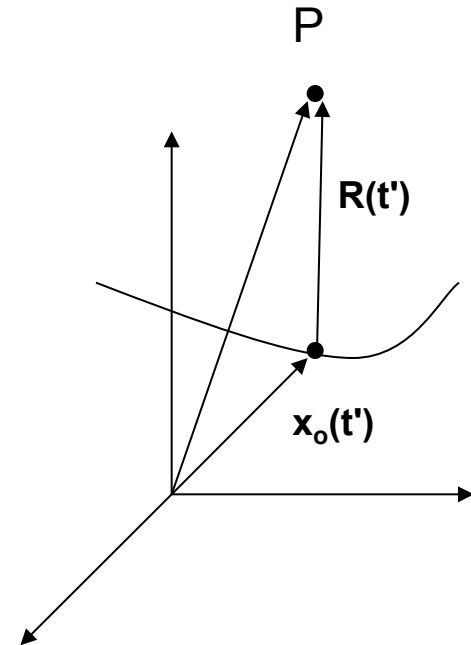
$$\vec{R}(t) = \vec{x} - \vec{x}_o(t')$$

Potenziali di Lienard e Wiechert (3)

$$\Phi = q \int \frac{1}{R(t')} \delta(t' - t + \frac{R(t')}{c}) dt' \quad A(\vec{x}, t) = \frac{q}{c} \int \frac{\vec{v}(t')}{R(t')} \delta(t' - t + \frac{R(t')}{c}) dt' \quad \vec{R}(t) = \vec{x} - \vec{x}_o(t')$$

Si possono semplificare ancora notando che l'argomento della δ si annulla quando $\mathbf{t}' = \mathbf{t}_{\text{rit}}$ dato da $\mathbf{c}(\mathbf{t} - \mathbf{t}_{\text{rit}}) = \mathbf{R}(\mathbf{t}_{\text{rit}})$, i.e. l'equazione oraria di una perturbazione che viaggia a vel. c (la sfera di prima)

Si noti che questa e' una relazione implicita in \mathbf{t}_{rit} dato che $R=R(\mathbf{t}_{\text{rit}})$, mentre t rimane fissato, i.e. fissato l'istante di osservazione cerchiamo gli istanti precedenti connessi causalmente al campo in x all'istante t



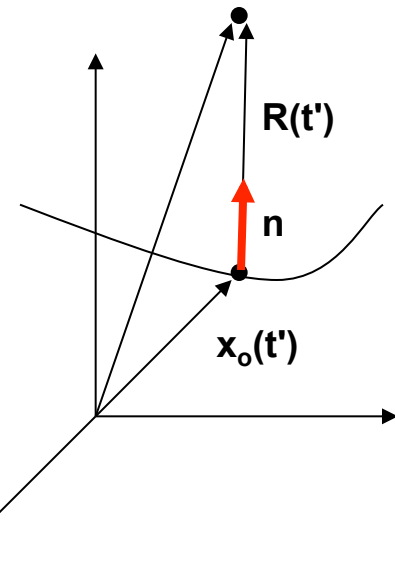
Potenziali di Lienard e Wiechert (4)

$$\Phi = q \int \frac{1}{R(t')} \delta(t' - t + \frac{R(t')}{c}) dt' \quad A(\vec{x}, t) = \frac{q}{c} \int \frac{\vec{v}(t')}{R(t')} \delta(t' - t + \frac{R(t')}{c}) dt' \quad \vec{R}(t) = \vec{x} - \vec{x}_o(t')$$

Cambiamo variabile $\mathbf{t''} = \mathbf{t' - t + R(t')/c}$ $\longrightarrow dt'' = dt' + \frac{\dot{R}(t')}{c} dt'$

P

Dobbiamo eliminare $\dot{R}(t')$ esprimendolo in funzione di \mathbf{v} e della direzione di osservazione



Dall'identità $|R|^2 = \vec{R} \cdot \vec{R}$ \longrightarrow

$$\frac{d}{dt} |R|^2 = 2R(t') \dot{R}(t') \quad \frac{d}{dt} \vec{R}^2 = 2\vec{R} \cdot \dot{\vec{R}}$$

$\longrightarrow R(t') \dot{R}(t') = \vec{R} \cdot \dot{\vec{R}}$ ma $\dot{\vec{R}} = -\dot{\vec{x}}_o(t') = -\vec{v}(t')$

$\longrightarrow \vec{R} \cdot \dot{\vec{R}} = -\vec{R}(t') \cdot \vec{v}(t')$ $\longrightarrow R(t') \dot{R}(t') = -\vec{R}(t') \cdot \vec{v}(t')$

$\longrightarrow \dot{R}(t') = -\frac{\vec{R}(t') \cdot \vec{v}(t')}{R(t')}$ Posto $\vec{n}(t') = \frac{\vec{R}(t')}{R(t')}$ $\vec{R}(t') = -n(t') \cdot \vec{v}(t')$

$\longrightarrow dt'' = dt' + \frac{\dot{R}(t')}{c} dt' = dt' - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c} dt' = dt' (1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c})$

Potenziali di Lienard e Wiechert (5)

$$\Phi = q \int \frac{1}{R(t')} \delta(t' - t + \frac{R(t')}{c}) dt' = q \int \frac{1}{R(t')} \delta(t'') \frac{dt''}{(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c})}$$

$$t'' = t' - t + R(t')/c$$

$$\text{i.e. } t' = t'(t'')$$

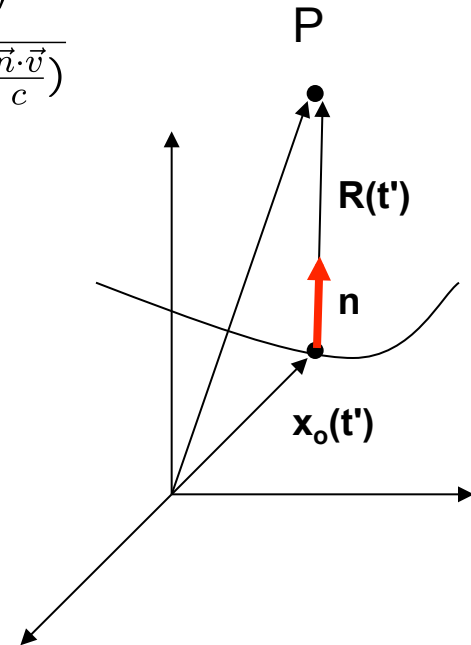
$$A(\vec{x}, t) = \frac{q}{c} \int \frac{\vec{v}(t')}{R(t')} \delta(t' - t + \frac{R(t')}{c}) dt' = \frac{q}{c} \int \frac{\vec{v}(t')}{R(t')} \delta(t'') \frac{dt''}{(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c})}$$

Integrando su t'' si ottiene quindi

$$\Phi = q \frac{1}{R(t')} \frac{1}{(1 - \frac{\vec{n}(t') \cdot \vec{v}(t')}{c})}$$

$$t' = t - R/c$$

$$A(\vec{x}, t) = \frac{q}{c} \frac{\vec{v}(t')}{R(t')} \frac{1}{(1 - \frac{\vec{n}(t') \cdot \vec{v}(t')}{c})}$$



NB: il calcolo e' facoltativo

Questi sono i potenziali di LW per una carica puntiforme

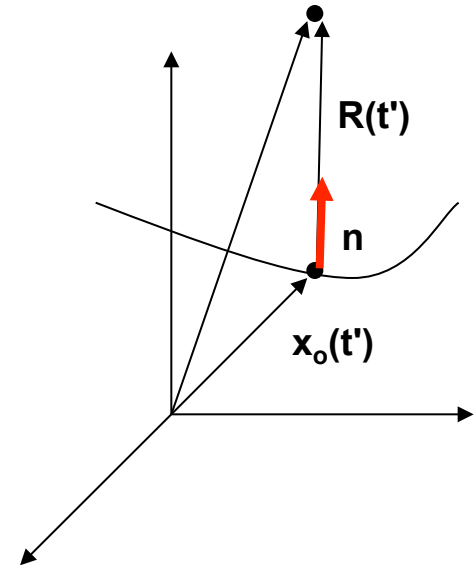
Potenziali di Lienard e Wiechert (6)

$$\Phi(\vec{x}, t) = q \frac{1}{R(t')} \frac{1}{(1 - \frac{\vec{n}(t') \cdot \vec{v}(t')}{c})} \quad \vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{q \vec{v}(t')}{c R(t')} \frac{1}{(1 - \frac{\vec{n}(t') \cdot \vec{v}(t')}{c})} \quad t' = t - R/c$$

I potenziali differiscono da quelli statici in due aspetti:

► il fattore $k(t') = (1 - \frac{\vec{n}(t') \cdot \vec{v}(t')}{c})$

tende a concentrare i potenziali in uno stretto cono intorno alla direzione della velocità quando la velocità $\rightarrow c$



► tutte le quantità a destra vanno valutate al tempo ritardato. La conseguenza più importante è che la carica può irradiare. Se la dipendenza fosse solo in R , i potenziali decrescerebbero come $1/R$, così che differenziando si avrebbe una dipendenza $1/R^2$. La dipendenza implicita sulla posizione tramite il tempo ritardato $t' = t - R/c$ porta ad una dipendenza di tipo $1/R$ per una componente dei campi, il che implica il trasporto netto di energia a distanza ∞ , i.e. propagazione per onde

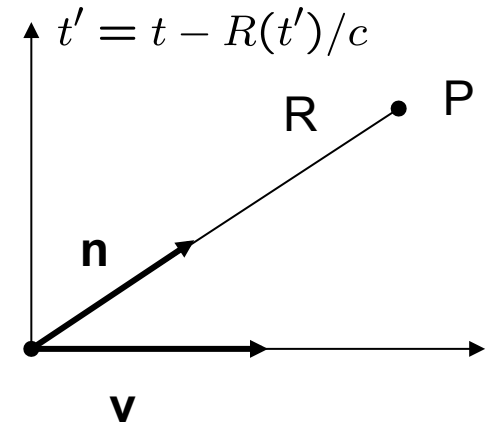
Campi di L&W (7): campi

$$\Phi(\vec{x}, t) = q \frac{1}{R(t')} \frac{1}{(1 - \frac{\vec{n}(t') \cdot \vec{v}(t')}{c})} \quad \vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{q \vec{v}(t')}{c R(t')} \frac{1}{(1 - \frac{\vec{n}(t') \cdot \vec{v}(t')}{c})}$$

I campi sono $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}|_{rit}$ $\vec{E} = (-\vec{\nabla} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})|_{rit}$

NB: il calcolo e' facoltativo

Le derivate sono calcolate al tempo t nella posizione \mathbf{x} , i potenziali vanno valutati al tempo ritardato $t' = t - R(t')/c$



$\mathbf{R}(t') = \mathbf{x} - \mathbf{x}_o(t')$ (1) $\rightarrow t'$ e' una funzione implicita delle coord. $\mathbf{x}, t \rightarrow$ quando si deriva rispetta a \mathbf{x} e t bisogna fare una derivata di una funzione di funzione

P.es. Il campo elettrico:

$$\vec{E} = (-\vec{\nabla} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})|_{rit} \equiv -\vec{\nabla}_x \Phi[t'(\vec{x}, t)] - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}[t'(\vec{x}, t)]}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t'} \vec{\nabla}_x t'(\vec{x}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t'} \frac{\partial t'(\vec{x}, t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = 1 - \frac{\partial R}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 + \frac{\partial R}{\partial t'}}$$

$$\therefore dR/dt' \text{ si ricava notando che } |R|^2 = \vec{R} \cdot \vec{R} \quad \Rightarrow \quad R \frac{dR}{dt'} = \vec{R} \cdot \frac{d\vec{R}}{dt'} = -\vec{R} \cdot \vec{v} \quad \text{da (1)}$$

$$\Rightarrow \frac{dR}{dt'} = -\vec{R} \cdot \vec{v} / R \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \vec{R} \cdot \vec{v} / cR} = \frac{1}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}}$$

Campi di Lienard e Wiechert (8)

$$\Phi(\vec{x}, t) = q \frac{1}{R(t')} \frac{1}{(1 - \frac{\vec{n}(t') \cdot \vec{v}(t')}{c})} \quad \vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{q \vec{v}(t')}{c R(t')} \frac{1}{(1 - \frac{\vec{n}(t') \cdot \vec{v}(t')}{c})} \quad \vec{E} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t'} \vec{\nabla}_x t'(\vec{x}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t}$$

$$t' = t - R(t')/c \quad \frac{dR}{dt'} = -\vec{R} \cdot \vec{v}/R \quad \mathbf{R(t')} = \mathbf{x-x_o(t')} \quad (1)$$

