

# *Particle Detectors*

## *Lecture 13*

*22/04/16*

a.a. 2015-2016

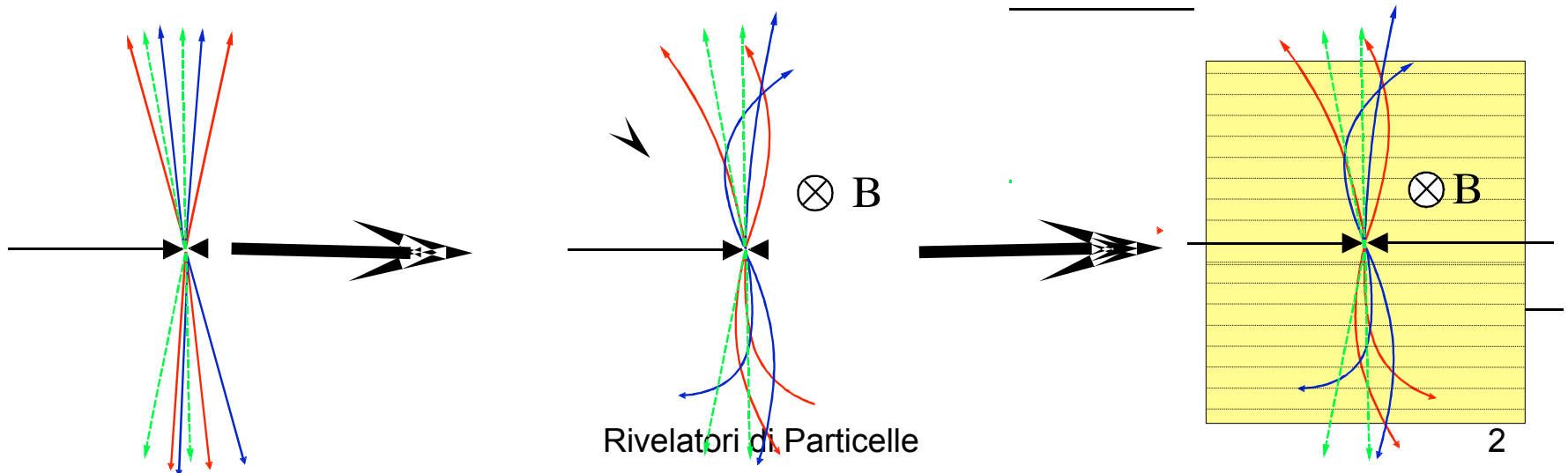
Emanuele Fiandrini

# Misure d'impulso

Per ottenere l'impulso  $\mathbf{p}$  di una particella si misura generalmente:

-la deflessione della particella tramite la misura della traiettoria della particella in un campo magnetico  $B$

E' necessario un apparato che permette di misurare le coordinate del punto di passaggio della particella in un numero sufficiente di punti, cioè un apparato che mi permette la misura di tracce (insieme di camere **MWPC** o a **deriva** o **silici**) posto in un campo magnetico (possibilmente uniforme), genericamente definiti **spettrometri magnetici**.



# Charged Particle Tracking and Momentum Resolution

We measure the momentum of a charged particle by determining its trajectory in a known magnetic field.

We measure the trajectory of the charged particle by measuring its coordinates

(x, y, z or r, z,  $\phi$ , or r,  $\theta$ ,  $\phi$ ) at several points in space.

Simplest case: determine radius of circle with 3 points

coordinates in space are usually measured using one or more of the following devices:

Wire Chamber	low spatial resolution ( $\approx 1-2$ mm)
Drift Chamber (or TPC)	moderate spatial resolution ( $50-250 \mu\text{m}$ )
Silicon detector	high spatial resolution ( $\approx 5-20 \mu\text{m}$ )

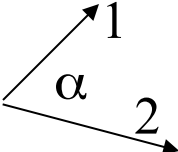
*Better momentum resolution  $\Rightarrow$  better mass resolution  $\Rightarrow$  better physics*

Many particles of interest are observed via their decay products:  $Z^0 \rightarrow e^-e^+$ ,  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ ,  $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^+$

By measuring the momentum of the decay products we measure the mass of the parent.

$$m \rightarrow m_1 + m_2 \Rightarrow m^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2[(m_1^2 + p_1^2)^{1/2} (m_2^2 + p_2^2)^{1/2} - \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cos \alpha]$$

For fixed  $\alpha$ :  $\sigma_{m^2} / m^2 \propto \sigma_p / p$



# Misure d'impulso

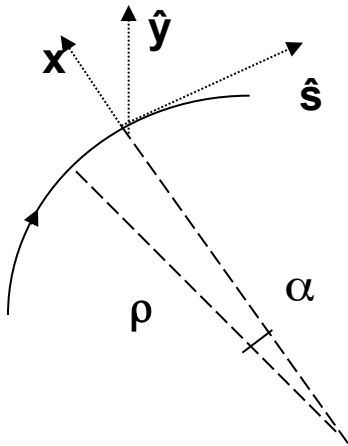
L'equazione del moto, nel caso di  $p \perp F$  e'

Con **|p|** costante.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q \left( \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

La forma di questa equazione cioè  $d\mathbf{v}/dt$  ortogonale a  $\mathbf{v}$  ed a  $\mathbf{B}$  implica moto circolare nel piano  $\perp \mathbf{B}$ .

Per ricavare il raggio di curvatura conviene utilizzare un sistema di coordinate curvilineo:



con  $x, y$  ed  $s$  sistema destrorso,  $y \perp$  al piano  $x, s$ .

