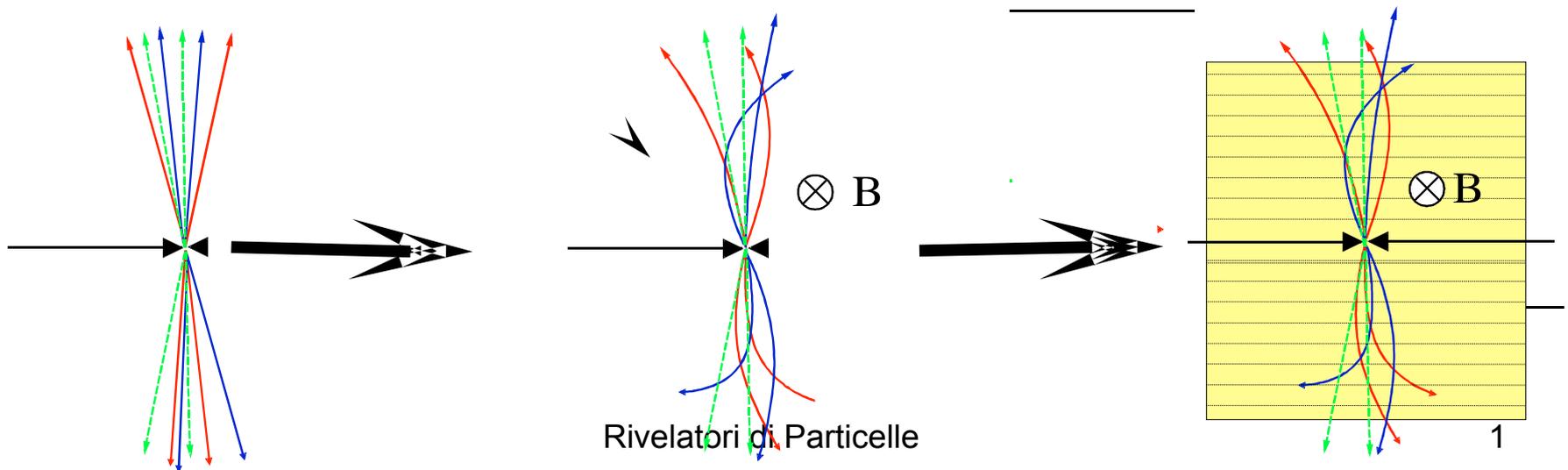


Misure d'impulso

Per ottenere l'impulso \mathbf{p} di una particella si misura generalmente:

-la deflessione della particella tramite la misura della traiettoria della particella in un campo magnetico B

E' necessario un apparato che permette di misurare le coordinate del punto di passaggio della particella in un numero sufficiente di punti, cioe' un apparato che mi permette la misura di tracce (insieme di camere **MWPC** o a **deriva** o **silici**) posto in un campo magnetico (possibilmente uniforme), genericamente definiti **spettrometri magnetici**.



Charged Particle Tracking and Momentum Resolution

We measure the momentum of a charged particle by determining its trajectory in a known magnetic field.

We measure the trajectory of the charged particle by measuring its coordinates

(x, y, z or r, z, ϕ , or r, θ, ϕ) at several points in space.

Simplest case: determine radius of circle with 3 points

coordinates in space are usually measured using one or more of the following devices:

Wire Chamber	low spatial resolution ($\approx 1-2$ mm)
Drift Chamber (or TPC)	moderate spatial resolution ($50-250 \mu\text{m}$)
Silicon detector	high spatial resolution ($\approx 5-20 \mu\text{m}$)

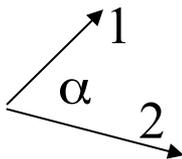
Better momentum resolution \Rightarrow better mass resolution \Rightarrow better physics

Many particles of interest are observed via their decay products: $Z^0 \rightarrow e^-e^+$, $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$, $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^+$

By measuring the momentum of the decay products we measure the mass of the parent.

$$m \rightarrow m_1 + m_2 \Rightarrow m^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2[(m_1^2 + p_1^2)^{1/2} (m_2^2 + p_2^2)^{1/2} - p_1 p_2 \cos \alpha]$$

For fixed α : $\sigma_{m^2} / m^2 \propto \sigma_p / p$



Misure d'impulso

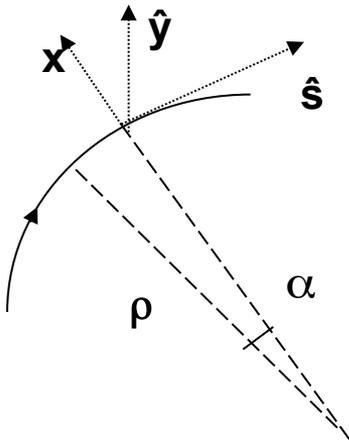
L'equazione del moto, nel caso di $p \perp F$ e'

Con $|p|$ costante.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

La forma di questa equazione cioè $d\vec{v}/dt$ ortogonale a \vec{v} ed a \vec{B} implica moto circolare nel piano $\perp B$.

Per ricavare il raggio di curvatura conviene utilizzare un sistema di coordinate curvilineo:



con x, y ed s sistema destrorso, $y \perp$ al piano x, s .