Calcolo $\vec{\nabla}_x t'(\vec{x}, t)$

$$\vec{\nabla}_x t'(\vec{x}, t) = -\vec{\nabla}_x R(\vec{x}, t')/c = -\frac{\partial R(\vec{x}, t')}{c \partial t'} \vec{\nabla}_x t' - \vec{\nabla}_x R(\vec{x}, t') \quad \text{ma} \quad \vec{\nabla}_x R(\vec{x}, t') = \vec{R}/R$$



$$\vec{\nabla}_x t' = -\frac{\partial R}{c \partial t'} \vec{\nabla}_x t' - \vec{R}/R$$

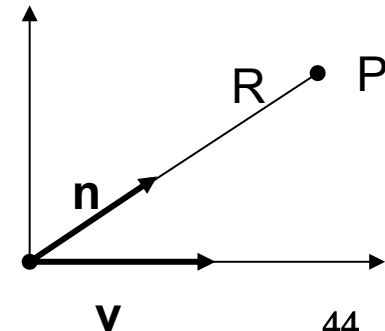
Risolve in $\vec{\nabla}_x t'$

$$\vec{\nabla}_x t' = -\frac{\vec{R}/R}{1 + \frac{\partial R(\vec{x}, t')}{c \partial t'}} = -\frac{\vec{R}/R}{1 - \vec{R} \cdot \vec{v}/cR} = -\frac{\vec{n}}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}}$$

Le derivate dei potenziali rispetto a t' sono immediate. Si ottiene

$$\vec{E} = q \left[\frac{\vec{n} - \vec{\beta}}{\gamma^2 (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3 R^2} \right] + \frac{q}{c} \left[\frac{\vec{n} \times (\vec{n} - \vec{\beta}) \times \vec{\beta}}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3 R} \right] \quad \vec{B} = \vec{n} \times \vec{E}$$

(Elettrodin. Classica, Jackson par. 14.1, Landau, Teoria dei campi par 63)



Campi di Lienard e Wiechert (9)

$$\vec{E} = q \left[\frac{\vec{n} - \vec{\beta}}{\gamma^2 (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3 R^2} \right] + \frac{q}{c} \left[\frac{\vec{n} \times (\vec{n} - \vec{\beta}) \times \vec{\beta}}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3 R} \right]$$

$$\vec{B} = \vec{n} \times \vec{E}$$

Ci sono due componenti con caratteristiche diverse

Campo di velocita' \vec{E}_v

- ✓ $\sim R^{-2}$, si riduce a quello di Coulomb nel caso di $\beta = 0$,
- ✓ Il campo punta nella direzione della posizione attuale (i.e. all'istante t) della particella: infatti la distanza dal punto ritardato e' $\vec{n}c\tilde{t}$ dove $\tilde{t} = t - t_{rit}$

Nello stesso tempo, la particella si e' spostata di $\vec{\beta}c\tilde{t}$

La posizione della particella rispetto al punto di osserv. e'

$$(\vec{n} - \vec{\beta})c\tilde{t}$$

che e' appunto la direzione del campo di velocita'

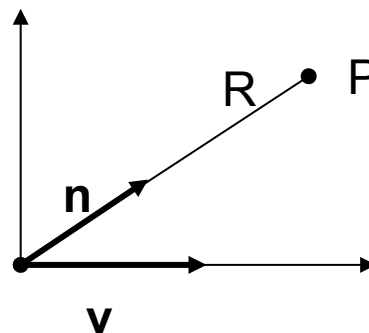
Campo di accelerazione \vec{E}_a

- $\sim R^{-1}$,
- Dipende da \mathbf{a} ,
- Il campo \vec{E}_a e' $\perp \mathbf{n}$, e $\mathbf{B} \perp \vec{E}, \mathbf{n}$
- Trasporta energia a tutte le distanze

A spanne (i.e. leading terms), il rapporto E_a/E_v e'

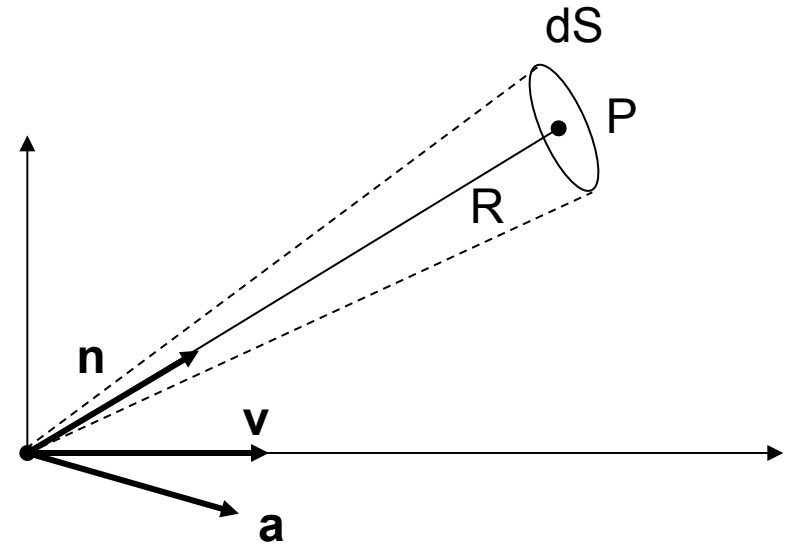
$$\frac{E_a}{E_v} \sim \frac{R\gamma^2 a}{c^2}$$

Il campo di radiazione domina a distanze t.c. $R \gg \frac{c^2}{\gamma^2 a}$



Potenza emessa

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = \vec{n} \times \vec{E} \\ \vec{E} = \underbrace{q \left[\frac{\vec{n} - \vec{\beta}}{\gamma^2 (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3 R^2} \right]}_{\vec{E}_v} + \underbrace{\frac{q}{c} \left[\frac{\vec{n} \times (\vec{n} - \vec{\beta}) \times \vec{\beta}}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3 R} \right]}_{\vec{E}_a} \end{array} \right.$$



Il trasporto di energia e' descritto dal vettore di Poynting

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} \quad [\mathbf{ES^{-2}T^{-1}}]$$


La potenza emessa e' quindi $dP = \vec{S} \cdot \vec{n} dS = \vec{S} \cdot \vec{n} R^2 d\Omega$

$$\longrightarrow \frac{dP}{d\Omega} = R^2 \vec{S} \cdot \vec{n}$$

E' la distribuzione angolare della potenza emessa

Potenza emessa (2)

$$\vec{B} = \vec{n} \times \vec{E} \quad \vec{E} = q \left[\frac{\vec{n} - \vec{\beta}}{\gamma^2 (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3 R^2} \right] + \frac{q}{c} \left[\frac{\vec{n} \times (\vec{n} - \vec{\beta}) \times \vec{\beta}}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3 R} \right]$$

I campi sono tali che $|\vec{B}| = |\vec{E}|$ $\vec{B} \perp \vec{E}$ $\vec{B}, \vec{E} \perp \vec{n}$ 

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} E^2 \vec{n} \quad \text{blue arrow} \quad \frac{dP}{d\Omega} = \frac{cE^2}{4\pi} R^2$$

Per il campo di velocita' $E_v (\sim R^{-2})$

$(\frac{dP}{d\Omega})_v \propto R^{-2} \rightarrow$ la potenza va a zero all'infinito \rightarrow non si ha trasporto netto di energia

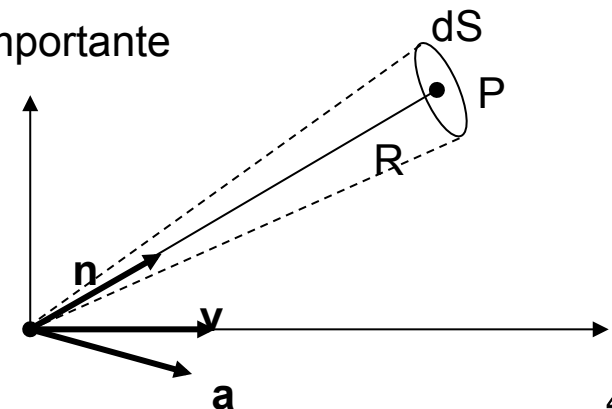
Per il campo di radiazione $E_a (\sim R^{-1})$

$(\frac{dP}{d\Omega})_a \propto \text{cost.} \rightarrow$ la potenza rimane finita per ogni $R \rightarrow$ si ha trasporto netto di energia sotto forma di onde

Per l'emissione a grandi distanze dalla sorgente $R \gg \frac{c^2}{\gamma^2 a}$ e' importante solo il campo di accelerazione

$$\vec{E}_a = \frac{q}{c} \left[\frac{\vec{n} \times (\vec{n} - \vec{\beta}) \times \vec{\beta}}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3 R} \right]$$

NB: i campi di LW sono validi per tutte le velocita' e accelerazioni



Potenza: Larmor

$$\vec{E}_a = \frac{q}{c} \left[\frac{\vec{n} \times (\vec{n} - \vec{\beta}) \times \vec{\beta}}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3 R} \right]$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{cE^2}{4\pi} R^2$$

Nel sistema di quiete istantanea della carica (o per particelle in moto non relativistico) $\beta = 0$ ma $d\beta/dt \neq 0$

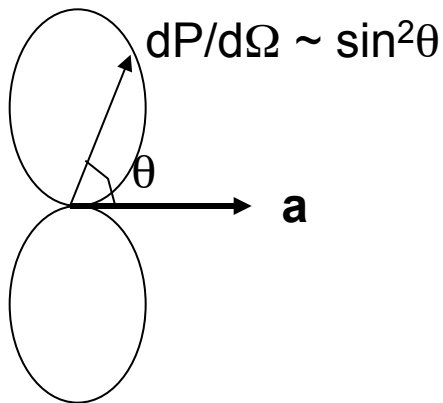
$$\vec{E}_a = \frac{q}{c} \left[\frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}})}{R} \right]$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} |\vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}})|^2$$

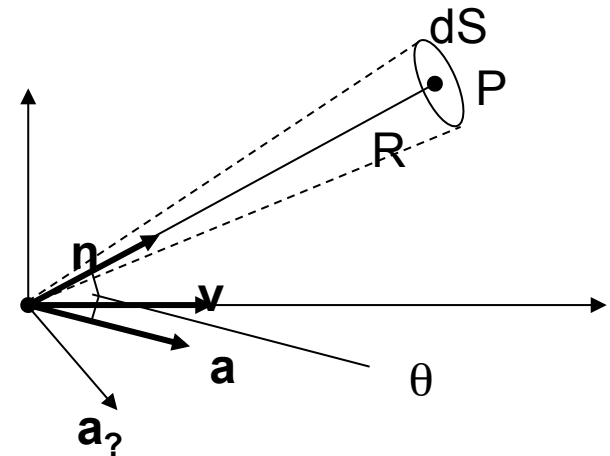
Sviluppo il doppio prodotto vettoriale $\vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}}) = (\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}})\vec{n} - \dot{\vec{\beta}} = -\dot{\vec{\beta}}_{\perp n}$

$$|\dot{\vec{\beta}}_{\perp n}| = \dot{\beta} \sin \theta$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \dot{\beta}^2 \sin^2 \theta = \frac{q^2}{4\pi c^3} a^2 \sin^2 \theta$$



- E' la distribuzione angolare di potenza emessa nel riferimento in cui $\mathbf{v}_{\text{ist}} = \mathbf{0}$:
- diagramma polare di tipo dipolare
 - Emissione nulla lungo \mathbf{a}
 - Max a $\pi/2$ rispetto ad \mathbf{a}

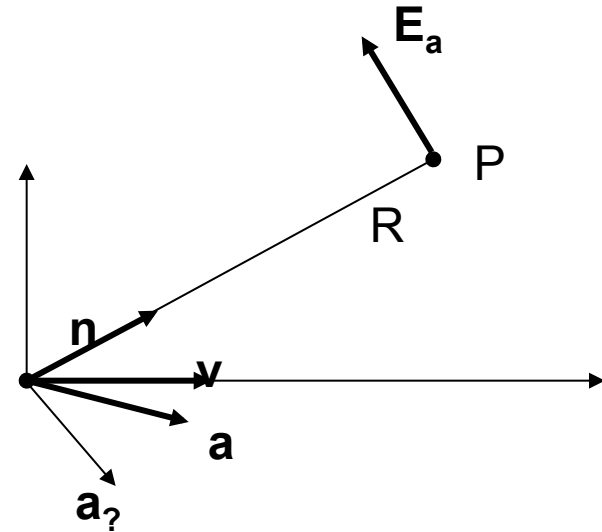
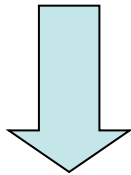


