

Particle Detectors

Lecture 7

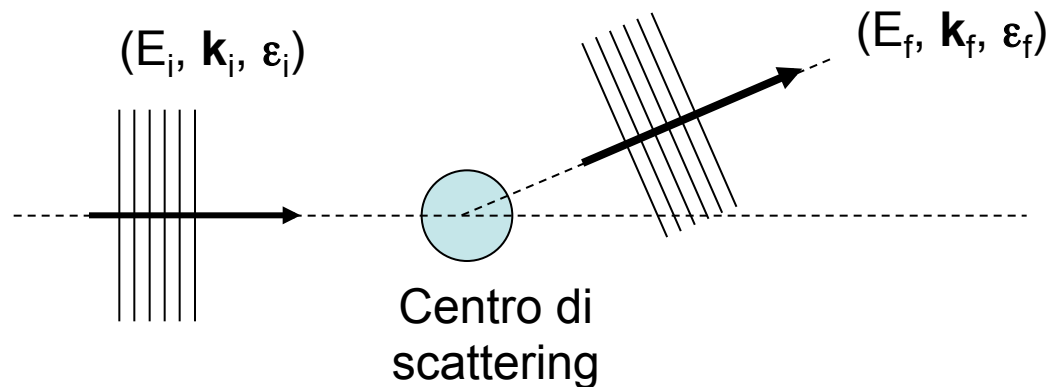
24/04/17

a.a. 2016-2017

Emanuele Fiandrini

Scattering di radiazione elm

- Ogni volta che un'onda elm interagisce con una particella carica, le sue proprietà (direzione, energia, polarizzazione,...) vengono alterate, insieme a quelle della particella colpita.



Diffusione di fotoni

Tradizionalmente si parla di diffusione Thomson e Compton a seconda dell'intervallo di energie in gioco:
quando $h\omega \ll mc^2$ si parla di diffusione Thomson,
mentre quando $h\omega \gg mc^2$ si parla di diffusione Compton.

Tuttavia da un punto di vista fisico non c'è alcuna differenza
poiché il processo è esattamente lo stesso.
Quello che cambia è l'approccio: classico per Thomson,
quantistico per Compton

Diffusione Thomson

► La sezione d'urto Thomson compare in tutti i processi di radiazione

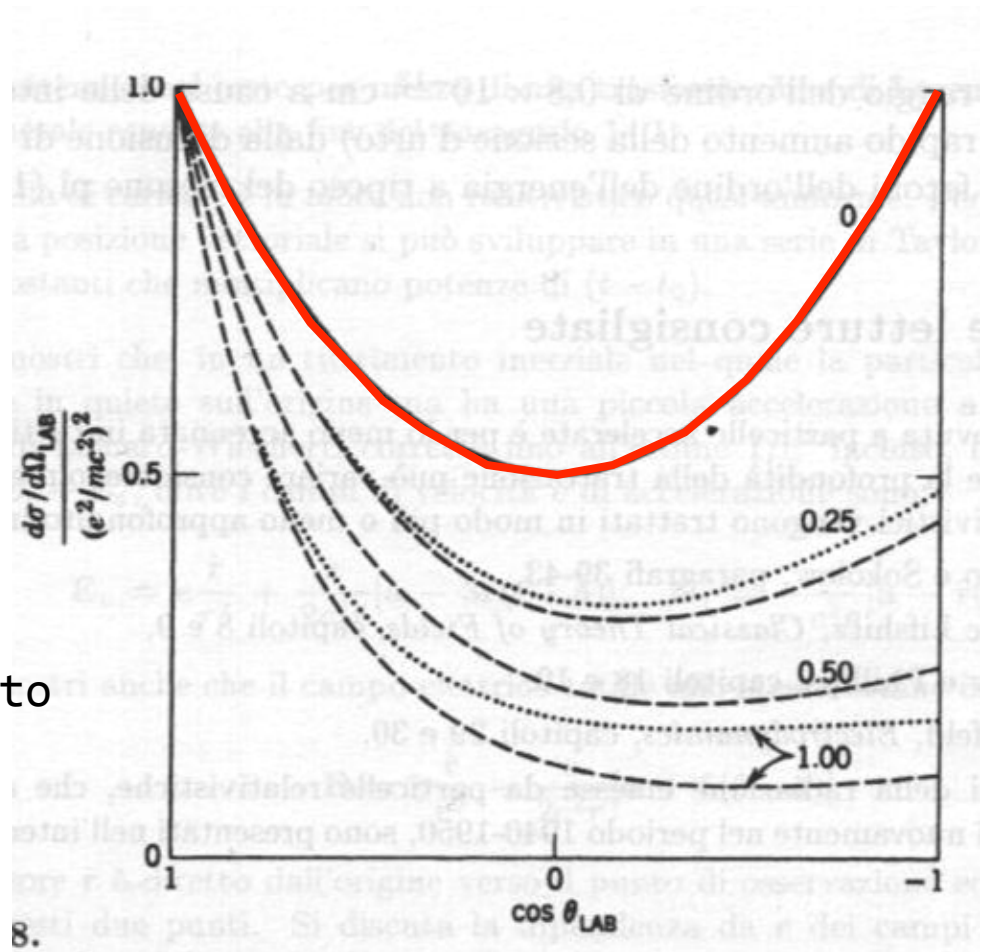
$$\sigma_T = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0^2 m^2 c^4} = \frac{8\pi}{3} r_e^2 = 0.665 \text{ barns}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_e^2 (1 + \cos^2 \alpha)$$

► L'emissione e' simmetrica rispetto alla direzione di incidenza dato che $d\sigma/d\Omega \sim \cos^2 \alpha$ e la frequenza della radiazione emessa e' la stessa di quella incidente, dato che $a \sim E$

La diffusione e' elastica: l'energia del fotone dopo l'urto e' la stessa.

La particella semplicemente riemette il fotone in un'altra direzione



Diffusione Thomson

La potenza totale emessa puo' essere espressa in termini della densita' di energia elettromagnetica incidente

Integrando la distribuzione angolare di potenza trovata prima si ha la potenza totale

$$\frac{dP_{tot}}{d\Omega} = r_e^2 (1 + \cos^2 \alpha) \frac{\langle S \rangle}{2}$$

$$\frac{dE_{tot}}{dt} = \int_{4\pi} \frac{dP_{tot}}{d\Omega} d\Omega$$

$$\frac{dE_{tot}}{dt} = 2\pi r_e^2 \frac{\langle S \rangle}{2} \int (1 + \cos^2 \alpha) d(\cos \alpha) = 2\pi r_e^2 \frac{\langle S \rangle}{2} \frac{8}{3} = \sigma_T \langle S \rangle$$

con $S = \frac{c}{4\pi} E^2$ $u_{rad} = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) = \frac{1}{4\pi} E^2$ Perche' $E=B$

quindi $S = cu_{rad}$  $\frac{dE_{tot}}{dt} = \sigma_T cu_{rad}$

Diffusione Thomson: e- legato

Nel caso di diffusione thomson, l'e- e' libero e stazionario.

Un'approssimazione migliore e' di considerare l'e- legato elasticamente con una forza $-m\omega_o^2\vec{r}$, i.e. con una frequenza naturale ω_o

$$\text{L'equazione del moto e' } \vec{a} = \frac{e}{m}\vec{E} - \omega_o^2\vec{r}$$

A regime il moto e' descritto dalla soluzione particolare dell'equazione, che per un'onda monocromatica incidente

$$\vec{E} = \vec{E}_o e^{i(k\cdot r - \omega t)} \quad \text{ha la forma} \quad \vec{r} = \vec{A}_o e^{i(k\cdot r - \omega t)}$$

$$\text{La costante si ottiene per sostituzione } \vec{a} = -\omega^2\vec{r} \quad -\omega^2\vec{r} = \frac{e}{m}\vec{E} - \omega_o^2\vec{r}$$

$$(-\omega^2 + \omega_o^2)\vec{r} = \frac{e}{m}\vec{E} \quad \vec{r} = \frac{e}{m(-\omega^2 + \omega_o^2)}\vec{E}$$

$$\text{L'accelerazione e' quindi } \vec{a} = \frac{-\omega^2 e}{m(-\omega^2 + \omega_o^2)}\vec{E} \quad \vec{a} = \frac{e}{m(1 - \omega_o^2/\omega^2)}\vec{E}$$

Diffusione Thomson: e- legato

$$\vec{a} = \frac{e}{m(1 - \omega_o^2/\omega^2)} \vec{E}$$

A questo punto si puo' procedere esattamente come per thomson, il fattore $(1 - \omega_o^2/\omega^2)$ compare cosi' nella sezione d'urto

$$\sigma = \frac{\sigma_T}{(1 - \omega_o^2/\omega^2)^2}$$

Se $\omega \gg \omega_o$  $\sigma \approx \sigma_T$ Se la rad incidente ha frequenza grande rispetto a quella naturale del sistema si ottiene la sez d'urto thomson, i.e. l'e- puo' essere considerato libero

Se $\omega \ll \omega_o$  $1 - \omega_o^2/\omega^2 \approx -\omega_o^2/\omega^2$  $\sigma \approx \sigma_T \frac{\omega^4}{\omega_o^4}$

In questo caso si parla di diffusione alla Rayleigh: la frequenza di legame deprime la sezione d'urto

P. Es. La diffusione di Rayleigh e' in parte responsabile del colore blu del cielo: i potenziali di ionizzazione di O ed N sono nell'UV $\rightarrow \omega_o \gg \omega_{vis}$

L'opacita' a frequ basse, i.e. **rosse**, e' < di quella ad alta frequ, i.e. **blu**,

$\sigma_{blu}/\sigma_{rosso} \approx 16 \rightarrow$ il blu viene diffuso molto piu' del rosso. Il rosso attraversa l'atmosfera senza deflessione, mentre il blu viene diffuso al di fuori della

linea di vista con la sorgente (il sole) e il **cielo** appare **blu** quando si guarda lontano dal sole

Thomson and Rayleigh Scattering

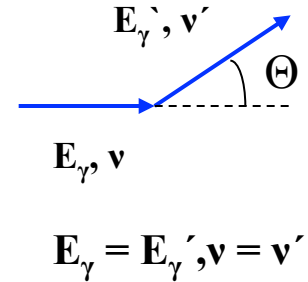
Coherent scattering on bounded electrons (whole atom) (energy is not transferred only direction of momentum is changed) - in the limit **Rayleigh scattering**

More realistically, a line width γ_0 can be introduced (classically a damping) $\nu \ll \nu_0 \Rightarrow \sigma_R = \sigma_T \frac{\nu^4}{\nu_0^4}$

$$\sigma_R = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \frac{\nu^4}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + (\gamma_0 \nu)^2} = \sigma_T \frac{\nu^4}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + (\gamma_0 \nu)^2}$$

$$\nu \approx \nu_0 \Rightarrow \sigma_R = \sigma_T \frac{\nu_0^2}{\gamma_0^2}$$

$$\frac{d\sigma_R}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_0^2 (1 + \cos^2 \Theta) \cdot F(q, Z) \quad \nu \gg \nu_0 \Rightarrow \sigma_R = \sigma_T$$



$F(q, Z)$ - probability of momentum transfer on Z electron atom without energy transfer

r_0 - classical electron radius (SI units):

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} = 2,82 \cdot 10^{-15} \text{ m} = \frac{\alpha \cdot \hbar c}{m_e c^2} = 2,82 \text{ fm}$$

$$\alpha = 1/137$$

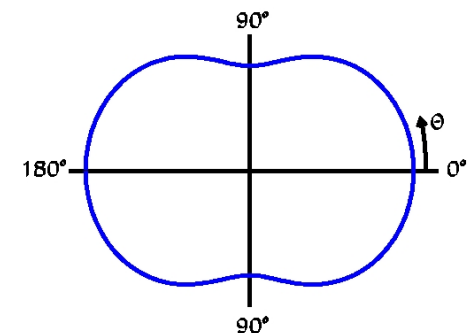
$$\hbar c = 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$$

$$m_e c^2 = 0,511 \text{ MeV}$$

Polar graph of cross-section without inclusion of $F(q, Z)$ influence, classical limit of Thomson scattering

High energy $\rightarrow$ scattering to small angles

Thomson scattering - scattering on free electrons in classical limit (coherent as well as incoherent)



$$\frac{d\sigma_T}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_0^2 (1 + \cos^2 \Theta)$$

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_0^2 = 6,65 \cdot 10^{-29} \text{ m}^2 = 0,665 \text{ barn}$$

Diffusione Thomson/Compton

La sezione d'urto Thomson descrive bene la diffusione della radiazione nel laboratorio in cui l'e- e' stazionario finche' l'energia del fotone e' $h\omega \ll mc^2$

Piu' in generale σ_T descrive bene la diffusione della radiazione finche' l'energia del fotone e' $h\omega \ll mc^2$
nel sistema di riferimento di quiete dell'elettrone