ρ raggio di curvatura

s coordinata curvilinea

B diretto lungo l'asse y (B_y)

L'equazione di Lorentz diventa:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \Rightarrow \frac{dp}{dt} \hat{s} + p \frac{d\hat{s}}{dt} = -qvB_y \hat{x}$$

Misure d'impulso

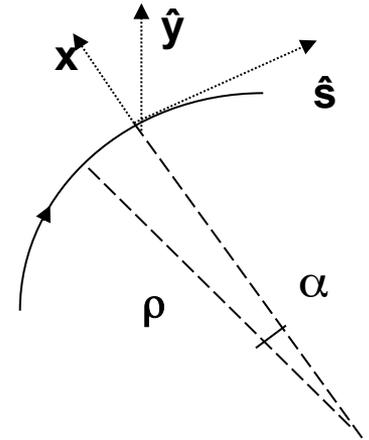
L'equazione di Lorentz : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dp}{dt} \hat{s} + p \frac{d\hat{s}}{dt} = -qvB_y \hat{x}$ $v = \text{velocità}$

può essere semplificata osservando che $|\mathbf{p}| = \text{costante}$ e

$$\frac{d\hat{s}}{dt} = -\frac{d\alpha}{dt} \hat{x} = -\frac{d\alpha}{ds} \frac{ds}{dt} \hat{x} = \frac{-v}{\rho} \hat{x}$$

$$-p \frac{v}{\rho} \hat{x} = -qvB_y \hat{x}$$

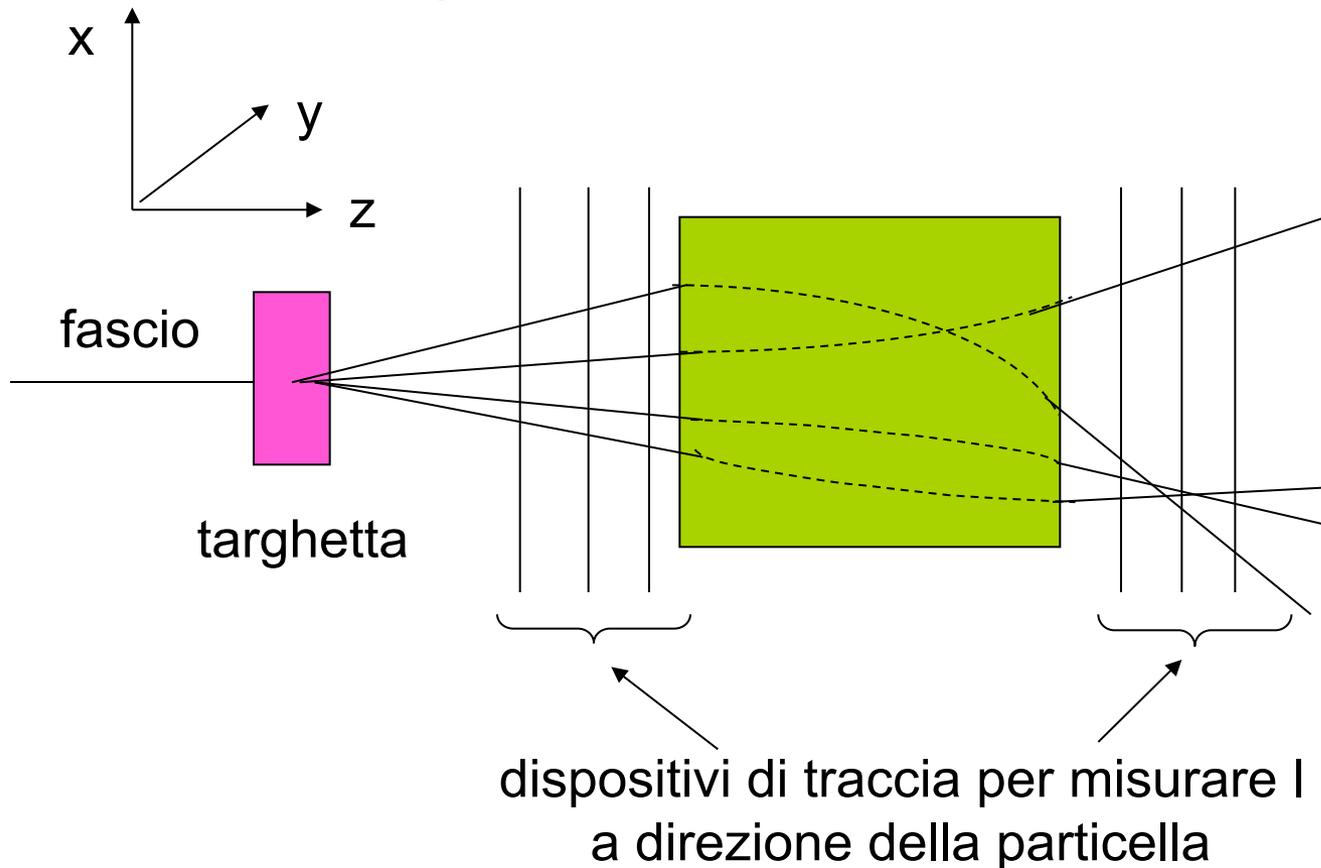
$$\rho = (p/qB_y)$$



- Fissato B, il raggio di curvatura della particella dipende da P/Q.
R = P/Q e' detta rigidita' (magnetica) della particella.
- Particelle con la stessa rigidita' hanno la stessa traiettoria nel campo B.
- Per determinare il momento P dalla misura del raggio di curvatura occorre conoscere il valore assoluto della carica
- Il verso della curvatura dipende dal segno della carica

Misure d'impulso

Misura della deflessione: la direzione della particella e' misurata prima e dopo la regione in cui c'e' campo magnetico