Larmor (2): polarizzazione

Nel sistema di quiete istantanea
della carica ($\beta = 0$)

$$\vec{E}_a = \frac{q}{c} \left[\frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}})}{R} \right] \propto -a_{\perp} \vec{n}$$

Il campo \mathbf{E} oscilla nel piano $\perp \mathbf{n}$ con la
direzione della proiezione di \mathbf{a} su tale
piano (\mathbf{a}_{\perp})



La radiazione emessa e' polarizzata, se la direzione dell'accelerazione e' costante

Larmor (3): potenza totale

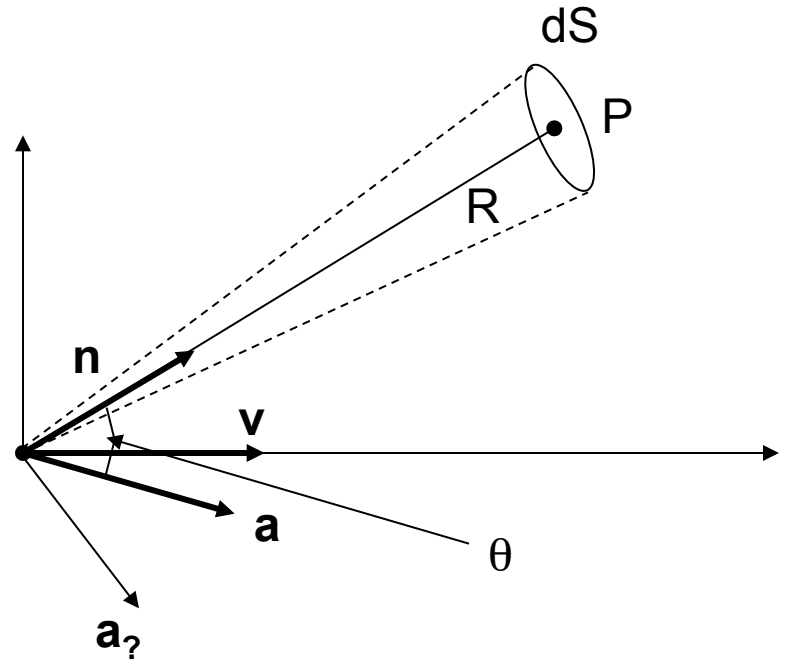
La potenza totale emessa si ottiene integrando sull'angolo solido $\frac{dE}{dt} = \int \frac{dP}{d\Omega} d\Omega$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q^2}{4\pi c^3} a^2 \int \sin^2 \theta d\Omega = \frac{q^2}{4\pi c^3} a^2 \int_{-1}^{+1} (1 - \cos^2 \theta) 2\pi d(\cos \theta)$$

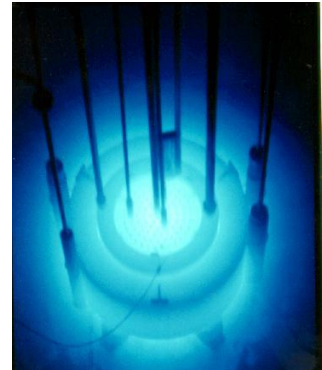
$$= \frac{q^2}{4\pi c^3} a^2 2\pi (4/3) = \frac{2q^2}{3c^3} a^2$$

Formula di Larmor per la potenza emessa da una carica accelerata in moto non relativistico.

E' valida in tutti i casi in cui $\mathbf{v} \ll \mathbf{c}$



Emissione Cerenkov

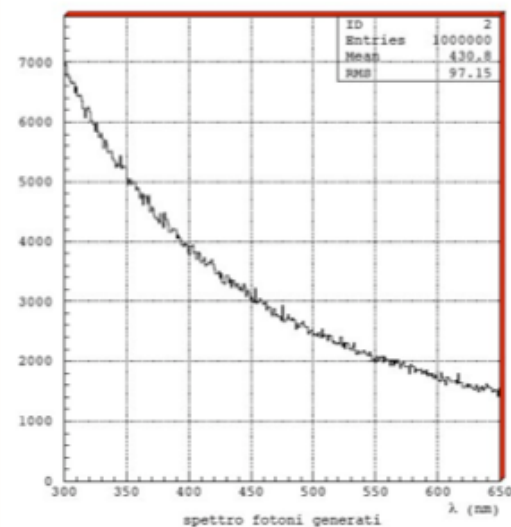
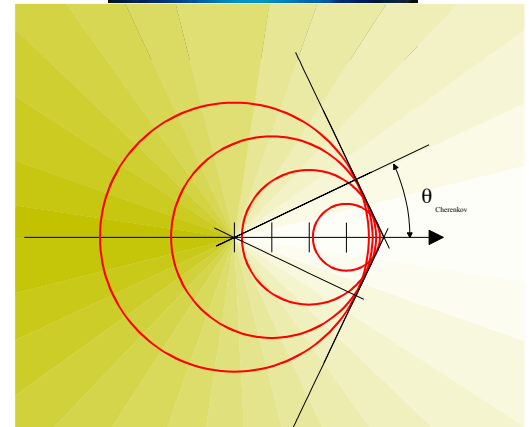


I fatti sperimentali:

- in un materiale con indice di rifrazione n , una particella carica emette fotoni se la sua velocità βc è maggiore della velocità di fase locale della luce $\beta c = v > c/n$

- l'emissione avviene lungo una direzione ben precisa rispetto alla linea di volo della particella nel mezzo, $\cos\theta = 1/\beta n$

- ha una distribuzione spettrale caratteristica



Emissione Cerenkov

Come fa una particella che viaggia a velocità costante a emettere radiazione?

Intuitivamente la particella carica polarizza gli atomi lungo la sua traiettoria.

I dipoli sono dipendenti dal tempo (causa del moto della particella nel mezzo) ed emettono radiazione.

Se $v < c/n$ la distribuzione dei dipoli intorno alla posizione della particella è simmetrica → il dipolo totale è nullo.

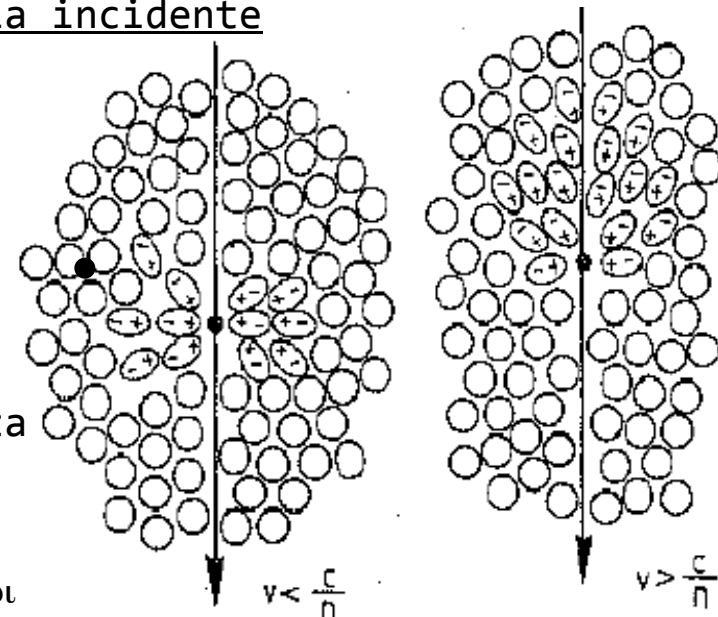
Se $v > c/n$ la distribuzione è asimmetrica nella direzione avanti/indietro → il momento di dipolo netto non è nullo e irraggia.

L'energia irraggiata è fornita dalla particella incidente.

È un effetto dei campi elettrici della particella incidente sugli atomi del mezzo, lo stesso che dà luogo all'effetto densità nella Bethe Bloch

L'emissione avviene solo nella direzione in cui i campi di radiazione dei dipoli sono coerenti.

L'emissione Cherenkov avviene insieme alla perdita di E per collisioni.

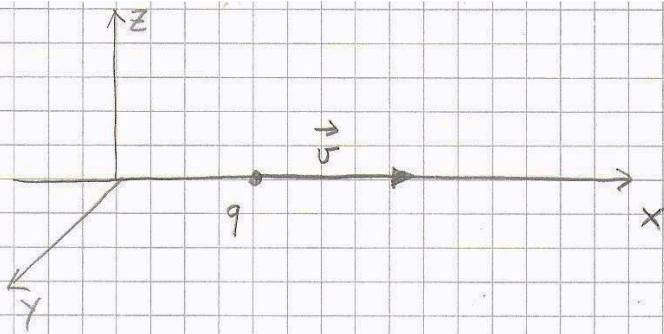


Meccanismo di emissione

Per gli incurabili maniaci dei conti, una trattazione completa (classica) dell'effetto Cerenkov in **Jackson: Classical Electrodynamics** cap 13 e paragrafi 13.4 e 13.5

Per quelli almeno un po' entusiasti, una semplice derivazione si trova in "**High Energy Astrophysics**", Vol.1 Longair (disponibile in formato pdf)

Emissione cherenkov: meccanismo di emissione



- PART CON VEL. COST. LUNGO x $\vec{v} = \text{cost.}$

\Rightarrow CORRENTE $\vec{J}(\vec{x}, t) = q \vec{v} \delta(y) \delta(z) \delta(x - vt)$

- MEZZO POLARIZZABILE MA NON MAGNETICO

(Di Fourier)

$\epsilon \neq \epsilon_0 \quad \mu = \mu_0$

DECOMPOS. IN CORRENTI OSCILLANTI A FREQ. ω

$\vec{J}(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int \vec{J}(\omega, \vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega$ CON $\vec{J}(\omega, \vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int \vec{J}(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt$

CORRISPONDE A RAPPRESENTARE IL MOTO DELLA PART CON UNA DISTRIB. LINEARE DI CORRENTI OSCILLANTI DI AMPIEZZA (1)

$= \frac{q}{(2\pi)^{1/2}} \delta(y) \delta(z) e^{i\omega x/v} \hat{u}_x \quad (1)$

Emissione cherenkov: meccanismo di emissione

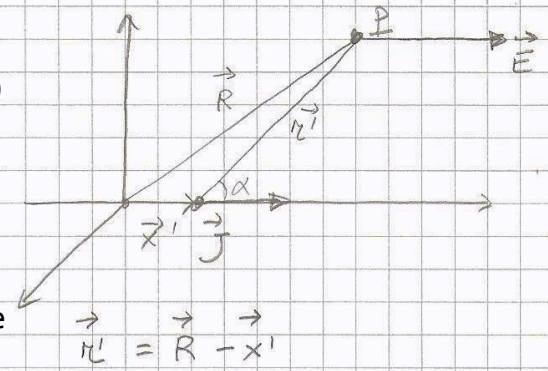
LA SOLUZ. STANDARD E'

(ps: la δ dirac in t' e' sottintesa)

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{x}', t - |\vec{r}'|/c)}{|\vec{r}'|} d^3x' \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\vec{j}]}{|\vec{r}'|} d^3x'$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\dot{\vec{j}}]}{|\vec{r}'|} d^3x'$$

NB: [...] significa valutare al tempo ritardato



Nel limite di campo lontano, la componente del campo di radiazione E_r e' perpendicolare alla direzione di osservazione che risulta

$$(\sim \parallel \vec{r})$$

$$\vec{E}_n = \vec{E} \times \vec{n} \Rightarrow |\vec{E}_n| = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi} \left| \int d^3x' \frac{[\dot{\vec{j}}]}{|\vec{r}'|} \right|$$

LA POT. EMESSA E' $P = \int_S \vec{S} \cdot d\vec{A}$

$S = v u_E$ dove v e' la vel. Di propagazione dell'onda e u e' la densita' di energia. In un mezzo polarizzabile, ma non magnetico $v = c/n$ e $u_E = \epsilon E^2$. Quindi $S = c\epsilon E^2/n$. Ma $n^2 = \epsilon \rightarrow S = ncE^2$

$$= \int_{\Omega} nc E_n^2 R^2 d\Omega = \frac{n\epsilon_0 \mu_0^2 c}{16\pi^2} \int_{\Omega} R^2 \sin^2 \theta \left| \int d^3x' \frac{[\dot{\vec{j}}]}{|\vec{r}'|} \right|^2 d\Omega$$

SE $|R| \gg L$, DIM DELLA REGIONE CHE EMETTE

NOTO CHE $\epsilon_0 \mu_0^2 = \frac{1}{\epsilon_0 c^4}$

$$|\vec{r}'|^2 = |\vec{r}|^2 + |\vec{x}'|^2 - 2|\vec{x}'||\vec{r}| \cos \alpha \approx |\vec{r}|^2 (1 - 2\frac{|\vec{x}'|}{|\vec{r}|} \cos \alpha) \approx |\vec{r}|^2$$

$$P \approx \frac{n}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int_{\Omega} \sin^2 \theta \left| \int d^3x' [\dot{\vec{j}}] \right|^2 d\Omega$$

Emissione cherenkov: meccanismo di emissione

$$L' \text{ ENERGIA TOTALE EMESSA E' } U(\vec{R}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P dt = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{\Omega} d\Omega \sin^2 \theta \left| \int d^3x' [\vec{J}] \right|^2 \cdot \left(\frac{m}{16\pi\epsilon_0 c^3} \right)$$

CON IL TEOR DI PARSEVAL PASSO DA $t \rightarrow \omega$ $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dt |f(t)|^2 = 2 \int_0^{\infty} d\omega |f(\omega)|^2 \right)$

$$U(\vec{R}, \omega) = \frac{2\pi}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \int_{\Omega} d\Omega \sin^2 \theta \int d\omega \underbrace{\left| \int d^3x' [\dot{J}(\omega, \vec{x}')] \right|^2}_{B(\omega)}$$

LA POT EMESSA DIPENDE DALLA VAR DELLA CORR. RITARDATA

I CAMPI IN P ALL'IST. t SONO LA SOMMA DEI CONTRIBUTI DEGLI ELEM. DI CORR.