Quando questa condizione non e' piu' verificata, il formalismo classico non si puo' piu' usare poiche' c'e' trasferimento di energia fra fotone e particella carica, l'aspetto corpuscolare del fotone diventa importante e si parla di **effetto Compton**

Diffusione Compton: cinematica

Tralasciando per ora la dinamica del processo, i.e. la probabilita' che avvenga, dal punto di vista semi-classico, la cinematica dell'interazione fra un fotone ed un elettrone puo' essere descritta come l'urto relativistico fra due particelle

E' sufficiente quindi considerare la conservazione del 4-impulso

$$P + K = P' + K' \quad (\text{a})$$

$$P_\mu = (m\gamma c^2/c, m\gamma \vec{v}) \quad P'_\mu = (m\gamma' c^2/c, m\gamma' \vec{v}')$$

Devo risolvere rispetto a K'

$$K_\mu = (\hbar\omega/c, (\hbar\omega/c)\vec{i}_k) \quad K'_\mu = (\hbar\omega'/c, (\hbar\omega'/c)\vec{i}_{k'})$$

Elevando al quadrato $(P + K)^2 = (P' + K')^2 \Rightarrow P^2 + K^2 + 2K \cdot P = P'^2 + K'^2 + 2K' \cdot P'$

Ma $P^2 = P'^2 = m^2 c^2 \quad K^2 = K'^2 = 0 \Rightarrow K \cdot P = K' \cdot P' \quad (\text{b})$

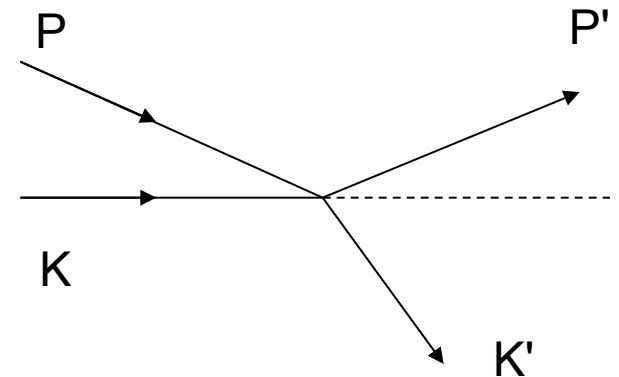
Moltiplico (a) scalarmente per K'

$$K' \cdot (P + K) = K' \cdot (P' + K')$$

$$K' \cdot P + K' \cdot K = K' \cdot P' + K' \cdot K'$$

$$K' \cdot P + K' \cdot K = K' \cdot P' \quad \text{Perche' } K'^2=0$$

$$K' \cdot P + K' \cdot K = K \cdot P \quad \text{Da (b)}$$



Diffusione Compton: cinematica

$K' \cdot P + K' \cdot K = K \cdot P$ Sviluppiamo il 4-prodotto scalare

$$K \cdot K' = \frac{\hbar\omega}{c} \cdot \frac{\hbar\omega'}{c} - \frac{\hbar\omega}{c} \cdot \frac{\hbar\omega'}{c} \vec{i}_k \cdot \vec{i}_k' = \frac{\hbar^2}{c^2} \omega\omega' (1 - \vec{i}_k \cdot \vec{i}_k') = \frac{\hbar^2}{c^2} \omega\omega' (1 - \cos \alpha)$$

$$K' \cdot P = \frac{\hbar\omega'}{c} \cdot mc\gamma - \hbar\omega' \gamma m \vec{i}_k' \cdot \frac{\vec{v}}{c} = m\gamma \hbar\omega' (1 - \frac{v}{c} \cos \theta')$$

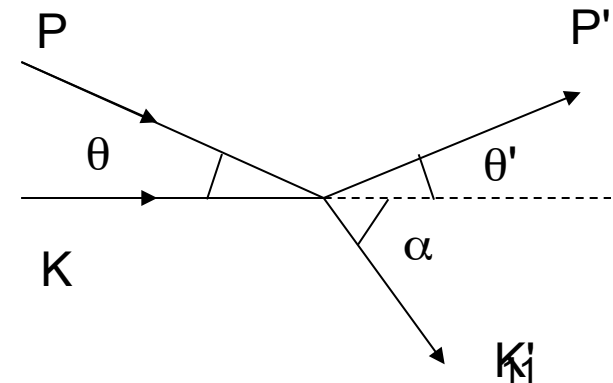
$$K \cdot P = \frac{\hbar\omega}{c} \cdot mc\gamma - \hbar\omega \gamma m \vec{i}_k \cdot \frac{\vec{v}}{c} = m\gamma \hbar\omega (1 - \frac{v}{c} \cos \theta)$$

$$\frac{\hbar^2}{c^2} \omega\omega' (1 - \cos \alpha) + m\gamma \hbar\omega' (1 - \frac{v}{c} \cos \theta') = m\gamma \hbar\omega (1 - \frac{v}{c} \cos \theta)$$

Divido per $m\gamma$

$$\frac{\hbar}{c^2} \frac{\omega\omega'}{m\gamma} (1 - \cos \alpha) + \omega' (1 - \frac{v}{c} \cos \theta') = \omega (1 - \frac{v}{c} \cos \theta)$$

$$\omega' \left[\frac{\hbar}{c^2} \frac{\omega}{m\gamma} (1 - \cos \alpha) + (1 - \frac{v}{c} \cos \theta') \right] = \omega (1 - \frac{v}{c} \cos \theta)$$



Diffusione Compton

$$\omega' \left[\frac{\hbar}{c^2 m \gamma} \omega (1 - \cos \alpha) + \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta'\right) \right] = \omega \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)$$

$$\omega' = \frac{\omega \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)}{\left[\frac{\hbar}{c^2 m \gamma} \omega (1 - \cos \alpha) + \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta'\right) \right]} \quad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)}{\left[\frac{\hbar}{c^2 m \gamma} \omega (1 - \cos \alpha) + \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta'\right) \right]}$$

E' il rapporto delle frequenze prima e dopo

l'urto

Usualmente si considera $v=0$ per l'e-



$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{\left[\frac{\hbar \omega}{m c^2} (1 - \cos \alpha) + 1 \right]}$$

In termini di λ si ha $\frac{2\pi c}{\lambda} = \omega$



$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\lambda}{\lambda'}$$

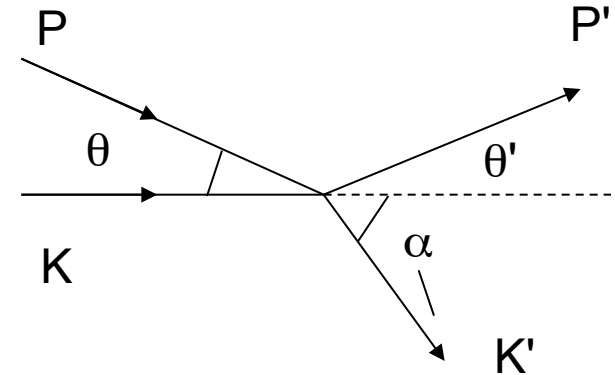
$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{2\pi c}{\lambda} \frac{\hbar}{m c^2} (1 - \cos \alpha) + 1$$

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{h}{m c \lambda} (1 - \cos \alpha) + 1 = \frac{\lambda_c}{\lambda} (1 - \cos \alpha) + 1$$

$$\lambda_c = \frac{h}{m c} = 3.86 \times 10^{-13} \text{ m} \quad \text{Lunghezza d'onda Compton}$$

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{\lambda'}{\lambda} - 1 = \frac{\lambda_c}{\lambda} (1 - \cos \alpha)$$

La variazione assoluta di lunghezza d'onda e' al max $2\lambda_c \rightarrow$ se $\lambda \gg \lambda_c$, lo scattering e' elastico



Diffusione Compton

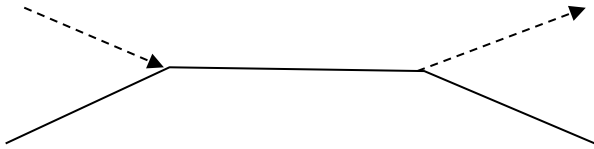
Gli effetti quantistici compaiono in due modi:

(a) nella cinematica della diffusione $\rightarrow$ quando $h\omega \gg mc^2$, la diffusione non e' piu' elastica a causa del rinculo dell'elettrone, $\omega \neq \omega'$

(b) la sezione d'urto del processo cambia da quella di Thomson, indipendente da ω a quella di Klein-Nishina, piu' piccola, che invece e' funzione di ω

Diffusione Compton

Il processo di scattering Compton e' descritto dalla QED



Consideriamo un e- stazionario

Il processo di diffusione di Thomson e' elastico: $\omega' = \omega$

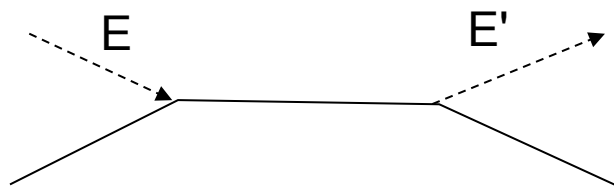
La natura quantistica del fotone entra in gioco
quando $\hbar\omega \sim mc^2$

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{\left[\frac{\hbar\omega}{mc^2}(1 - \cos\alpha) + 1\right]} \neq 1$$

Il processo non e' piu' elastico e non puo' piu' essere
descritto dalla diffusione Thomson → sezione d'urto dalla QED

Diffusione Compton: Klein-Nishina

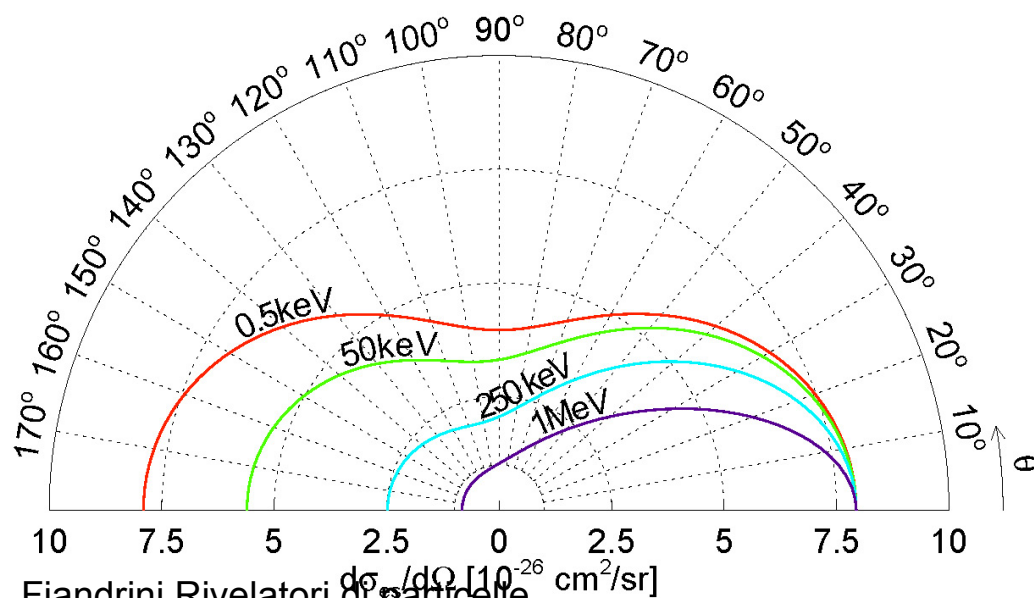
Nel caso in cui l'energia del fotone e' dell'ordine dell'energia di riposo dell'e- la sezione d'urto Thomson non vale piu', ma occorre usare la QED



Per fotoni non polarizzati incidenti su e- stazionari la sezione d'urto differenziale e':

$$\frac{d\sigma_{KN}}{d\Omega} = \frac{3}{16\pi} \sigma_T \left(\frac{E'}{E}\right)^2 \left(\frac{E'}{E} + \frac{E}{E'} - \sin^2 \alpha\right)$$

Con la condizione che $E' = \frac{E}{\left[\frac{E}{mc^2}(1 - \cos \alpha) + 1\right]}$ Per la conservazione del 4-impulso