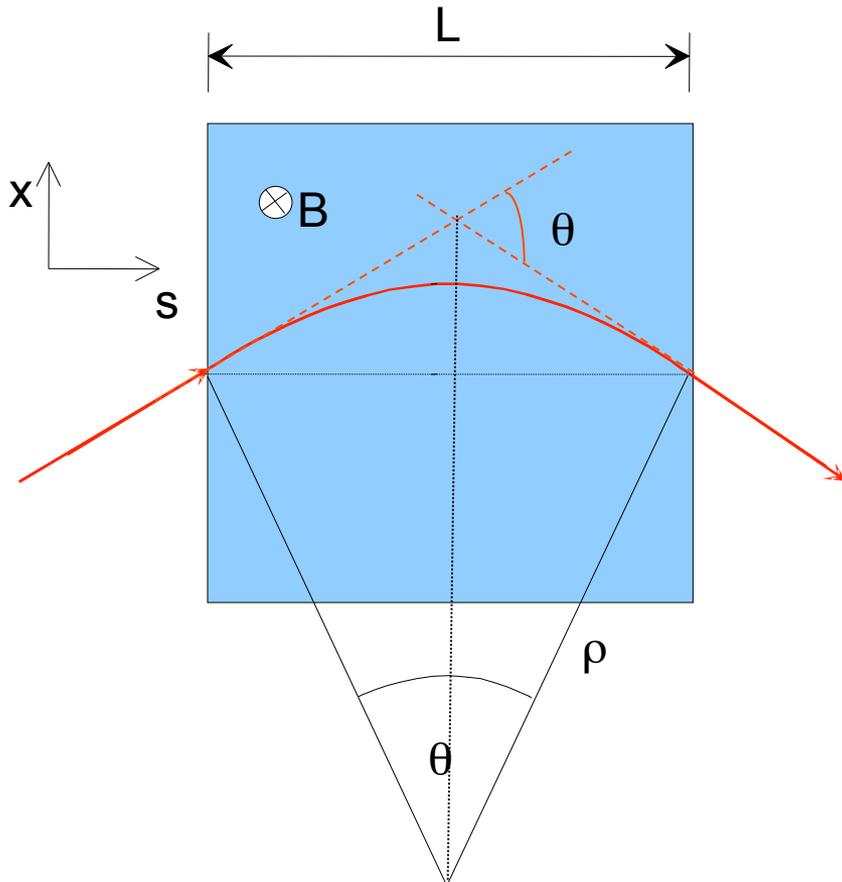


Rappresentazione schematica di uno spettrometro magnetico

Misure d'impulso

La deflessione nel piano xs si vede dalla figura:.

$$\sin(\theta/2) = L/2\rho$$



$$\rho = p/qB, \text{ perciò } \sin(\theta/2) = LqB/2p$$

Per piccole deflessioni

$$\sin(\theta/2) \approx \theta/2, \text{ quindi}$$

$$\theta \approx LqB/p, \text{ cioè } p = qBL/\theta$$

o

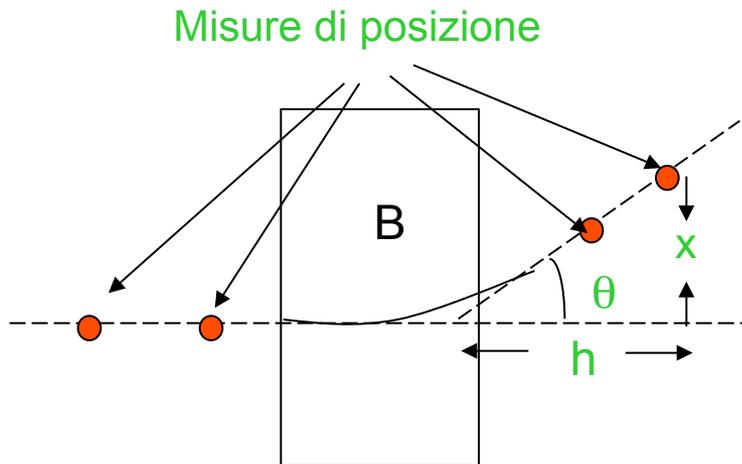
$$R = BL/\theta$$

$$\text{Con } R = p/q$$

Misure d'impulso

Precisione dell'apparato tracciante.

Le traiettorie prima di entrare nel magnete e dopo essere uscite sono rettilinee
→ misura di θ .

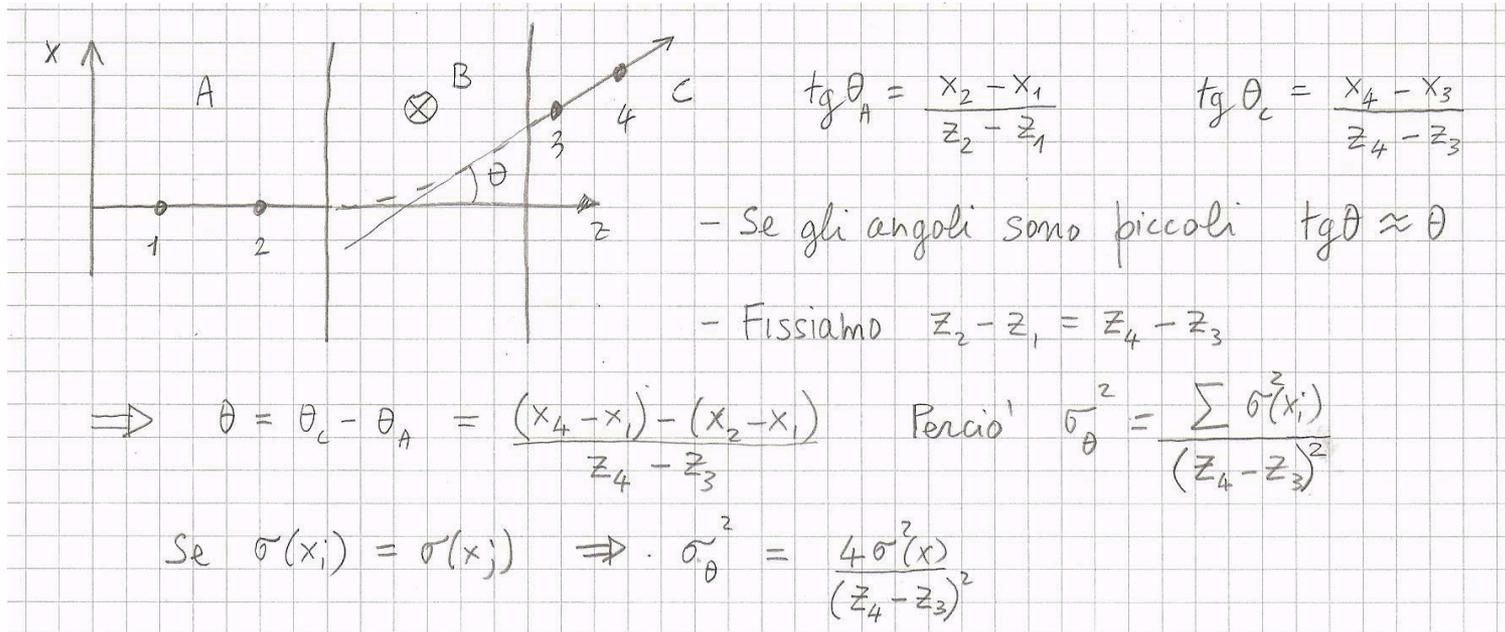


$$\begin{aligned} \text{da } p &= qB_y L \frac{1}{\theta} \Rightarrow \\ \left| \frac{dp}{d\theta} \right| &= qB_y L \frac{1}{\theta^2} = \frac{p}{\theta} \\ \Rightarrow \frac{dp}{p} &= \frac{d\theta}{\theta} \Rightarrow \frac{\sigma(p)}{p} = \frac{\sigma(\theta)}{\theta} \end{aligned}$$

