

Particle Detectors

Lecture 3

10/03/17

a.a. 2016-2017

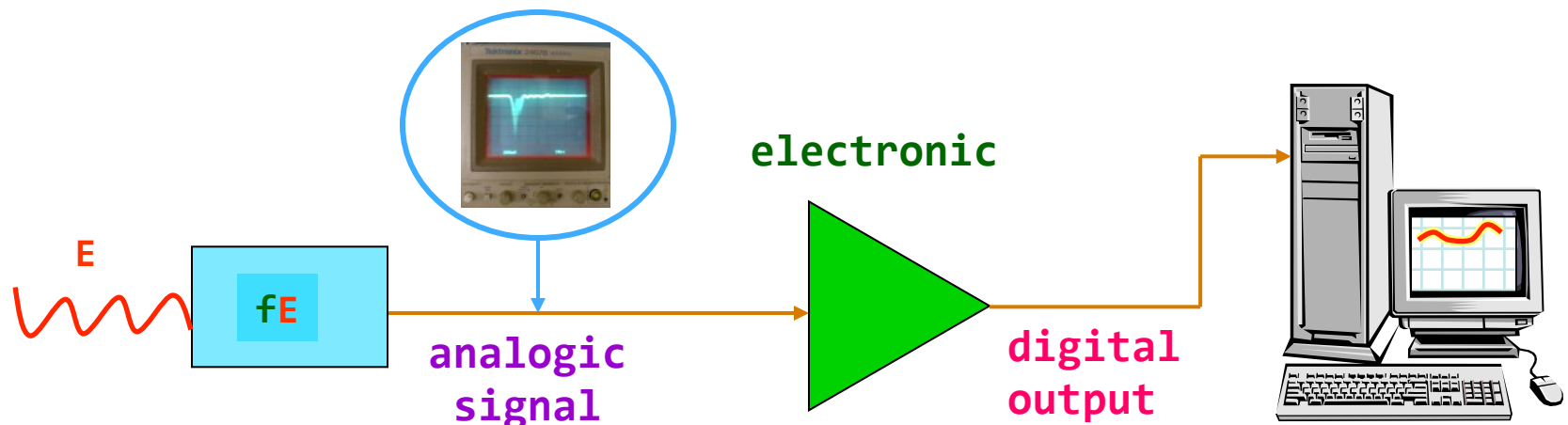
Emanuele Fiandrini

Particles interactions with matter

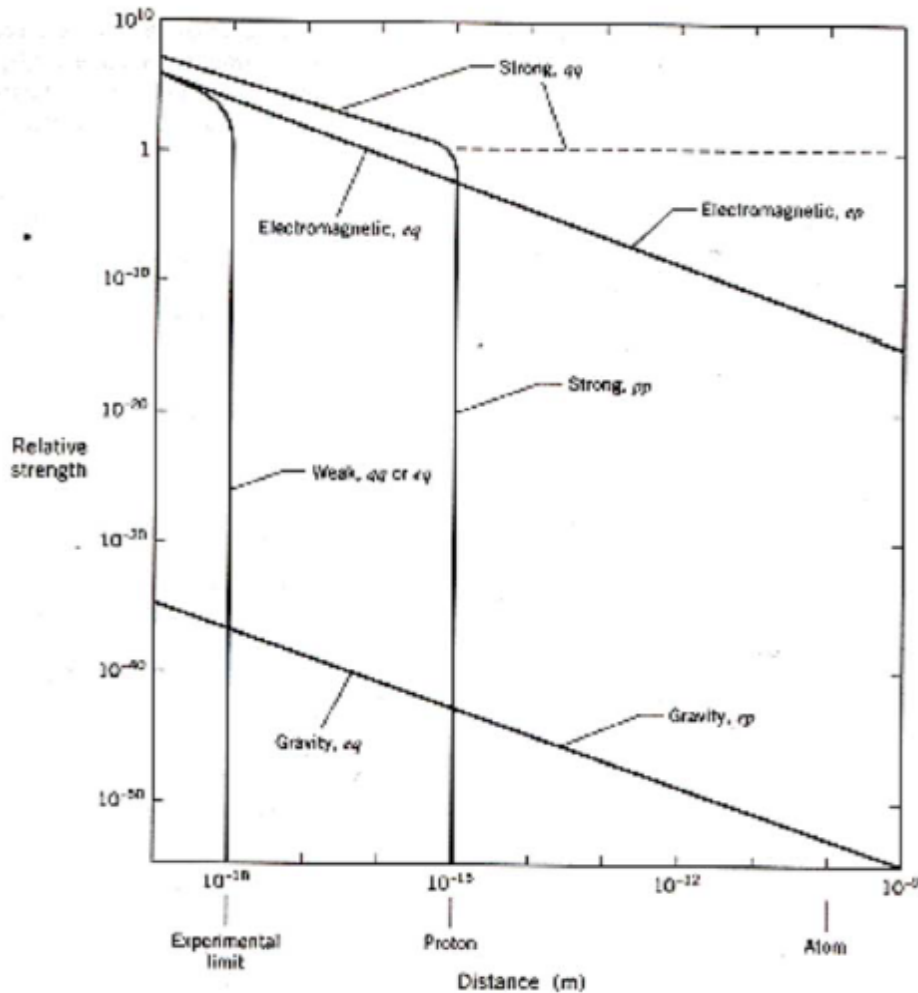
General operation principle of a detector:
Particle with energy E → transfer of energy fE ($f \leq 1$) to the detector → conversion in an accessible, measurable form of energy (light, current, voltage, heat,...)

Modern detectors are essentially electrical: fE converted in electrical pulses → needed electronic circuitry to form the signal

First step to understand the operation of a detector is to study all the physical processes that make $f \neq 0$, i.e. that allow for the transfer of a fraction of the particle energy to the active medium of the detector



Strength versus distance



- At atomic distances only EM & gravity have sizable strengths
- EM is ~40 orders of magnitude stronger than gravity
- If quarks could be separated force would be enormous (see dashed line)
- At proton size distances strong force turns on & becomes ~100 times stronger than EM force
- At distances ~ 1/1000 of proton size weak force turns on abruptly

Concentrate on elm forces since a combination of their strength and reach make them the primary responsible for energy loss in matter.

For neutrons, hadrons generally and neutrinos other effects obviously enter.

Particle interactions with matter

- electromagnetic interactions:

- ◆ excitation
- ◆ ionization
- ◆ Cherenkov radiation
- ◆ transition radiation
- ◆ bremsstrahlung
- ◆ photoelectric effect
- ◆ Compton scattering
- ◆ pair production

Charged particles

photons

- strong interactions:

- ◆ secondary hadron production,
- ◆ hadronic showers

hadronic particles

- some amplification mechanism may multiply the initial signal

More than one process can occur at the same time

Interaction of particles with matter

- when passing through matter:
 - particles interact with the electrons and/or nuclei of the medium;
 - this interaction can be *weak*, *electromagnetic* or *strong interaction*, depending on the kind of particle; its effects can be used to detect the particles;
- possible interactions and effects in passage of particles through matter:
 - **excitation** of atoms or molecules (e.m. int.):
 - ◆ charged particles can excite an atom or molecule (i.e. lift electron to higher energy state);
 - ◆ subsequent de-excitation leads to emission of photons;
 - **ionization** (e.m. int.)
 - ◆ electrons liberated from atom or molecule, can be collected, and charge is detected
 - **Cherenkov radiation** (e.m. int.):
 - ◆ if particle's speed is higher than speed of light in the medium, e.m. radiation is emitted -- “Cherenkov light” or Cherenkov radiation, which can be detected;
 - ◆ amount of light and angle of emission depend on particle velocity;

Interaction of particles with matter, cont'd

■ transition radiation (e.m. int.):

- ◆ when a charged particle crosses the boundary between two media with different speeds of light (different “refractive index”), e.m. radiation is emitted -- “transition radiation”
- ◆ amount of radiation grows with (energy/mass);

■ bremsstrahlung (= braking radiation) (e.m. int.):

- ◆ when charged particle's velocity changes, e.m. radiation is emitted;
- ◆ due to interaction with nuclei, particles deflected and slowed down emit bremsstrahlung;
- ◆ effect stronger, the bigger (energy/mass) $\Rightarrow$ electrons with high energy most strongly affected;

■ pair production (e.m. int.):

- ◆ by interaction with e.m. field of nucleus, photons can convert into electron-positron pairs

■ electromagnetic shower (e.m. int.):

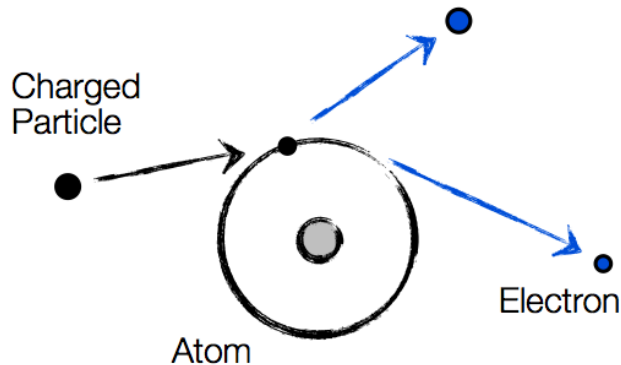
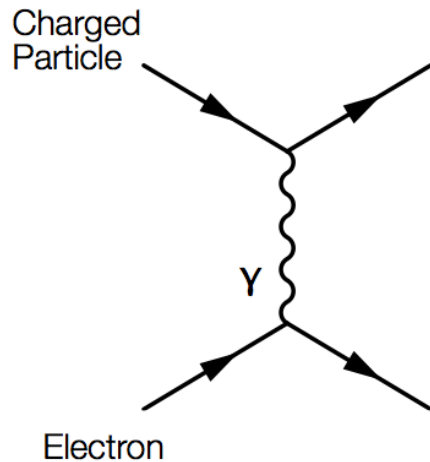
- ◆ high energy electrons and photons can cause “*electromagnetic shower*” by successive bremsstrahlung and pair production

■ hadron production (strong int.):

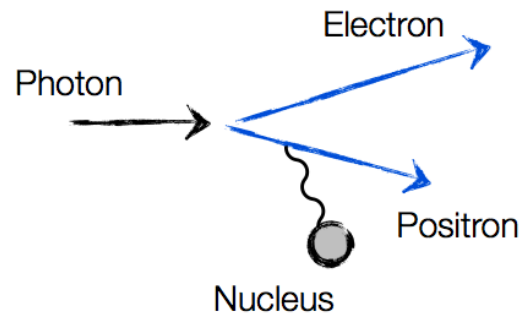
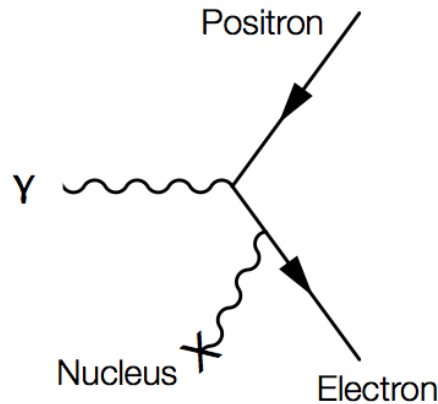
- ◆ strongly interacting particles can produce new particles by strong interaction, which in turn can produce particles, ... “*hadronic shower*”

Particle Interactions – Examples

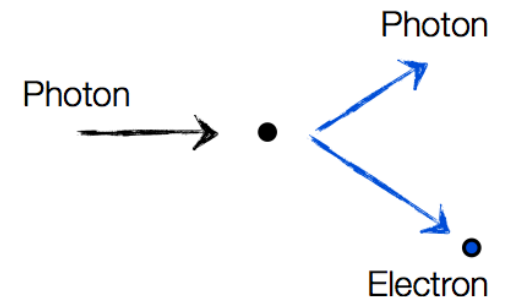
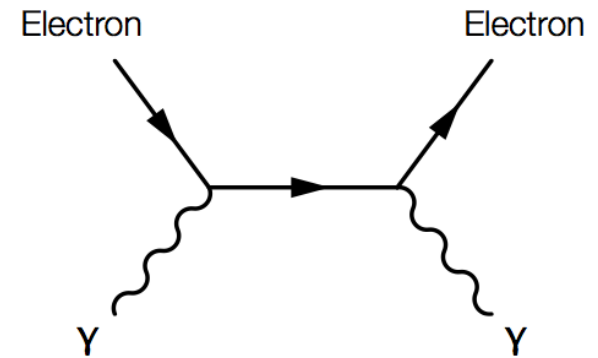
Ionization:



Pair production:



Compton scattering:



Interazioni delle particelle con La materia

Due possibili classi di interazioni:

- Interazioni non distruttive: l'interazione col mezzo trasferisce poca energia al mezzo stesso. I parametri cinematici e dinamici della particella non cambiano in maniera significativa (in prima approx).
- Interazioni distruttive: tutta o una frazione consistente dell'energia della particella viene depositata nel rivelatore. in molti casi, la particella viene assorbita (calorimetria), ovvero viene "distrutta".

Ionizzazione

Particelle cariche che attraversano un mezzo vanno incontro a :

1. Perdite di energia continue → ionizzazione
2. Deflessione della direzione originaria → scattering multiplo

Questi effetti sono principalmente dovuti a due processi:

1. Collisioni inelastiche con gli elettroni atomici del materiale
2. Collisioni elastiche con i nuclei del materiale

Le perdite per ionizzazione comprendono:

- Ionizzazione di atomi o ioni
- Eccitazione di stati atomici o ionici
- L'interazione può essere distruttiva o no, a seconda dello spessore del materiale attraversato
- NB: non possiamo prevedere quante interazioni subirà la particella né quanta energia perde in ogni urto, ma possiamo calcolare la perdita media di energia e le sue fluttuazioni (ie deviazione standard)

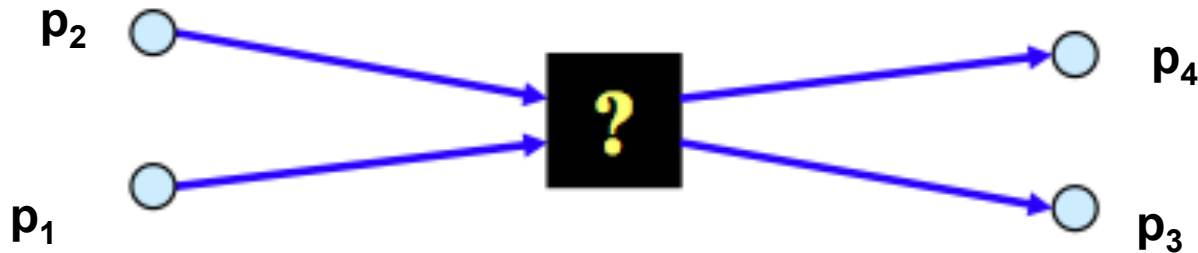
Largamente usata per rivelatori di particelle (misure di posizione, di carica elettrica)

In astrofisica, causa di perdite di energia per le particelle nel mezzo interstellare.

Perdita di energia: cinematica

Coulomb interaction of charged particles is a “collision”: 4-momentum conservation determines uniquely the cinematic of the interaction.

- Force exchanged when they collide
- Free motion between collisions



- We don't know and we don't need to know what happens in the box: it is a “black box”
- Motion outside the box is determined by relativistic cinematics only
- Dynamics tells us what is the probability of a given final state, i.e. conservation of 4-momentum (or momentum and energy in classical collisions)

Esempio Classico: Urto centrale



La cinematica fissa momento ed energia dello stato finale

$$Mv = Mv' + m_e v_e$$

$$v' = (Mv - m_e v_e) / M$$

$$Mv^2 = Mv'^2 + m_e v_e^2$$

$$Mv^2 = M[(Mv - m_e v_e) / M]^2 + m_e v_e^2$$

$$\cancel{Mv^2} = \cancel{Mv^2} + m_e^2 v_e^2 / M - 2m_e v v_e + m_e v_e^2$$

$$0 = m_e v_e / M - 2v + v_e$$

$$v_e = 2v / (1 + \frac{m_e}{M}) \simeq 2v \quad \text{La perdita di energia della particella incidente e'}$$

$$\Delta E_{inc} = (1/2) m_e v_e^2 = (1/2) m_e [2v / (1 + \frac{m_e}{M})]^2$$

$$\frac{\Delta E_{inc}}{E_{inc}} = \frac{(1/2) m_e [2v / (1 + \frac{m_e}{M})]^2}{(1/2) M v^2} = 4m_e \frac{M}{(m_e + M)^2} \simeq 4m_e / M$$

Se $m_e \ll M$, $E_{inc} \approx \text{costante} \rightarrow$ la particella incidente prosegue indisturbata ($\theta \approx \Delta p_t / p$) (trascurando il rinculo del nucleo), mentre l'e- riceve un kink a causa dell'interazione elettrostatica

Perdita di energia: cinematica caso relativistico

- Local interactions conserve total 4-momentum
 - i.e., total energy and total 3-momentum are conserved

$$p^\mu = \sum_{s=1}^n p_s^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) \longleftrightarrow E = \sum_{s=1}^n E_s \quad \mathbf{p} = \sum_{s=1}^n \mathbf{p}_s$$

- We know how to Lorentz transform it

$$p'^\mu = \sum_s p_s'^\mu = \sum_s L^\mu_\nu p_s^\nu = L^\mu_\nu p^\nu \quad \text{as usual}$$

- Define the **center-of-momentum** frame in which $\mathbf{p} = 0$
 - It's the frame in which the total 3-momentum is zero
 - Or, the center of mass is at rest
 - Often called center-of-mass frame as well

Perdita di energia: cinematica

$$p^\mu = \sum_{s=1}^n p_s^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) \xrightarrow{\text{CoM frame}} p'^\mu = \left(\frac{E'}{c}, \mathbf{0} \right)$$

- There are two particularly useful quantities

- CoM energy E'

- Lorentz invariance $p^\mu p_\mu = p'^\mu p'_\mu \Rightarrow \frac{E'^2}{c^2} = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2$
 - E' is the smallest possible E

- Boost β of CoM frame relative to the lab. frame

- Lorentz transformation

$$p^\mu = L_\nu^\mu p'^\nu = \left(\frac{\gamma E'}{c}, \frac{\gamma \beta E'}{c} \right) \Rightarrow \beta = \frac{\mathbf{p}c}{E} \quad \gamma = \frac{E}{E'}$$