La distribuzione angolare viene
piccata in avanti al crescere
dell'energia del fotone incidente
At high energies, say > 10 MeV,
most of the photons are scattered
in the forward direction
Because of the high forward
momentum of the incident photons,
most of the electrons will also be
scattered in the forward direction

ticelle

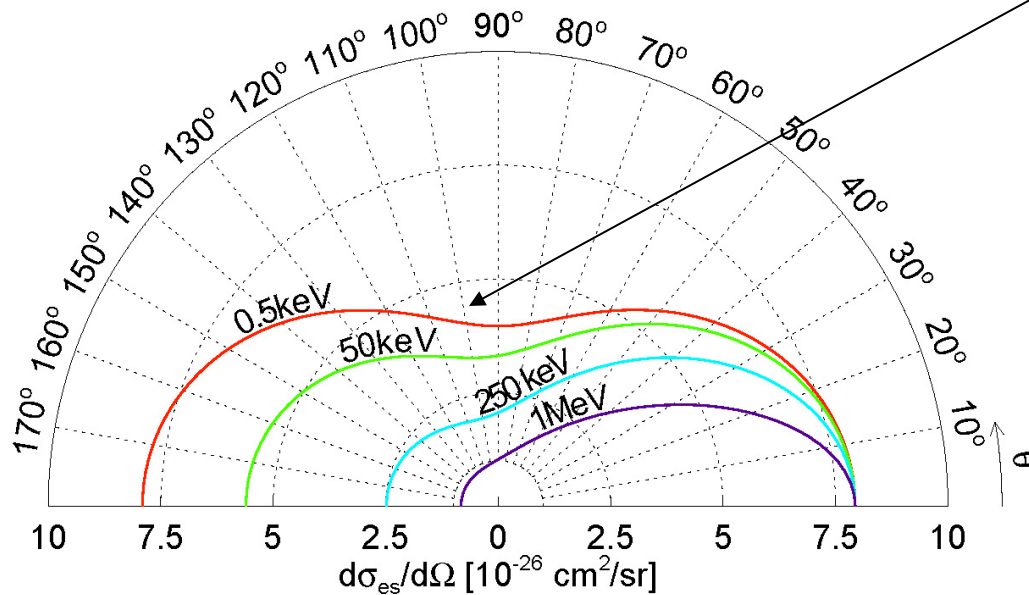
15

Diffusione Compton: Klein-Nishina

La sezione d'urto di KN si riduce a quella thomson quando $E' \rightarrow E$,
cioe' quando $E \ll mc^2$

$$\frac{d\sigma_{KN}}{d\Omega} = \frac{1}{2}r_e^2 \left(\frac{E'}{E}\right)^2 \left(\frac{E'}{E} + \frac{E}{E'} - \sin^2 \alpha\right) \longrightarrow \frac{d\sigma_{KN}}{d\Omega} = \frac{1}{2}r_e^2 (1 + 1 - \sin^2 \alpha)$$

$$= \frac{1}{2}r_e^2 (1 + \cos^2 \alpha)$$

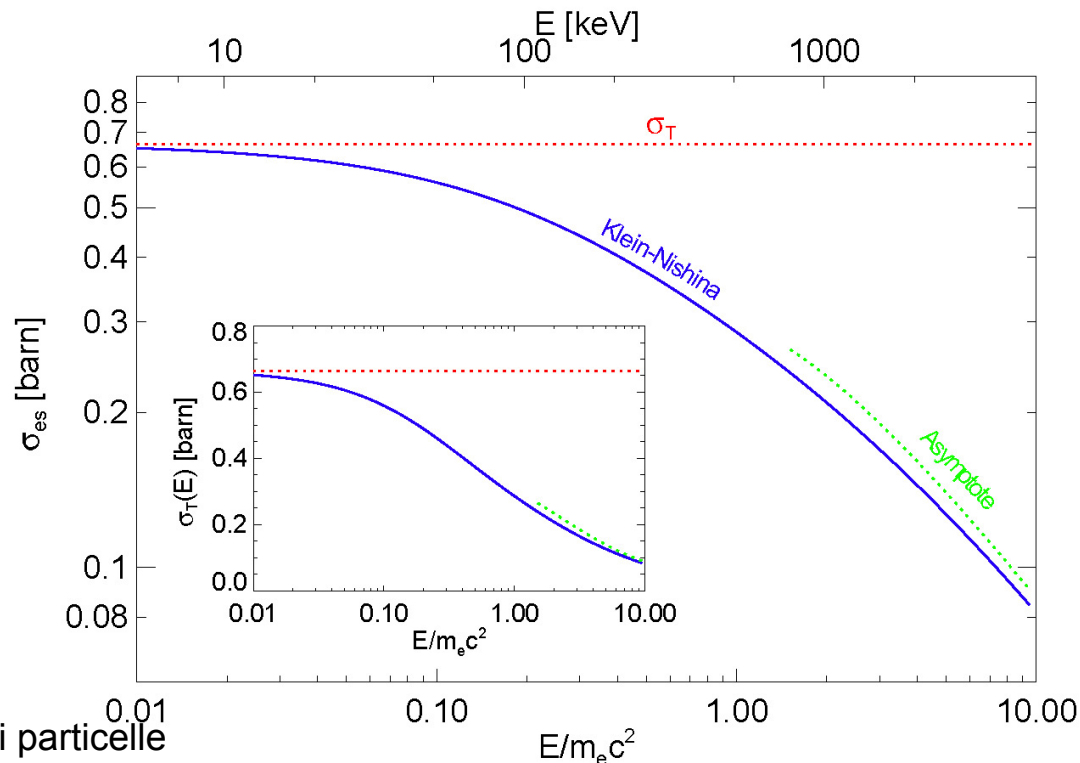


Diffusione Compton: Klein-Nishina

La sezione d'urto totale si ottiene integrando sull'angolo solido $d\Omega$, tenendo conto della condizione $E' = \frac{E}{[\frac{E}{mc^2}(1 - \cos \alpha) + 1]}$

$$\sigma_{KN} = \int_{4\pi} \frac{1}{2} r_e^2 \left(\frac{E'}{E} \right)^2 \left(\frac{E'}{E} + \frac{E}{E'} - \sin^2 \alpha \right) \delta \left(E' - \frac{E}{[\frac{E}{mc^2}(1 - \cos \alpha) + 1]} \right) d\Omega$$

$$\sigma_{KN} = \frac{3}{4} \sigma_T \left\{ \frac{1+x}{x^3} \left[\frac{2x(1+x)}{1+2x} - \ln(1+2x) \right] + \frac{1}{2x} \ln(1+2x) - \frac{1+3x}{(1+2x)^2} \right\} \quad \mathbf{x = h\omega/mc^2}$$



Diffusione Compton: Klein-Nishina

$$\sigma_{KN} = \frac{3}{4}\sigma_T \left\{ \frac{1+x}{x^3} \left[\frac{2x(1+x)}{1+2x} - \ln(1+2x) \right] + \frac{1}{2x} \ln(1+2x) - \frac{1+3x}{(1+2x)^2} \right\}$$

$$E' = \frac{E}{\left[\frac{E}{mc^2} (1 - \cos \alpha) + 1 \right]}$$

I valori asintotici sono

Limite non relativistico per $x \ll 1$

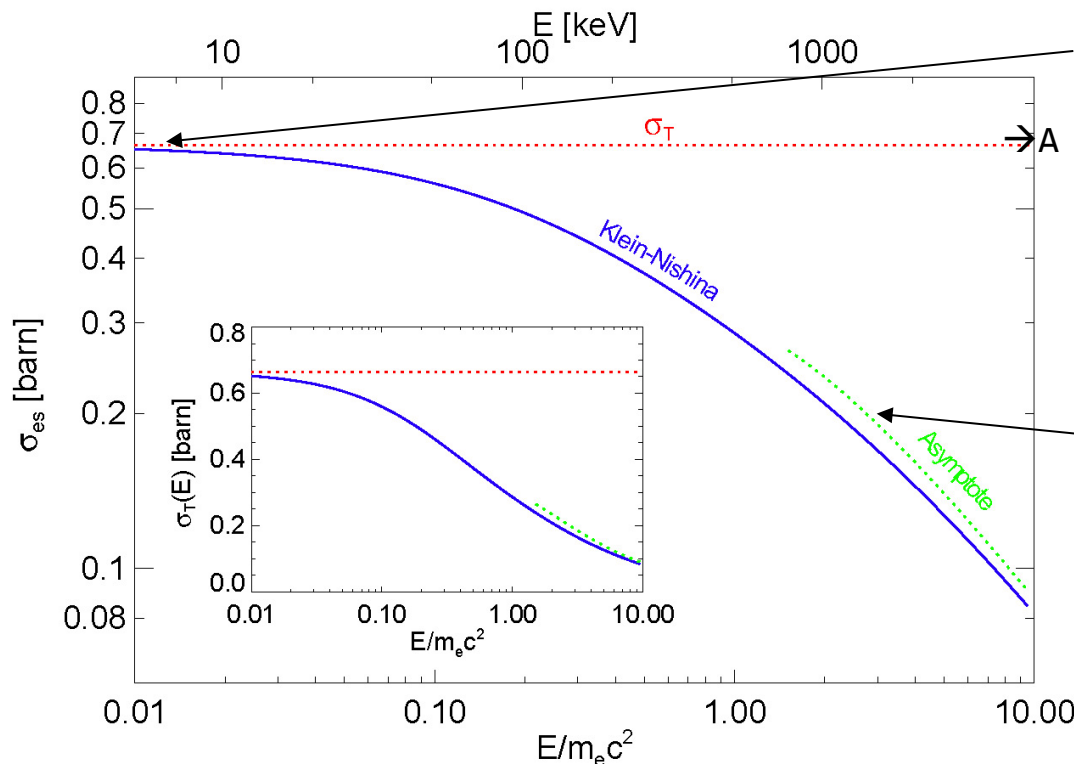
$$\sigma_{KN} \approx \sigma_T \left(1 - 2x + \frac{26x^2}{5} \right)$$

A basse energie si ha scattering Thomson

Limite ultra -relativistico per $x \gg 1$

$$\sigma_{KN} \approx \frac{3}{8}\sigma_T \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2} + \ln 2x \right)$$

Ad alte energie la sezione d'urto $\rightarrow 0$, quindi gli elettroni diventano centri di scattering meno efficienti per fotoni di alta energia



Compton su atomi

Nel caso di elettroni atomici, si possono considerare liberi se l'energia di legame e' piccola rispetto a quella del fotone incidente

In tal caso, se ci sono Z_{el} elettroni atomici, la sezione d'urto Compton e' semplicemente $Z_{el} \sigma_{KN}$

Elettroni Compton

La sez d'urto di KN da la probabilita' di emissione di un fotone con una certa energia, cioe' distribuzione di energia dei fotoni dopo l'urto.

Di conseguenza, anche gli elettroni Compton -quelli del mezzo dopo l'urto- possiedono una distribuzione caratteristica di energia.

Infatti la conservazione del 4 impulso $E_{ef} = E - E'$ con

$$E' = \frac{E}{[\frac{E}{mc^2}(1 - \cos \alpha) + 1]}$$

L'energia dell'elettrone dopo l'urto e' max

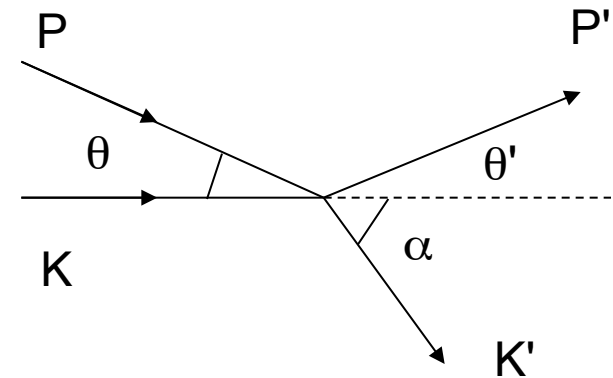
quando E' e' min. Cio' avviene quando $\cos \alpha = -1$

$$T_{\max} = hv \left(\frac{2\gamma}{1+2\gamma} \right) \text{ and } \gamma = \frac{hv}{m_e c^2}$$

$$hv - T_{\max} = hv \left(1 - \frac{2\gamma}{1+2\gamma} \right) = \frac{hvm_e c^2}{m_e c^2 + 2hv}$$