Ovviamente dato che $p = qR \rightarrow dp/p = dR/R$

Per determinare θ devo avere almeno 4 punti (2 prima e 2 dopo il magnete), perché mi servono 2 direzioni.

Misure d'impulso



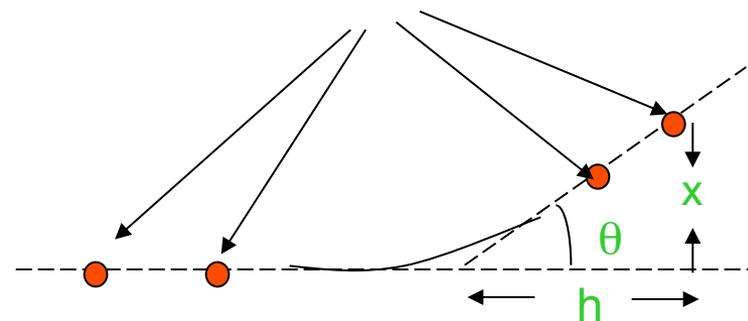
Ricordando che

$$\frac{\sigma(p)}{p} = \frac{\sigma(\theta)}{\theta} \Rightarrow \frac{\sigma(p)}{p} = \frac{2\sigma(x)/h}{qB_y L} \cdot p \quad h = z_4 - z_3$$

$\sigma(p) \propto \sigma(x) p^2 / BLh$

- dipende dal quadrato di p
- dipende dalla risoluzione spaziale della coordinata nel piano di curvatura
- dipende dal braccio di leva del magnete

Misure di posizione



$$\frac{\sigma(p)}{p} = \frac{\sigma(\theta)}{\theta} \Rightarrow$$

Misure d'impulso

$$\frac{\sigma(p)}{p} = \frac{2\sigma(x)/h}{qB_y L} \cdot p$$

$p = qR$ Per esempio con $L = 1\text{m}$, $h = 1\text{m}$, $B = 1\text{T}$ e $\sigma_x = 0.2\text{ mm}$, si ha

$$\frac{\sigma(p)}{p} = 1.3 \times 10^{-3} \cdot p \quad [GeV/c]$$

A seconda della qualità dell'apparato si possono ottenere risoluzioni :

$$\frac{\sigma(p)}{p} = (10^{-3} \div 10^{-4}) \cdot p \quad [GeV/c]$$

In esperimenti di astroparticelle e' tradizione definire la Maximum Detectable Rigidity, cioe' la rigidita' o momento tale che

$$\frac{\sigma(p_{\max})}{p_{\max}} = 1$$

Uno spettrometro magnetico con risoluzione data dalla (1) tipicamente può misurare impulsi fino a :

$$p_{\max} = 1 \div 10 [TeV/c]$$

Un altro metodo utilizzato per determinare l'impulso è la misura della sagitta (s), in cui le coordinate lungo la traiettoria sono misurate NEL campo magnetico.

Momentum is determined by measurement of **track curvature** $\kappa = 1/\rho$ in **B** field:

Measure **sagitta** s of the track. For the momentum component transverse to **B** field:

$$p_T = qB\rho \quad q = ez$$

Units: $p_T[\text{GeV}] = 0.3B[\text{T}]\rho[\text{m}]z$

$$\frac{L/2}{\rho} = \sin\frac{\theta}{2} \approx \frac{\theta}{2} \quad (\text{for small } \theta) \Rightarrow \theta \approx \frac{L}{\rho} = \frac{0.3B \cdot L}{p_T} z$$

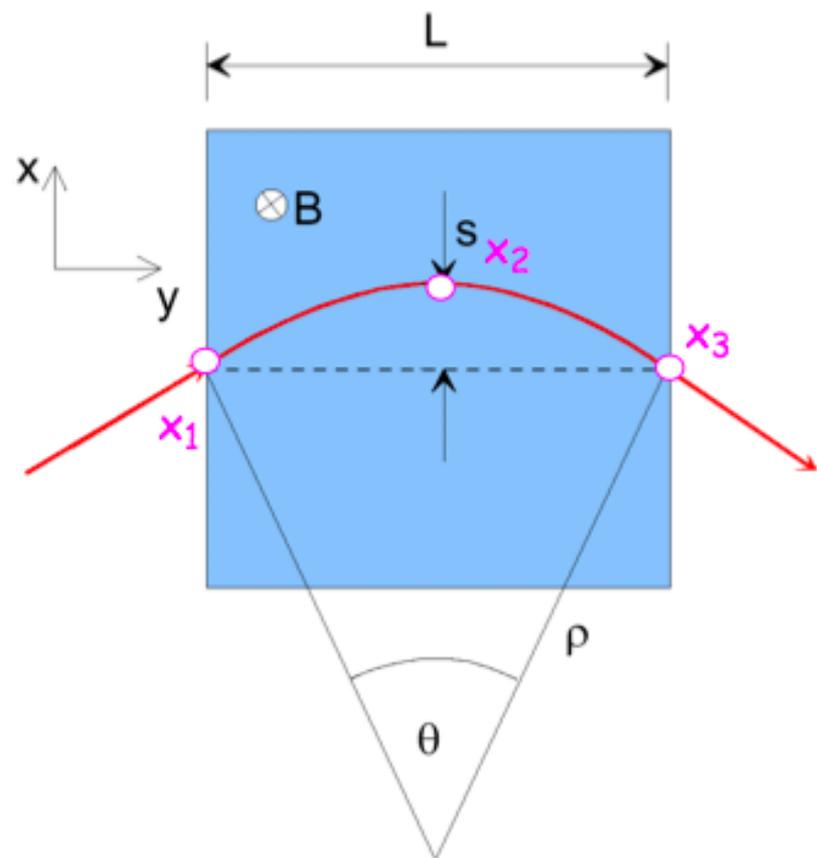
$$s = \rho \left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right) \approx \rho \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\theta^2}{4}\right)\right) = \rho \frac{\theta^2}{8} \approx \frac{0.3L^2B}{8 p_T} z$$