Perdita di energia: cinematica

- Consider collision of particle 1 on particle 2 at rest



$$p_1 = (E_1/c, \mathbf{p}_1)$$

$$p_2 = (m_2 c, \mathbf{0})$$

Fixed-target collision

- Total 4-momentum is $p = (E_1/c + m_2 c, \mathbf{p}_1)$
- Total CoM energy

$$E'^2 = p^\mu p_\mu c^2 = (m_1^2 + m_2^2)c^4 + 2E_1 m_2 c^2$$

- Boost of CoM frame is

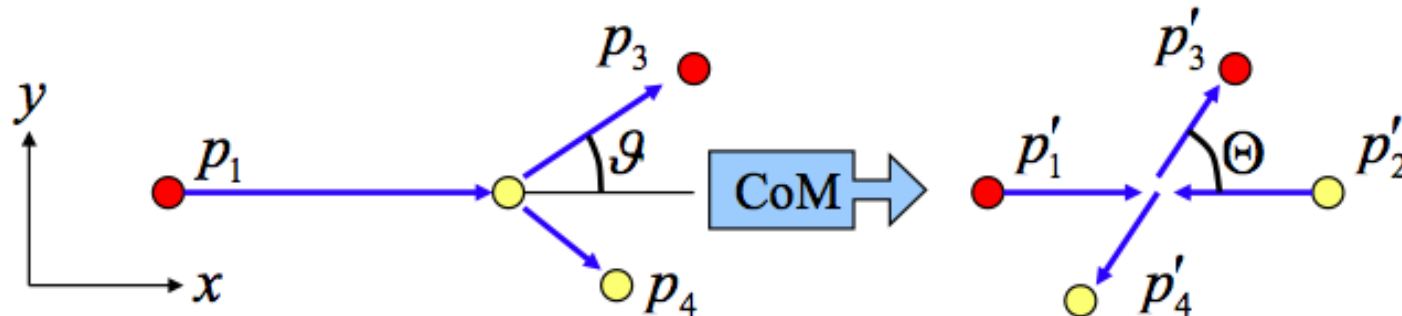
$$\beta = \frac{\mathbf{p}_1}{E_1/c + m_2 c} = \frac{m_1 \gamma_1 \mathbf{v}_1}{m_1 \gamma_1 c + m_2 c}$$

E' grows slowly with E_1

Approaches $\mathbf{v}_1/c$ for large E_1

Perdita di energia: cinematica max trasferimento di energia

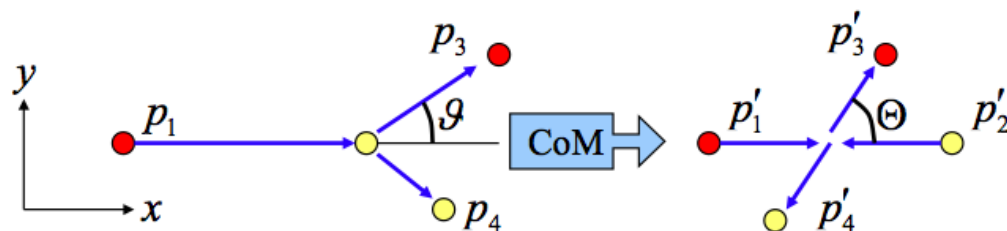
- Particle 1 hits particle 2 and get elastically scattered



- Cross section is calculated in CoM frame
 - By treating it as a central-force problem
- Experiment is done in the laboratory frame
- We need to learn how to translate between the CoM and the laboratory frames

It is more convenient to study the collision in the CM frame wrt the LAB frame since everything is symmetric and the particle momenta don't change length but only direction

Perdita di energia: cinematica



- Total momentum is $p^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu = (E_1/c + m_2c, \mathbf{p}_1)$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{p}}{p^0} = \frac{\mathbf{p}_1 c}{E_1 + m_2 c^2}$$

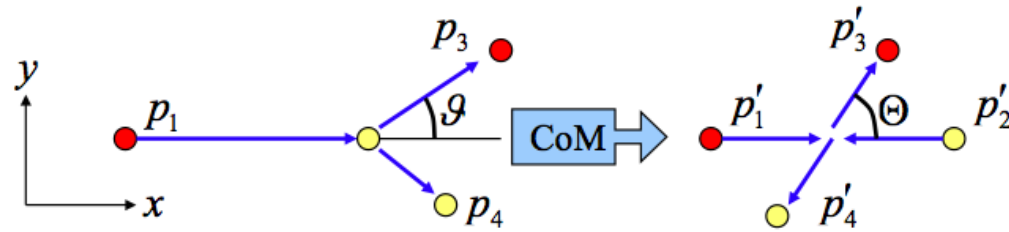
$$p^0 = E/c$$

- Let's get γ as well

$$E_{\text{cm}}^2/c^2 = (E_1/c + m_2c)^2 - \mathbf{p}_1^2 = m_1^2c^2 + m_2^2c^2 + 2E_1m_2$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{E_{\text{lab}}}{E_{\text{cm}}} = \frac{E_1 + m_2c^2}{\sqrt{m_1^2c^4 + m_2^2c^4 + 2E_1m_2c^2}}$$

Perdita di energia: cinematica



- Now we can boost p_1 to CoM

$$p_1^\mu = (E_1/c, p_1, 0, 0) \Rightarrow p_1'^\mu = (E'_1/c, p'_1, 0, 0)$$

$$\Rightarrow E'_1 = \gamma(E_1 - \beta p_1 c) \quad p'_1 = \gamma(p_1 - \beta E_1/c)$$

- p_3' is given by rotating p_1' by Θ

$$p_3'^\mu = (E'_1/c, p'_1 \cos \Theta, p'_1 \sin \Theta, 0) \quad \text{Since the collision is elastic}$$

- Boost this back to get p_3

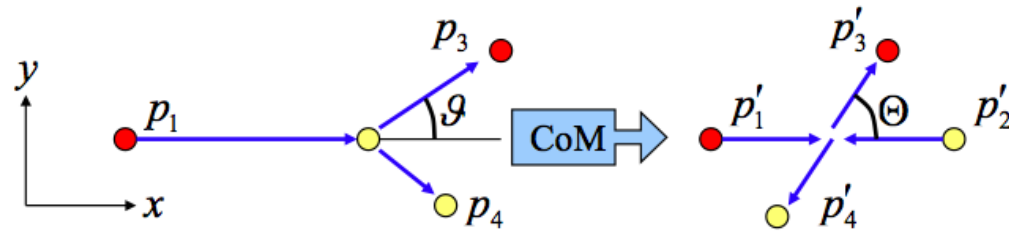
$$E_3 = \gamma(E'_1 + \beta p'_1 c \cos \Theta) \quad p_3^1 = \gamma(p'_1 \cos \Theta + \beta E'_1/c) \quad p_3^2 = p'_1 \sin \Theta$$

- Scattering angle in lab frame is

$$\tan \vartheta = \frac{p_3^2}{p_3^1} = \frac{\sin \Theta}{\gamma(\cos \Theta + \beta E'_1/(p'_1 c))} = \frac{\sin \Theta}{\gamma(\cos \Theta + \beta/\beta'_1)}$$

Velocity of
1 in CoM

Perdita di energia: cinematica



- What happens to the kinetic energy?

$$E_3 = \gamma^2 \left[(1 - \beta^2 \cos \Theta) E_1 - \beta (1 - \cos \Theta) p_1 c \right]$$

- At $\Theta = 0$ $E_3 = \gamma^2 (1 - \beta^2) E_1 = E_1$ Makes sense

- With a little bit of work

Kinetic energies	$\rightarrow T_3$	$= 1 - \frac{2\rho(1 + \mathcal{E}_1/2)}{(1 + \rho)^2 + 2\rho\mathcal{E}_1} (1 - \cos \Theta)$	$\mathcal{E}_1 = T_1 / m_1 c^2$
	$\rightarrow T_1$		$\rho = m_1 / m_2$

- Worst case is $\Theta = \pi$

$$\frac{(T_3)_{\min}}{T_1} = \frac{(1 - \rho)^2}{(1 + \rho)^2 + 2\rho\mathcal{E}_1}$$

This corresponds to the max energy transfer to the target $\Delta E_{\max} = T_1 - T_{3\min}$

The min energy transfer corresponds to $\cos \Theta = 1$ where $T_3 = T_1$ and therefore $\Delta E_{\min} = 0$

Perdita di energia: cinematica

$$\frac{(T_3)_{\min}}{T_1} = \frac{(1-\rho)^2}{(1+\rho)^2 + 2\rho\mathcal{E}_1}$$

■ Non-relativistic limit

$$T_1 \ll m_1 c^2, m_2 c^2$$

$$\frac{(T_3)_{\min}}{T_1} = \frac{(1-\rho)^2}{(1+\rho)^2}$$

If $m_1 \ll m_2$, almost no energy lost in the collision, as if $m_2 \ll m_1$, max loss for $m_1 = m_2$, ie $T_{3\min} = 0$

■ Ultra-relativistic limit

$$T_1 \gg m_1 c^2, m_2 c^2$$

$$\frac{(T_3)_{\min}}{T_1} = \frac{(1-\rho)^2}{2\rho\mathcal{E}_1} = \frac{(m_2 - m_1)^2 c^2}{2m_2 T_1}$$

$(T_3)_{\min}$ is independent of T_1

Perdita di energia: cinematica

We are interested to energy transferred to the target

The energy lost by the projectile is transferred to the target (initially at rest)

The max energy of the target after the collision is

$$T_{\max target} = T_1 - T_{1\min} = T_1(1 - T_{1\min}/T_1)$$

Making the substitution $T_1 = m_1 c^2(\gamma - 1)$, with very little algebra we get

$$T_{\min target} = 0 \quad \text{per} \quad \cos \Theta = 1, \Theta = 0 \quad \text{where} \quad m_1 \rightarrow m \text{ e } m_2 \rightarrow M$$

$$T_{\max target} = \frac{2m(\beta\gamma)^2}{\left[1 + \left(\frac{m}{M}\right)^2 + 2\gamma \frac{m}{M}\right]} \quad \text{for} \quad \cos \Theta = -1, \Theta = \pi$$

$$\text{e.g. protons on electrons} \quad \frac{m}{M} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \frac{\gamma m}{M} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \quad T_{\max target} \approx 2m(\beta\gamma)^2 = 2m\left(\frac{p_0}{M}\right)^2$$

Elastic scattering

- Conservation of momentum alone dictates some features of projectile-target elastic scattering
 - Target mass $\gg$ incoming energy implies momentum transfer but nearly no energy transfer to target; incoming particle can scatter at large angles
 - Target mass $\ll$ incoming energy implies potentially large energy transfer to target, but little change in direction of incoming particle
- As a result, scattering off electrons and off nuclei have very different characteristics

Collisions of charged particles

In a medium a particle with mass $\gg$ of e^- collides on:

- **Nuclei** $\rightarrow$ small energy transferred to the nucleus, but significative scattering angle.
- **Atomic Electrons** $\rightarrow$ incident particle loses energy on electrons, but get negligible deviation.

Collisioni fra particelle cariche.

- Quando una particella attraversa un mezzo continuo siamo interessati a conoscere:
 - quanta E deposita
 - che deviazione subisce
- Tratteremo i due processi in maniera indipendente (anche se perdite di energia e deviazione NON sono in realta' indipendenti)

Perdite di energia: Ionizzazione

Dei due processi elettromagnetici, le collisioni inelastiche con gli e⁻ atomici sono praticamente le sole responsabili delle perdite continue di energia di particelle pesanti nella materia.

In queste collisioni ($\sigma \approx 10^{-17} - 10^{-16} \text{ m}^2$), la particella proiettile cede E all'atomo.

Le perdite nelle singole collisioni sono piccole, ma il # e' grande per unita' di lunghezza $\rightarrow$ effetto cumulativo osservabile anche nel caso di spessori sottili (e.g. Un p di 10 MeV perde tutta la sua energia in 0.25 mm di Cu).

Le perdite per ionizzazione comprendono:

- Collisioni *soft* $\leftrightarrow$ Eccitazione di stati atomici o ionici, $\Delta E < E_{\text{ionizz}}$
- Collisioni *hard* $\leftrightarrow$ Ionizzazione di atomi o ioni, $\Delta E > E_{\text{ionizz}}$
se $E \gg E_{\text{ionizz}} \rightarrow$ e⁻ energetici, raggi δ

lo scattering elastico su nucleo avviene frequentemente ma le perdite di energia sono trascurabili se la massa del bersaglio e' $\ll$ di quella del proiettile.

Energy loss

La perdita totale di energia per una particella che attraversa un mezzo e'

$$-\Delta E = \sum_{i=1}^N \delta E_i$$

dove N e' il numero di collisioni e δE_i e' la perdita di energia nello i'esimo urto

Il processo di perdita e' stocastico: il numero di urti e la perdita di energia in ciascun urto non sono note a priori. Cioe' facendo attraversare ad N particelle lo stesso spessore di materiale in generale la perdita di energia sara' differente in ciascun evento, poiche' il # di urti e' diverso per ogni particella e in ciascun urto la particella perde energie diverse.

Tuttavia, se N e' grande, e' possibile calcolare la perdita MEDIA di energia e la sua deviazione standard ("fluttuazioni")

- we want to know the energy lost by a particle when crossing a medium:
 - correct approach: get diff cross section as a function of E $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} d\varepsilon$
 - calculate the average energy loss

$$-dE = nZdx \int_{\varepsilon_{cut}}^{\varepsilon_{max}} \varepsilon \frac{d\sigma}{d\varepsilon} d\varepsilon$$

- This is the Bethe-Bloch approach
- We can get most of results from a classical calculation of energy loss in a medium

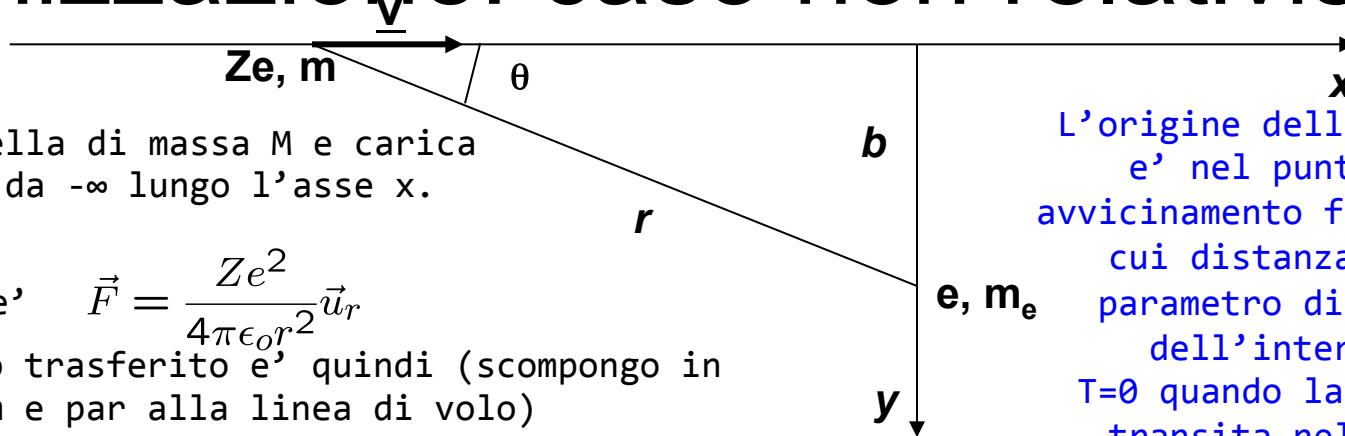
Energy loss – classical approach

La trattazione rigorosa richiede l'uso della meccanica quantistica ma e' possibile ottenere le caratteristiche principali con una trattazione semiclassica

Useremo l'approssimazione M proiettile $\gg M$ bersaglio, cosi' che nell'interazione il proiettile (veloce) non viene deviato (in maniera apprezzabile) e prosegue indisturbato.

Quello che vogliamo fare e' ottenere la perdita di energia per unita' di lunghezza percorsa ("perdita specifica") in un mezzo dE/dx

Ionizzazione: caso non relativistico



La particella di massa M e carica Ze arriva da $-\infty$ lungo l'asse x .