$[\vec{J}(\omega, \vec{x}')] d^3x'$, CIOE' DI ELEM. IN PUNTI \vec{x}' DIVERSI A IST. $t' = t - |\vec{r}'|/c$ DIVERSI

CIASCUN CONTRIBUTO ARRIVA IN P all'ist. t DA CAMPI EMESSI A $\vec{r}(t')$ DA P

IL CONTRIB. IN P A t DA \vec{x}' A t' VIENE DA $\vec{J}(\omega, \vec{x}') e^{-i\omega t'} = \vec{J}(\omega, \vec{x}') e^{-i\omega(t - r'/c)} = \vec{J}(\omega, \vec{x}') e^{+i\omega r'/c} e^{-i\omega t}$
 $\omega/c = k, k \parallel \vec{r}' \Rightarrow \omega r'/c = \vec{k} \cdot \vec{r}'$
 IN P C'E' UNA FASE

INOLTRE $\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \vec{J}(\omega, \vec{x}') e^{i\omega t'} \right\} = i\omega \vec{J}(\omega, \vec{x}') e^{i\omega t'}$ (cfr. $t' = t - r'/c$) $\Rightarrow [\dot{\vec{J}}(\omega, \vec{x}')] = i\omega [\vec{J}(\omega, \vec{x}')]$

QUINDI $B(\omega) = \omega \left| \int d^3x' [\vec{J}(\omega, \vec{x}') e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}'}] \right| = \omega \left| \int d^3x' \left[\frac{q}{(2\pi)^{3/2}} \delta(y) \delta(z) e^{i(\omega x'/c + \vec{k} \cdot \vec{r}')} \right] \right|$

$$= \frac{q\omega}{(2\pi)^{1/2}} \left| \int dx' \left[e^{i(\omega x'/c + \vec{k} \cdot \vec{r}')} \right] \right|$$

DOVE $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \hat{m}$

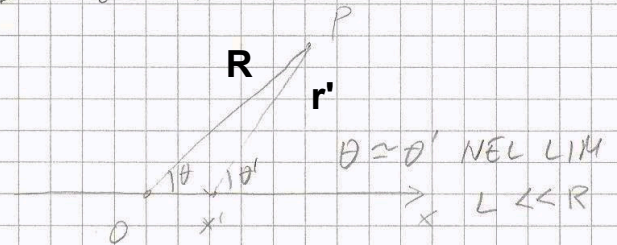
Emissione cherenkov: meccanismo di emissione

$$B(\omega) = \frac{q\omega}{(2\pi)^{1/2}} \left| \int dx' \left[e^{i(\omega x'/v + \vec{k} \cdot \vec{r}')}] \right] \right|$$

$$\vec{r}' = \vec{R} - \vec{x}' \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{r}' = \vec{k} \cdot \vec{R} - \vec{k} \cdot \vec{x}'$$

$$= \frac{q\omega}{(2\pi)^{1/2}} \left| e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} \int dx' \left[e^{i(\omega x'/v + kx' \cos\theta)} \right] \right|$$

=



$$= \frac{q\omega}{(2\pi)^{1/2}} \left| \int dx' \left[e^{ix'(\frac{\omega}{v} + k \cos\theta)} \right] \right|$$

PERCIO'

$$(2) U = \frac{n}{8\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int d\Omega \sin^2\theta \int d\omega \frac{q^2 \omega^2}{(2\pi)} \left| \int dx' \left[e^{ix'(\frac{\omega}{v} + k \cos\theta)} \right] \right|^2 \quad \text{E' L'ENERGIA TOTALE CHE ARRIVA IN P}$$

La chiave per l'emissione e' nell'integrale dentro | ... |: se l'integrando oscilla, l'integrale e' nullo

- SE LA FASE E' T.C. $\neq 0 \Rightarrow$ L'INTEGRALE $= 0$ NON C'E' ENERGIA NETTA
 $= 0$ " " $\neq 0$ C'E' E NETTA

Emissione cherenkov: meccanismo di emissione

CON $k = \frac{\omega}{c}$ SI HA $\omega \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{c} \cos \theta \right) = \frac{\omega}{c} \left(\frac{c}{v} + \cos \theta \right)$ NELL'EXP

• NEL VUOTO $\frac{c}{v} > 1, \forall v \Rightarrow \frac{c}{v} + \cos \theta > 0, \forall \theta \Rightarrow$ NO EMISSIONE

• IN UN MEZZO $c' = \frac{c}{n} < c \Rightarrow \frac{c'}{v} = \frac{c}{nv} < 1$ PER $v > \frac{c}{n}$

ALLORA QUANDO $\frac{c}{v} + \cos \theta = 0$, L'EXP NON OSCILLA PIU' \Rightarrow

LUNGO LA DIR $\cos \theta = -\frac{c}{v} = -\frac{1}{n\beta}$ C'E' EMISSIONE NETTA!
(I.E. I CAMPI SONO COERENTI)

$$\text{DA (2) SI HA } \frac{dU}{d\omega} = \frac{m\omega^2 q^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c^3} \int_{\Omega} d\Omega \sin^2 \theta \left| \int dx' [e^{ikx'(\cos \theta + \frac{c}{v})}] \right|^2$$

POICHE' SI HA EMISSIONE SOLO QUANDO $\alpha = k(\cos \theta + \frac{c}{v}) \approx 0 \Rightarrow$
 $\sin^2 \theta \approx \sin^2 \theta_c = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{1}{n^2 \beta^2}$ SI PUO' RITENERE \approx COSTANTE

$$\frac{dU}{d\omega} = \frac{mq^2 \omega^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c^3} \left(1 - \frac{1}{n^2 \beta^2}\right) \int_{\Omega} d\Omega \left| \int dx' [e^{i\alpha x'}] \right|^2, \alpha \approx 0$$

L'integrale formalmente va $-\infty$ a $+\infty$; per eseguirlo prendiamo un L finito (eventualmente facciamo il limite a ∞)

$$\int_{-L}^L dx' e^{i\alpha x'} = \frac{e^{i\alpha L} - e^{-i\alpha L}}{i\alpha} = \frac{2 \sin \alpha L}{\alpha} \Rightarrow \frac{dU}{d\omega} = \frac{mq^2 \omega^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c^3} \left(1 - \frac{1}{n^2 \beta^2}\right) \int_{\Omega} \frac{4 \sin^2 \alpha L}{\alpha^2} 2\pi d\cos \theta$$

Emissione cherenkov: meccanismo di emissione

$$\frac{dU}{d\omega} = \frac{n^2 q^2 \omega^2}{2\pi^2 \epsilon_0 c^3} \left(1 - \frac{1}{n^2 \beta^2}\right) \underbrace{\int \frac{\sin^2 \alpha L}{\alpha^2} d\cos\theta}_C$$

$$\alpha = k(\cos\theta + \frac{c}{v}) \Rightarrow d\alpha = k d\cos\theta$$

$$C = L \int \frac{L d\alpha}{k} \frac{\sin^2 \alpha L}{\alpha^2 L^2} = \frac{L}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} du \frac{\sin^2 u}{u^2} = \frac{\pi L}{k} = \frac{\pi L c}{n \omega}$$

$$\frac{dU}{d\omega} = \frac{q^2 \omega}{2\pi \epsilon_0 c^2} \left(1 - \frac{1}{n^2 \beta^2}\right) L$$

\Rightarrow POICHE' LA REGIONE DI EMISSIONE E' LUNGA $2L$ SI HA $\frac{dU}{d\omega dx} = \frac{1}{2L} \frac{dU}{d\omega}$

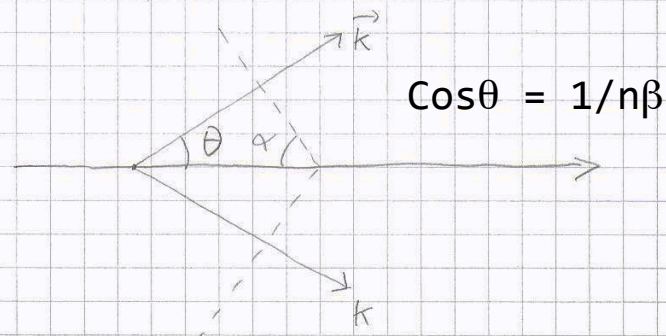
$$\frac{dU}{d\omega dx} = \frac{q^2 \omega}{4\pi \epsilon_0 c^2} \left(1 - \frac{1}{n^2 \beta^2}\right)$$

E' L'ENERGIA EMESSA PER UNITA' DI LUNGHEZZA PERCORSO NEL MATERIALE, ALLA FREQ. ω NELLA DIR θ (RISP. ALLA LINEA DI VOLO DELLA PART.)

LA POTENZA ALLA FREQ. ω : $dx = v dt \Rightarrow$

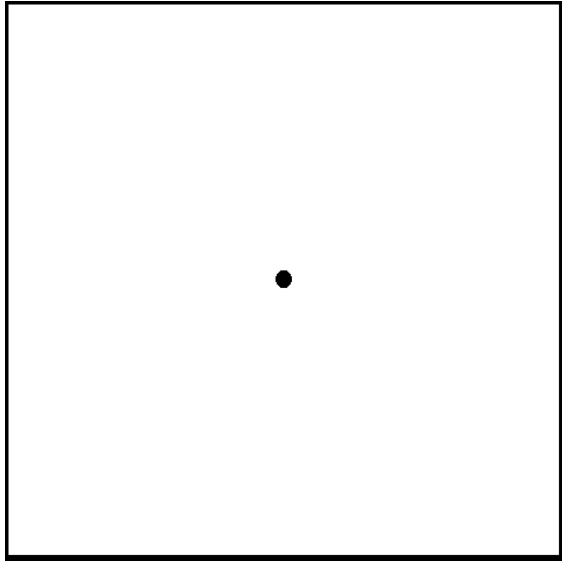
$$\frac{dP}{d\omega} = \frac{q^2 \omega v}{4\pi \epsilon_0 c^2} \left(1 - \frac{1}{n^2 \beta^2}\right)$$

NB: poiche' la potenza e' positiva, non c'e' emissione quando $1 - 1/\beta^2 n^2 < 0$