For the simple case of **three measurements**:

$$s = x_2 - (x_1 + x_3)/2 \Rightarrow ds = dx_2 - dx_1/2 - dx_3/2$$

with $\sigma_x \approx dx_i$ uncorrelated error of single measurement:

$$\sigma_s^2 = \sigma_x^2 + \frac{\sigma_x^2}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}\sigma_x^2$$



$$\frac{\sigma_{p_{\perp}}}{p_{\perp}} = \frac{\sigma_s}{s} = \frac{\sqrt{3/2}\sigma_x}{Z(0.3BL^2)/(8p_{\perp})} = \frac{8p_{\perp}\sqrt{3/2}\sigma_x}{0.3BL^2 Z} = 32.6 \frac{p_{\perp}\sigma_x}{BL^2 Z} \text{ (m, GeV/c, T)}$$

For 3 points the relative momentum resolution is given by: $\frac{\sigma(p_T)}{p_T} = \frac{\sigma_s}{s} = \sqrt{\frac{3}{2}}\sigma_x \cdot \frac{8p_T}{0.3BL^2}$

- degrades **linearly** with **transverse momentum**
- improves **linearly** with increasing **B field**
- improves **quadratically** with **radial extension** of detector

In the case of N equidistant measurements according to **Gluckstern** [NIM 24 (1963) 381]:

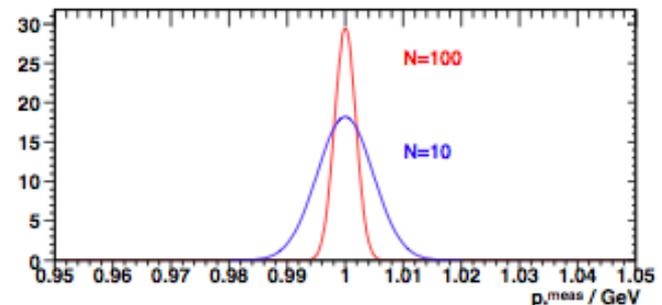
$$\frac{\sigma(p_T)}{p_T} = \frac{\sigma(\kappa)}{\kappa} = \frac{\sigma_x \cdot p_T}{0.3BL^2} \sqrt{\frac{720}{N+4}} \quad (\text{for } N \geq 10, \text{ curvature } \kappa = 1/\rho)$$

- Increases only as $N^{1/2}$ with the nbr. of coord measurement

Example: For $p_T = 1\text{GeV}$, $L = 1\text{m}$, $B = 1\text{T}$, $\sigma_x = 200\mu\text{m}$ and $N = 10$ one obtains:

$$\frac{\sigma(p_T)}{p_T} \approx 0.5\% \quad \text{for a sagitta } s \approx 3.8\text{cm}$$

Important track detector parameter: $\frac{\sigma(p_T)}{p_T^2}$ (%/GeV)



Cfr.: Effect of Multiple Scattering on Resolution

The position measurement contribution to the momentum resolution is only part of the story. We also have contributions from multiple scattering (MS) and angular resolution. Previously we saw that the momentum resolution contribution to MS was given by:

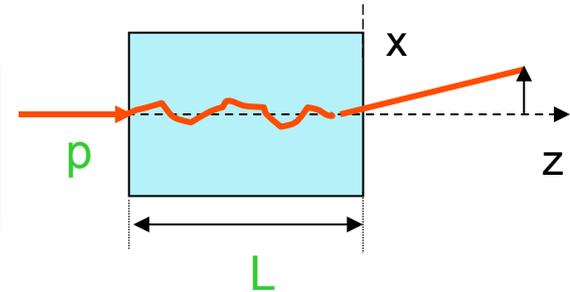
- Approximate relation (PDG):

$$\theta_0 = \theta_{plane}^{RMS} \approx \frac{13.6 MeV}{p\beta c} z \sqrt{\frac{L}{X_0}}$$

Charge of incident particle

i.e. $\theta_0 \propto \frac{1}{\beta p} \sqrt{\frac{L}{X_0}}$

Radiation length of absorbing material



- Apparent sagitta due to multiple scattering (from PDG):

- $s_{app} = r\theta^2/8$ e $r = L/\theta \rightarrow s_{app} = L\theta/8$

Il calcolo esatto da'

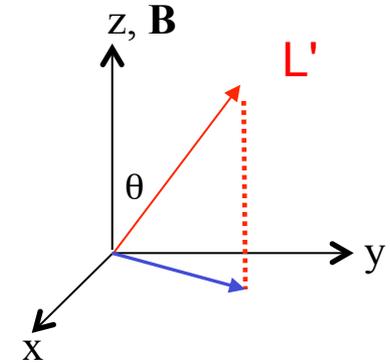
$$s_{plane} = \frac{L\theta_0}{4\sqrt{3}}$$

More on Momentum Resolution

If a particle enters the B field
with an angle θ

$$\frac{\sigma_{p_T}}{p_T} = \frac{s_{plane}^{rms}}{s_B} = \frac{\frac{L'}{4\sqrt{3}} \frac{13.6 \times 10^{-3}}{p\beta} z \sqrt{L'/X_0}}{0.3BL^2 z / (8p_{\perp})} \quad \text{with } L' = L / \sin \theta, p_{\perp} = p \sin \theta$$

$$\frac{\sigma_{p_T}}{p_T} = \frac{52.3 \times 10^{-3}}{\beta B \sqrt{LX_0} \sin \theta}$$



**MS depends on the total path length (L') and momentum (p).
Bending in the magnetic field depends on p_{\perp} ($=p \sin \theta$) and projected path length (L).**

combined resolution is the two added in quadrature:

$$\left(\frac{\sigma_{p_{\perp}}}{p_{\perp}} \right)^2 = \left(\sqrt{\frac{720}{n+4}} \frac{\sigma_y p_{\perp}}{(0.3BL^2)} \right)^2 + \left(\frac{52.3 \times 10^{-3}}{\beta B \sqrt{LX_0} \sin \theta} \right)^2 \quad (\text{m, GeV/c, T})$$

Technically speaking, the above is only the transverse momentum (p_{\perp}) resolution.
We want an expression for the total momentum resolution!