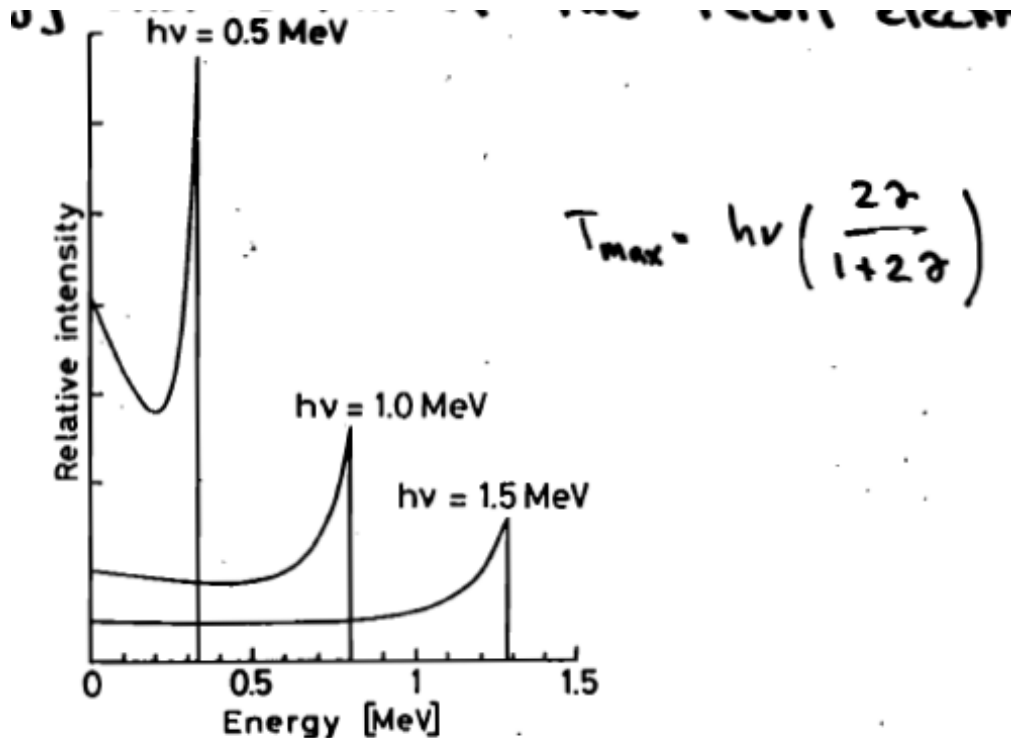
and for hv large

$$hv - T_{\max} \rightarrow \frac{m_e c^2}{2} = 0.2555 \text{ MeV}$$



Compton Scattering

- The electrons are expelled from atoms with a characteristic energy distribution, which, after a normalization gives the differential cross section $d\sigma/dT$



$$T_{\text{max}} = h\nu \left(\frac{2\gamma}{1+2\gamma} \right)$$

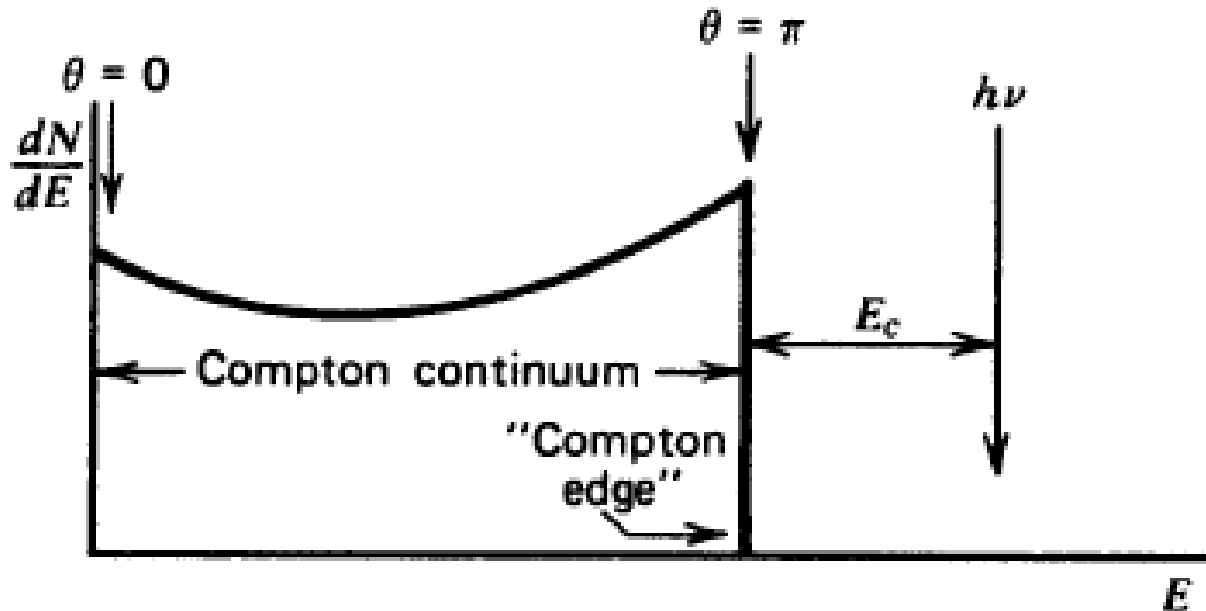
After the interaction we have a degraded photon and an energetic electron (in some sense analogous to a δ electron).

Unless the photon has an appreciable prob to undergo to photoelectric effect, what we see in the material is only the energy deposited by the e^-

Fig. 2.24. Energy distribution of Compton recoil electrons. The sharp drop at the maximum recoil energy is known as the *Compton edge*

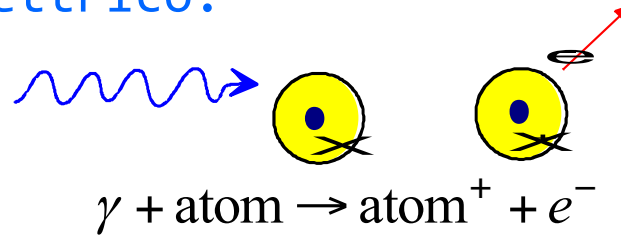
Compton Scattering

- In cases where the scattered photon leaves a detector without interaction one would observe



Interazioni dei γ

Effetto fotoelettrico.



L'effetto fotoelettrico consiste nell'assorbimento di un fotone da parte dell'atomo con emissione di un fotoelettrone.

L'elettrone viene emesso con energia cinetica

$$T = \hbar\omega - E_b$$

Con E_b energia di legame dell'atomo e $\hbar\omega$ energia del fotone incidente.

Per energie del fotone incidente poco sopra soglia l'elettrone è emesso a 90° rispetto alla direzione del fotone incidente.

Crescendo l'energia l'angolo di emissione diminuisce; ma ... scattering multiplo $\rightarrow$ la direzione dell'elettrone è random rispetto alla direzione del fotone incidente.

Photoelectric Effect

- The energy of the (photo)electron is

$$E_e = E_\gamma - E_b$$

- Binding energies for some of the heavier elements are shown on the next page
- Recall from the Bohr model, the binding energies go as

$$E_n = -\frac{m_e Z^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{13.6Z^2}{n^2} eV$$

$$E_1 = -13.6 eV \text{ for } H$$

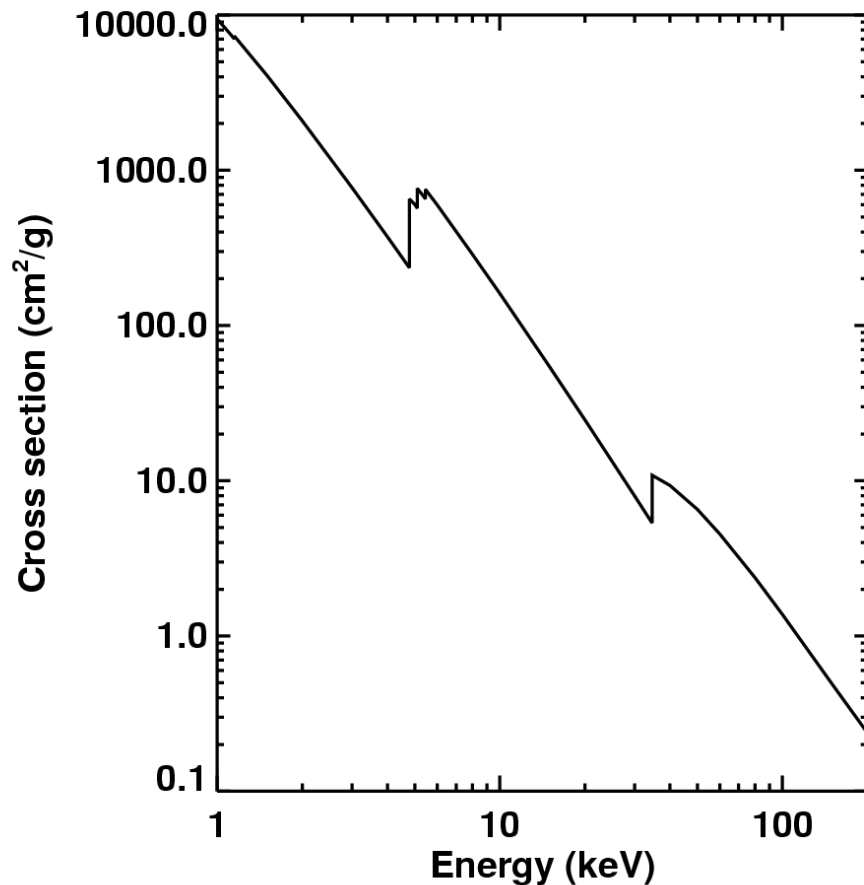
Photoelectric Effect

Table 1-1. Electron binding energies (continued).

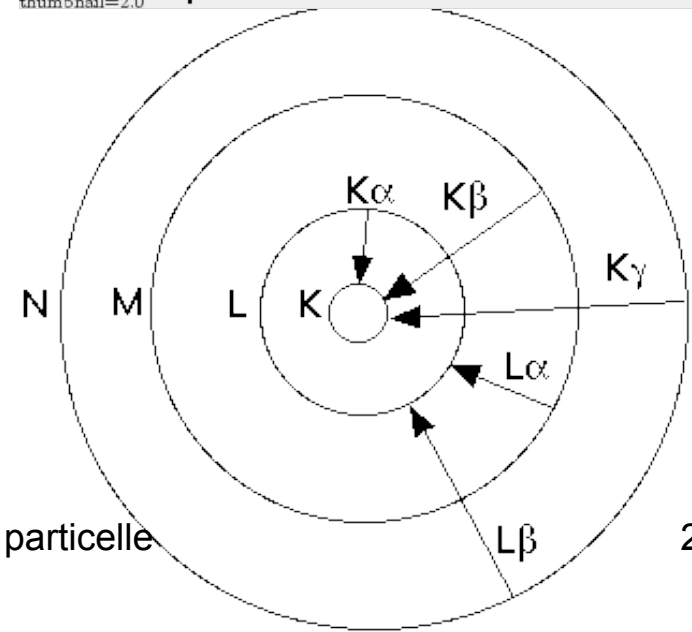
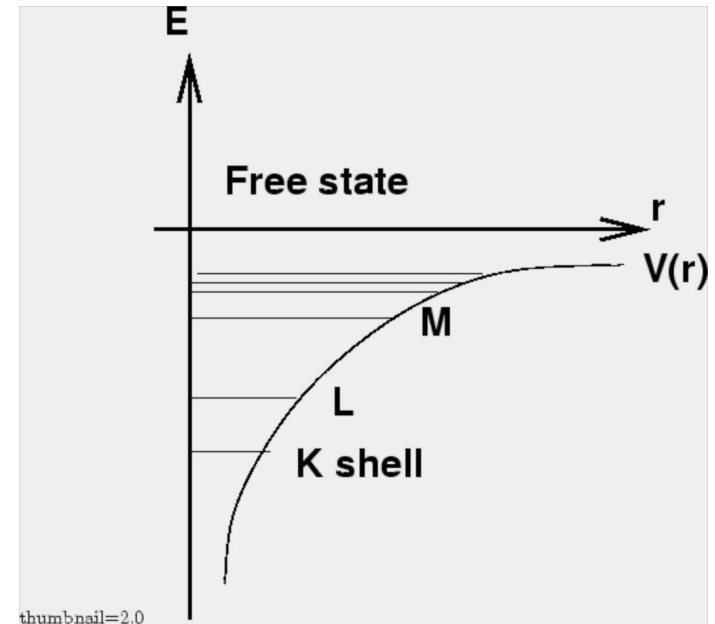
Element	K 1s	L ₁ 2s	L ₂ 2p _{1/2}	L ₃ 2p _{3/2}	M ₁ 3s	M ₂ 3p _{1/2}	M ₃ 3p _{3/2}	M ₄ 3d _{3/2}	M ₅ 3d _{5/2}	N ₁ 4s	N ₂ 4p _{1/2}	N ₃ 4p _{3/2}
71 Lu	63314	10870	10349	9244	2491	2264	2024	1639	1589	506.8*	412.4*	359.2*
72 Hf	65351	11271	10739	9561	2601	2365	2108	1716	1662	538*	438.2†	380.7†
73 Ta	67416	11682	11136	9881	2708	2469	2194	1793	1735	563.4†	463.4†	400.9†
74 W	69525	12100	11544	10207	2820	2575	2281	1872	1809	594.1†	490.4†	423.6†
75 Re	71676	12527	11959	10535	2932	2682	2367	1949	1883	625.4†	518.7†	446.8†
76 Os	73871	12968	12385	10871	3049	2792	2457	2031	1960	658.2†	549.1†	470.7†
77 Ir	76111	13419	12824	11215	3174	2909	2551	2116	2040	691.1†	577.8†	495.8†
78 Pt	78395	13880	13273	11564	3296	3027	2645	2202	2122	725.4†	609.1†	519.4†
79 Au	80725	14353	13734	11919	3425	3148	2743	2291	2206	762.1†	642.7†	546.3†
80 Hg	83102	14839	14209	12284	3562	3279	2847	2385	2295	802.2†	680.2†	576.6†
81 Tl	85530	15347	14698	12658	3704	3416	2957	2485	2389	846.2†	720.5†	609.5†
82 Pb	88005	15861	15200	13035	3851	3554	3066	2586	2484	891.8†	761.9†	643.5†
83 Bi	90524	16388	15711	13419	3999	3696	3177	2688	2580	939†	805.2†	678.8†
84 Po	93105	16939	16244	13814	4149	3854	3302	2798	2683	995*	851*	705*
85 At	95730	17493	16785	14214	4317	4008	3426	2909	2787	1042*	886*	740*
86 Rn	98404	18049	17337	14619	4482	4159	3538	3022	2892	1097*	929*	768*
87 Fr	101137	18639	17907	15031	4652	4327	3663	3136	3000	1153*	980*	810*
88 Ra	103922	19237	18484	15444	4822	4490	3792	3248	3105	1208*	1058	879*
89 Ac	106755	19840	19083	15871	5002	4656	3909	3370	3219	1269*	1080*	890*
90 Th	109651	20472	19693	16300	5182	4830	4046	3491	3332	1330*	1168*	966.4†
91 Pa	112601	21105	20314	16733	5367	5001	4174	3611	3442	1387*	1224*	1007*
92 U	115606	21757	20948	17166	5548	5182	4303	3728	3552	1439*b	1271*b	1043†