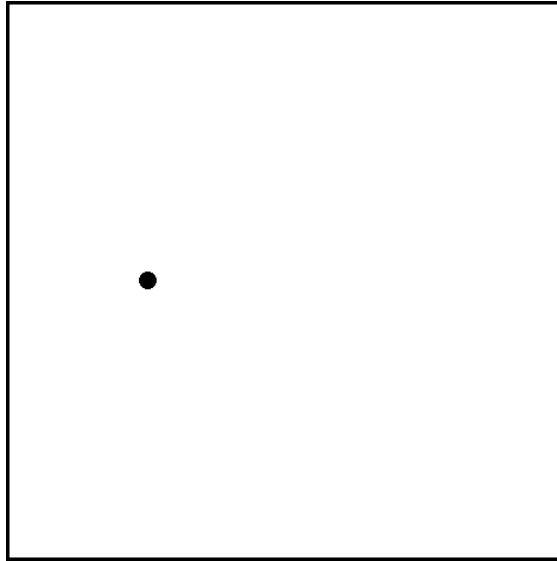


Radiazione Cherenkov

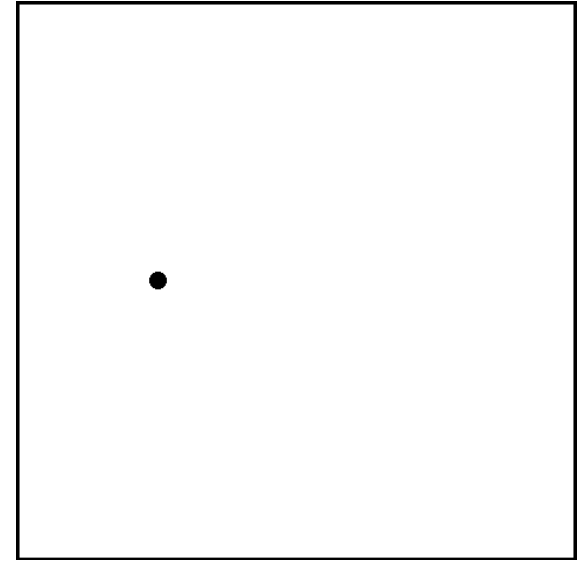
- Carica in moto nella materia



a riposo



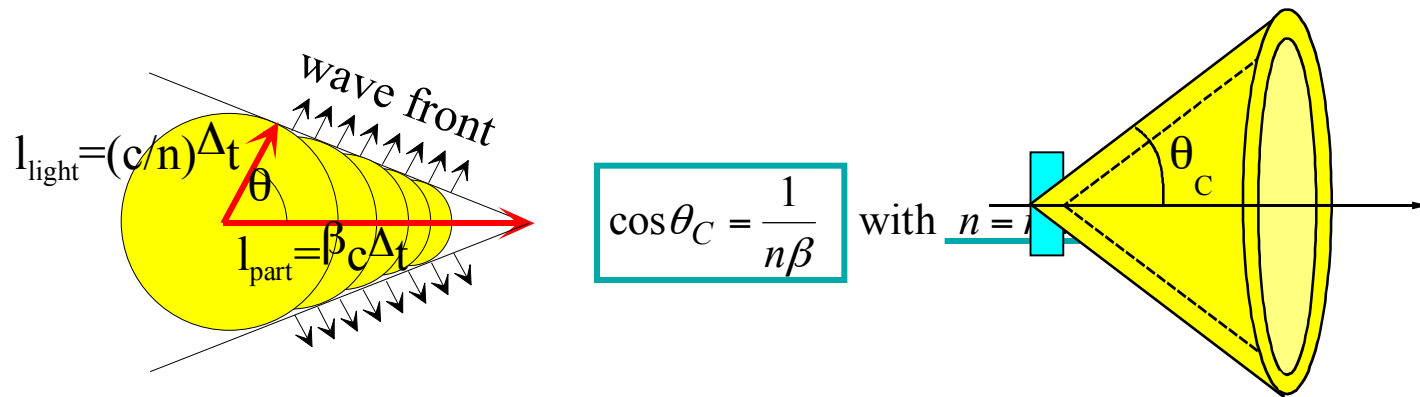
lenta



veloce

Radiazione Cherenkov

Il fronte d'onda emesso a θ_c e' analogo (sebbene di origine completamente diversa) al fronte d'onda di shock che si forma dietro ad aerei in moto supersonico o all'onda di prua (bow shock) di una nave in acqua a velocita' $>$ di quella delle onde di superficie (si usa in tutti i casi il principio di Huygens per costruire il fronte d'onda, che non dipende dal processo che da luogo all'emissione delle onde che si sovrappongono)



Due caratteristiche:

1) Esiste una velocita' di soglia $\beta_s = 1/n \rightarrow \theta_c \sim 0$ emissione collineare

2) Esiste un angolo massimo quando $\beta=1$ $\theta_{max} = \arccos(1/n)$

$\cos(\theta) = 1/\beta n$ e' valida solo per un radiatore infinito, e' comunque una buona approssimazione ogni qualvolta il radiatore e' lungo $L \gg \lambda$ essendo λ la lunghezza d'onda della luce emessa

Radiazione Cherenkov

L'energia totale persa si ottiene integrando sull'intervallo di frequenza

$$-\frac{dE}{dx} = z^2 \alpha \frac{\hbar}{c} \int \omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\omega)} \right) d\omega$$

NB: e' la stessa ricavata prima, con $q = ze$ e $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$

L' energia persa per radiazione Cerenkov cresce con β . Comunque anche con $\beta \rightarrow 1$ è molto piccola.

Molto piu' piccola di quella persa per collisione (Bethe Block), al massimo 1% \rightarrow pochi fotoni emessi.

•	medium	n	$\theta_{\max} (\beta=1)$	$N_{\text{ph}} (\text{eV}^{-1} \text{ cm}^{-1})$
	air	1.000283	1.36	0.208
	isobutane	1.00127	2.89	0.941
	water	1.33	41.2	160.8
	quartz	1.46	46.7	196.4

Number of photons from Cerenkov Radiation

energy loss per wavelength (λ) per dx for charge $z=1$, $\beta n > 1$:

$$\frac{dE}{dx d\lambda} = \frac{2\pi\alpha E}{\lambda^2} \left[1 - \frac{1}{\beta^2 n(\lambda)^2} \right] \quad \text{nb: } E \text{ is the photon energy}$$

We can rewrite it in terms of the number of photons (N) using:

$E = h\omega/2\pi$ and $dN/dx = (dE/dx)/E$

$$\frac{dE}{dx d\lambda} = \frac{2\pi\alpha E}{\lambda^2} \left[1 - \frac{1}{\beta^2 n(\lambda)^2} \right] \Rightarrow \frac{dN}{dx d\lambda} = \frac{2\pi\alpha}{\lambda^2} \left[1 - \frac{1}{\beta^2 n(\lambda)^2} \right]$$

We can simplify by considering a region where $n(\lambda)$ is a constant $= n$:

$$1 - \frac{1}{\beta^2 n(\lambda)^2} = 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta \Rightarrow \frac{dN}{dx d\lambda} = \frac{2\pi\alpha}{\lambda^2} \left[1 - \frac{1}{\beta^2 n(\lambda)^2} \right] = \frac{dN}{dx d\lambda} = \frac{2\pi\alpha}{\lambda^2} \sin^2 \theta$$

We can calculate the number of photons/dx by integrating over the wavelengths that can be detected by our phototube (λ_1, λ_2):

$$\frac{dN}{dx} = 2\pi\alpha \sin^2 \theta \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{d\lambda}{\lambda^2} = 2\pi\alpha \sin^2 \theta \left[\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right]$$

Note: if we are using a phototube with a photocathode efficiency $e(\lambda)$ that varies as a function of λ then we have:

$$\frac{dN}{dx} = 2\pi\alpha \sin^2 \theta \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{e(\lambda) d\lambda}{\lambda^2}$$

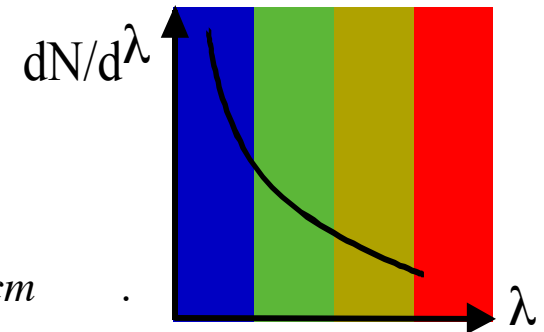
Number of photons from Cerenkov Radiation

Numero di fotoni emessi per unita' di lunghezza e intervallo unitario di lunghezza d'onda.

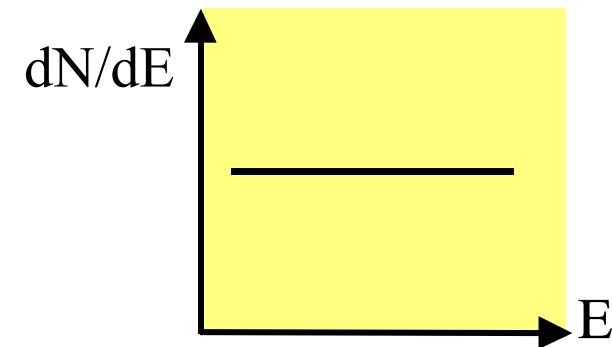
Osserviamo che decresce al crescere della λ

$$\frac{d^2N}{dx d\lambda} = \frac{2\pi z^2 \alpha}{\lambda^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) = \frac{2\pi z^2 \alpha}{\lambda^2} \sin^2 \theta_c$$

$$\frac{d^2N}{dx d\lambda} \propto \frac{1}{\lambda^2} \quad \text{with} \quad \lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{E} \quad \frac{d^2N}{dx dE} = \frac{z^2 \alpha}{\hbar c} \sin^2 \theta_c^2 \approx 390 z^2 \sin^2 \theta_c^2 \text{ ph / eVcm} .$$



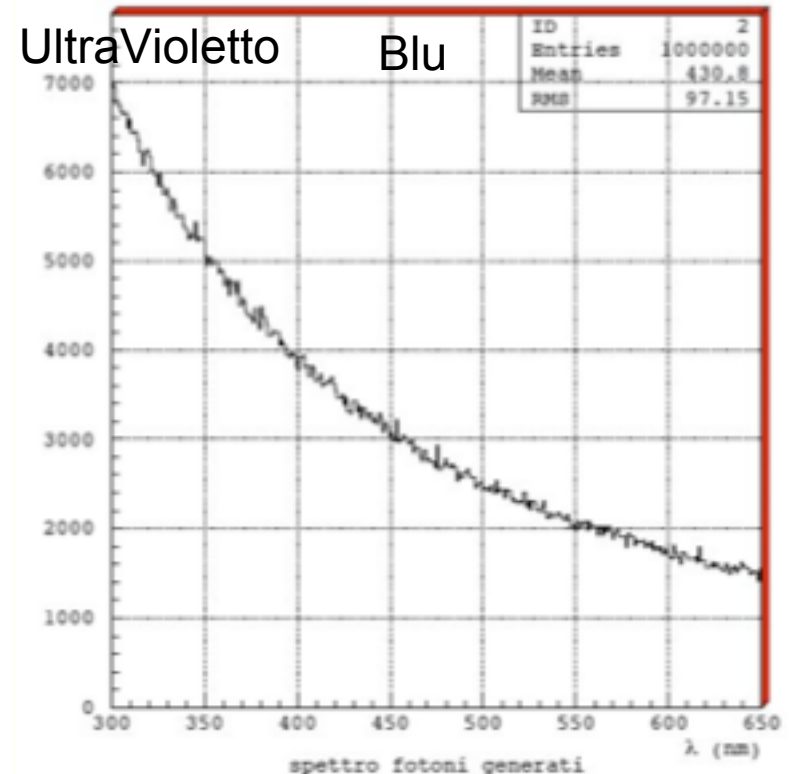
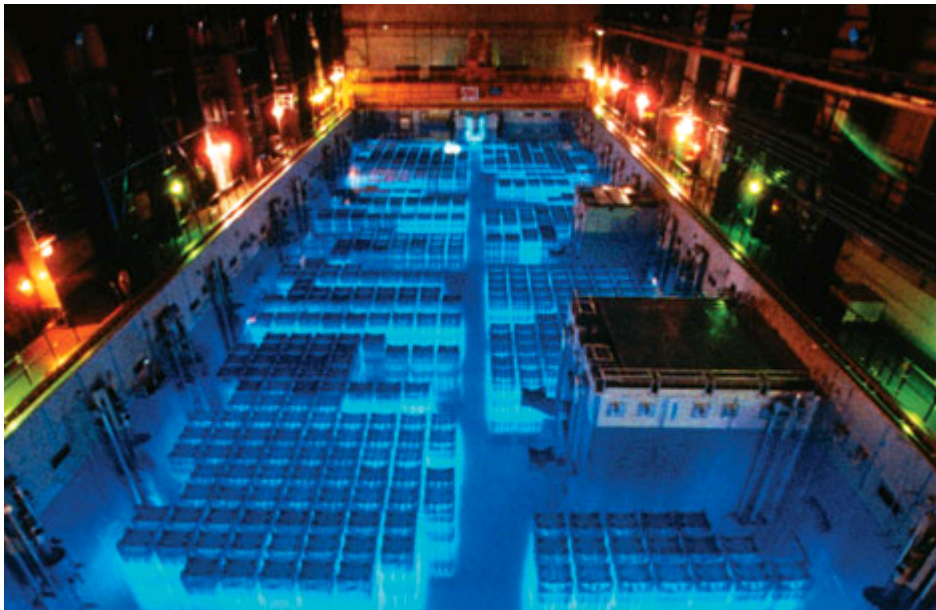
Il numero di fotoni emessi per unita' di Lunghezza non dipende dall'energia del fotone