Even More on Momentum Resolution

We can get an expression for the total momentum (p) resolution using:

$$p = p_{\perp} / \sin \theta = p_{\perp} \sqrt{1 + \cot^2 \theta}$$

& treating θ and p_{\perp} as independent variables. Using propagation of errors we find:

$$\left(\frac{\sigma_p}{p}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{p_{\perp}}}{p_{\perp}}\right)^2 + (\cot \theta \sigma_{\theta})^2$$

Often detectors measure the r - ϕ coordinate independently of the z coordinate. In these cases p_{\perp} and θ are independent.

Putting it all together we have for the total momentum resolution:

$$\left(\frac{\sigma_p}{p}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{720}{n+4}} \frac{\sigma_y p \sin \theta}{(0.3BL^2)}\right)^2 + \left(\frac{52.3 \times 10^{-3}}{\beta B \sqrt{LX_0} \sin \theta}\right)^2 + (\cot \theta \sigma_{\theta})^2$$

GeV/c, T, m, radians

Position resolution

Multiple scattering

Angular resolution

While the above expression is only approximate it illustrates many important features:

- a) p_{\perp} resolution improves as B^{-1} and depends on p as L^{-2} or $L^{-1/2}$.
- b) For low momentum ($\beta \rightarrow 0$), MS will dominate the momentum resolution.
- c) Improving the spatial resolution (σ_y) only improves momentum resolution if the first term dominate.
- d) Angular resolution is not usually the most important term since $\theta_{\min} \approx 30-45^\circ$ and $\sigma_{\theta} \approx 10^{-3}$ rad.

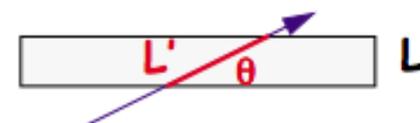
For more detailed information must do a Monte Carlo simulation (GEANT+detector).

Include: hit efficiencies, discrete scattering off of wires, non-gaussian tails, etc, etc....

The contribution to the momentum error from *MS* is given by:

$$\frac{\sigma(p_T)}{p_T} \Big|_{MS} = \frac{\sigma^{MS}(s)}{s} = \frac{4 \frac{L' 13.6 \times 10^{-3}}{\sqrt{3}} z \sqrt{\frac{L'}{X_0}}}{0.3BL^2 z / (8p_T)} = \frac{0.053}{\beta B \sqrt{LX_0} \sin \theta} \quad \text{with} \quad \begin{array}{l} L' = L / \sin \theta \quad \text{total path} \\ p_T = p \sin \theta \end{array}$$

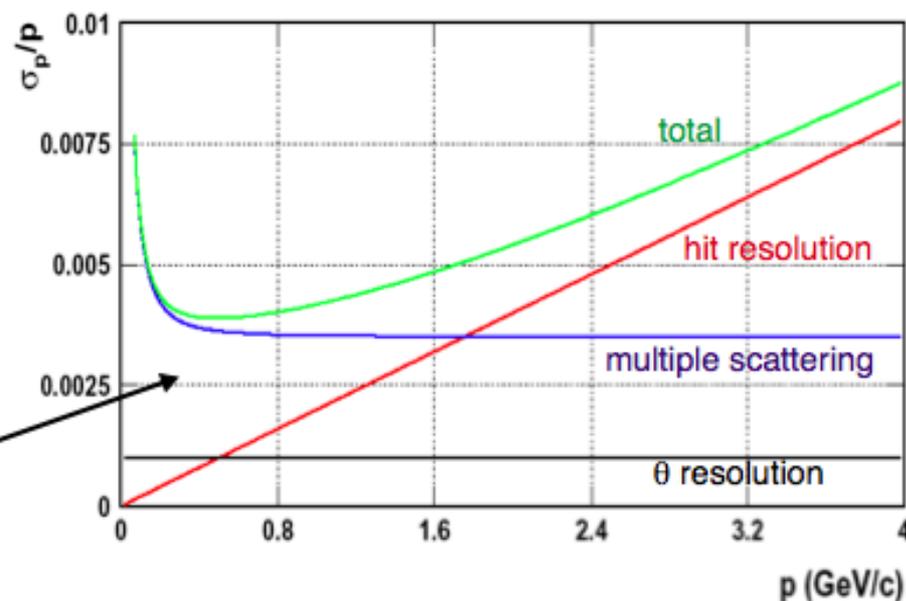
for $\beta \rightarrow 1$ this part is momentum independent !