La forza e' $\vec{F} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$

L'impulso trasferito e' quindi (scompongo in comp norm e par alla linea di volo)

$$\vec{p}_t = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}_p dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}_n dt$$

$$\vec{p}_t = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\theta}{r^2} \frac{dx}{v} \right) \vec{u}_x + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\theta}{r^2} \frac{dx}{v} \right) \vec{u}_y \right]$$

Elimino r : $b = r \sin\theta \rightarrow r = b / \sin\theta$

$$x = r \cos\theta \rightarrow x = b \cos\theta / \sin\theta \rightarrow dx = -b d\theta / \sin^2\theta$$

$$\vec{p}_t = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_0^\pi \frac{\cos\theta \sin^2\theta}{b^2} \frac{-bd\theta}{v \sin^2\theta} \vec{u}_x + \int_0^\pi \frac{-b}{\sin^2\theta} \frac{d\theta \sin^3\theta}{v b^2} \vec{u}_y \right]$$

Il primo integrale e' zero per simmetria

$$\vec{p}_t = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 b v} \left[\int_0^\pi \sin\theta d\theta \vec{u}_y \right] = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 b v} \vec{u}_y$$

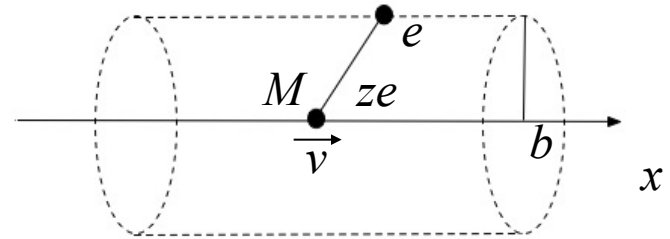
E' l'impulso trasferito dalla particella incidente all'e-

L'origine delle coordinate e' nel punto di max avvicinamento fra M ed m , la cui distanza e' detta parametro di impatto b dell'interazione.
 $T=0$ quando la particella transita nell'origine

$$dt = dx/v$$

Another way to get p_t

- Consider heavy particle, mass M , charge ze , velocity v .
- Atomic electron at distance b from particle trajectory:



- Impulse transferred to the electron:

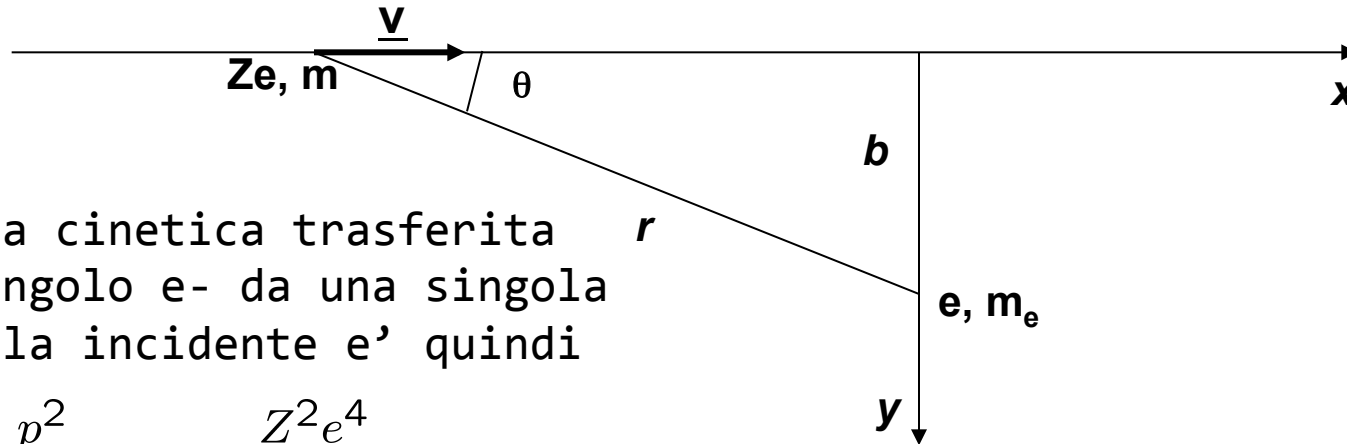
$$p_t = \int \mathbf{F} dt = e \int E_{\perp} dt = e \int E_{\perp} \frac{dt}{dx} dx = e \int E_{\perp} \frac{dx}{v}$$

- by symmetry only the component $\perp$ to line of flight contributes

- Gauss Law: $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \int E_{\perp} 2\pi b dx = \frac{ze}{\epsilon_0} \Rightarrow \int E_{\perp} dx = \frac{2ze}{4\pi\epsilon_0 b}$

$$\Rightarrow p_t = \frac{2ze^2}{4\pi\epsilon_0 bv}$$

Ionizzazione: caso non relativistico



L'energia cinetica trasferita ad un singolo e- da una singola particella incidente e' quindi

$$\Delta E_{cin} = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{Z^2 e^4}{8\pi^2 \epsilon_0^2 b^2 v^2 m_e}$$

Se abbiamo una densita' di volume di e- N_e , allora l'energia trasferita per unita' di volume e'

$$U_{cin} = N_e \Delta E_{cin} = \frac{N_e Z^2 e^4}{8\pi^2 \epsilon_0^2 b^2 v^2 m_e} = \left(\frac{e^4 N_e}{8\pi^2 \epsilon_0^2 m_e} \right) \frac{Z^2}{b^2 v^2}$$

L'energia trasferita dipende dal parametro d'impatto b , dalla velocita' e dalla carica della particella incidente

NB: questa e' l'energia trasferita all'eletttrone (positiva), che corrisponde a quella persa dalla particella incidente (negativa): $E_{e,fin} = \Delta E$, $E_{fin,M} = E_{inc,M} - \Delta E$

Ionizzazione: caso non relativistico

Nel percorrere un tratto dx , particella cede energia a tutti gli e^- con parametro di impatto fra b e $b+db$, contenuti nel volume $dV=2\pi b db dx$ quindi

$$-dE = U_{cin} \times dV = U_{cin} \times 2\pi b db dx$$

$$\downarrow$$

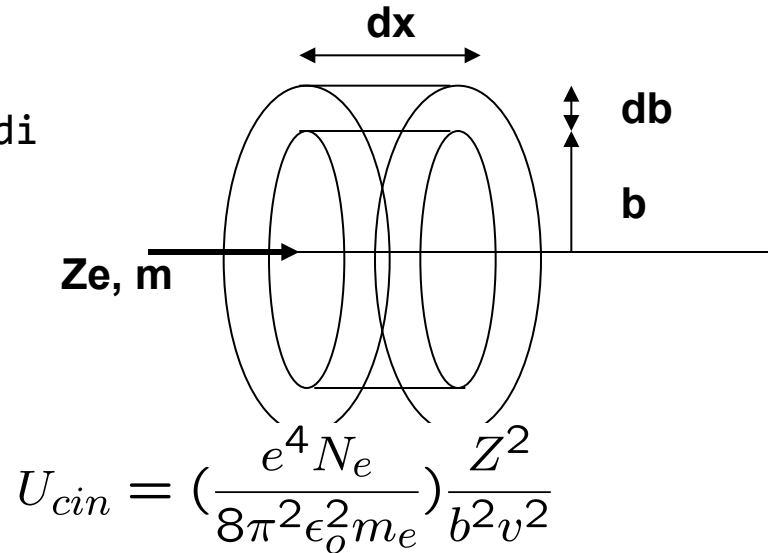
$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi U_{cin} b db$$

La perdita totale media di energia si ottiene integrando sui parametri d'impatto (NB: b non e' un osservabile).

Si potrebbe pensare che $b_{min}=0$ e $b_{max}=+\infty$, ma ci sono argomenti che suggeriscono che non sia cosi'

$$-\frac{dE}{dx} = \int_{b_{min}}^{b_{max}} 2\pi \left(\frac{e^4 N_e}{8\pi^2 \epsilon_0^2 m_e} \right) \frac{Z^2}{b^2 v^2} b db$$

Argomenti: $b > \lambda_{DeBroglie}$, i.e. principio di indeterminazione, $b < \infty$ a causa dello screening della carica

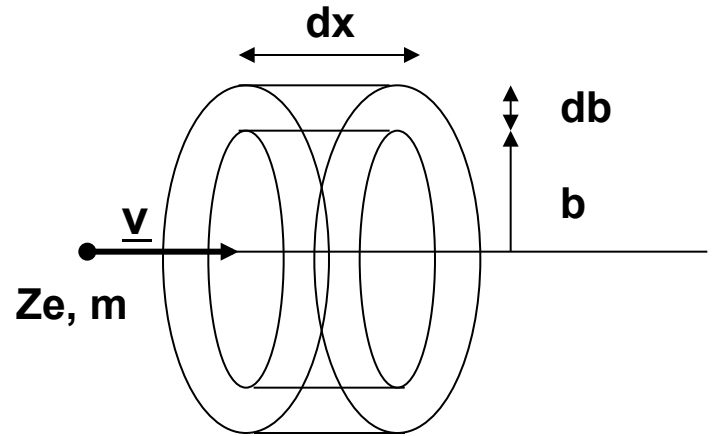


Ionizzazione: caso non relativistico

Quindi occorre stabilire valori finiti degli estremi con qualche argomento fisico

$$-\frac{dE}{dx} = \int_{b_{min}}^{b_{max}} 2\pi \left(\frac{e^4 N_e}{8\pi^2 \epsilon_0^2 m_e} \right) \frac{Z^2}{b^2 v^2} b db$$

$$-\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi \epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{b_{max}}{b_{min}}$$



La dipendenza log viene dal fatto che $p \propto b^{-2}$, ma $dN \propto N_e b db$, quindi per piccoli b , p e' grande ma dN e' piccolo e viceversa. Dato che la dipendenza da b (inosservabile) e' solo log, non e' necessario conoscere con grande precisione il loro rapporto

Ionizzazione: caso non relativistico

$$-\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{b_{max}}{b_{min}}$$

Il limite superiore b_{max} puo' essere ottenuto considerando il limite superiore alla durata dell'interazione, oltre il quale l'e⁻ non puo' piu' essere considerato in quiete, cioe' quando la durata dell'interazione τ e' dello stesso ordine del periodo orbitale dell'e⁻.

La durata dell'interazione puo' essere calcolata nel seguente modo:

La forza elettrostatica alla distanza di max avvicinamento e'

$$F = \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 b^2}$$

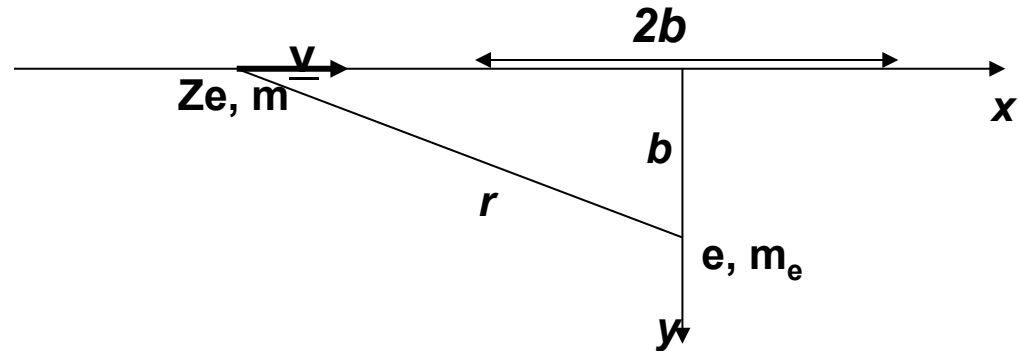
Se la durata dell'interazione e' τ , allora $\Delta p \sim F(b)\tau$
 confrontando con $\Delta p = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 bv}$ si vede che e' "come se" l'interazione durasse
 $\tau = 2b/v$

$$\text{Così } \tau_{max} \sim 1/\nu_0 \rightarrow 2b_{max}/v \sim 2\pi/\omega_0 \rightarrow b_{max} = \pi v/\omega_0$$

Per durate maggiori, l'interazione e' adiabatica $\rightarrow$ non c'e' trasferimento netto di energia

Ionizzazione: caso non relativistico

$$-\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{b_{max}}{b_{min}}$$



Per il limite inferiore b_{min} ci sono due possibilita' a seconda che sia valido un approccio classico o quantistico.

Classicamente, b e' minimo quando e' max il trasferimento di energia, che, come si e' visto, e', per urti centrali:

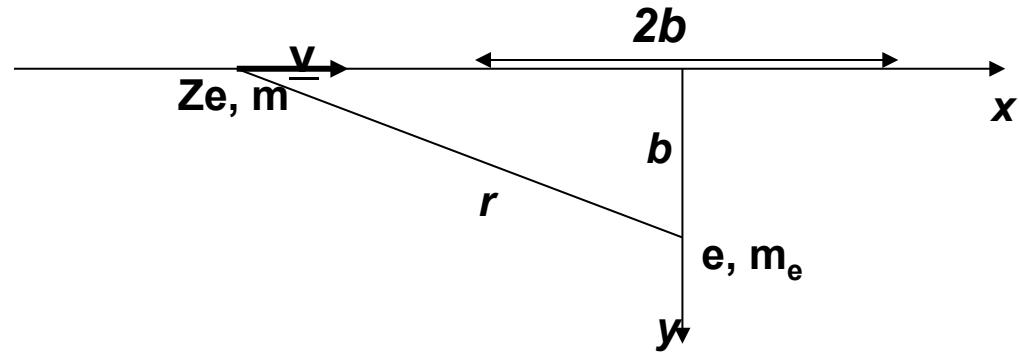
$$\Delta E_{inc} = (1/2)m_e v_e^2 \simeq (1/2)m_e (2v)^2 = 2m_e v^2$$

La distanza di minimo avvicinamento e' quella per cui l'energia potenziale elettrostatica di interazione e' uguale alla energia cinetica trasferita:

$$\frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 b_{min}} \simeq 2m_e v^2 \quad \Rightarrow \quad b_{min} \simeq \frac{e^2 Z}{8\pi\epsilon_0 m_e v^2}$$

Ionizzazione: caso non relativistico

$$-\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{b_{max}}{b_{min}}$$



L'altra possibilità viene dal fatto che dovremmo usare la meccanica quantistica per descrivere le interazioni a piccole distanze.

La max velocità dell'e⁻ è $v_e \approx 2v$ per cui la variazione di impulso è $\Delta p \approx 2m_e v$ e quindi dal principio di indeterminazione $\Delta x \approx h/2m_e v \rightarrow b_{min} = h/2m_e v$

Se b_{min} è quello quantistico, dovremmo calcolare propriamente dE/dx con la meccanica quantistica. Fatto salvo questo, b_{min} ci dice il minimo valore per il quale i calcoli fatti fanno *senso*

Bisogna avere un criterio per la scelta di b_{min}

Ionizzazione: caso non relativistico

Il criterio di scelta e' quello di prendere il piu' grande $b_{\min}$ fra quello classico e quello quantistico per il problema in questione

$$\frac{b_{\min}(QU)}{b_{\min}(CL)} \simeq \frac{\hbar}{2m_e v} \frac{8\pi\epsilon_0 m_e v^2}{e^2 Z} = \frac{4\pi\hbar\epsilon_0 v}{e^2 Z}$$

Ponendo $\alpha = \frac{e^2}{4\pi c\epsilon_0 \hbar} \approx \frac{1}{137}$ Si ottiene

$$a \equiv \frac{b_{\min}(QU)}{b_{\min}(CL)} = \left(\frac{1}{\alpha Z}\right) \frac{v}{c} \simeq \left(\frac{137}{Z}\right) \frac{v}{c}$$

Se $v/c < Z/137 \rightarrow a < 1 \rightarrow$ limite classico

Se $v/c > Z/137 \rightarrow a > 1 \rightarrow$ limite quantistico

Per particelle con $v/c \approx 0.012$, occorre usare il limite QU, ma ci sono casi in cui si puo' applicare il caso classico, p. es. nel caso di nubi di H caldo nella galassia

Ionizzazione: caso non relativistico

Assumendo che si applichi il limite quantistico si ha

$$-\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{2\pi m_e v^2}{\hbar\omega_0}$$

La frequenza puo' essere espressa come potenziale di ionizzazione I :
L'energia dello stato fondamentale (in un modello naive alla Bohr) e'
 $E = (1/2) \hbar\omega_0$, che e' anche l'energia minima per liberare l'e- $\rightarrow \hbar\omega_0 = 2I$

$$-\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{\pi m_e v^2}{I}$$

Tenendo conto che in un atomo ci sono Z elettroni, I e' in realta' una media pesata sui vari livelli di E degli e- che possono essere espulsi dall'atomo (difficile da calcolare eccetto che per gli atomi piu' semplici e va trovata empiricamente): $I \rightarrow \bar{I}$ $\pi/2$ per convenzione $\rightarrow$

$$-\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{2m_e v^2}{\bar{I}} \quad \Longrightarrow \quad -\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{E_{max}}{\bar{I}}$$

Ionizzazione: spettro degli e-

Gli elettroni di rinculo hanno una distribuzione di energia caratteristica. Può essere facilmente calcolata

Il # di e⁻ con b fra b e b+db e' $dN=2\pi N_e b db dx$
 → devo esprimere b in funzione di E

$$E_{cin} = \left(\frac{e^4 Z^2}{8\pi^2 \epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \frac{1}{b^2} = \frac{k}{b^2}$$

Quindi $dE = -\frac{2kdb}{b^3} \Rightarrow db = -\frac{b^3 dE}{2k}$

$dN = 2\pi N_e b db dx \Rightarrow dN = -2\pi N_e dx \frac{b^4 dE}{2k}$

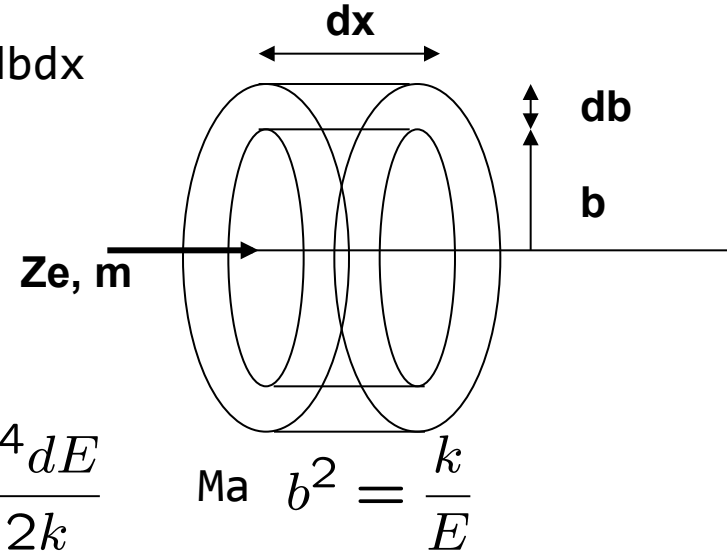
$dN = -\pi N_e dx \left(\frac{k}{E} \right)^2 \frac{dE}{E^2}$ $dN = -\pi N_e \frac{k}{E^2} dE dx$

$dN = -\pi N_e \left(\frac{e^4 Z^2}{8\pi^2 \epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \frac{1}{E^2} dE dx$

$n(E) = -\frac{dN}{dE dx} = \pi N_e \left(\frac{e^4 Z^2}{8\pi^2 \epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \frac{1}{E^2}$

E' il # di e- emessi con E fra E ed E + dE nel tratto di lunghezza dx

Lo spettro degli e- emessi segue una legge di potenza E^{-2}
 $[n(E)] = [E^{-1} L^{-1}]$



Con $I < E < E_{max}$

Gli elettroni emessi con $E \approx E_{max}$ vengono detti **raggi δ**

Ionizzazione: caso non relativistico

La perdita media di energia per unita' di lunghezza si ottiene da

$$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle = \int_{E_{min}=\bar{I}}^{E_{max}} E n(E) dE \quad \longrightarrow \quad \frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{E_{max}}{\bar{I}}$$

Questa e' la formula **classica**, in cui ci sono le dipendenze corrette dalle variabili e costanti fondamentali:

- ❖ la perdita specifica non dipende dalla massa della particella incidente,

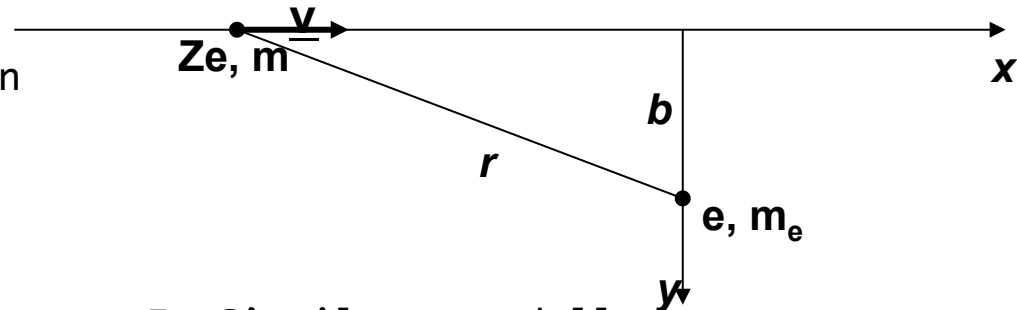
- ❖ dipende dalla m^{-1} della particella bersaglio $\rightarrow$ perdite per ionizzazione trascurabili per interazione di ionizzazione con particelle pesanti (i.e. su nuclei),

- ❖ dipende da v^{-2} della particella incidente $\rightarrow$ particelle "lente" perdono piu' energia

Ionizzazione: caso relativistico

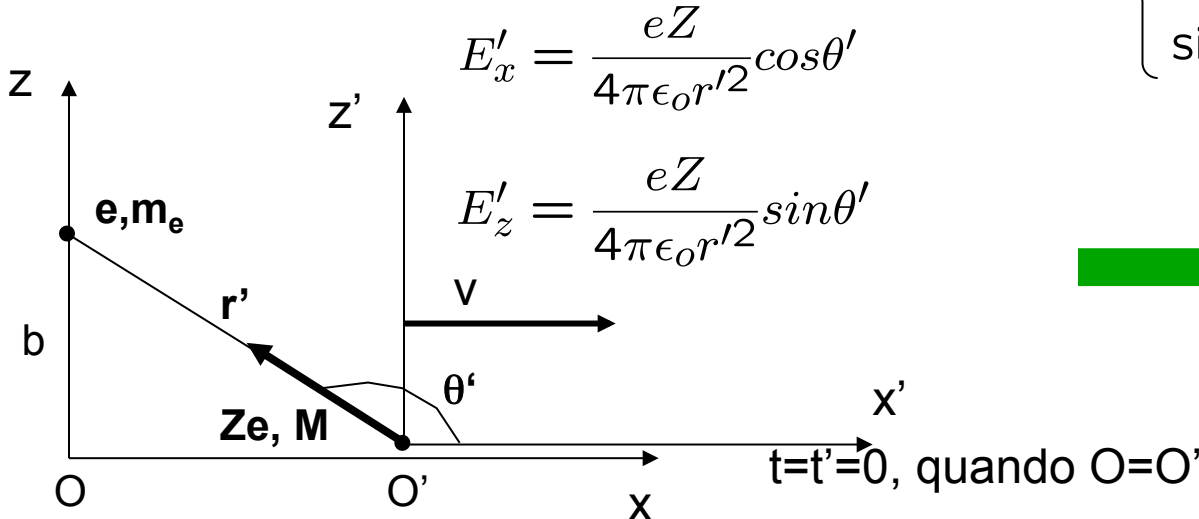
L'estensione al caso relativistico e' semplice.

In questo caso, il campo della particella incidente che viene misurato alla posizione dell'e- e' un campo relativistico, ma se ci mettiamo nel riferimento in cui la particella incidente e' quiete, il campo e' quello elettrostatico di Coulomb → facciamo una trasformazione di Lorentz dal riferimento del "laboratorio" S, in cui l'e- e' in quiete, a quello di quiete della particella incidente, S'



In S', il campo della particella incidente sull'elettrone e' $\vec{E}' = \frac{eZ}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \vec{u}_r'$

$$\begin{cases} \cos \theta' = -x'/r' \\ \sin \theta' = z'/r' \end{cases}$$



$$E'_x = \frac{eZ}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \cos \theta'$$

$$E'_z = \frac{eZ}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \sin \theta'$$



$$E'_x = -\frac{eZ}{4\pi\epsilon_0 r'^3} x'$$

$$E'_z = \frac{eZ}{4\pi\epsilon_0 r'^3} z'$$

Ionizzazione: caso relativistico

In S' , l'e- ha coordinate $(-vt', 0, b, t')$ $\rightarrow r' = \sqrt{b^2 + (vt')^2}$

I tempi misurati in S' e da un osservatore in S sono connessi dalla trasformazione

$$t' = \gamma(t - \frac{vx}{c^2}) \quad \text{Ma in } S, \text{ le coordinate dell'e- sono } (0, 0, b, t) \quad t' = \gamma t$$

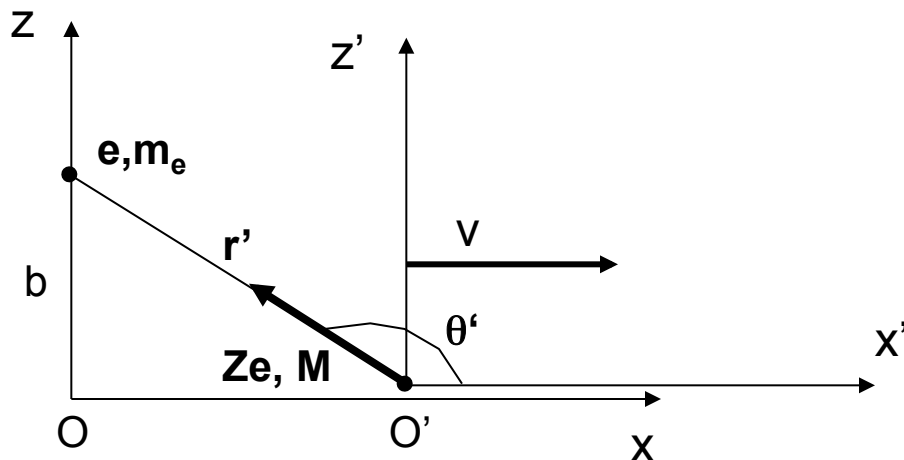
$$r' = \sqrt{b^2 + (v\gamma t)^2}$$

e' la distanza in S' tra M ed l'e- espressa in funzione delle coordinate in S



$$E'_x = -\frac{eZ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma vt}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}}$$

$$E'_z = \frac{eZ}{4\pi\epsilon_0} \frac{b}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}}$$



In questo modo abbiamo espresso i campi in S' in funzione delle coordinate misurate in S , ma questi NON sono i campi in S . Per trovarli dobbiamo trasformare i campi da S' ad S

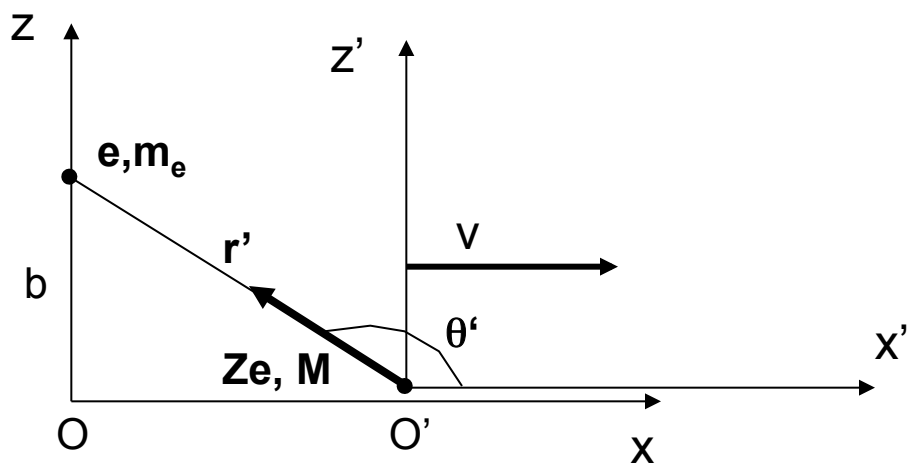
Ionizzazione: caso relativistico

Per ottenere i campi in S, dobbiamo fare le trasformazioni da S' ad S, cioè' dobbiamo trovare i campi misurati in un rif in moto con velocità' $-v$ lungo x'

I campi trasformano come le componenti del tensore doppio di Maxwell

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F'_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta} F_{\alpha\beta}$$



$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} \quad \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}$$

$$\vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} + \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}_{\perp})$$

$$\vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} - \vec{v} \times \vec{B}_{\perp})$$

Queste sono le trasformazioni standard che danno i campi in S', noti quelli in S

Ionizzazione: caso relativistico

A noi servono le trasf inverse, che si ottengono semplicemente scambiando gli apici e trasformando $\mathbf{v}$ in $-\mathbf{v}$

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel} \quad \vec{E}_{\perp} = \gamma(\vec{E}'_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}'_{\perp})$$

$$\vec{B}_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel} \quad \vec{B}_{\perp} = \gamma(\vec{B}'_{\perp} - \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}'_{\perp})$$

$$B_x = B'_{x'} = 0$$

$$B_z = -(\gamma \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}'_{\perp})_z = -\gamma v E'_y = 0$$

$$B_y = -(\gamma \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}'_{\perp})_y = -\frac{eZ}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\gamma b v}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}}$$

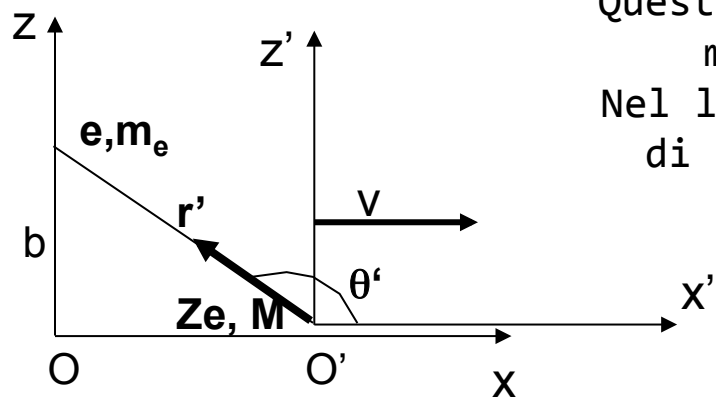
In S' , $\mathbf{B}' = 0 \rightarrow$

$$E_x = E'_{x'} \quad E_z = \gamma E'_z \quad E_y = \gamma E'_y = 0$$

$$E_x = -\frac{eZ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma v t}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}}$$

$$E_z = \frac{eZ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma b}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}}$$

$$B_y = -\frac{v}{c^2} E_z$$



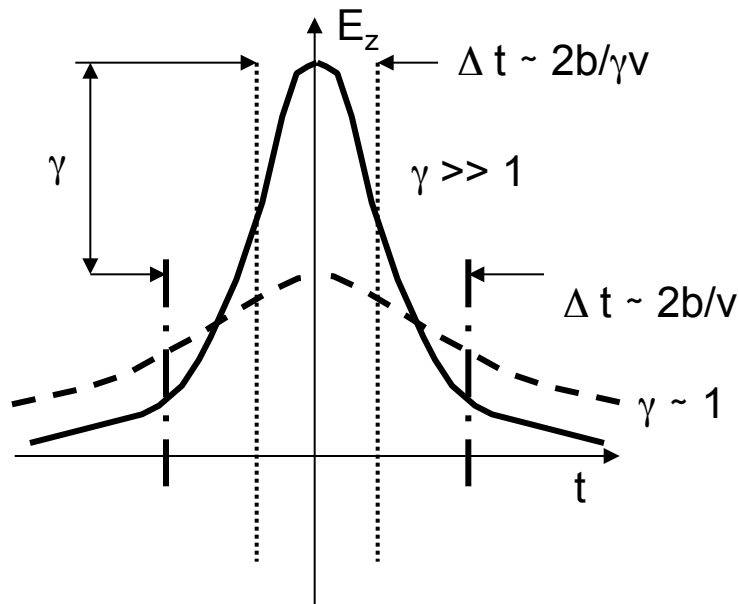
Questi sono i campi dovuti ad una particella in moto, misurati in una posizione fissa nello spazio
Nel limite $v \rightarrow c$, $E_z = -cB_y$, indistinguibile da quello di un'onda polarizzata linearmente che si propaga lungo x

Ionizzazione: caso relativistico

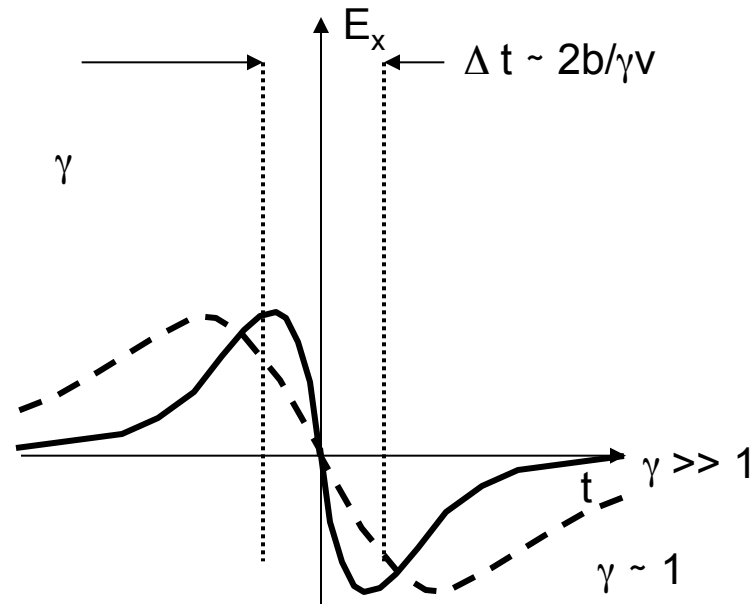
$$E_z = \frac{eZ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma b}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}}$$

$$E_x = -\frac{eZ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma vt}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}}$$

Alla distanza di max avvicinamento a $t=0$, $E_z = \gamma E_z(\text{NR})$, ma la durata dell'interazione $2b/v$ in S' e' contratta di un fattore γ (contrazione di Lorentz per b lungo x) in S



Alla distanza di max avvicinamento a $t=0$, $E_x = 0$



Ionizzazione: caso relativistico

Ora si procede esattamente come nel caso non rel. p trasferito e'

$$\vec{p}_t = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}_{\parallel} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}_{\perp} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}_x dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}_z dt$$

Come prima la comp. || da contributo nullo perche' dispari in t

$$\vec{p}_t = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e E_z dt \right) \vec{u}_z \quad \vec{p}_t = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^2 Z \gamma b dt}{4\pi\epsilon_0 [b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}} \right) \vec{u}_z$$

$$\vec{p}_t = \frac{e^2 Z \gamma b}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}} \right) \vec{u}_z = \frac{e^2 Z \gamma b}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{b^3 [1 + (v\gamma t/b)^2]^{3/2}} \right) \vec{u}_z$$

$$\text{Pongo } x = \gamma v t / b \rightarrow dx = (\gamma v / b) dt \rightarrow dt = (b / \gamma v) dx$$

$$= \frac{e^2 Z \gamma}{4\pi\epsilon_0 b^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(b/\gamma v) dx}{[1 + x^2]^{3/2}} \right) \vec{u}_z = \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 b v} \left(\int_0^{+\infty} \frac{dx}{[1 + x^2]^{3/2}} \right) \vec{u}_z$$

$$= \frac{e^2 Z}{2\pi\epsilon_0 b v} \cdot 1 \cdot \vec{u}_z$$

L'impulso trasferito e' $\perp$ alla traiettoria di volo

Ionizzazione: caso relativistico

$$p_t = \frac{e^2 Z}{2\pi\epsilon_0 b v} \quad \text{Il risultato e' esattamente lo stesso del caso non relativistico, dato che } E_z \rightarrow \gamma E_z \text{ ma } \tau \rightarrow \tau/\gamma \text{ e } \mathbf{p} = \mathbf{F}(\mathbf{b})\tau$$

Procedo come prima e ottengo

$$-\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{b_{\max}}{b_{\min}}$$

Nel caso relativistico $\tau_{\max} = 2b_{\max}/\gamma v$

Così, $\tau_{\max} \sim 1/v_0 \rightarrow 2b_{\max}/\gamma v \sim 2\pi/\omega_0 \rightarrow b_{\max} = \pi v \gamma / \omega_0 = \gamma b_{\max}(\text{NR}) = \pi \hbar v \gamma / 2I$

Per $b_{\min}$, da principio di indeterminazione di Heisenberg, si ha

$$\Delta x = \hbar / \Delta p = \hbar / \gamma \Delta p \text{ (NR)} \rightarrow b_{\min} = b_{\min}(\text{NR}) / \gamma$$

$$\text{Quindi } b_{\max}/b_{\min} = \gamma^2 \frac{2m_e v^2}{I}$$

$$-\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{2\gamma^2 m_e v^2}{I}$$

Ionizzazione: spettro degli e-

$$n(E) = -\frac{dN}{dEdx} = \pi N_e \left(\frac{e^4 Z^2}{8\pi^2 \epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \frac{1}{E^2}$$

Nel limite ultrarelat. $\beta \approx 1$ per i δ , si puo' riscrivere tenendo conto che

$$N_e = (Z_T/A_T) N_A \rho_T \quad \lambda_e = h/m_e c \quad \alpha = e^2/4\pi\epsilon_0 \hbar c$$

Dove ρ_T e' la densita' di massa del materiale che ha numero atomico Z_T e massa molare A_T (kg/mol)

$$\frac{dN_\delta}{dE} = 2\pi \left(\frac{N_A Z_T}{A_T} \right) Z_{inc}^2 \alpha^2 \frac{\lambda_e}{E^2} \rho dx$$

L'intensita' dello spettro di energia non dipende da dx ma ρdx !
 $X = \rho dx$ si misura in $g\ cm^{-2}$ ed e detto "grammaggio": rappresenta il numero di bersagli attraversati dalla particella incidente e rende lo spettro indipendente dalla densita'

$$\frac{dN_\delta}{dEd(\rho x)} = \frac{dN_\delta}{dEdX} = 2\pi \left(\frac{N_A Z_T}{A_T} \right) Z_{inc}^2 \alpha^2 \frac{\lambda_e}{E^2}$$

Ponendo $Z/A \sim 1/2$, i raggi δ di energia $> 1\ MeV$ in $1\ gr/cm^2$ sono circa l'8% della ionizzazione totale. Questo porta a delle grosse fluttuazioni della perdita di energia quando lo spessore attraversato e' sottile. (cfr. code di Landau)

Bethe-Bloch

Il calcolo corretto e' quello quantistico, che non faremo (ma per i soliti entusiasti e' disponibile, se lo chiedete).