Blue Light

- More photons are produced at short wavelengths.
- Enhanced visible light at the blue end of the spectrum.
 - Characteristic glow from a reactor

$$\frac{\partial N}{\partial \lambda} = 2\pi\alpha L \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \frac{1}{\lambda^2}$$



Number of photons from Cerenkov Radiation

For a typical phototube the range of wavelength (λ_1, λ_2) is (350nm, 500nm).

$$\frac{dN}{dx} = 2\pi\alpha \sin^2 \theta \left[\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right] = 2\pi\alpha \sin^2 \theta \left[\frac{1}{3.5} - \frac{1}{5} \right] \frac{10^5}{\text{cm}} = 390 \sin^2 \theta \text{ photons/cm}$$

We can simplify using:

$z=1$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} = \frac{(\beta n + 1)(\beta n - 1)}{\beta^2 n^2} \xrightarrow{\beta \rightarrow 1} \frac{(n+1)(n-1)}{n^2}$$

For a highly relativistic particle going through a gas the above reduces to:

$$\sin^2 \theta = \frac{(\beta n + 1)(\beta n - 1)}{\beta^2 n^2} \xrightarrow{\beta \rightarrow 1} \frac{(n+1)(n-1)}{n^2} \xrightarrow{\beta \rightarrow 1, \text{gas}} 2(n-1)$$

$$\frac{dN}{dx} = 780(n-1) \text{ photons/cm}$$

GAS

For He we find: 2-3 photons/meter (not a lot!)

For CO₂ we find: ~33 photons/meter

For H₂O we find: ~34000 photons/meter

Photons are preferentially emitted at small λ 's (blue)

For most Cerenkov counters the photon yield is limited (small) due to space limitations, the index of refraction of the medium, and the phototube quantum efficiency.

Radiazione Cherenkov

La luce emessa e rivelabile e' poca.

- Se consideriamo un radiatore spesso 1 cm, un angolo di emissione $\theta_c = 30^\circ$ ed una finestra sensibile del rivelatore di fotoni $\Delta E = E_2 - E_1 = 1$ eV ed una particella di carica 1.

$$\frac{dN}{dE dx} = \frac{z^2 \alpha}{\hbar c} \sin^2 \vartheta_c$$

$$\Rightarrow N_{ph} = 370 \cdot \sin^2 \vartheta_c \cdot L \cdot \Delta E = 370 \times 0.25 = 92.5$$

Considerando inoltre che l'efficienza quantica tipica di un fotomoltiplicatore e' ~20% \rightarrow

$$N_{pe}=18 \rightarrow \text{fluttuazioni alla Poisson}$$

Number of photons from Cerenkov Radiation

medium	n	$\theta_{\max} (\beta=1)$	$N_{\text{ph}} (\text{eV}^{-1} \text{ cm}^{-1})$
air	1.000283	1.36	0.208
isobutane	1.00127	2.89	0.941
water	1.33	41.2	160.8
quartz	1.46	46.7	196.4

To obtain the correct number of photons produced in a Cherenkov counter, must be integrated over the region for which $\beta \cdot n(\lambda) > 1$.

Also the response function of the light collection system must be taken into account to obtain the number of photons arriving at the photon detector.

All transparent materials are candidates for Cherenkov radiators. In particular, Cherenkov radiation is emitted in all scintillators and in the light guides which are used for the readout.

The scintillation light, however, is approximately 100 times more intense than the Cherenkov light.

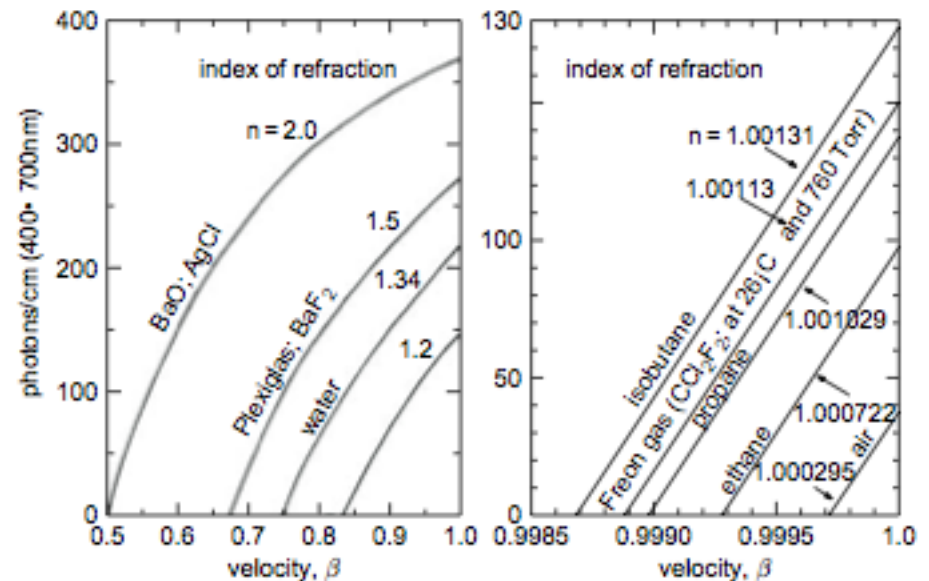
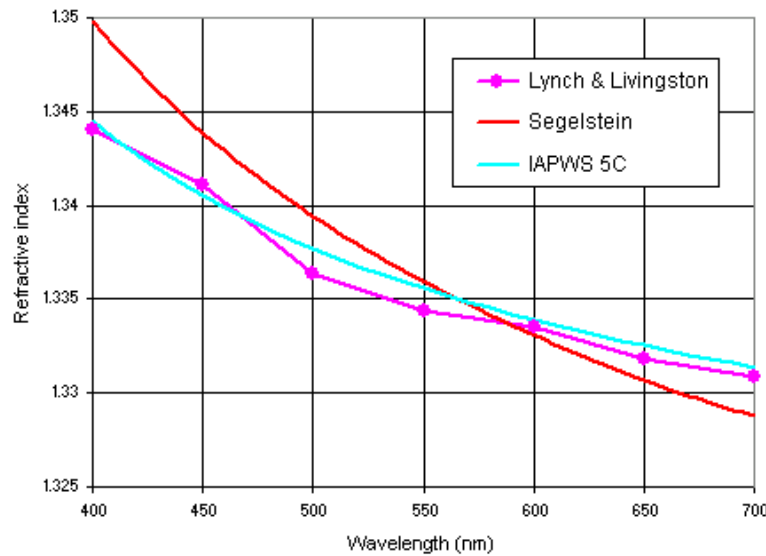


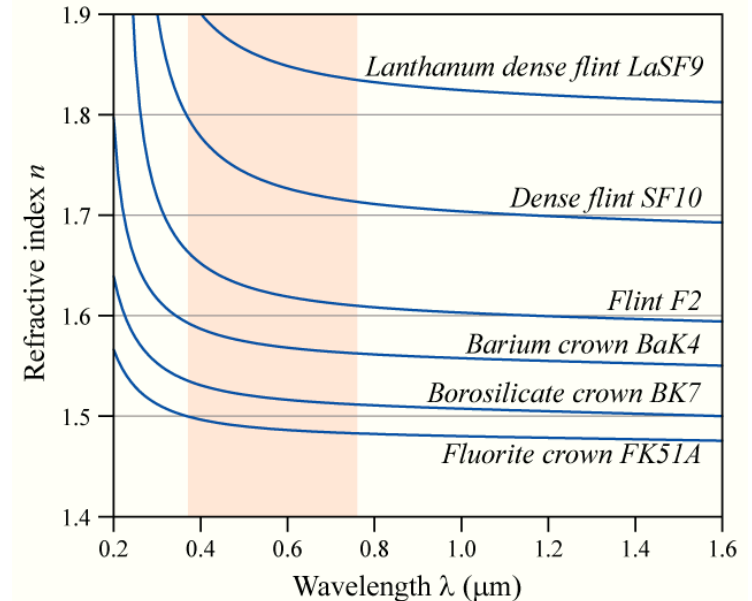
Fig. 5.40. Number of produced Cherenkov photons per unit path length for various materials as a function of the particle velocity [142].

Frequency Dependence

- The refractive index varies with wavelength.



water



glass

Therefore, an integration over the frequency/energy/wavelength range of photomultiplier is actually needed to obtain the the number of photons from emission (the so called photon yield

$$\frac{dN}{dx} = 2\pi\alpha \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{e(\lambda)d\lambda}{\lambda^2} \left(1 - \frac{1}{n^2(\lambda)\beta^2}\right)$$

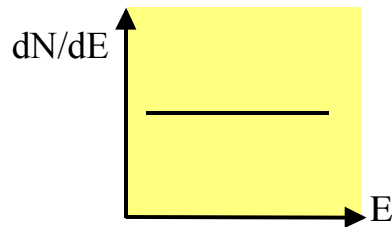
Radiazione Cherenkov

L'indice di rifrazione dipende dalla frequenza, cioè dell'energia, $n=n(E)$ e $dn/dE \neq 0$

→ errore cromatico

$$\sigma_{\vartheta}^c = \frac{1}{n \cdot \operatorname{tg} \vartheta} \sigma_n = \frac{1}{n \cdot \operatorname{tg} \vartheta} \frac{dn}{dE} \sigma_E$$

σ_E e' connesso all'intervallo ΔE considerato.



Assumendo distribuzione piatta in energia

$$\rightarrow \sigma_E = \Delta E / (12)^{1/2}$$

L'errore cromatico puo' essere ridotto riducendo ΔE e quindi il numero di fotoni emessi o con correzioni ottiche complicate

Radiazione Cherenkov

Le due caratteristiche importanti dell'emissione cherenkov sono:

- 1) Esiste una soglia per emissione di luce Cerenkov $\beta n > 1$
- 2) La luce e' emessa ad un angolo particolare $\sin\theta_c = 1/\beta n$
- 3) Il numero di fotoni emessi dipende dalla carica

$$\frac{d^2N}{dx dE} = \frac{z^2 \alpha}{\hbar c} \sin^2\theta_c \approx 390 z^2 \sin^2\theta_c \text{ ph / eVcm}$$

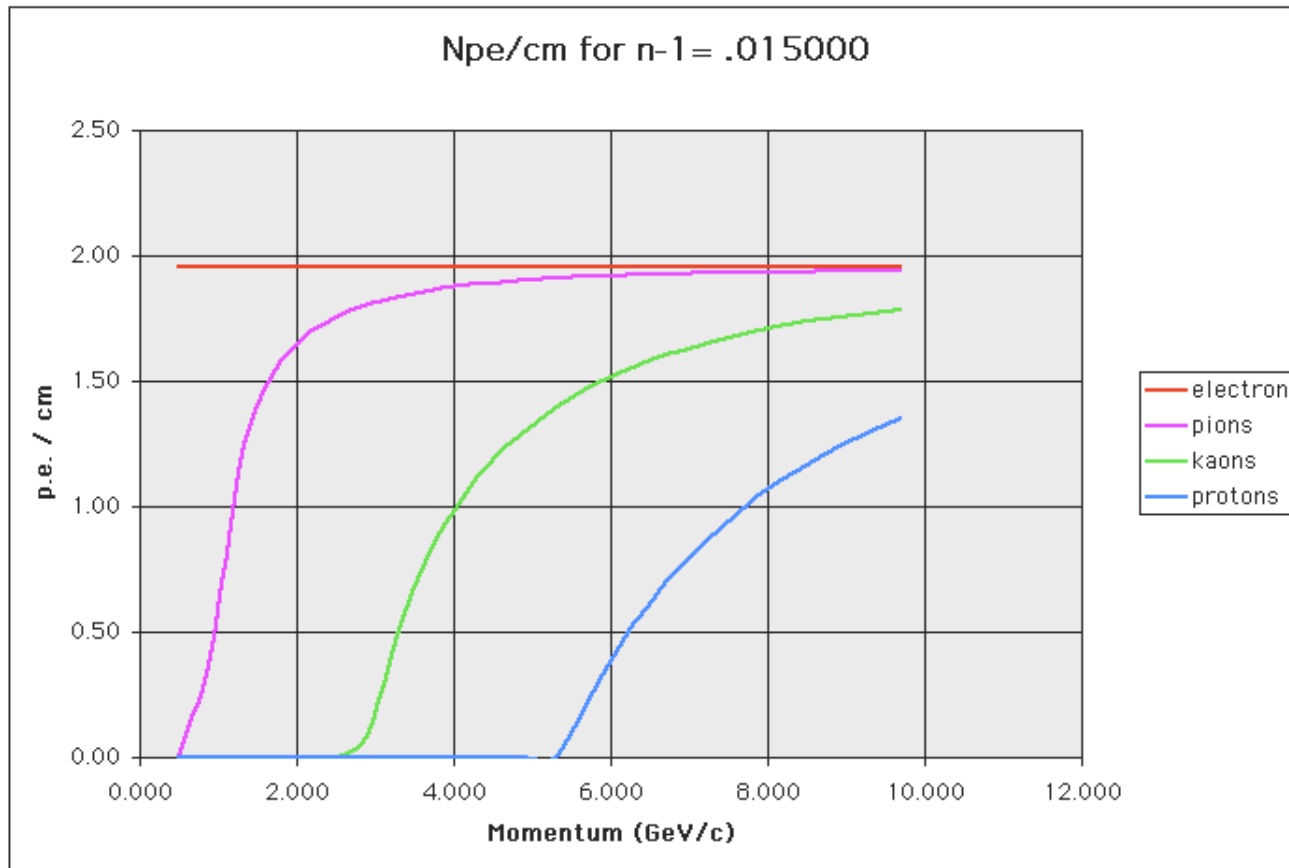
→ Facile utilizzare l'effetto Cerenkov per identificare le particelle.