Photoelectric cross section in Xe

“Edges” occur at the characteristic electronic transition energies



When in emission, elements produce characteristic lines at these energies



Interazioni dei γ

- Il calcolo della sezione d'urto e' complicato perche' occorre tenere conto di tutti gli elettroni atomici.
- Di norma si calcolano le sezioni d'urto parziali delle singole shell atomiche K, L, M,...
- Per una data shell, la sezione d'urto e' massima quando $E_\gamma \approx E_{bi}$ e nulla per $E_\gamma < E_{bi}$
- La sezione d'urto totale e' la somma delle sezioni d'urto parziali sulle singole shell (no interferenza)

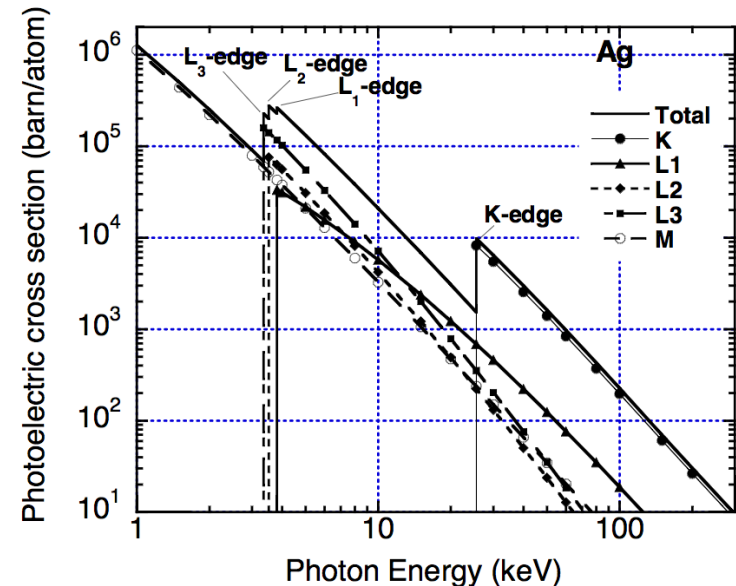


Figure 2: Total and partial atomic photoeffect of Ag.[9].

Interazioni dei γ

- Atomic electrons can absorb the energy of a photon completely, while – because of momentum conservation – this is not possible for free electrons. The absorption of a photon by an atomic electron requires a third collision partner which in this case is the atomic nucleus.
- The cross section for absorption of a photon of energy $E_\gamma \sim 0(>20 \text{ KeV})$ in the K shell is particularly large ($\approx 80\%$ of the total cross section), because of the proximity of the third collision partner, the atomic nucleus, which takes the recoil momentum.

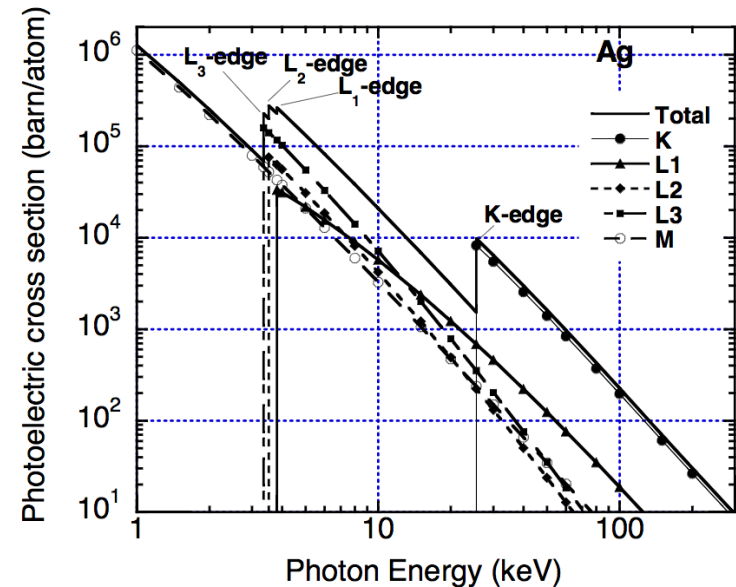


Figure 2: Total and partial atomic photoeffect of Ag.[9].

Interazioni dei γ

La sezione d'urto per basse energie è: (non relativistiche)

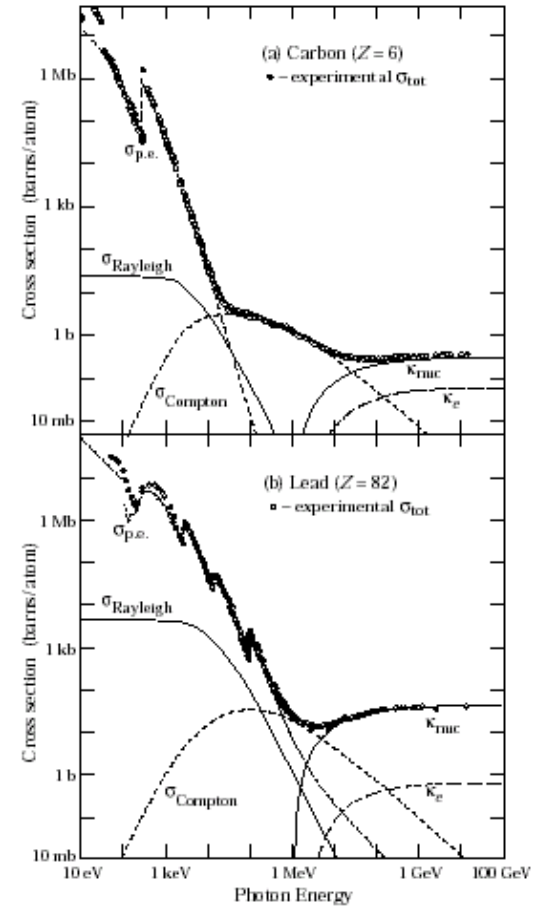
$$\sigma_{photo}^K = \left(\frac{32}{\epsilon^7}\right)^{\frac{1}{2}} \alpha^4 Z^5 \sigma_{Th}^e \quad \epsilon = \frac{E_\gamma}{m_e c^2} \quad \sigma_{Th}^e = \frac{8}{3} \pi r_e^2 \quad (\text{Thomson})$$

Presenta dei picchi corrispondenti ai livelli atomici K,L,M...

Se siamo sopra soglia vengono emessi preferibilmente elettroni dallo shell K.

Ad alte energie $\epsilon \gg 1$ la σ è:

$$\sigma_{photo}^K = 4\pi r_e^2 \alpha^4 Z^5 \frac{1}{\epsilon}$$



Interazioni dei γ

- A basse energie decresce con $\hbar\omega^{-7/2} \rightarrow$ fenomeno importante a bassa energia (tenuto conto che e' proporzionale a α^4).
- Dipende dal materiale come $Z^5 \rightarrow$ importante per la costruzione di rivelatori di fotoni (e.g. camere a Xenon).

Per fotoni incidenti di bassa energia la dipendenza da Z è una complicata funzione di Z e comunque minore di Z^5 . Ad esempio per energie $0.1 \text{ MeV} \leq E_\gamma \leq 5 \text{ MeV}$ l'esponente di Z varia fra 4 e 5.

Photoelectric effect relaxation

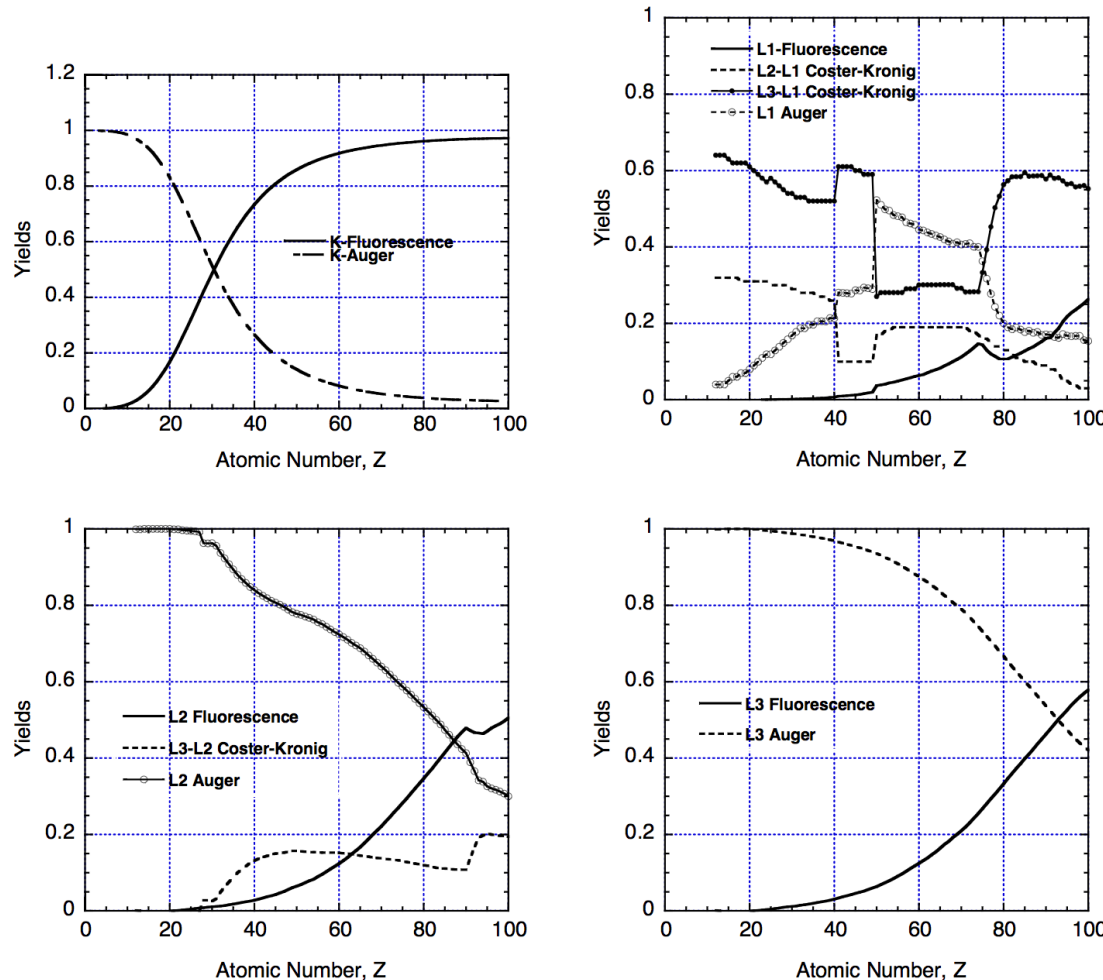
A vacancy created by the ejection of an electron from an inner shell is filled by an outer electron falling into it (de-excitation); this

Process may be accompanied by one of the following modes:

1. A fluorescence X-ray is emitted from the atom, with a photon energy equal to the difference between the vacancy-site inner-shell energy level and energy level of the particular outer shell which happens to supply the electron to the vacancy (fluorescence yield, w , is the fraction of fluorescence X-ray emission). The energy of characteristic X rays is given by Moseley's law $E = R_y(Z-1)^2(1/n^2 - 1/m^2)$, R_y = Rydberg constant
2. The excess energy ejects an outer-shell electron from the atom. This electron is known as an Auger electron (Auger yield, a , is the fraction of Auger emission). If the photoionisation occurs in the K shell (binding energy B_K), and if the hole in the K shell is filled up by an electron from the L shell (binding energy B_L), the excitation energy of the atom ($B_K - B_L$) can be transferred to an L electron. If $B_K - B_L > B_L$, the L electron can leave the atomic shell with an energy $B_K - 2B_L$ as an Auger electron. The energy of these Auger electrons is $\ll$ the energy of the primary photoelectrons
3. A vacancy is filled by an electron in a higher sub shell, like from the L2 subshell to the L1 subshell. This process is called Coster-Kronig. As a result, a new vacancy is created, in which is filled by one of the modes (Coster-Kronig yield, f , is the fraction of Coster-Kronig).

The sum of fluorescence yield, w , Auger yield, a , and Coster-Kronig yield, f , is unity: $w + a + f = 1$

Photoelectric effect relaxation



Emission of Auger electrons competes with X-rays.