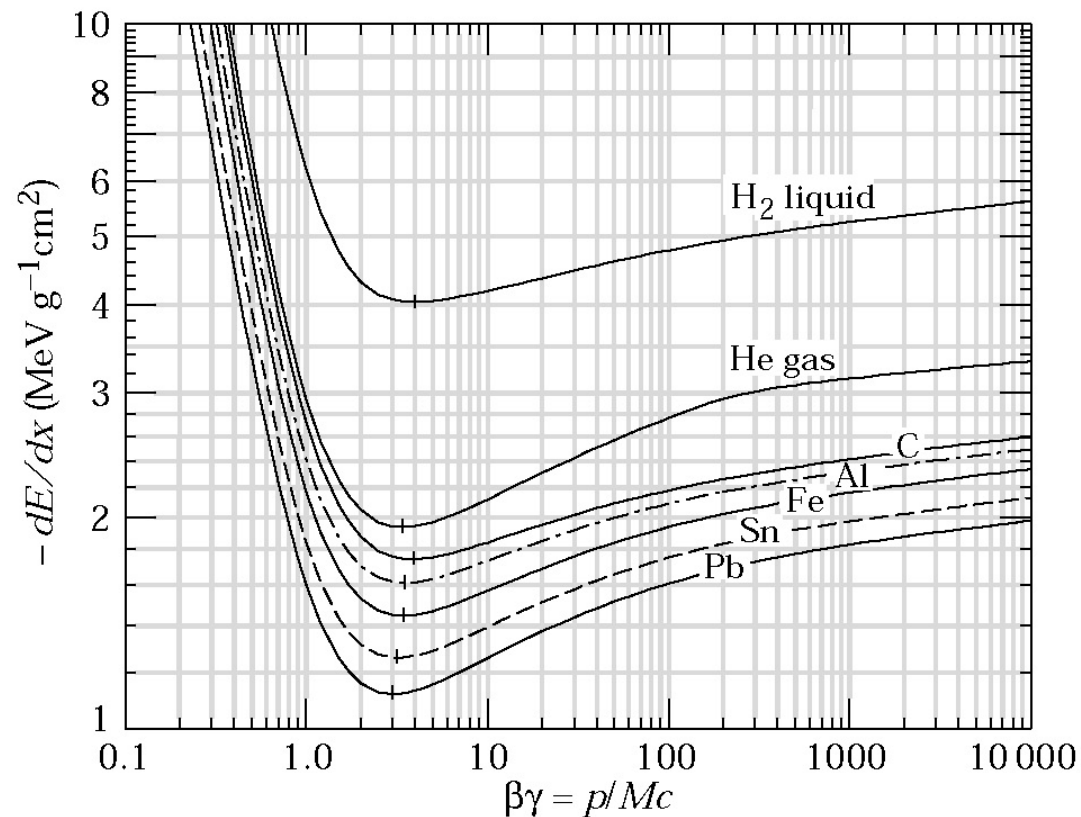
Il risultato ottenuto da Bethe e Bloch e'

$$\frac{dE}{dx} = \frac{z^2 e^4 N_e}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \left[\ln\left(\frac{2\gamma^2 m_e v^2}{I}\right) - \frac{v^2}{c^2} \right]$$

La relazione corretta e' molto simile a quella ricavata, con solo un termine di ordine $O(1)$ che non c'e' in quella "classica". Compare quando si tiene conto dello spin dell'elettrone: la sez d'urto non e' quella di Rutherford ma quella di Mott

$$d\sigma/d\Omega = (d\sigma/d\Omega)_R (1 - \beta^2 \sin^2(\theta/2))$$

Valida per particelle non troppo relativistiche in mezzi non troppo densi



Ionizzazione: Bethe-Bloch

$$\frac{dE}{dx} = \frac{z^2 e^4 N_e}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \left[\ln\left(\frac{2\gamma^2 m_e v^2}{I}\right) - \frac{v^2}{c^2} \right] \quad [\text{E/cm}]$$

Eliminiamo la densita' di elettroni. La densita' di numero di atomi del mezzo e' $n = \rho/m_{\text{mezzo}}$

La massa m_{mezzo} si ottiene dalla

relazione $m_{\text{mezzo}} = M_{\text{mol}}/N_A = A/N_A$, M_{mol} = massa molare (Kg/mol) = A kg/mol $\rightarrow$

$n_{\text{mezzo}} = \rho N_A/A$,

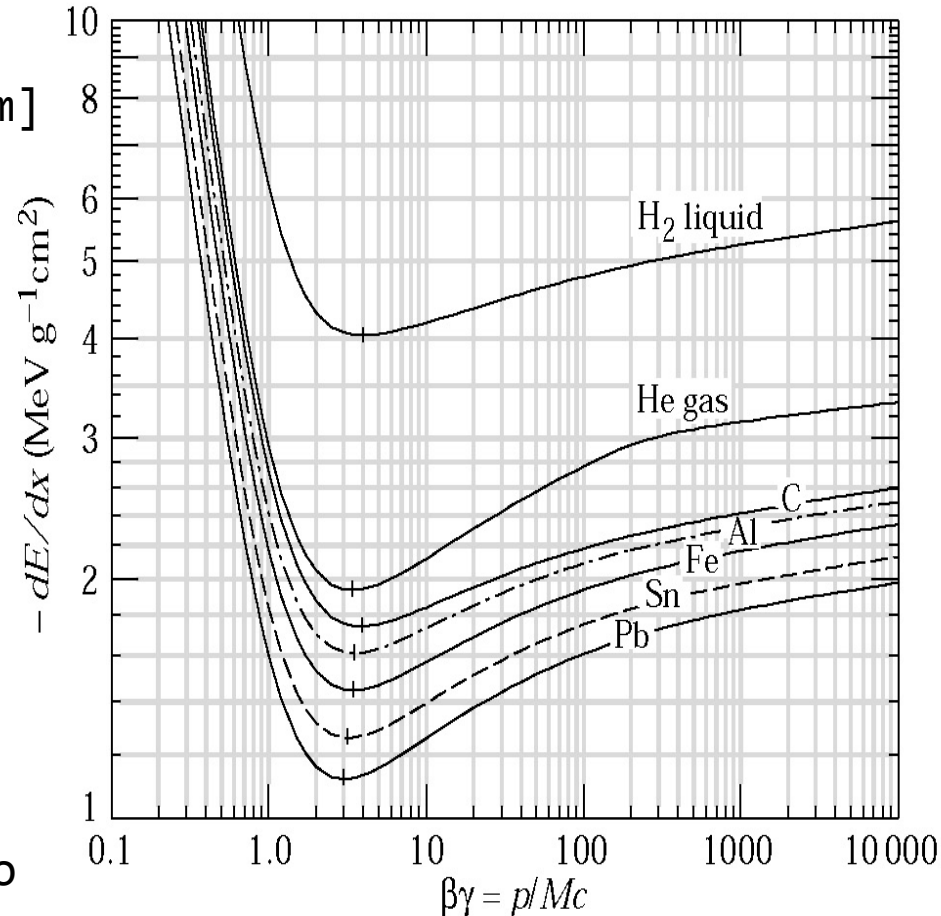
Il numero atomico e' Z quindi ci sono

$N_e = Z n_{\text{Be}} = \rho N_A (Z/A)$ elettroni

$$\frac{dE}{dx} = \frac{N_A e^4 z^2}{4\pi\epsilon_0 m_e v^2} \frac{Z}{A} \rho \left\{ \ln\left[\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I}\right] - \beta^2 \right\}$$

La perdita dE non dipende SOLO dallo spessore, ma dal prodotto ρdx (gcm^{-2}). Posto quindi $X = \rho x$ si ha

$$\frac{dE}{dX} = \frac{N_A e^4 z^2}{4\pi\epsilon_0 m_e v^2} \frac{Z}{A} \rho \left\{ \ln\left[\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I}\right] - \beta^2 \right\} \quad [\text{E}/(\text{g}/\text{cm}^{-2})]$$



Per cui dE/dX **NON** dipende dalla densita' del mezzo ed e' "universale". Le differenze osservate sono legate al potenziale di ionizzazione I , che varia da elemento ad elemento

Material thickness

- Thickness of material (x) is usually measured in gm/cm^2
- Related to distance (y) traversed via density:
- $x = y \rho$
- Used because relevant issue in determining interaction in matter is **how many scattering centres are traversed**
- Benchmark values for traversing 1 cm of material:
 - Lead: $x = 11.4 \text{ gm}/\text{cm}^2$
 - Iron: $x = 7.9 \text{ gm}/\text{cm}^2$
 - Water: $x = 1.0 \text{ gm}/\text{cm}^2$
 - Liquid H_2 $x = 0.07 \text{ gm}/\text{cm}^2$
 - Air: $x \sim 0.001 \text{ gm}/\text{cm}^2$

Ionizzazione: Bethe-Bloch

$$\frac{dE}{d\xi} = K \frac{z^2 Z}{\beta^2 A} \left[\ln\left(\frac{2m_e c^2 \gamma^2 \beta^2}{I}\right) - \beta^2 \right]$$

Misurando $\gamma = E/Mc^2$
e contemporaneamente
 $dE/d\xi$ si misura z

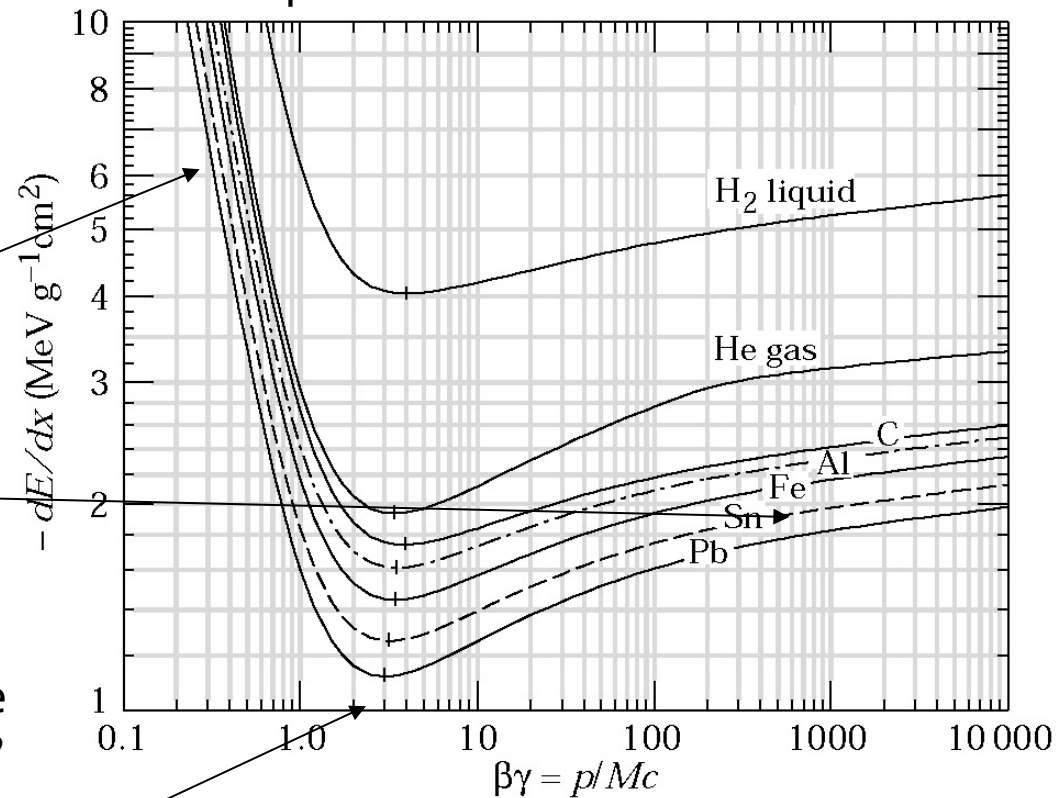
A bassa energia $\propto \beta^{-2}$

Ad alta energia $\propto \ln \gamma^2$

Minimo a $\beta\gamma \approx 2-3$,
corrispondente a $E \approx Mc^2$, oltre
questo limite la particella e'
relativistica

(Minimum Ionizing Particle=MIP).

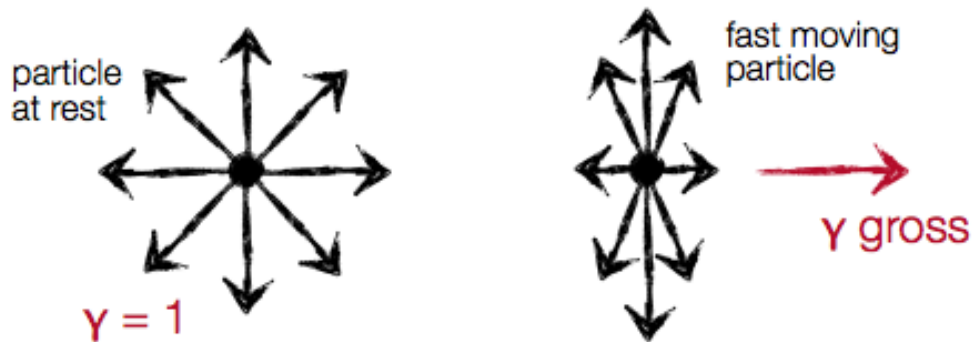
- Non dipende dalla massa della particella incidente
- Dipende dal quadrato della carica della particella incidente



Relativistic rise for $\beta\gamma > 4$

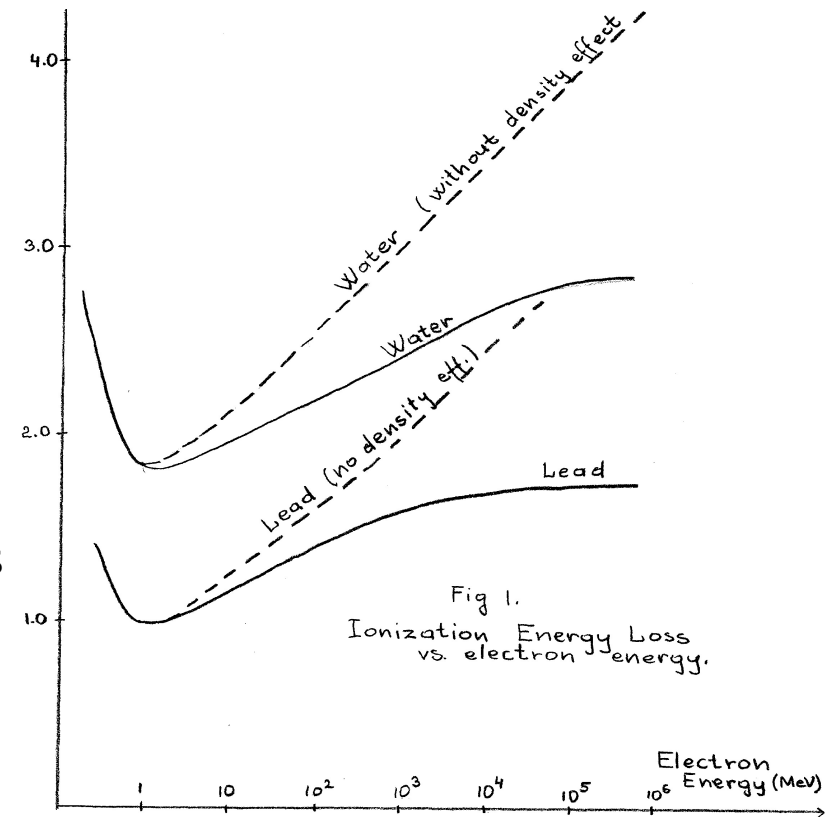
Important at high energies. BB over-estimates the energy loss at high momentum of the incident particle.

High energy particle: transversal electric field increases due to Lorentz transform; $E_y \rightarrow \gamma E_y$. Thus interaction cross section increases ...