Con 1) posso sfruttare la soglia → Cerenkov a soglia.

Con 2) e 3) misurare l'angolo e PID → DISC, RICH etc.

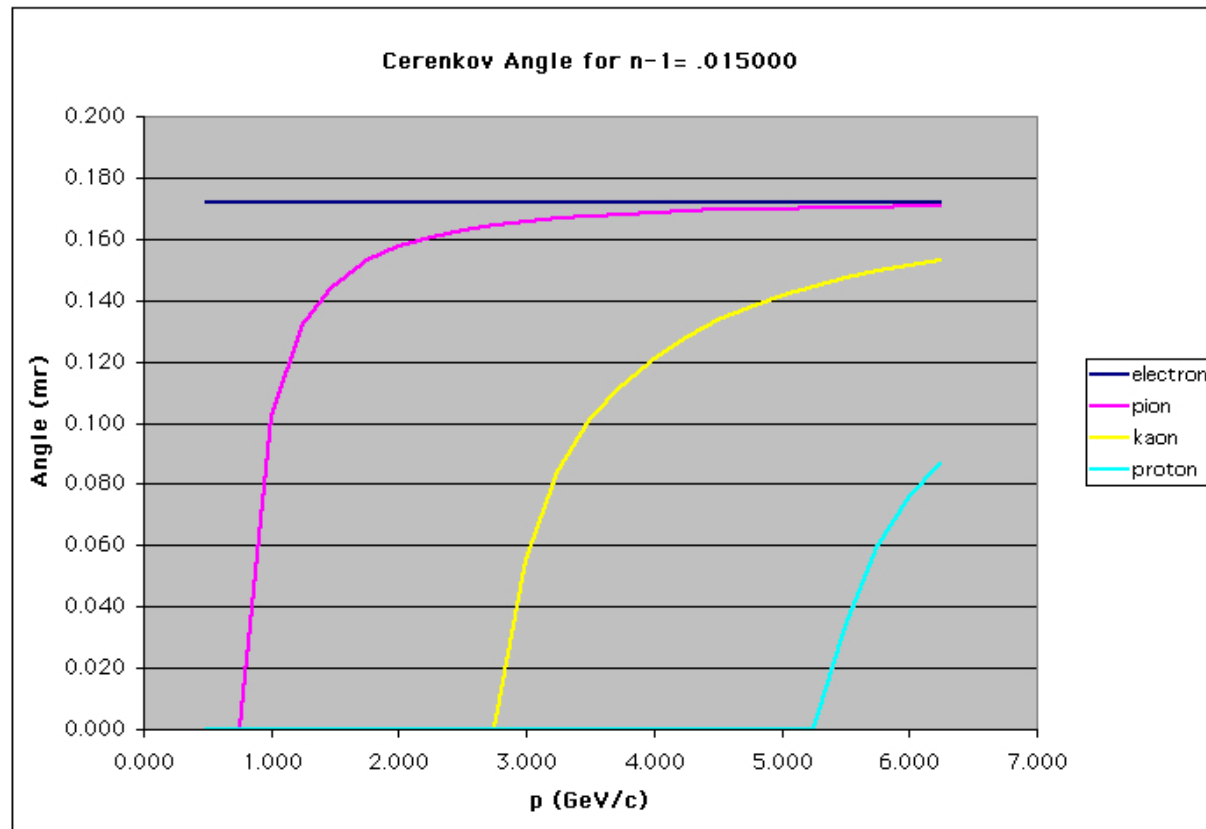
Cherenkov: Particle Identification

Threshold Cerenkov Counter. # Photons vs. Momentum.



Cherenkov: Particle Identification

Cerenkov Counter. Light Emission Angle vs. Particle Momentum.



Different Cherenkov Detectors

■ Threshold Detectors

- Yes/No on whether the speed is $\beta > 1/n$

■ Differential Detectors

- makes use of the angle of the Cerenkov radiation
- $\beta_{\max} > \beta > \beta_{\min}$

■ Ring-Imaging Detectors

- makes use of the “cone” of light
- Measure β

Each of the above counters is designed to work in a certain momentum range.

Threshold Momentum for Cerenkov Radiation

Example: Threshold momentum for Cerenkov light:

$$\beta_t = \frac{1}{n} \quad \gamma_t = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_t^2}} = \frac{n}{\sqrt{n^2-1}} = \frac{1}{\beta_t \sqrt{n^2-1}}$$

$$\beta_t \gamma_t = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n+1)}}$$

Medium	$\delta=n-1$	γ_t
Helium	3.3×10^{-5}	123
CO ₂	4.3×10^{-4}	34
H ₂ O	0.33	1.52
Glass	0.46-0.75	1.37-1.22

For gases it is convenient to let $\delta=n-1$. Then we have:

$$\beta_t \gamma_t = \frac{1}{\sqrt{\delta(\delta+2)}}$$

The momentum (p_t) at which we get Cerenkov radiation is:

$$p_t = m \beta_t \gamma_t = \frac{m}{\sqrt{\delta(\delta+2)}}$$

For a gas $\delta+2 \approx 2$ so the threshold momentum can be approximated by:

$$p_t = m \beta_t \gamma_t = \frac{m}{\sqrt{2\delta}}$$

For helium $\delta=3.3 \times 10^{-5}$ so we find the following thresholds:

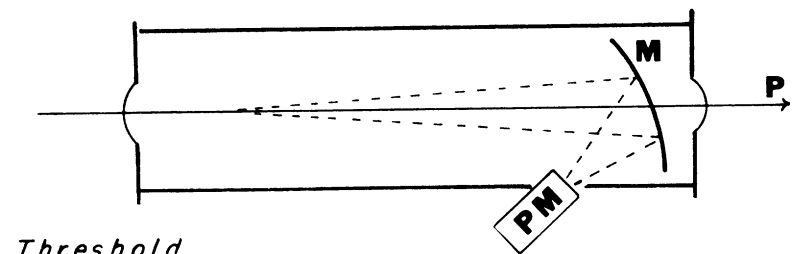
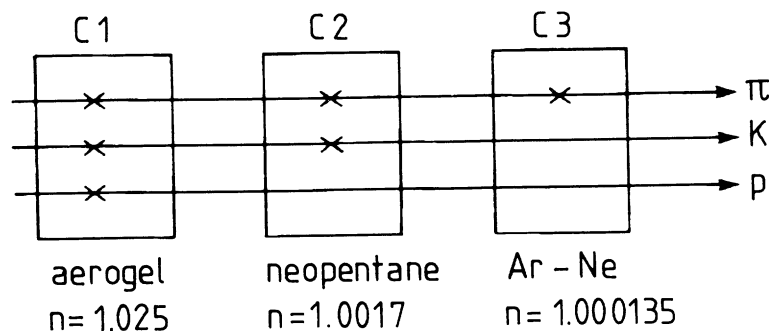
electrons 63 MeV/c kaons 61 GeV/c
pions 17 GeV/c protons 115 GeV/c

Table 5.4. *Compilation of Cherenkov radiators [1, 143]. The index of refraction for gases is for 0 °C and 1 atm (STP). Solid sodium is transparent for wavelengths below 2000 Å [144, 145]*

Material	$n - 1$	β threshold	γ threshold
Solid sodium	3.22	0.24	1.029
Diamond	1.42	0.41	1.10
Flint glass (SFS1)	0.92	0.52	1.17
Lead fluoride	0.80	0.55	1.20
Aluminium oxide	0.76	0.57	1.22
Lead glass	0.67	0.60	1.25
Polystyrene	0.60	0.63	1.28
Plexiglas (Lucite)	0.48	0.66	1.33
Borosilicate glass (Pyrex)	0.47	0.68	1.36
Lithium fluoride	0.39	0.72	1.44
Water	0.33	0.75	1.52
Liquid nitrogen	0.205	0.83	1.79
Silica aerogel	0.007–0.13	0.993–0.884	8.46–2.13
Pentane (STP)	$1.7 \cdot 10^{-3}$	0.9983	17.2
CO ₂ (STP)	$4.3 \cdot 10^{-4}$	0.9996	34.1
Air (STP)	$2.93 \cdot 10^{-4}$	0.9997	41.2
H ₂ (STP)	$1.4 \cdot 10^{-4}$	0.99986	59.8
He (STP)	$3.3 \cdot 10^{-5}$	0.99997	123

Types of Cerenkov: Threshold counter

- Identify the particle(s) which give off light.
- Can be used to separate electrons from heavier particles (π , K, p) since electrons will give off light at a much lower momentum (e.g. 63 MeV/c vs 17 GeV/c for He)
- Problems with device:
 - ✓ above a certain momentum several particles will give light.
 - ✓ usually threshold counters use gas which implies low light levels (n-1 small) low light levels leads to inefficiency, e.g. $\langle n_g \rangle = 3$, the prob. of zero photons: $P(0) = e^{-3} = 5\%$
 - ✓ Phototubes must be shielded from magnetic fields above a few tenths of a gauss.