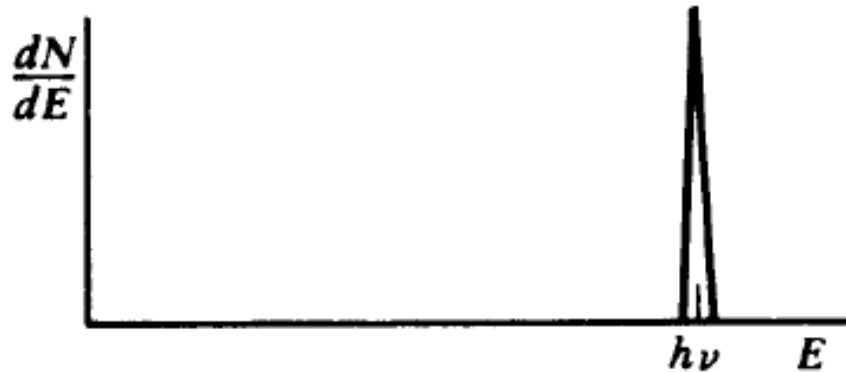
Considerations for photon detectors:

- ❑ In thin detectors, the X rays after photoemission may escape the detector.
- ❑ Auger electrons will certainly add to the signal in detectors

Figure 3: Yields of fluorescence, Auger electrons and Coster-Kronig after the K-, L₁-, L₂- or L₃-photoelectric effect[13].

Photoelectric Effect

- The energy spectrum looks like



- This is because at these photon/electron energies the electron is almost always absorbed in a short distance
 - As are any x-rays emitted from the ionized atom

Interazioni dei γ

- For low energies ($500 \text{ keV} \geq E_\gamma \geq \text{ionisation energy}$) the photoelectric effect dominates,
$$\gamma + \text{atom} \rightarrow \text{atom}^+ + e^-$$
- In the range of medium energies ($E_\gamma \approx 1 \text{ MeV}$) the Compton effect, which is the scattering of photons off quasi-free atomic electrons,

$$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$$

has the largest cross section,

- and at higher energies ($E_\gamma \gg 1 \text{ MeV}$, typically 50 MeV) the cross section for pair production dominates,

$$\gamma + \text{nucleus} \rightarrow e^+ + e^- + \text{nucleus}$$

A basse energie possiamo avere scattering coerente (Rayleigh). Il fotone interagisce con tutti gli elettroni atomici, senza eccitarli od ionizzarli (nessuna perdita di energia). È il responsabile del cielo blu

Interazioni dei γ

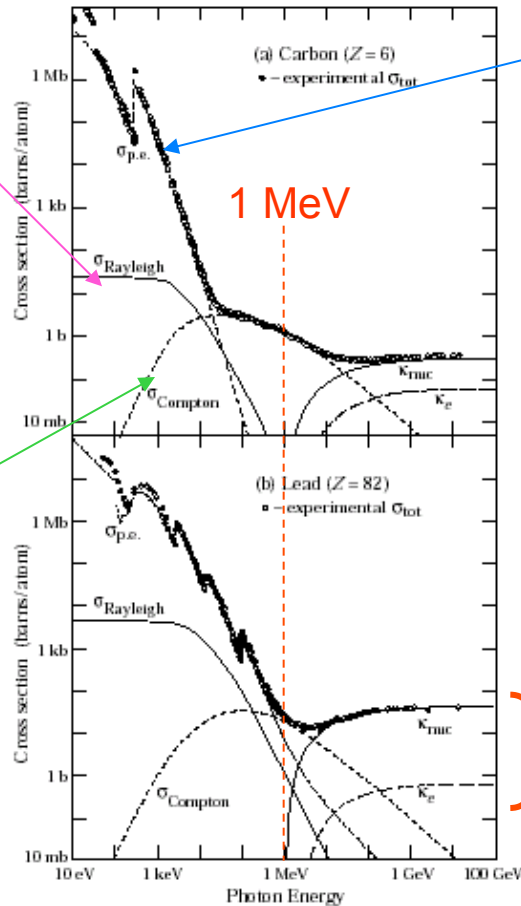
Le sezioni d'urto dei processi di interazione dei fotoni con la materia

Rayleigh
(cielo blu)

Compton

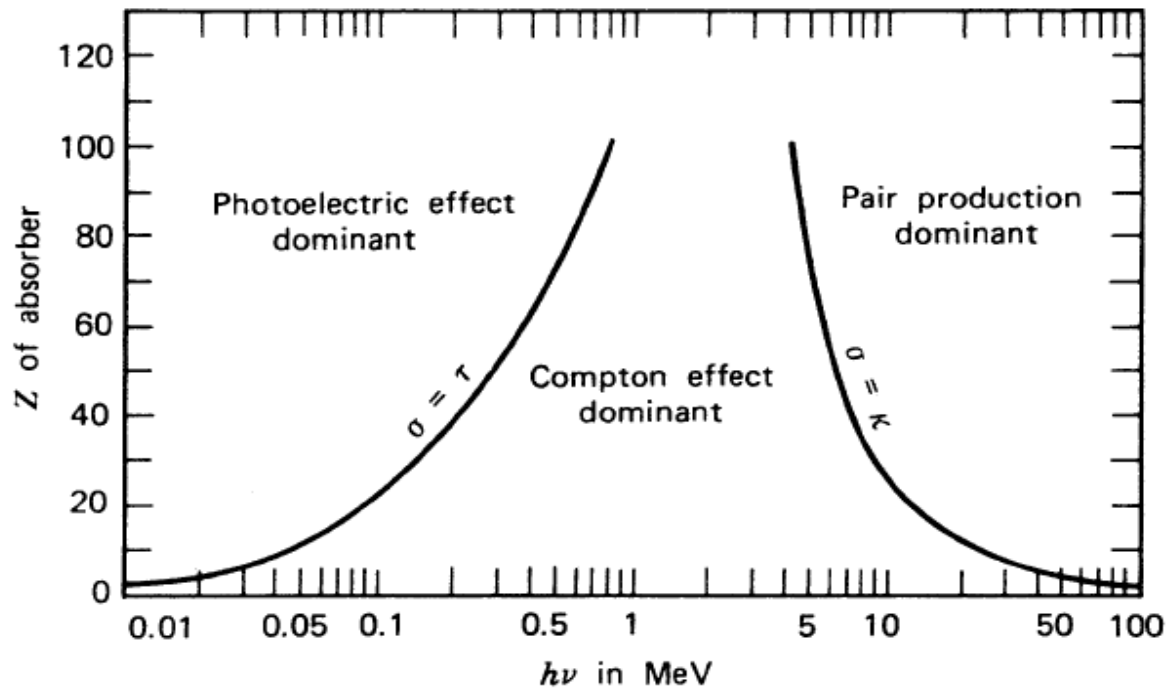
Fotoelettrico

Produzione di coppie



Photon Interactions

- Relative importance of the photoelectric effect, Compton scattering, and pair production versus energy and atomic number Z



(from Knoll)

The lines show the values of Z and $E_\gamma = h\nu$ where the two neighboring are equal.

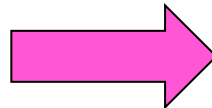
Interazioni dei γ

Produzione di coppie.

L'intenso campo elettrico vicino al nucleo permette al fotone di trasformarsi in una coppia e^+e^- .

L'energia di soglia è $2mc^2$. La produzione di coppie può anche avvenire vicino ad un elettrone atomico. In questo caso l'energia di soglia è $4mc^2$ e l'elettrone di rinculo acquista un'energia cinetica $\rightarrow$ 3 tracce cariche.

La trattazione in *QED* procede sulla falsariga del Bremsstrahlung





La dimostrazione sperimentale dell'equivalenza fra massa ed energia

Esiste anche il processo inverso $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$

Non possiamo avere un solo fotone nello stato finale per la conservazione del 4-momento

Nelle collisioni $e^+ + e^-$ avviene anche il processo

$e^+ + e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \text{fermione anti-fermione}$

La coppia annichila in un fotone virtuale che produce una coppia part - antipart (canale s)

Pair Production

Can't occur in empty space, second partner needed to conserve momentum

- Energy and momentum conservation give

$$\text{Energy } hf = E_- + E_+$$

$$\text{Momentum (x)} \quad \frac{hf}{c} = p_- \cos \theta_- + p_+ \cos \theta_+$$

$$\text{Momentum (y)} \quad 0 = p_- \sin \theta_- + p_+ \sin \theta_+$$

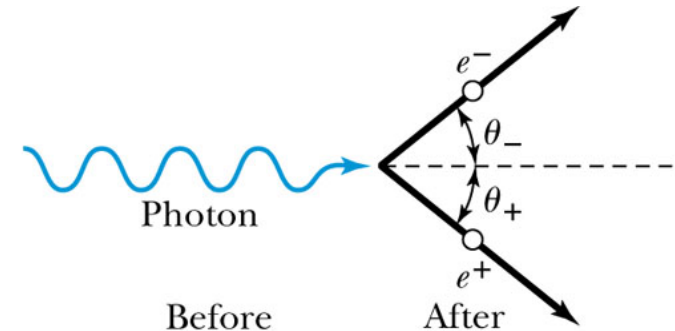
- Energy conservation can be re-written

$$hf = \sqrt{p_-^2 c^2 + m^2 c^4} + \sqrt{p_+^2 c^2 + m^2 c^4}$$

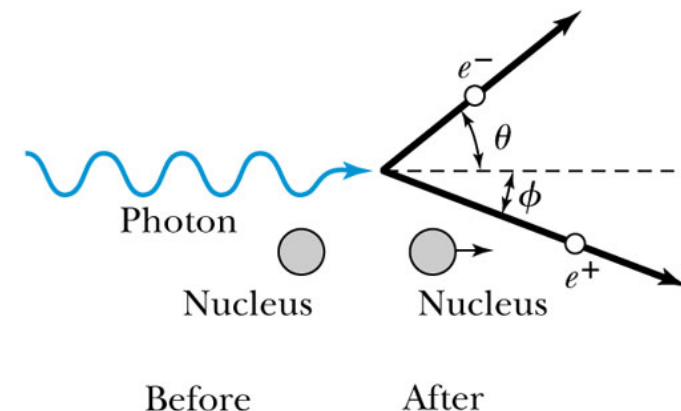
- But momentum conservation (x) shows

$$hf_{\max} = p_- c + p_+ c$$

- Thus energy and momentum are not simultaneously conserved



(a) Free space (**cannot occur**)



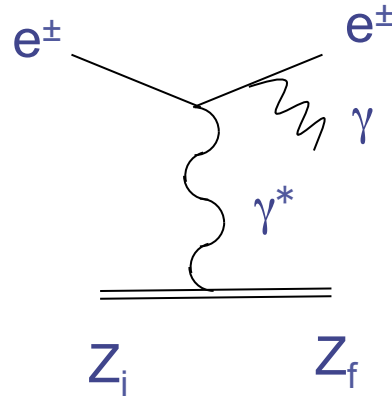
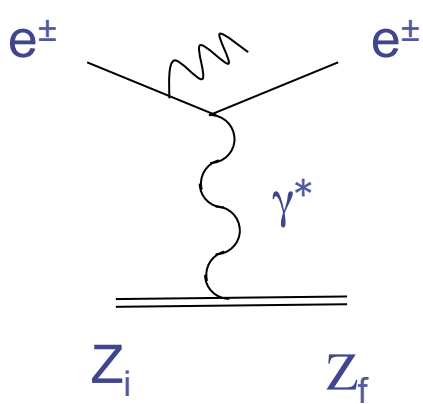
(b) Beside nucleus

© 2006 Brooks/Cole - Thomson

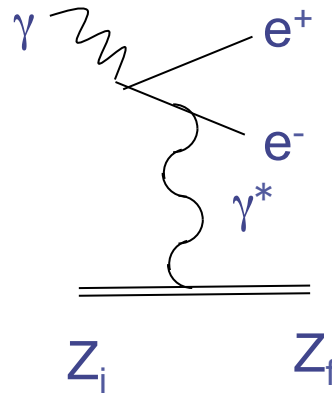
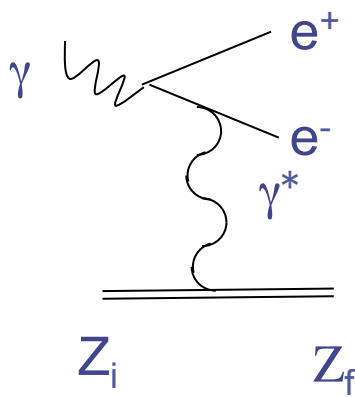
Interazioni dei γ

Trattazione classica impossibile

Processo intrinsecamente quanto-relativistico



Bremsstrahlung



Prod. di
coppie

Diagrammi praticamente identici. C'e'
simmetria di crossing

Pair Production

- The processes of pair production and bremsstrahlung are related (crossed processes)
 - Thus we'd expect the cross section to depend on the screening of atomic electrons surrounding the nucleus
 - ◆ Does the photon see nuclear charge Ze or 0 or something in between?
 - The relevant screening parameter is

$$\Gamma = \frac{100 m_e c^2 h \nu}{E_+ E_- Z^{1/3}}$$

Interazioni dei γ

L'analogia dei due processi non è solo la similitudine dei diagrammi, ma si può vedere il processo inverso della produzione di coppie come un processo di Bremss di un e^+ che emette un fotone e cade in uno stato di energia negativa (e^- , Dirac).