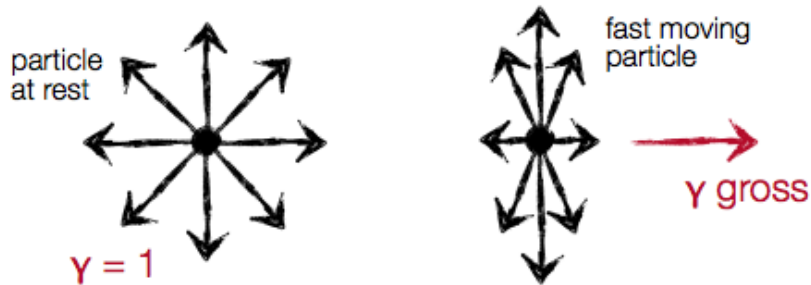
Experimental curve increases less rapidly than $\ln \gamma^2$

But rather as $\sim \ln \gamma$ and then it reaches a plateau, named "Fermi plateau"

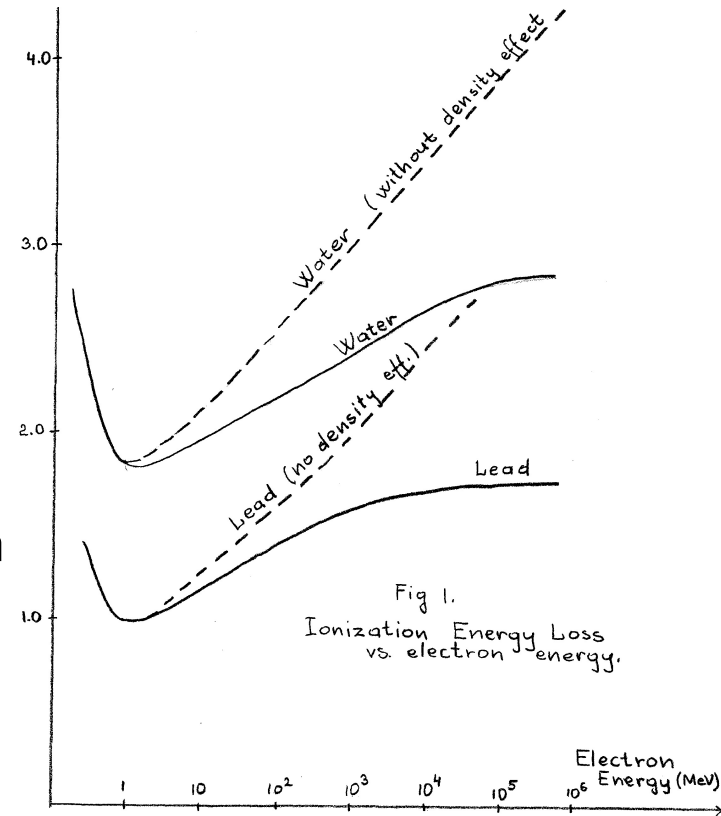


effetto densita'

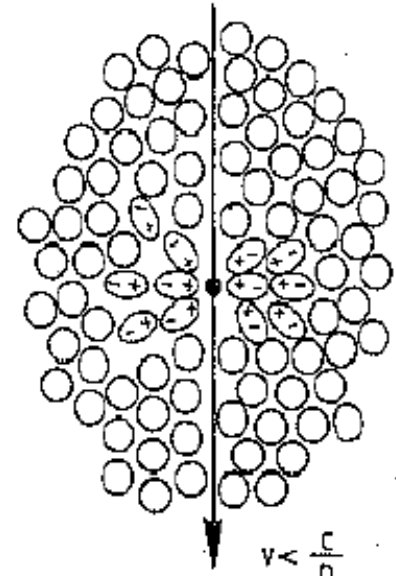
High energy particle: transversal electric field increases due to Lorentz transform; $E_y \rightarrow \gamma E_y$. Thus interaction cross section increases ...



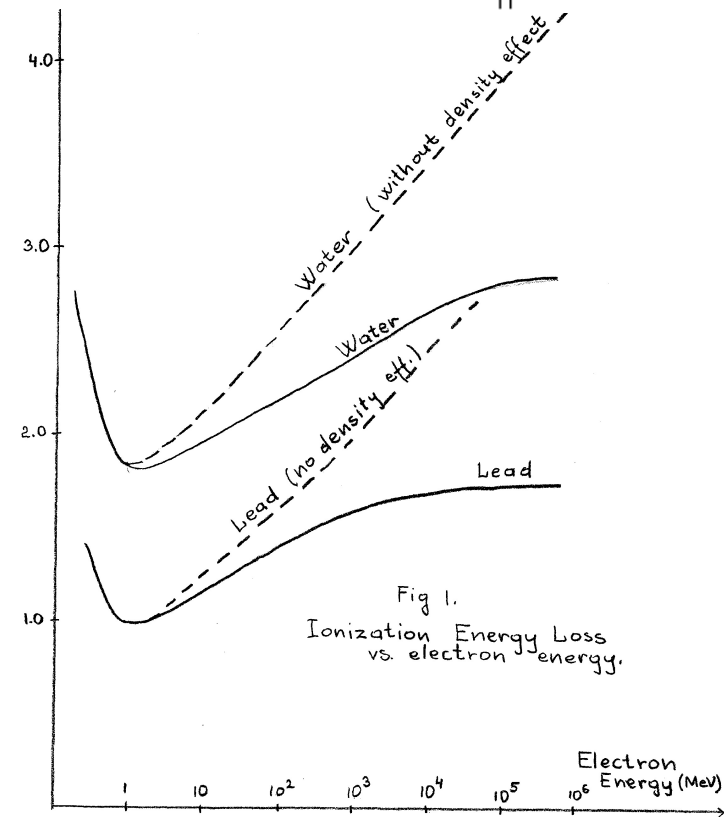
- per part relativistiche, la dE/dX tende al cosiddetto plateau di Fermi, mentre la BB prevede che dE/dX cresca
- Per part incidenti ad alta E viene meno una delle ipotesi (sottintese) fatte per la BB, cioè che fosse possibile calcolare l'effetto dei campi elm della part incidente su ciascun e- di ciascun atomo e quindi sommare in modo incoerente le E cedute a tutti gli e-di tutti gli atomi per i quali $b_{\min} < b < b_{\max}$



Effetto densita'

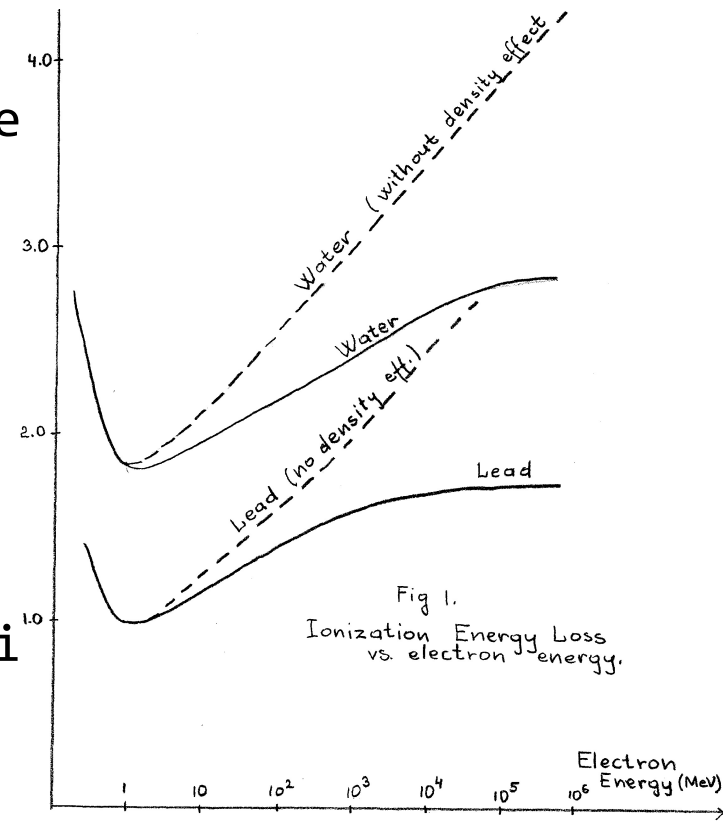


- Ora $b_{\max} = \pi v \gamma / \omega_0 \gg R_{\text{atomo}}$, specie quando $\gamma \gg 1$
- Percio' in un mezzo denso ci saranno molti atomi interposti fra la part incidente e l'atomo preso in considerazione, per $b \sim b_{\max}$
- Questi atomi, perturbati dai campi della part incidente, produrranno campi perturbanti nella posizione occupata dall'atomo, modificando la risposta ai campi della part veloce
- In altre parole, nei mezzi densi la polarizzazione dielettrica del materiale altera i campi della particella veloce rispetto al valore che avrebbero nello spazio vuoto ai valori caratteristici dei campi macroscopici entro un dielettrico



Effetto densita'

- Nel calcolo delle energia trasferite negli urti lontani ($b \gg R_{\text{atomo}}$) occorre tenere conto di tali modificazioni, dovute alla polarizzazione del mezzo: negli urti stretti ($b \ll R_{\text{atomo}}$) la particella interagisce soltanto con atomo alla volta e si puo' usare l'approssimazione di e- liberi, senza polarizzazione
- Per urti lontani assumiamo che i campi nel mezzo si possano calcolare nell'approx del continuo, nella quale le proprieta' dielettriche si possono descrivere mediante una costante dielettrica $\epsilon(\omega)$
- Calcolo complicato (i soliti entusiasti lo possono trovare in "Elettrodinamica classica", Jackson, 2° edition, cap. 13)



NB: la polarizzazione si oppone al campo perturbante, cioe' lo diminuisce

Correzioni di densita'

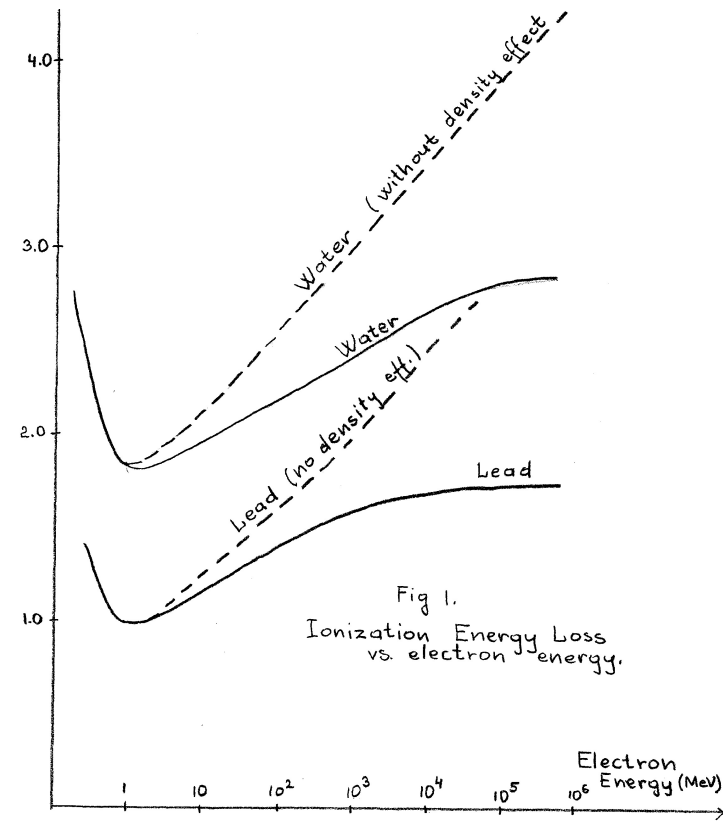
Fermi ha calcolato le perdite di energia dovute a urti lontani

$$\left(\frac{dE}{dX}\right)_{b>a} = \frac{(ze)^2 \omega_p^2}{c^2} \ln\left(\frac{1.123c}{a\omega_p}\right)$$

con $\omega_p = (4\pi NZe^2/m)^{1/2}$ frequenza di plasma elettronico e a =raggio atomico

senza le correzioni di densita' si avrebbe

$$\left(\frac{dE}{dX}\right)_{b>a} = \frac{(ze)^2 \omega_p^2}{c^2} \ln\left(\frac{1.123\gamma c}{a\langle\omega\rangle}\right)$$



- ❑ La perdita di energia non dipende piu' dai dettagli della struttura atomica attraverso $\langle\omega\rangle = 2\langle I\rangle/h$, ma solo dalla densita' di elettroni.
- ❑ Nel limite ultrarelativistico diventa costante.
- ❑ Due materiali con strutture atomiche molto diverse avranno la stessa perdita di energia per particelle ultrarelativistiche se le loro densita' sono tali che la densita' di elettroni e' la stessa.

Correzioni di densita'

Per mantenere la forma della bethe bloch, calcolata senza l'effetto di schermo, ed eliminare il raggio atomico a , si parametrizza l'effetto della polarizzazione con un parametro δ che e' pari alla differenza tra la perdita di energia calcolata con effetto di polarizzazione e quello che si ha senza la polarizzazione $\delta/2 = (dE/dX)_{pol} - (dE/dX)_{nopol}$ cosi' che nel limite di alte energie

$$\delta/2 \rightarrow \ln(\hbar\omega/I) + \ln \beta\gamma - 1/2$$

E La perdita di energia diventa

$$-\frac{dE}{dx} = \rho K z^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\ln \frac{2mc^2 \beta^2 \gamma^2}{I} - \beta^2 - \frac{\delta(\gamma)}{2} \right]$$

Con queste correzioni si vede subito che ad alti $\beta\gamma$ dE/dX cresce come $\ln(\beta\gamma/\hbar\omega_p)$ piuttosto che come $\ln((\beta\gamma)^2/I)$ (ie risalita relativistica) $\rightarrow$ Dato che ω_p dipende da $N_e^{1/2}$, materiali con la stessa densita' di e- hanno la stessa perdita indipendentemente dal potenziale di ionizzazione.

Dato che $N_e = \rho N_A (Z/A)$, la risalita e' piu' rapida per materiali meno densi, p. es. gas rispetto a liquidi e solidi e da cui il nome "effetto densita'"

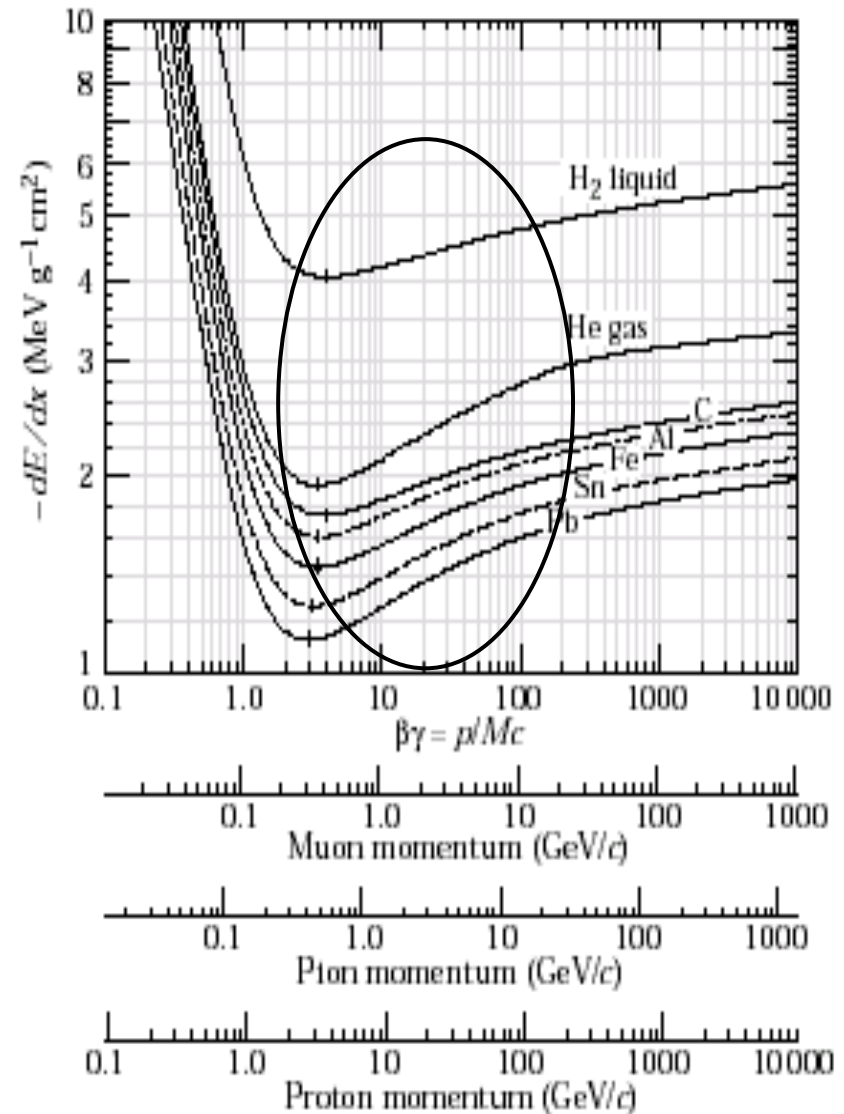
Bethe Bloch: effetto densita'

$$-\frac{dE}{dx} = \rho K z^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\ln \frac{2mc^2 \beta^2 \gamma^2}{I} - \beta^2 - \frac{\delta(\gamma)}{2} \right]$$

La salita relativistica satura crescendo $\gamma \rightarrow$ **plateau di Fermi**.

Più denso è il mezzo tanto prima si raggiunge il plateau di Fermi $\rightarrow$ la salita relativistica è più importante nei gas che nei liquidi e nei solidi.

Funziona fino al % per particelle fino al nucleo di α per β 0.1 - 1.0. Per basse velocità ($\beta \sim 0.05$) non è più valida in quanto non sono più valide molte delle assunzioni di Bethe Block (ie non posso più trascurare l'energia di legame degli e-).