Threshold Cherenkov Detector

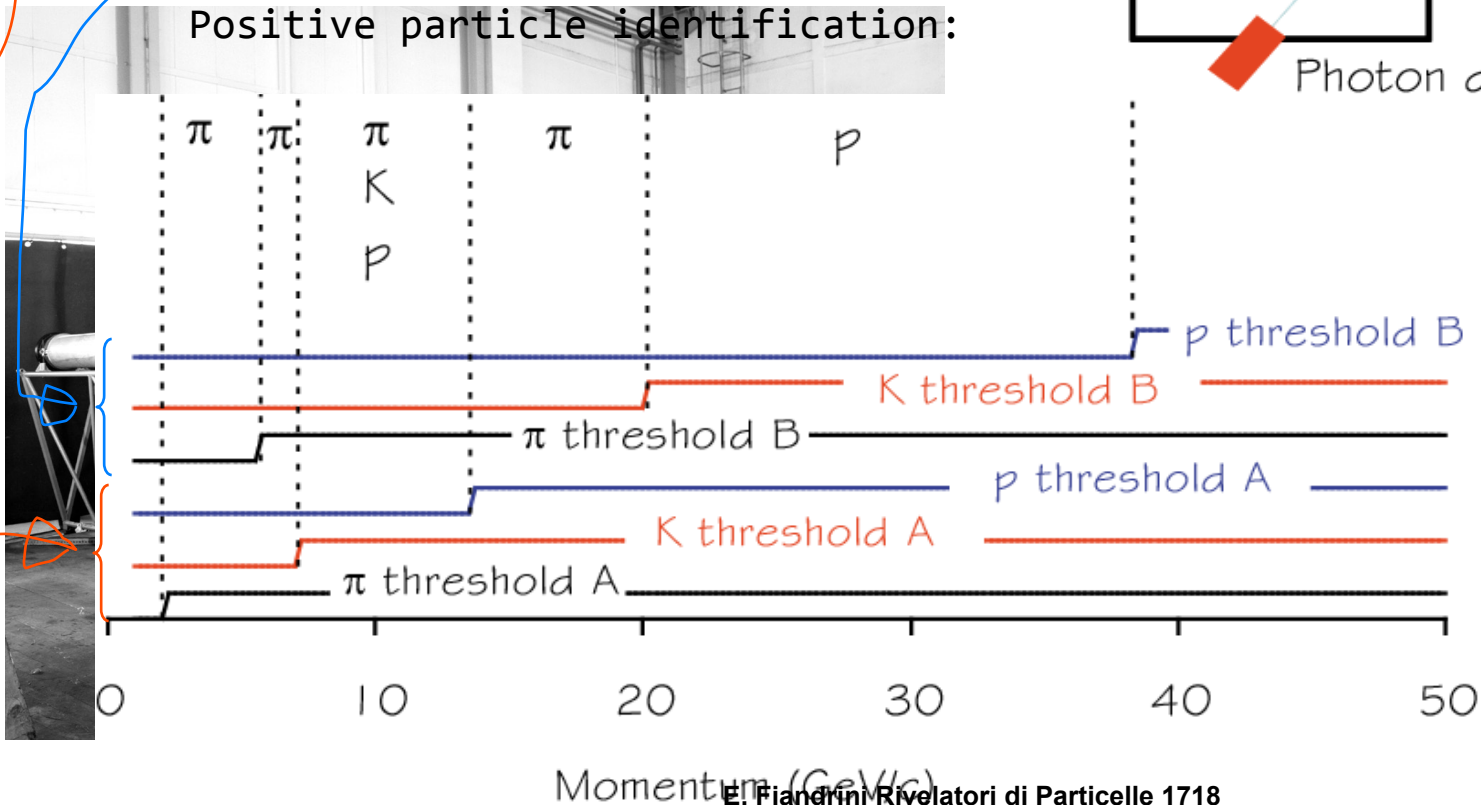
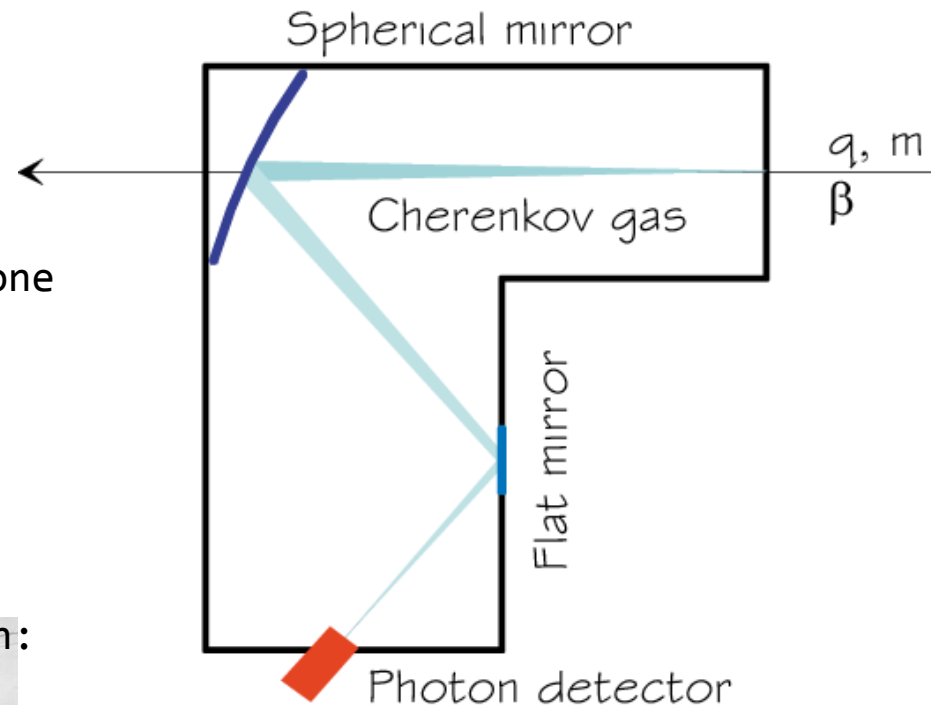
To get a wider momentum range for particle identification, use more than one radiator.

Assume

A radiator: $n=1.0024$

B radiator: $n=1.0003$

Positive particle identification:



A practical example

$$\cos\theta = \frac{1}{\beta n}$$

$$m = \frac{p}{\beta\gamma}$$

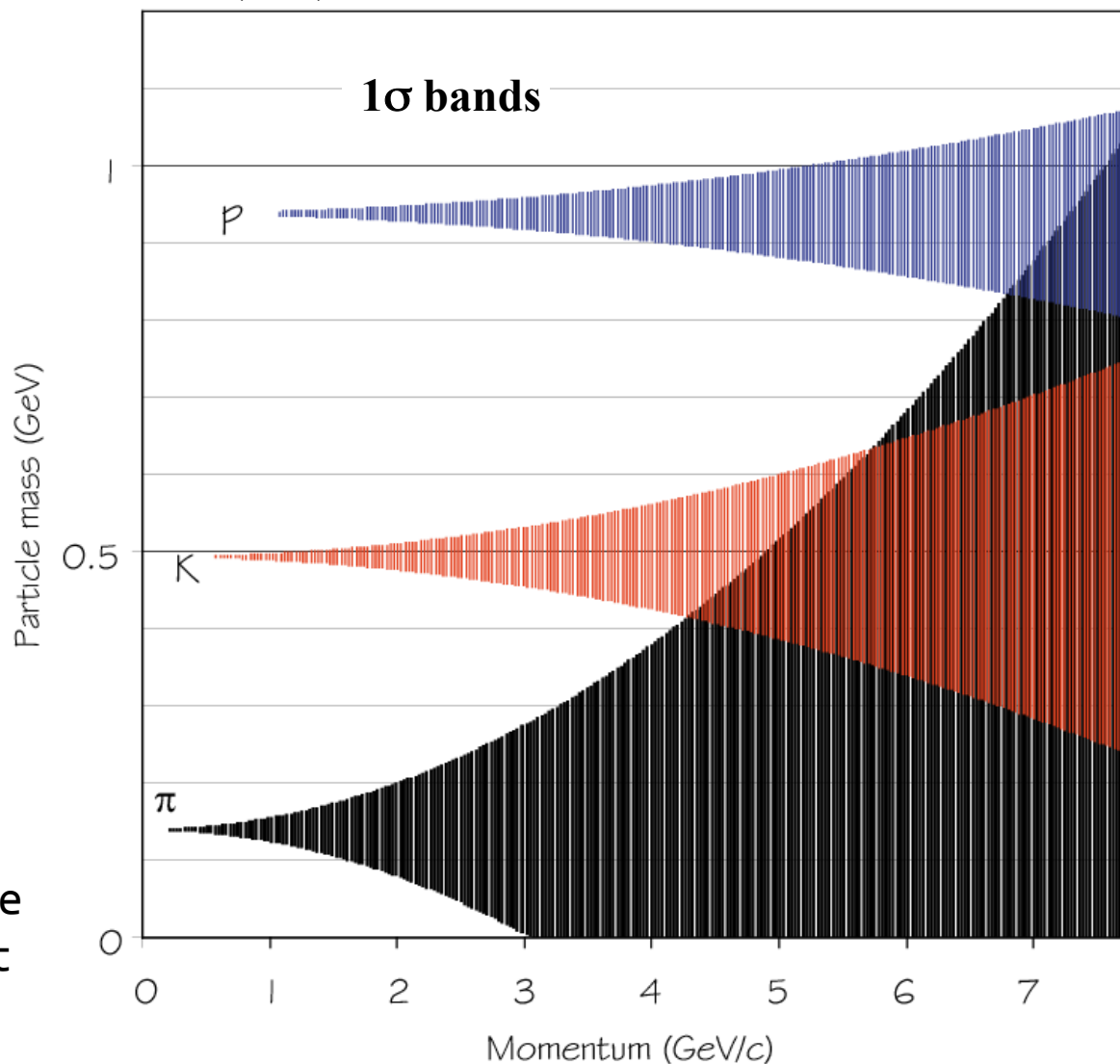
$$\frac{\Delta m}{m} = \sqrt{\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2 + \left(\gamma^2 \cdot \tan\theta \cdot \Delta\theta\right)^2}$$

set :
 $n=1.333$ (H_2O)

$$\rightarrow \begin{cases} \theta_{\max} = 41.4^\circ \\ \beta_{\min} = 0.75 \end{cases}$$

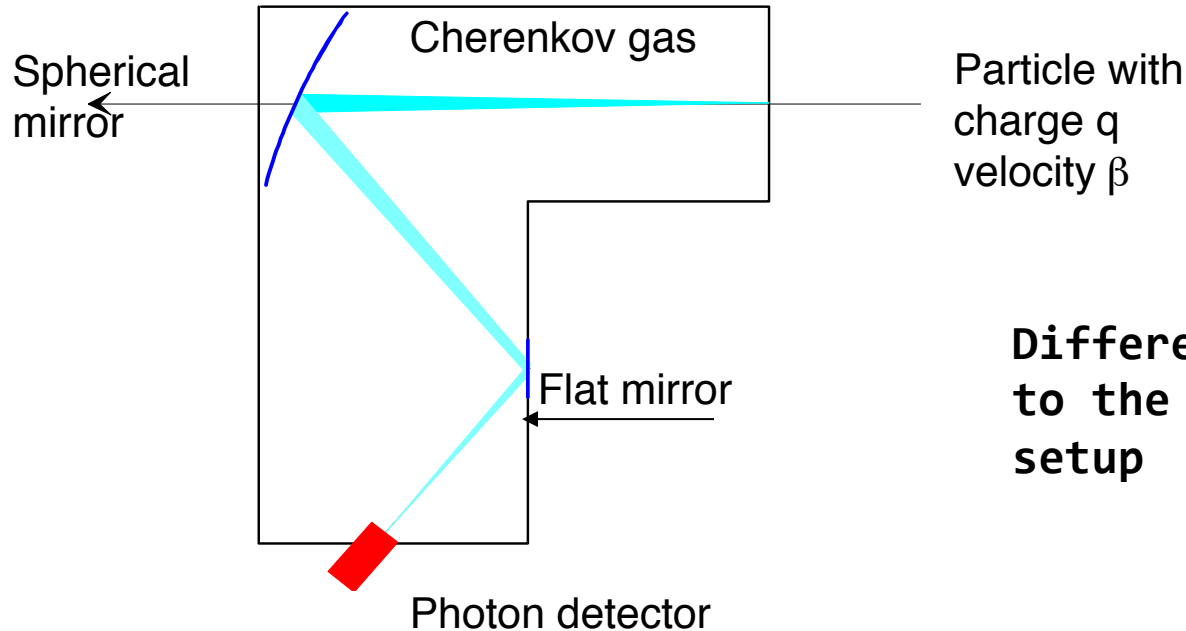
$\Delta p/p$ 5×10^{-4}
 $\Delta\theta$ 15 mrad
 l 1 cm

Error on mass depends critically as γ^2 on the measurement of β , that is on θ measurement

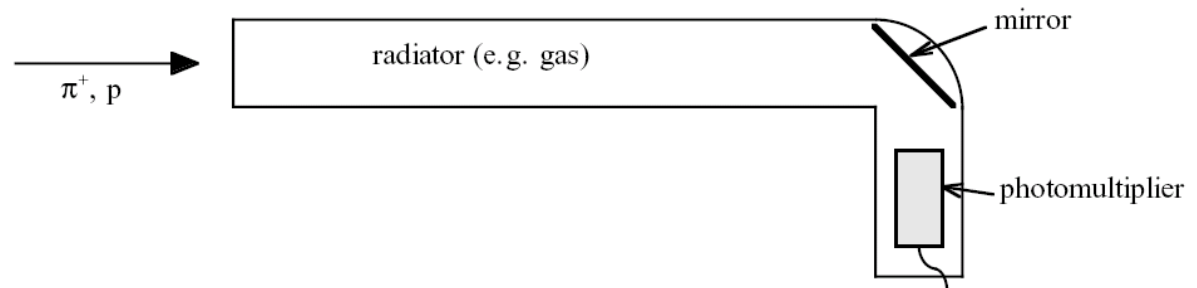


Cherenkov

Threshold Cherenkov Counter, chose suitable medium (n)



Different geometries according to the particular experimental setup



To get a better particle identification, use more than one radiator.