Ottengo gli elementi di matrice da quelli del brems per semplice sostituzione.

Se il γ incidente ha impulso k e la coppia prodotta ha energia E_+ ed E_- la schermatura è misurata usando il parametro di screening:

$$\Gamma' = \frac{100mc^2}{Z^{1/3}} \cdot \frac{k}{E_+ E_-} = \frac{100mc^2}{Z^{1/3}} \cdot \frac{1}{kw_+ \cdot (1 - w_+)}$$

Del tutto analogo a quello usato per la brems.

La conservazione dell'energia ci dice che $E_+ + E_- = k \rightarrow$ posto $w_{\pm} = E_{\pm}/k$, si ha $k/E_+ E_- = 1/[kw_+(1-w_+)]$

Γ' è simmetrica in w_+ e w_- e decresce al crescere di k

Interazioni dei γ

Nel caso di schermatura completa le sezioni d'urto sono:

■ Bremss
$$\frac{d\sigma}{dk} = \frac{4\sigma_o}{k} \left[\left(1 + w^2 - \frac{2}{3}w \right) \ln \frac{183}{Z^{1/3}} + \frac{w}{9} \right]$$

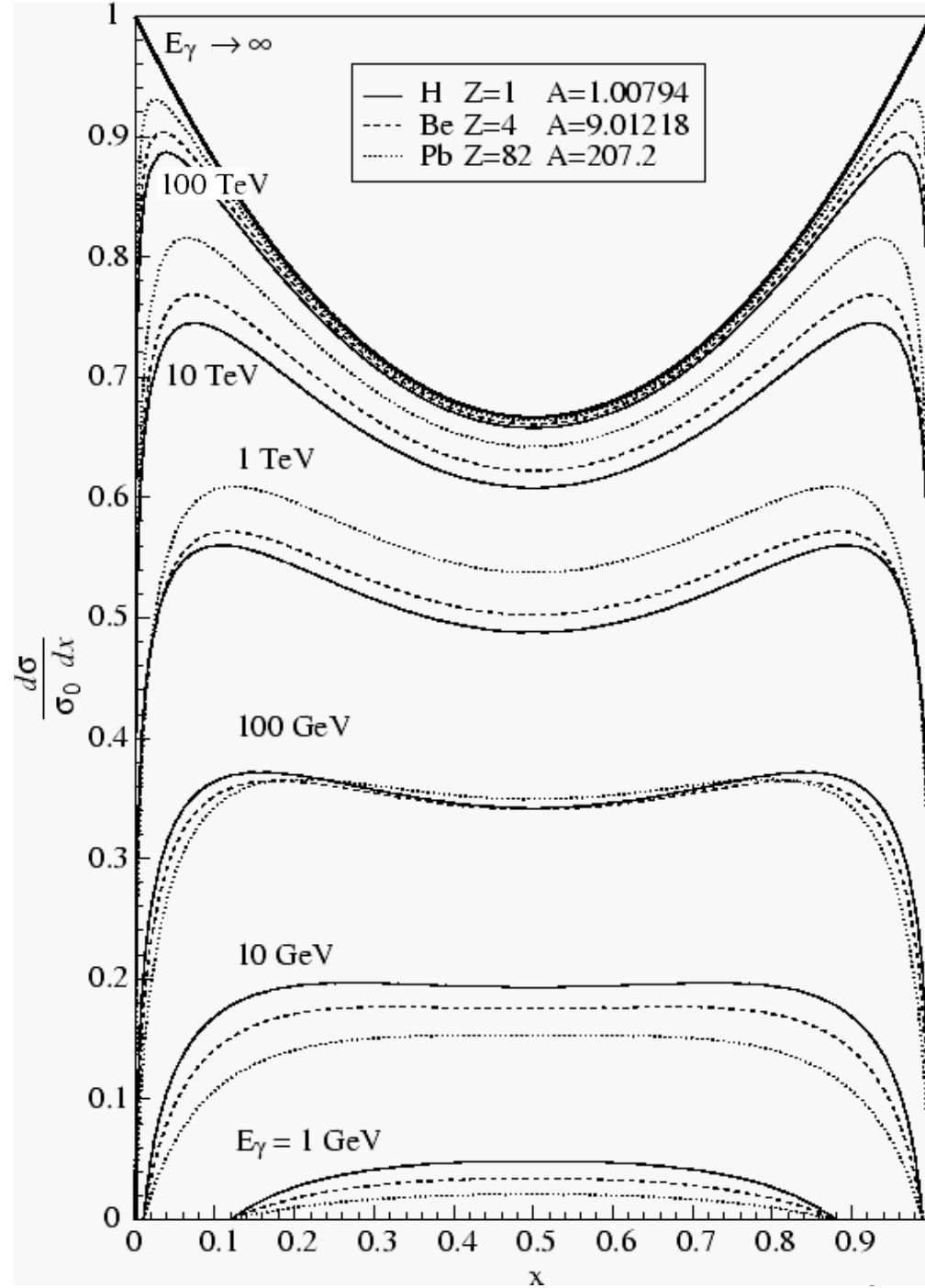
■ Coppie
$$\frac{d\sigma}{dE_+} = \frac{4\sigma_o}{k} \left[\left(w_+^2 + w_-^2 + \frac{2}{3}w_+w_- \right) \ln \frac{183}{Z^{1/3}} - \frac{1}{9}w_+w_- \right]$$

Con:

$w = E_f/E_i$ (elettrone); $\sigma_o = \alpha Z^2 r_e^2$; k = impulso del fotone

$w_+ = E_+/k$; E_+ = energia del positrone

$w_- = E_-/k$; E_- = energia dell' elettrone



Normalized x-section for pair production as a function of $x=E/E_\gamma$, the energy fraction of photon energy carried by one of the leptons in the pair. Up to very high E (~ 500 GeV), the distribution is essentially flat: a lepton of the pair can get any x between 0 and 1 (the other gets $1 - x$). The distribution is symmetric around $\frac{1}{2}$, so in average each leptons gets half of the photon energy

Pair Production

The total pair production cross section is obtained integrating over the the energy fraction

- In the Born approximation (which is not very accurate for low energy or high Z) one finds

No screening ($\xi \gg 1$) and $m_e c^2 \ll h\nu \ll 137 m_e c^2 Z^{-1/3}$

$$\sigma_{pair} = 4Z^2 \alpha r_e^2 \left[\frac{7}{9} \left(\ln \frac{2h\nu}{m_e c^2} \right) - \frac{109}{54} \right]$$

Complete screening ($\xi \rightarrow 0$) and $h\nu \gg 137 m_e c^2 Z^{-1/3}$

$$\sigma_{pair} = 4Z^2 \alpha r_e^2 \left[\frac{7}{9} \left(\ln 183 Z^{-1/3} \right) \right] - \frac{1}{54} \quad \text{ie high energy}$$

Interazioni dei γ

- In caso di schermatura completa ($\Gamma \sim 0$) la σ espressa in funzione dell'energia cinetica del positrone e normalizzata a $\sigma_0 = \alpha Z^2 r_e^2$ è quasi uniforme $\rightarrow$ I positroni sono prodotti con tutte le energie possibili $\rightarrow$ gli e^+ ed e^- della coppia non hanno la stessa energia.
- La σ dipende dal materiale come Z^2 , $\sigma_0 = \alpha Z^2 r_e^2 \sim (10^{-4} \text{ barn}) \times Z^2$
- Ad alta energia e^+ ed e^- tendono ad essere prodotti a piccolo angolo rispetto alla direzione di volo del γ .

$$\langle \theta \rangle = mc^2/E \quad (E = E_+ \text{ od } E_-)$$

Interazioni dei γ

Trascurando 1/54 ottengo:

$$\sigma_{pair} \approx 4\alpha r_e^2 Z^2 \cdot \left[\frac{7}{9} \ln \frac{183}{Z^{1/3}} \right]$$

D'altra parte, la lunghezza di radiazione e' (cfr. bremsstrahlung)

$$L_0 = \frac{A}{4\alpha N_A \rho Z_2^2 r_e^2 \ln \frac{183}{Z_2^{1/3}}} \quad (cm)$$

Perciò

$$\sigma_{pair} = 4\alpha r_e^2 Z^2 \frac{N_A}{A} \left[\frac{7}{9} \ln \frac{183}{Z^{1/3}} \right] = \frac{7}{9} \frac{A}{N_A} \frac{1}{X_0}$$

$$X_0 = L_0 \rho = \frac{A}{4\alpha N_A Z_2^2 r_e^2 \ln \frac{183}{Z_2^{1/3}}} \quad (g/cm^2)$$

→ La sezione d'urto e' inversamente proporzionale alla lunghezza di radiazione espressa in g/cm²
NB: il numero atomico A e' espresso in kg/mol!

Cfr. lunghezza di radiazione

Ricordiamo che la perdita di energia per un e- che attraversa un mezzo con n_a atomi/cm³, cioè con $n_a = \rho N_A / A$, nel caso di schermatura completa:

$$-\left. \frac{dE}{dx} \right|_{Br} = \int_0^{k_{\max}} k n_a \cdot \frac{d\sigma}{dk} dk = 4 \rho N_o \frac{Z_2^2}{A} r_e^2 \alpha E_i \ln \frac{183}{Z_2^{1/3}} \quad \text{ovvero}$$

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{E}{L_0}$$

n_a = numero di atomi per cm³.

N_0 è il numero di Avogadro

A è il peso atomico

r è la densità del materiale

con

$$L_0 = \frac{A}{4 \alpha N_o \rho Z_2^2 r_e^2 \ln \frac{183}{Z_2^{1/3}}} \quad (cm)$$

$X_0 = L_0 \rho$ e' la lunghezza di radiazione espressa in g / cm²

X_0 e' inversamente proporzionale a Z^2 e NON dipende dalla densita' se espresso in g/cm²

Interazioni dei γ

- Per definizione, il n.ro di particelle rimosse da un fascio a causa di un processo con sez. d'urto σ e':
 - $-dN = Nn\sigma dx = N(N_A\rho\sigma/A)dx = N(N_A\sigma/A)dX$ con $dX = \rho dx$,
cioe' espresso in g/cm^2 .
 - La quantita' $\lambda = A/N_A\sigma$ e' la lunghezza di attenuazione
ed e' tale che $N(X) = N(0)e^{-X/\lambda}$
- λ dipende dalla sezione d'urto del processo in gioco:
 $\sigma = \sigma_T = \sigma_{\text{ph}} + \sigma_{\text{Comp}} + \sigma_{\text{pair}}$ e quindi dall'energia del fotone.

NB: λ e' misurata in g/cm^2 !