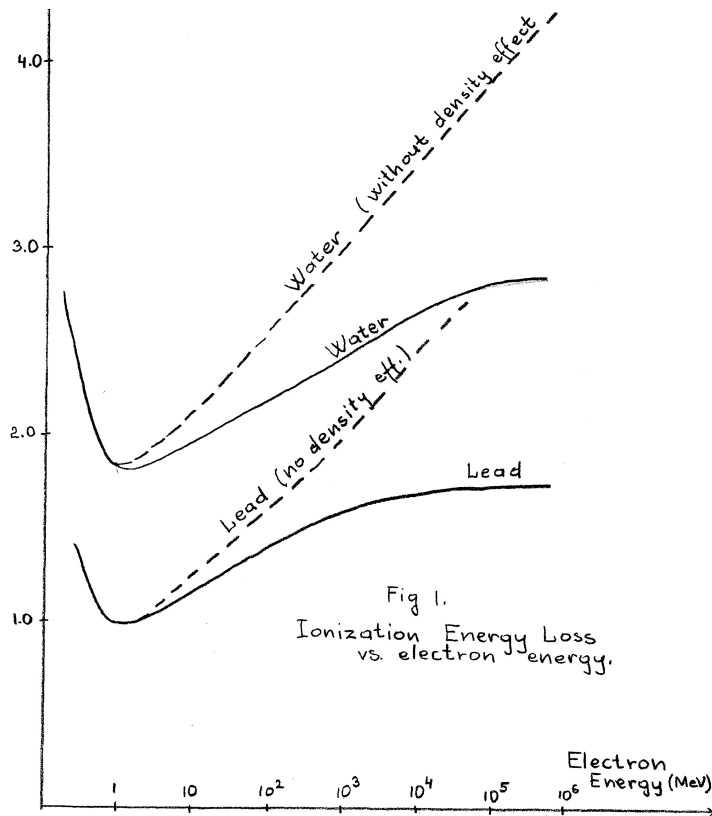
Bethe Bloch: effetto densita'-formule pratiche

Nella pratica δ viene tabulato in funzione di $\beta\gamma$ per differenti materiali

$$-\frac{dE}{dx} = \rho K z^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\ln \frac{2mc^2 \beta^2 \gamma^2}{I} - \beta^2 - \frac{\delta(\gamma)}{2} \right]$$

Al plateau di Fermi,

- $(dE/dX)_{\text{plateau}} \approx 1.05-1.1 (dE/dX)_{\text{MIP}}$ per i solidi
- $(dE/dX)_{\text{plateau}} \approx 1.5-1.1 (dE/dX)_{\text{MIP}}$ per i gas



$$\delta = \begin{cases} 0 & X < X_0 \\ 4.0652X + C + a(X_1 - X)^m & X_0 < X < X_1 \\ 4.0652X + C & X > X_1 \end{cases}$$

Table 2.1. Constants for the density effect correction

$X = \ln(\beta\gamma)$

Material	I [eV]	$-C$	a	m	X_1	X_0
Graphite density = 2	78	2.99	0.2024	3.00	2.486	-0.0351
Mg	156	4.53	0.0816	3.62	3.07	0.1499
Cu	322	4.42	0.1434	2.90	3.28	-0.0254
Al	166	4.24	0.0802	3.63	3.01	0.1708
Fe	286	4.29	0.1468	2.96	3.15	-0.0012
Au	790	5.57	0.0976	3.11	3.70	0.2021
Pb	823	6.20	0.0936	3.16	3.81	0.3776
Si	173	4.44	0.1492	3.25	2.87	0.2014
NaI	452	6.06	0.1252	3.04	3.59	0.1203
N ₂	82	10.5	0.1534	3.21	4.13	1.738
O ₂	95	10.7	0.1178	3.29	4.32	1.754
H ₂ O	75	3.50	0.0911	3.48	2.80	0.2400
Lucite	74	3.30	0.1143	3.38	2.67	0.1824
Air	85.7	10.6	0.1091	3.40	4.28	1.742
BGO	534	5.74	0.0957	3.08	3.78	0.0456
Plastic Scint.	64.7	3.20	0.1610	3.24	2.49	0.1464

Bethe Bloch Formula

■ Bethe-Bloch law for “stopping power”:

NB: it has a slightly different but equivalent form

$$-\frac{dE}{dX} = 4\pi N_A r_e^2 m_e c^2 z^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{2m_e c^2 \gamma^2 \beta^2 T_{\max}}{I^2} - \beta^2 - \frac{\delta}{2} \right] \text{Units: MeV g}^{-1} \text{ cm}^2$$

■ Where:

constant $4\pi N_A r_e^2 m_e c^2 = 0.31 \text{ MeV g}^{-1} \text{ cm}^2$

■ $X = \rho x$, where ρ is the density of the absorber material

■ $N_A =$ Avagadro no.

■ $r_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e c^2} = \text{classical electron radius} = 2.82 \times 10^{-13} \text{ cm}$

■ $z =$ charge of incident particle in units of e

■ $Z, A =$ atomic no. and atomic weight of the absorber

■ $T_{\max} =$ maximum kinetic energy which can be imparted to a free electron in a single collision. For heavy particles ($m \gg m_e$), $T_{\max} = 2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2$

Energy loss of electrons and positrons

Calculation of electron and positron energy loss due to ionization and excitation complicated due to:

spin ½ in initial and final state

small mass of electron/positron

identical particles in initial and final state for electrons

Form of equation for energy loss similar to “heavy particles”

$$-\left. \frac{dE}{dX} \right|_c = 2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\ln \left(\frac{\tau^2 (\tau + 2)}{2(I^2 / m_e c^2)} \right) + F(\tau) - \delta - 2 \frac{C}{Z} \right]$$

τ is kinetic energy of incident electron in units of $m_e c^2$. $\tau = E_{ke} / m_e c^2 = \gamma - 1$

$$F(\tau)_{e^-} = 1 - \beta^2 + \frac{\tau^2 / 8 - (2\tau + 1) \ln 2}{(\tau + 1)^2} = 1 - \beta^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right)^2 + \frac{(2\gamma - 1) \ln 2}{\gamma^2}$$

Note:
Typo on P38 of Leo
2r®2t

$$F(\tau)_{e^+} = 2 \ln 2 - \frac{\beta^2}{12} \left(23 + \frac{14}{(\tau + 2)} + \frac{10}{(\tau + 2)^2} + \frac{4}{(\tau + 2)^3} \right) = 2 \ln 2 - \frac{\beta^2}{12} \left(23 + \frac{14}{(\gamma + 1)} + \frac{10}{(\gamma + 1)^2} + \frac{4}{(\gamma + 1)^3} \right)$$

For both electrons and positrons $F(t)$ becomes a constant at very high incident energies.

Comparison of electrons and heavy particles (assume $\beta=1$):

$$-\left. \frac{dE}{dx} \right|_c \propto \left[2 \ln \left(\frac{2m_e c^2}{I} \right) + A \ln \gamma - B \right]$$

	A	B
electrons:	3	1.95
heavy	4	2

Bethe Bloch: elettroni

$E_{\max}$, nel caso degli e-, si ottiene dalla formula ottenuta nel caso di particelle pesanti

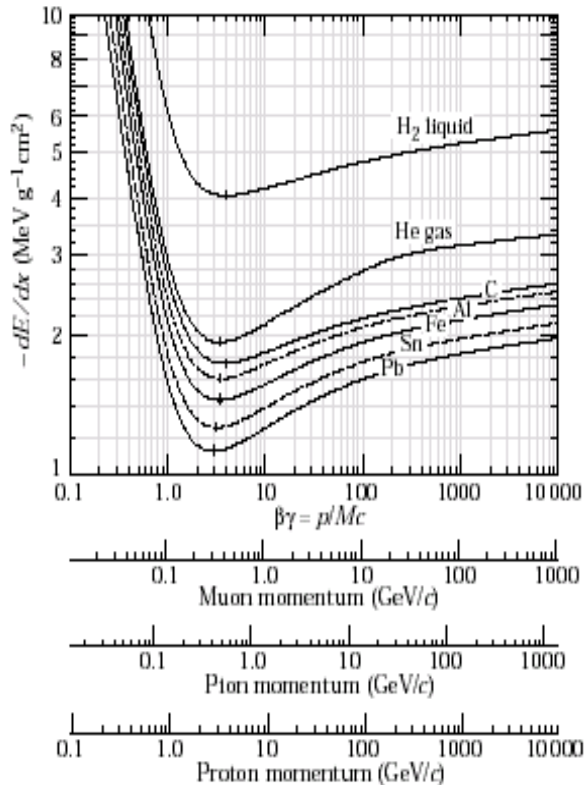
$$E_c = 2m_e c^2 \gamma_{cm}^2 (v_{cm}/c)^2 \quad v_{cm} = \frac{M\gamma v}{(M\gamma + m_e)} \quad \text{Sostituendo si ha}$$

$$E_c = \frac{2m_e M^2 \gamma^2 v^2}{(m_e + \gamma M)^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{M^2 \gamma^2 v^2}{c^2 (m_e + \gamma M)^2}} \quad \longrightarrow \quad E_c = \frac{2m_e M^2 \gamma^2 v^2}{(m_e + \gamma M)^2 - M^2 \gamma^2 \beta^2}$$

$$E_c = \frac{2m_e M^2 \gamma^2 v^2}{[m_e^2 + 2\gamma M m_e + M^2 \gamma^2 (1 - \beta^2)]} \quad E_c = \frac{2m_e M^2 \gamma^2 v^2}{[m_e^2 + 2\gamma M m_e + M^2]}$$

Se $M=m_e \rightarrow E_c = \frac{m_e \gamma^2 v^2}{[1 + \gamma]}$

Bethe Block



Particelle della stessa velocità hanno praticamente la stessa dE/dx in materiali diversi, se escludiamo l'idrogeno. È presente una piccola diminuzione della perdita di energia all'aumentare di Z .

In pratica, la maggioranza delle particelle relativistiche hanno una perdita di energia simile a quella del minimo **MIP** (minimum ionizing particle).

La perdita di energia è normalmente espressa in termini della densità di area $dS=pdx$ e le particelle ionizzanti al minimo perdono in media $1.94 \text{ MeV}/(\text{gr}/\text{cm}^2)$ in He, 1.08 in Uranio e $\sim 4 \text{ MeV}/(\text{gr}/\text{cm}^2)$ in H_2 .

Figure 26.3: Mean energy loss rate in liquid (bubble chamber) hydrogen, gaseous helium, carbon, aluminum, iron, tin, and lead. Radiative effects, relevant for muons and pions, are not included. These become significant for muons in iron for $\beta\gamma \gtrsim 1000$, and at lower momenta for muons in higher- Z absorbers. See Fig. 26.20.

dE/dx dependence on medium

$$\frac{dE}{dx} = 4\pi N_A r_e^2 m_e c^2 \frac{z^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} \left\{ \frac{1}{2} \ln \left[\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{\max}}{I^2} \right] - \beta^2 - \frac{\delta(\beta\gamma)}{2} \right\}$$

- Curves scale reasonably well
- Scaling with medium $\sim Z/A$, but I rises with Z
- Note larger relativistic rise in Helium gas; less rise in liquids and solids (screening due to density)
- Recall that linear distance y related to x via mass density: $x = \rho y$

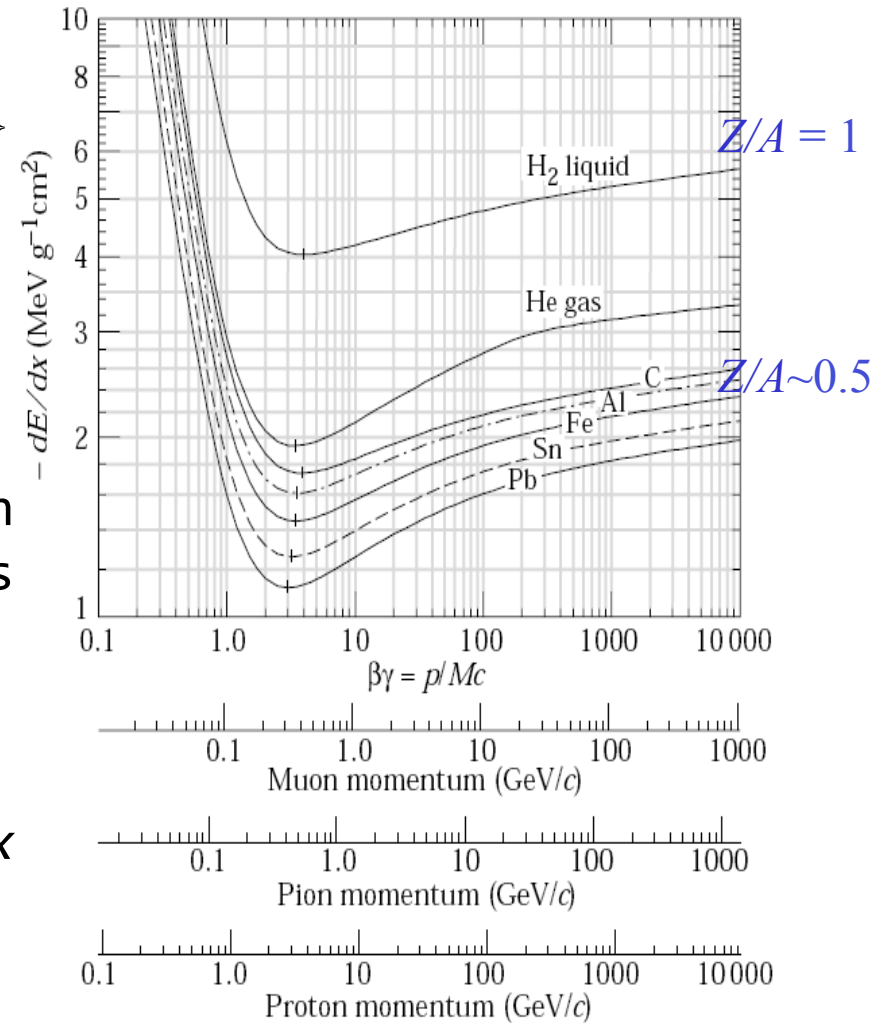


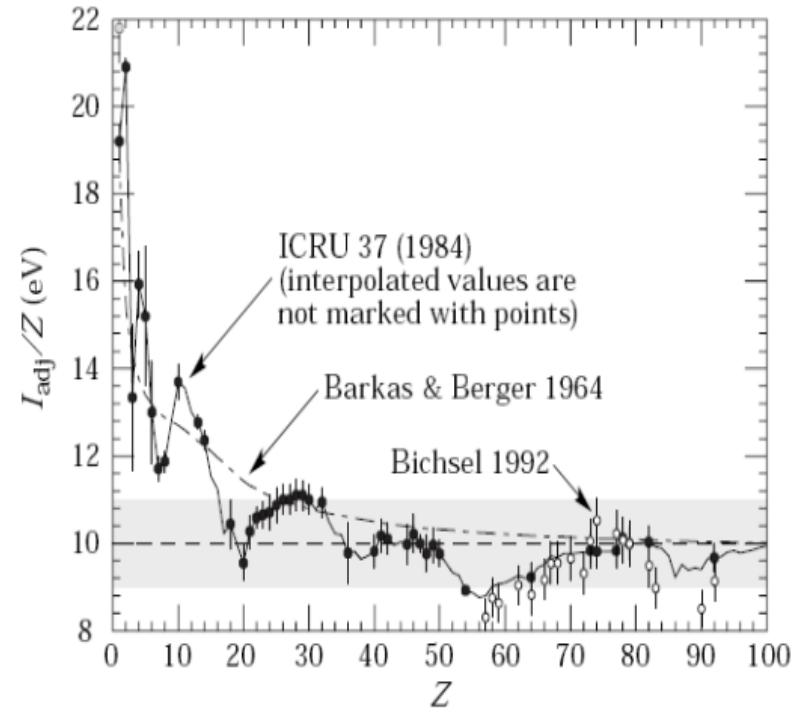
Figure 27.3: Mean energy loss rate in liquid (bubble chamber) hydrogen, gaseous helium, carbon, aluminum, iron, tin, and lead. Radiative effects, relevant for muons and pions, are not included. These become significant for muons in iron for $\beta\gamma \gtrsim 1000$, and at lower momenta for muons in higher- Z absorbers. See Fig. 27.21.

Ionization potential

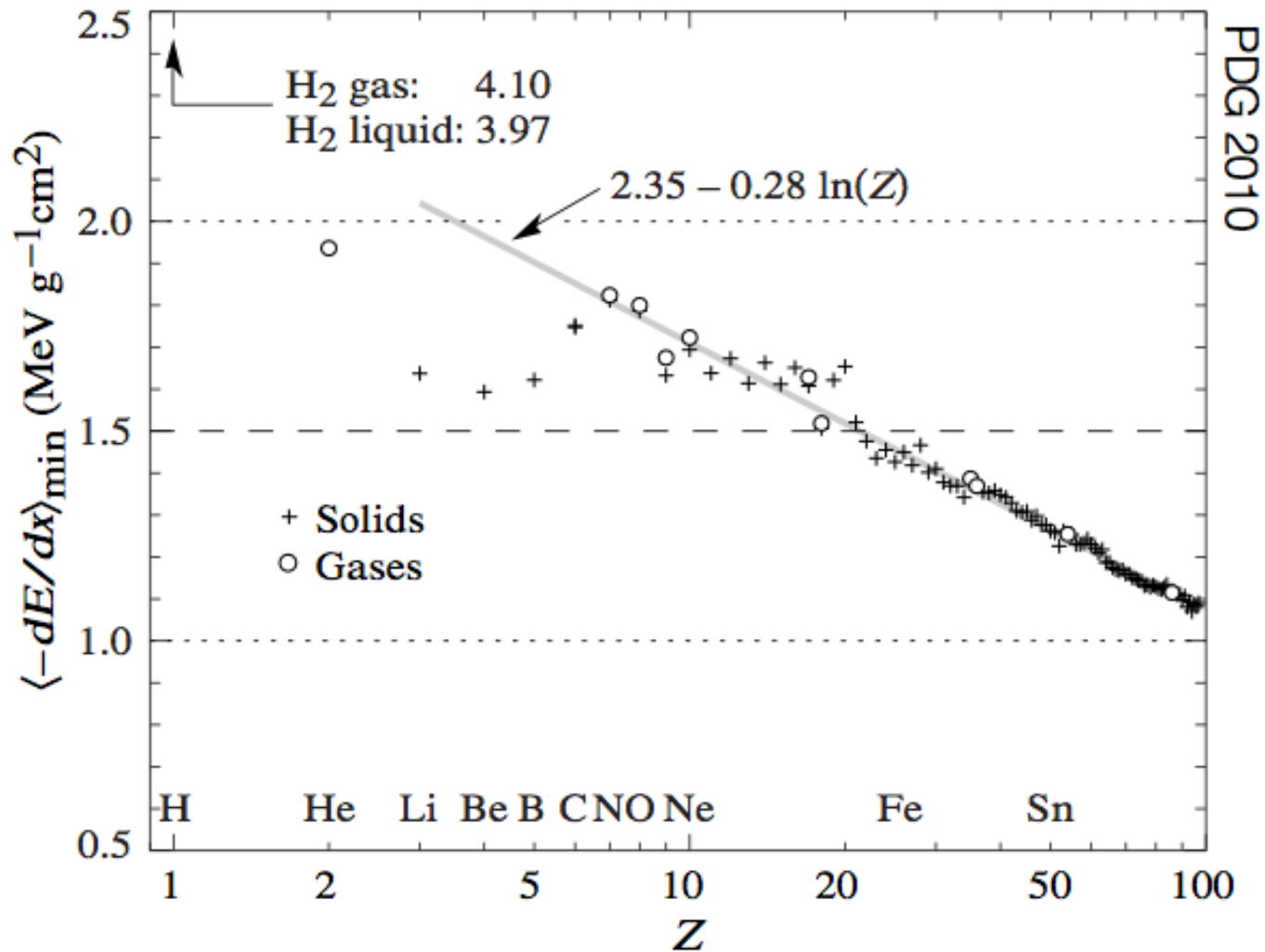
- Measured values indicate non-trivial structure vs Z (note suppressed zero)
- Crude approximation at large Z is $I = 10Z$, accurate to about 10%
- An approximate empirical relation is:

$$I \approx I_0 Z^{-0.9},$$

with $I_0 = 16$ eV



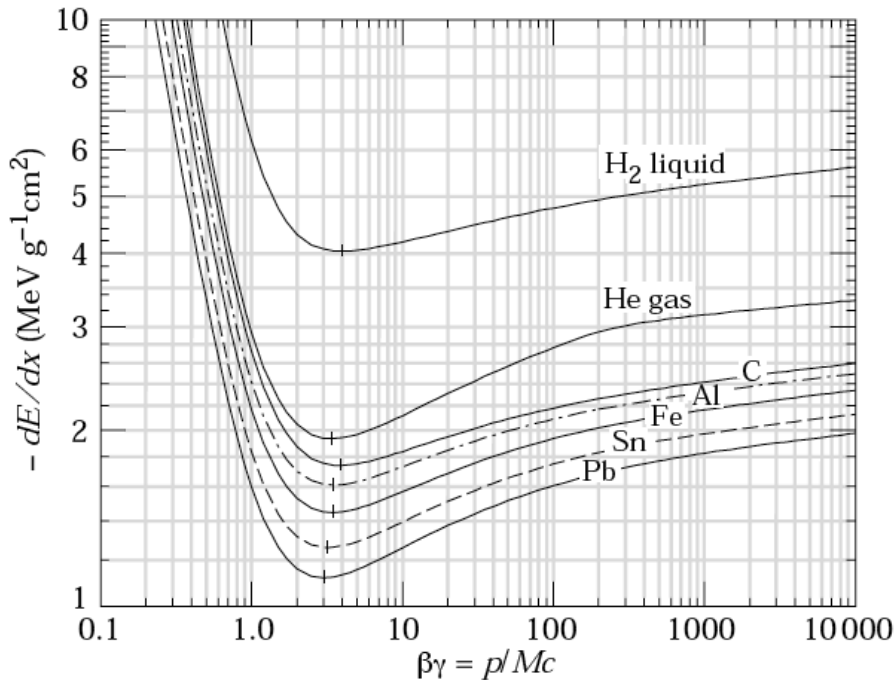
MIP dependence on chemical species



Stopping power at minimum ionization for the chemical elements. The straight line is fitted for $Z > 6$. A simple functional dependence on Z is not to be expected, since $\langle -dE/dx \rangle$ also depends on other variables.