The combined total momentum error is:

$$\left(\frac{\sigma_p}{p}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{720}{N+4}} \frac{\sigma_x p \sin \theta}{0.3BL^2}\right)^2 + \left(\frac{0.053}{\beta B \sqrt{LX_0} \sin \theta}\right)^2 + (\cot \theta \sigma_\theta)^2$$

Example for momentum dependence of individual contributions



Still More on Momentum Resolution

Let's examine the momentum resolution equation for a **typical particle spectrometer**:

$$B=1.5\text{T}$$

$$\sigma_y=1.5\times 10^{-4}\text{ m}$$

$$N=50$$

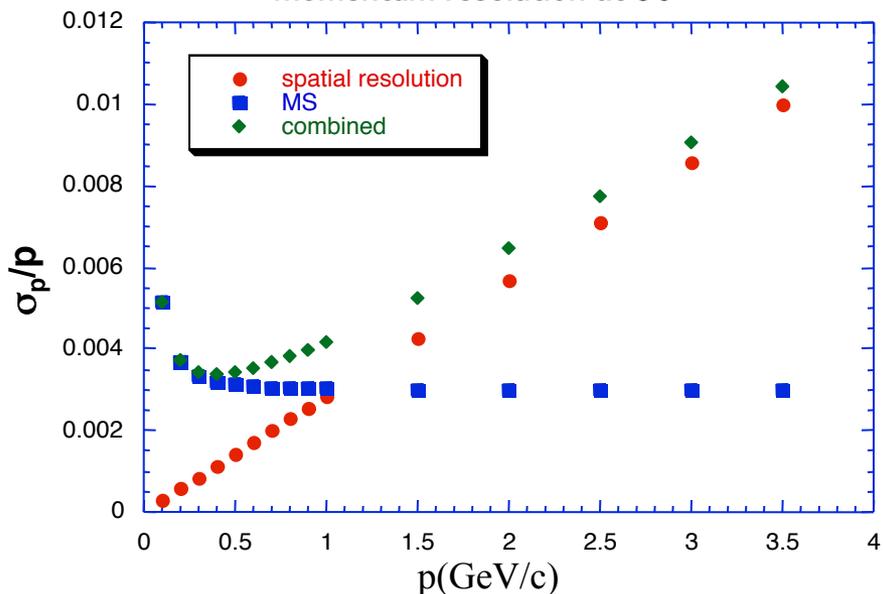
$$\sigma_\theta=10^{-3}\text{ radians}$$

$$L=0.8\text{ m}$$

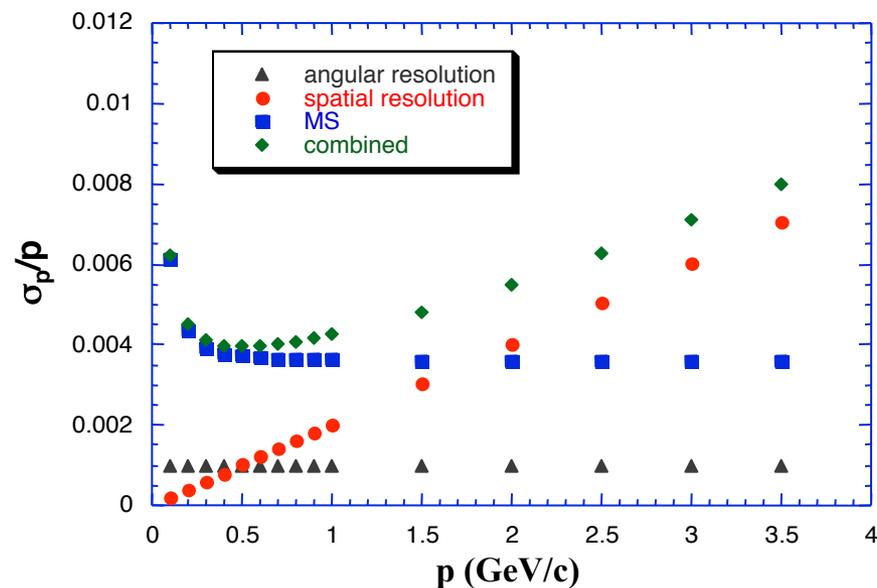
$$L_r=166.7\text{ m (gas+wires)}$$

$$\left(\frac{\sigma_p}{p}\right)^2 = \left(2.85 \times 10^{-3} p \sin \theta\right)^2 + \left(\frac{3.0 \times 10^{-3}}{\beta \sqrt{\sin \theta}}\right)^2 + \left(3.0 \times 10^{-3} \cot \theta\right)^2$$

momentum resolution at 90°



momentum resolution at 45°



Misure d'impulso

L'impulso totale della particella è ottenuto da p_T e dall'angolo polare θ :

$$p = p_T / \sin \vartheta$$

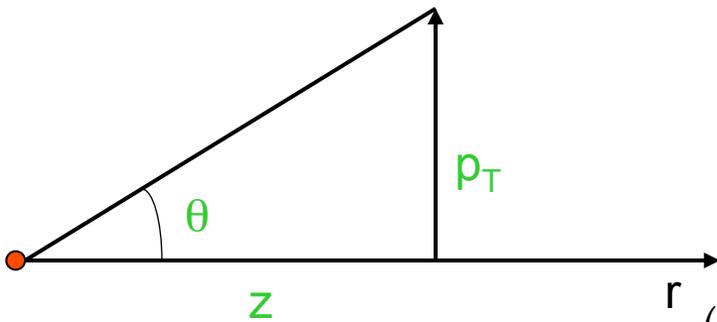
Come nel caso del piano $r\phi$ (trasverso) anche la misura dell'angolo polare ha un errore, sia dovuto alla risoluzione del tracciatore, sia allo scattering multiplo.

Nel caso di una misura di 2 sole z

$$\sigma(\vartheta) = \frac{\sigma(z)}{z} \sqrt{2}$$

Se la traccia è misurata in N punti equidistanti si avrà:

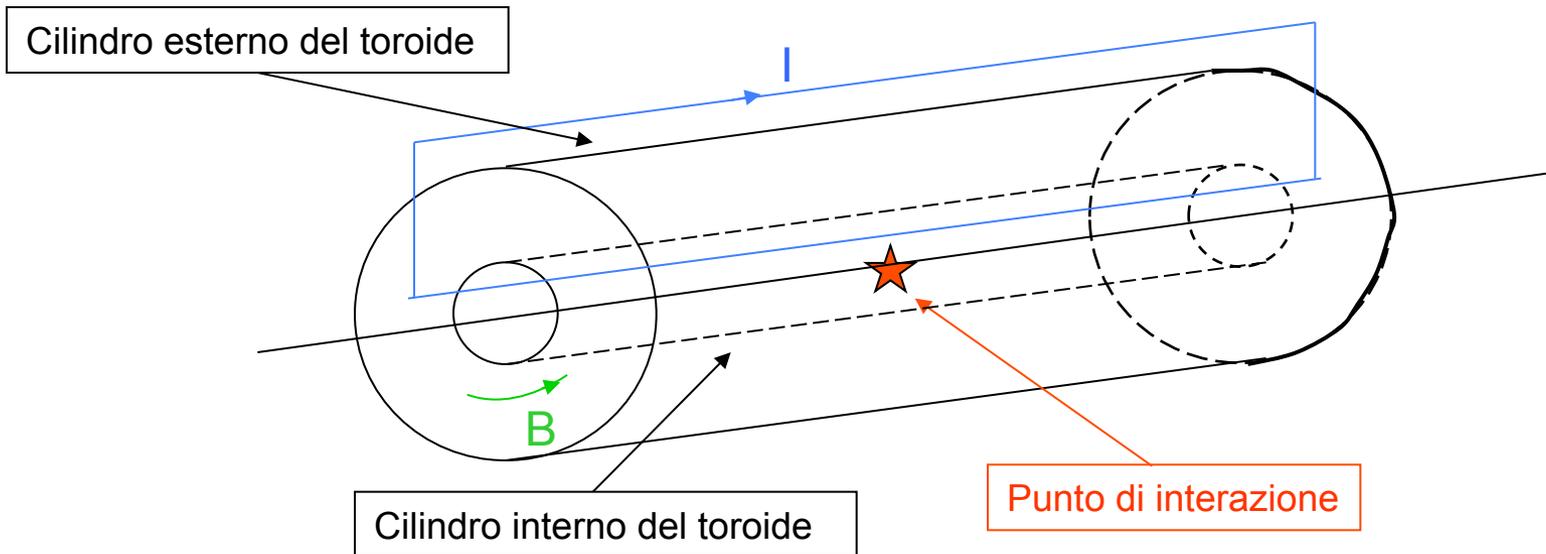
$$\sigma(\vartheta)^{tr} = \frac{\sigma(z)}{z} \cdot \sqrt{\frac{12(N-1)}{N(N+1)}}$$



Misure d'impulso

Il **magnete toroidale** non disturba i fasci del collider, in quanto il campo è nullo nella zona dei fasci. Fra i 2 cilindri **B** è circolare e di intensità $\sim 1/r$.

Lo svantaggio maggiore in un toro è lo scattering multiplo nel cilindro interno del toro e nei suoi avvolgimenti. → **nella risoluzione della misura d'impulso lo scattering multiplo e' importante. Domina a basse energie.**

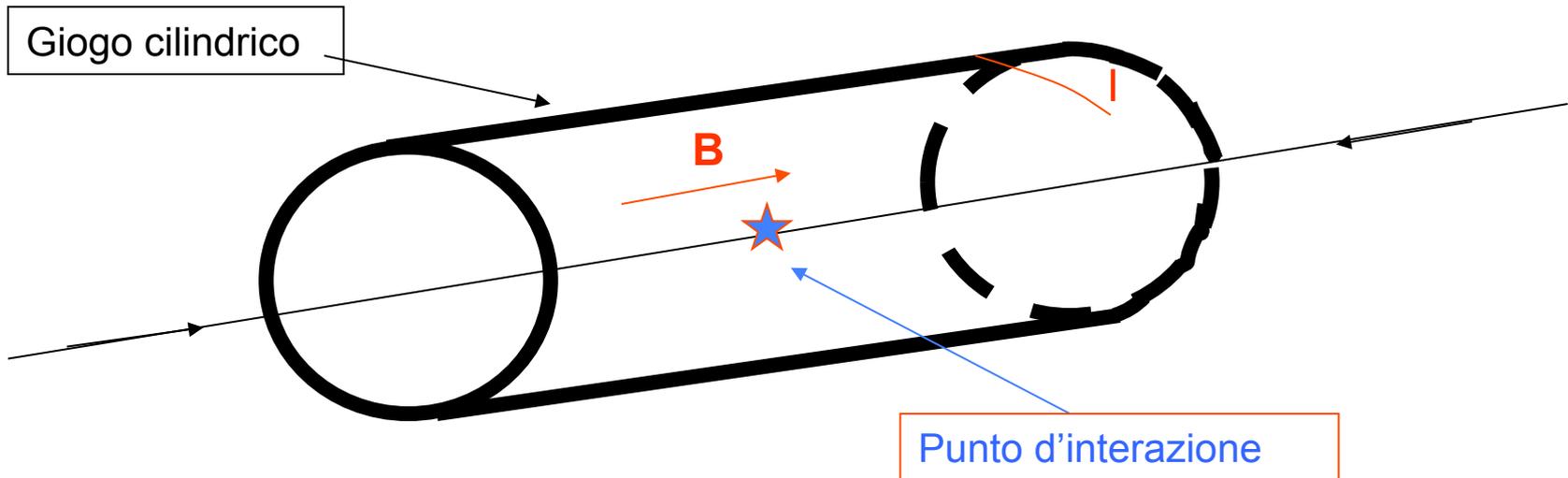


Misure d'impulso

I magneti più comunemente usati in un collider sono quelli **solenoidali**. In questo caso i fasci viaggiano paralleli al campo magnetico quindi **non sono disturbati** dal magnete (a parte effetti di bordo).

Sia toroidi che solenoidi non causano radiazione di sincrotrone →

Vanno bene sia per anelli di collisione di protoni che di elettroni.



Misure d'impulso

In un **solenoid**e i tracciatori sono installati all'interno del solenoide stesso e sono cilindrici.

Il campo magnetico (solenoidale quindi // ai fasci) agisce solo sulla componente trasversa dell' impulso delle particelle →

$$\frac{\sigma(p_T)}{p_T} \Big|^{trac} = \frac{\sigma(x)}{0.3BL^2} \cdot \sqrt{\frac{720}{(N+4)}} \cdot p_T$$

Dove $\sigma(x)$ è la risoluzione per la coordinata nel piano ortogonale all'asse dei fasci.

Per determinare l'impulso devo misurare anche p_L (componente longitudinale dell'impulso) →