γ interactions

Pair Production

Photon pair conversion probability

Cross-section independent of photon energy (once well above threshold), $\sim Z^2$

$$\sigma_{pair}^n \approx r_e^2 4\alpha Z^2 \left[\frac{7}{9} \ln \left(\frac{183}{Z^{1/3}} \right) \right]$$

$$\sigma_{pair} \approx \frac{7}{9} 4\alpha r_e^2 Z^2 \ln \frac{183}{Z^{1/3}} \approx \frac{7}{9} \cdot \frac{A}{N_A} \cdot \frac{1}{X_0}$$

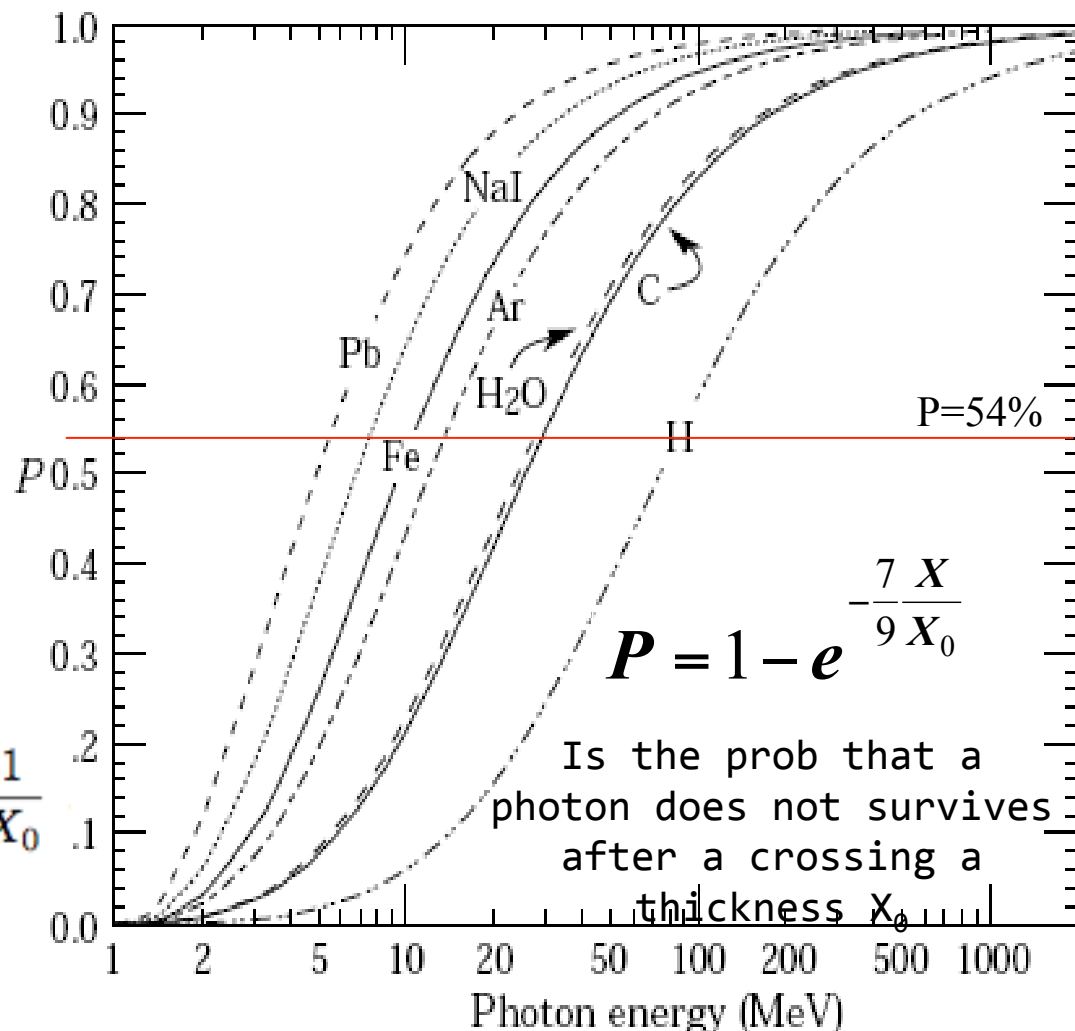
→ The attenuation length is

$$\lambda = A/N_a \sigma \text{ con } \sigma = \sigma_{pair}$$

$$\lambda = (9/7) X_0$$

E. Fiandrini Rivelatori di particelle

1617



<http://pdg.lbl.gov>

Interazioni dei γ

- ❖ A causa del bremsstrahlung, un fascio di $e^\pm$ di energia iniziale E_0 , dopo un tratto x di materiale ha un'energia:

$$E = E_0 e^{-x/X_0}$$

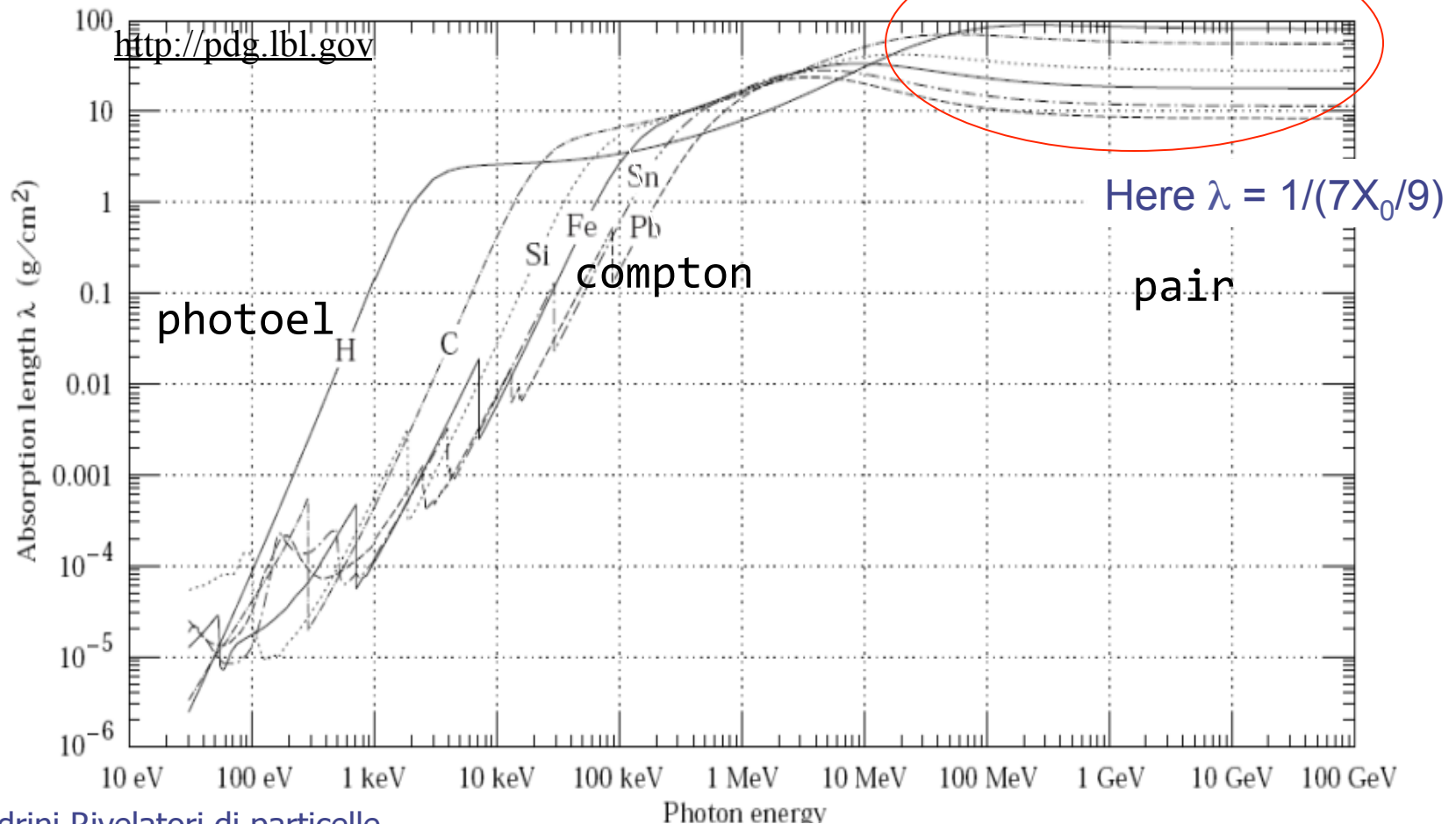
- ❖ In un mezzo omogeneo di lunghezza di radiazione X_0 , a causa della produzione di coppie, l'intensità di un fascio monocromatico di γ , diminuisce dopo un tratto x di materiale:

$$I = I_0 e^{-(7/9)x/X_0}$$

NB: nel primo caso il numero di e^- e' costante, cambia l'energia delle particelle, non il loro numero. Nel secondo, l'energia dei fotoni rimane la stessa ma scompaiono particelle

Photon absorbtion lengths

Photon attenuation length for different elemental absorbers versus photon energy



Pair Production

➤ Notes

- $\sigma_{\text{pair}} \sim Z^2$
- Above some photon energy (say $> 1 \text{ GeV}$), σ_{pair} becomes a constant
- In order to account for pair production from the Coulomb field of atomic electrons, Z^2 is replaced by $Z(Z+1)$ approximately since the cross section is smaller by a factor of Z
- Usually we don't distinguish between the source of the field

Pair Production

► Notes

- In the case of the nuclear field and for large photon energies, the mean scattering angle of the electron and positron is

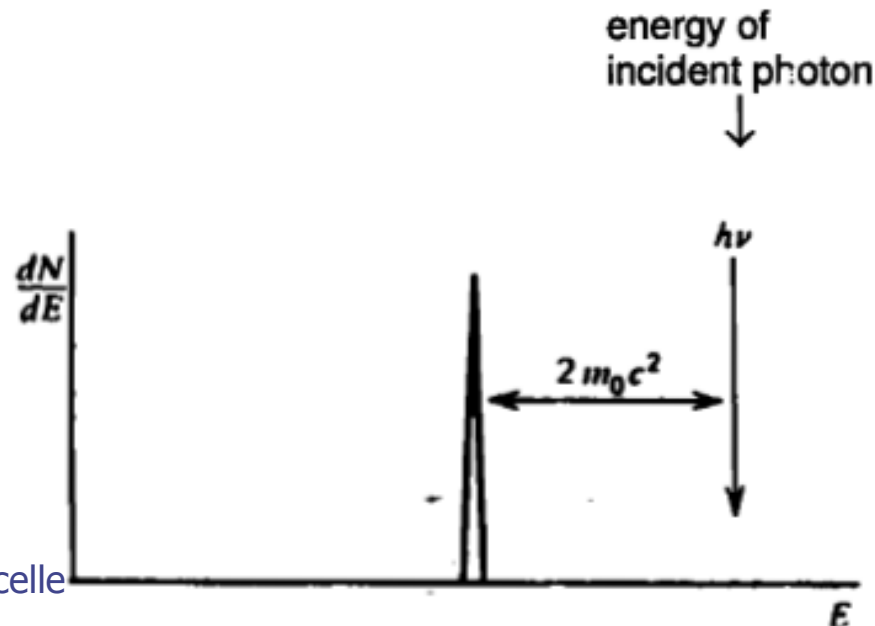
$$\bar{\theta} \approx \frac{m_e c^2}{\bar{T}}$$

$$\bar{T} = \frac{h\nu - 1.022}{2}$$

$$\text{For } h\nu = 5\text{MeV} \rightarrow \bar{T} \approx 2\text{MeV} \text{ and } \bar{\theta} \approx 15^\circ$$

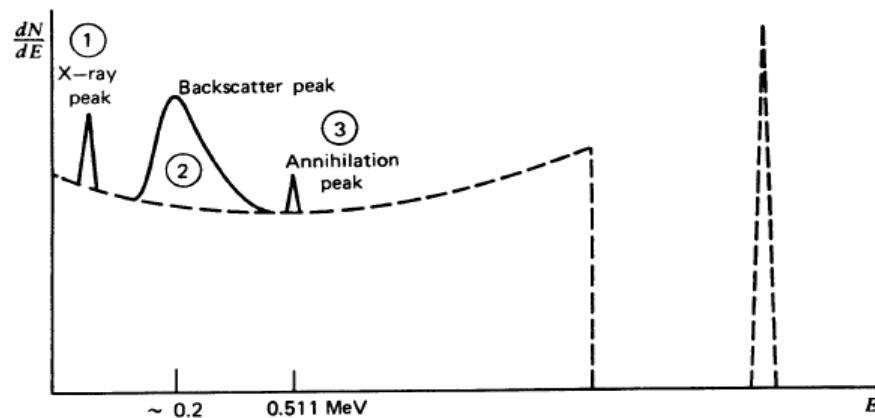
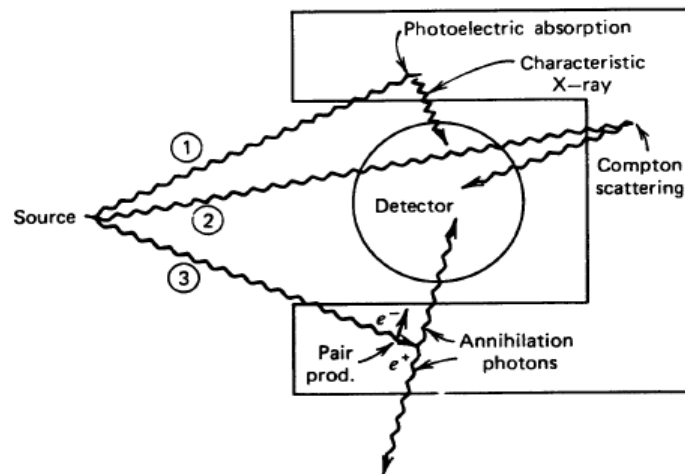
Pair Production

- $2m_e$ (1.022 MeV) of the photon's energy goes into creating the electron and positron
- The electron will typically be absorbed in a detector
- The positron will typically annihilate with an electron producing two annihilation photons of energy m_e (0.511 MeV) each
- If these photons are not absorbed in the detector than the pair production energy spectrum will look like



Scattering

d) Effect of Surrounding Material



(1) x-ray from photoelectric absorption in external material

(2) Compton backscatter peak (see next page)

(3) Absorption of one 511 keV annihilation photon from pair-production in external material.

Interazioni dei γ

Sia l'effetto fotoelettrico, che quello Compton e la produzione di coppie sono dei processi **distruuttivi**.

- **Effetto fotoelettrico:** assorbe γ ed emette e^- (riveliamo l' e^-)
- **Effetto Compton:** cambia la v dei γ (trasferimento di energia al mezzo) (riveliamo l' e^- di rinculo)
- **Produzione di coppie:** trasforma i γ in e^+ ed e^- (riveliamo e^+ ed e^-)