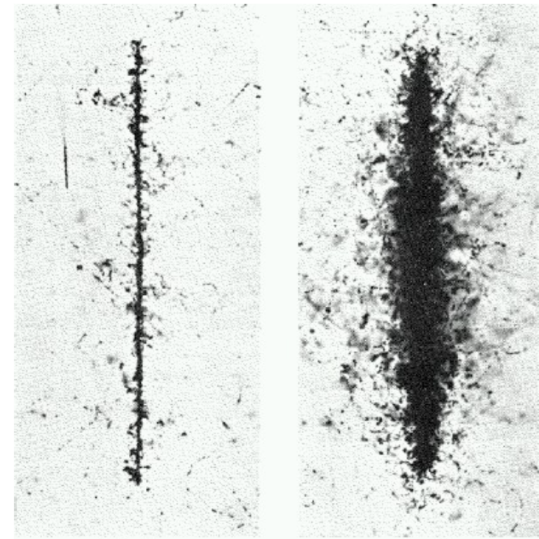
dE/dx dependence on medium

$$-\frac{dE}{dX} = 4\pi N_A r_e^2 m_e c^2 z^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{2m_e c^2 \gamma^2 \beta^2 T_{\max}}{I^2} - \beta^2 - \frac{\delta}{2} \right]$$



Depends quadratically on z of incident particle: the higher is the charge, the more the mean energy deposit is high

Tracks of ions in emulsion



Iron $Z = 26$

Thorium $Z = 90$

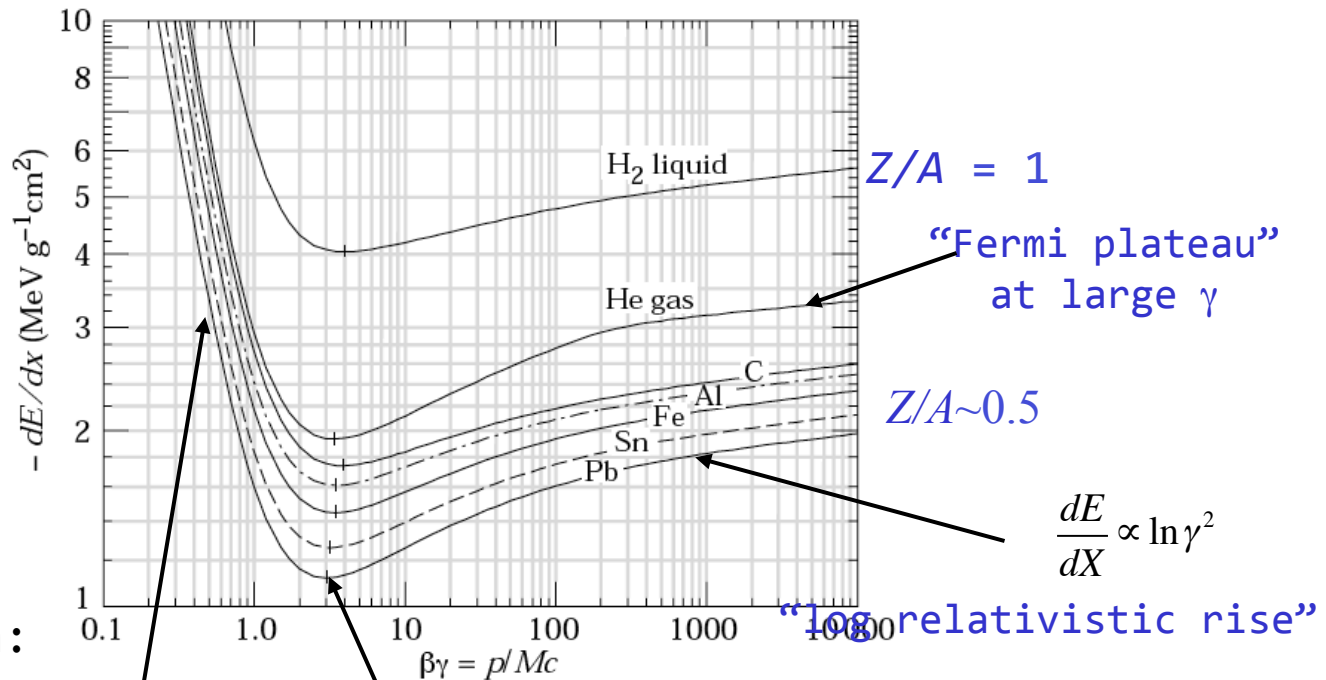
This means that, in principle, particle charge can be measured provided speed is known

Bethe Bloch

0.31 MeV g⁻¹ cm²

$$-\frac{dE}{dX} = 4\pi N_A r_e^2 m_e c^2 Z^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{2m_e c^2 \gamma^2 \beta^2 T_{\max}}{I^2} - \beta^2 - \frac{\delta}{2} \right]$$

- Only valid for “heavy” particles ($m \geq m_\mu$) i.e. not electrons
- For a given material, dE/dX depends only on β – independent of mass of particle
- First approximation: medium characterized by electron density $\sim Z/A$



$\frac{dE}{dX} \propto \frac{1}{\beta^2}$
“kinematical term”

$\beta\gamma \approx 3-4$ ($v \approx 0.96c$)

Minimum ionizing particles, MIPs

$$\frac{dE'}{dX}_{\min} \sim 1-2 \text{ MeV g}^{-1} \text{ cm}^2$$

True for all particles with same charge⁶⁸

dE/dx phenomena

$$\frac{dE}{dx} = 4\pi N_A r_e^2 m_e c^2 \frac{z^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} \left\{ \frac{1}{2} \ln \left[\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{\max}}{I^2} \right] - \beta^2 - \frac{\delta(\beta\gamma)}{2} \right\}$$

- Energy loss is small (~few MeV cm²/gm) except for $\beta\gamma < 1$
- At very low $\beta\gamma$ binding effects become important (keep curves finite); dE/dx magnitude peaks at a few hundred MeV cm²/gm near $\beta \sim \mathbf{0.01}$
- Relativistic charged particles traverse large amounts of material; 1 GeV muon penetrates ~500 gm/cm²; for water this corresponds to a length of 500 cm.

Ionizzazione: correzioni di shell

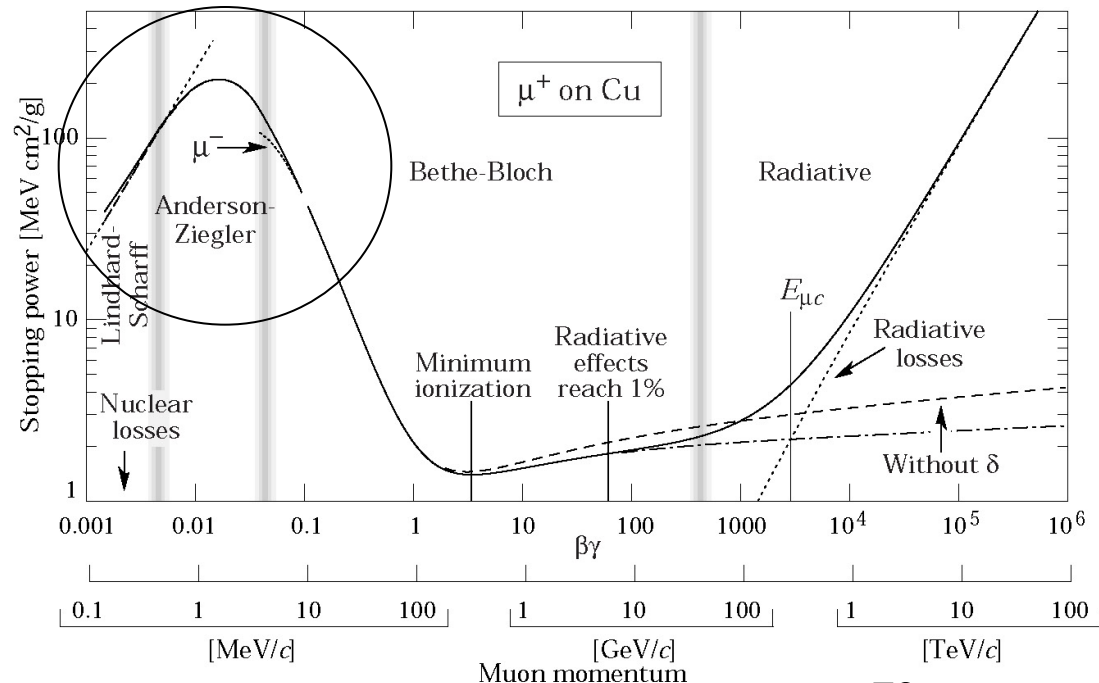
A basse energie, quando la velocità della particella incidente è paragonabile a quella orbitale dell'e-, c'è un'altra correzione alla BB, dovuta al fatto che l'assunzione che l'e- sia in quiete durante l'interazione non è più valida → correzioni di shell

$$\frac{dE}{dX} = \frac{z^2 e^4 N_e}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \left[\ln\left(\frac{2\gamma^2 m_e v^2}{I}\right) - \frac{v^2}{c^2} - \delta - C/Z \right]$$

$$C(I, \eta) = (0.4223\eta^{-2} + 0.0304\eta^{-4} - 0.00038\eta^{-6}) \times 10^{-6} I^2 + (3.8501\eta^{-2} + 0.1668\eta^{-4} - 0.00158\eta^{-6}) \times 10^{-9} I^3$$

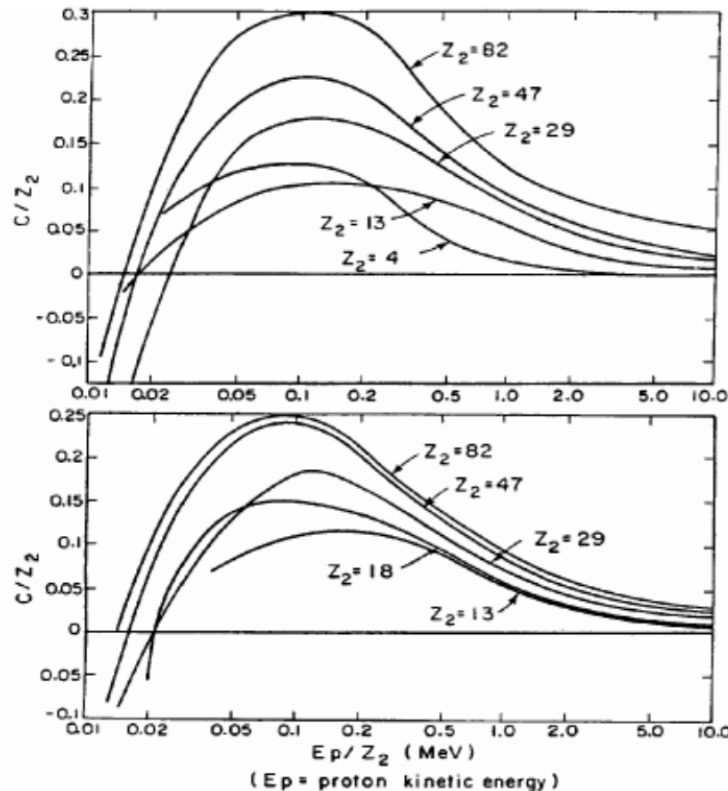
Valida per $\eta = \beta \gamma > 0.1$

In ambito astrofisico, le correzioni di densità e di shell sono in genere trascurabili, ma sono importanti nelle applicazioni di rivelatori di particelle



Shell correction

$$\frac{-dE}{dX} = K z^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{2 m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{max}}{I^2} - \beta^2 - \frac{\delta}{2} \left(\frac{C}{Z} \right) \right]$$



Shell corrections (C/Z) constitute a correction to slow particles (e.g for protons in the energy range of 1-100 MeV)

Correction for the assumption that particle velocity $\gg$ bound electron velocity

Assumption that electron is at rest not valid

Maximal about 6%

Calculation with various approximations

J. F. Ziegler, Applied Physics Reviews / J. Applied Physics, 85, 1249-1272 (1999).

<http://www.srim.org/SRIM/SRIMPICS/IONIZ.htm>

Copper: about 1% at $\beta\gamma=0.3$ (6 MeV Pion), decreases rapidly with velocity

Charged particle energy loss in matter

- At very low $\beta\gamma$, large energy loss due to atomic effects
- For large (and relevant) range of relativistic $\beta\gamma$, energy loss is small (minimum ionizing particle - “mip”)
- Ultra-relativistic particles lose energy mostly via gamma radiation

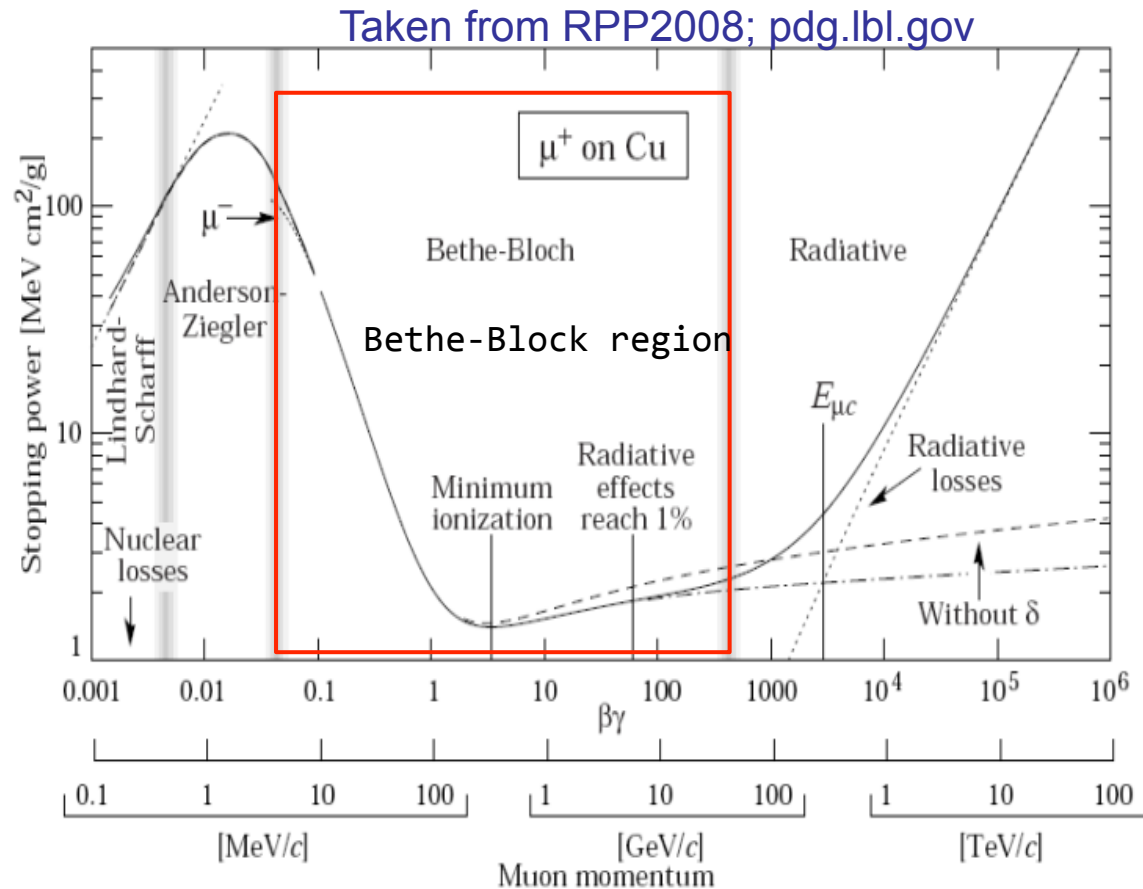


Fig. 27.1: Stopping power ($= \langle -dE/dx \rangle$) for positive muons in copper as a function of $\beta\gamma = p/Mc$ over nine orders of magnitude in momentum (12 orders of magnitude in kinetic energy). Solid curves indicate the total stopping power. Data below the break at $\beta\gamma \approx 0.1$ are taken from ICRU 49 [2], and data at higher energies are from Ref. 1.