$\rho$  raggio di curvatura

$s$  coordinata curvilinea

$\mathbf{B}$  diretto lungo l'asse  $y$  ( $B_y$ )

L'equazione di Lorentz diventa:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q \left( \vec{v} \times \vec{B} \right) \Rightarrow \frac{dp}{dt} \hat{s} + p \frac{d\hat{s}}{dt} = -qvB_y \hat{x}$$

# Misure d'impulso

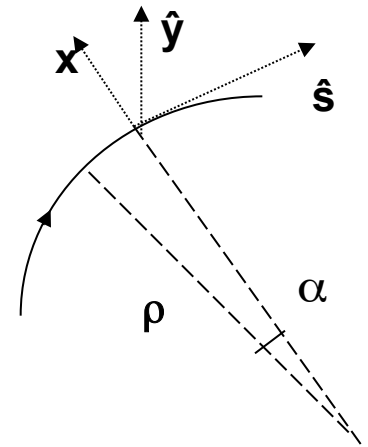
L'equazione di Lorentz :  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dp}{dt} \hat{s} + p \frac{d\hat{s}}{dt} = -qvB_y \hat{x}$   $v = \text{velocità}$

può essere semplificata osservando che  $|\mathbf{p}| = \text{costante}$  e

$$\frac{d\hat{s}}{dt} = -\frac{d\alpha}{dt} \hat{x} = -\frac{d\alpha}{ds} \frac{ds}{dt} \hat{x} = \frac{-v}{\rho} \hat{x}$$

$$-p \frac{v}{\rho} \hat{x} = -qvB_y \hat{x}$$

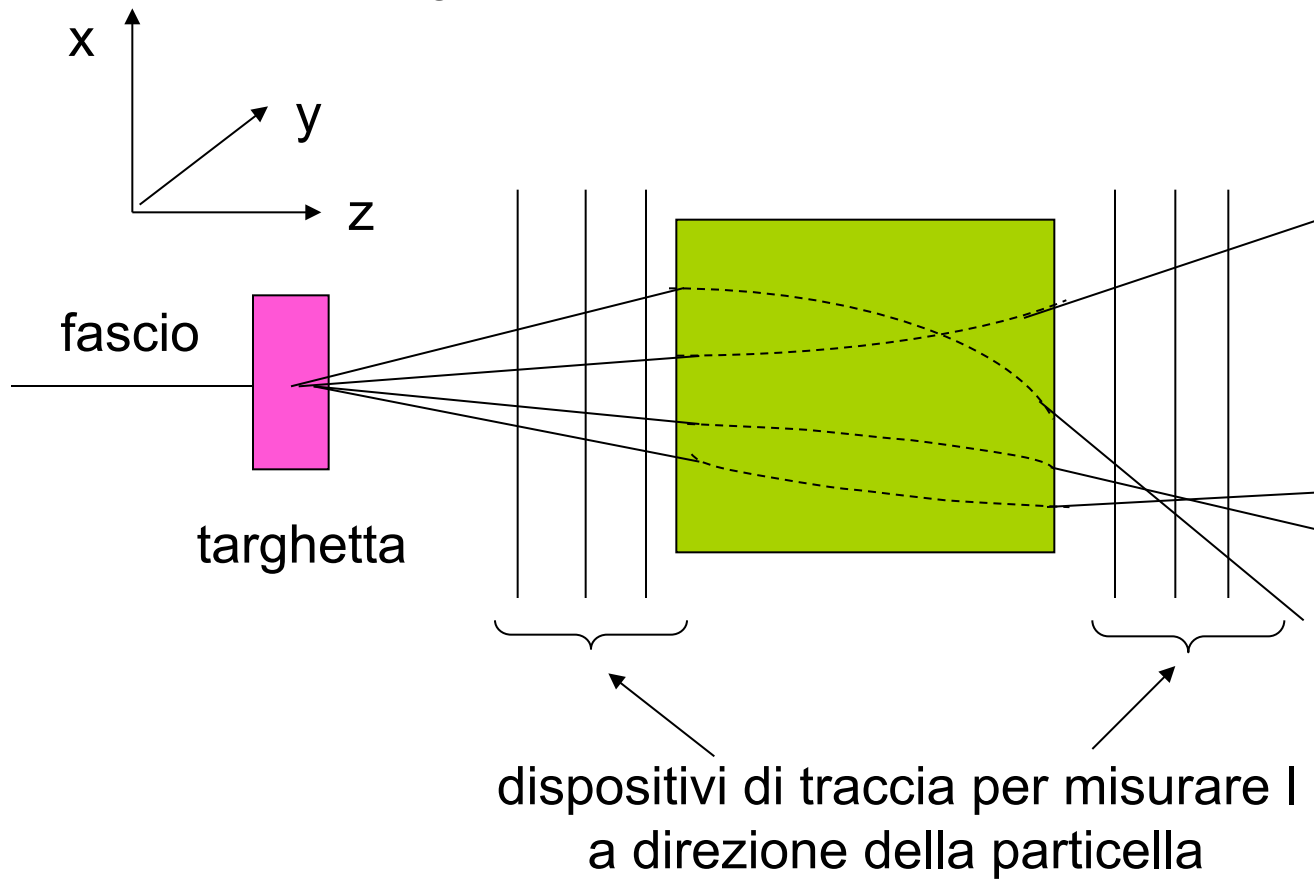
$$\rho = (p/qB_y)$$



- ☐ Fissato B, il raggio di curvatura della particella dipende da P/Q.  
**R = P/Q e' detta rigidita' (magnetica) della particella.**
- ☐ Particelle con la stessa rigidita' hanno la stessa traiettoria nel campo B.
- ☐ Per determinare il momento P dalla misura del raggio di curvatura occorre conoscere il valore assoluto della carica
- ☐ Il verso della curvatura dipende dal segno della carica

# Misure d'impulso

Misura della deflessione: la direzione della particella e' misurata prima e dopo la regione in cui c'e' campo magnetico

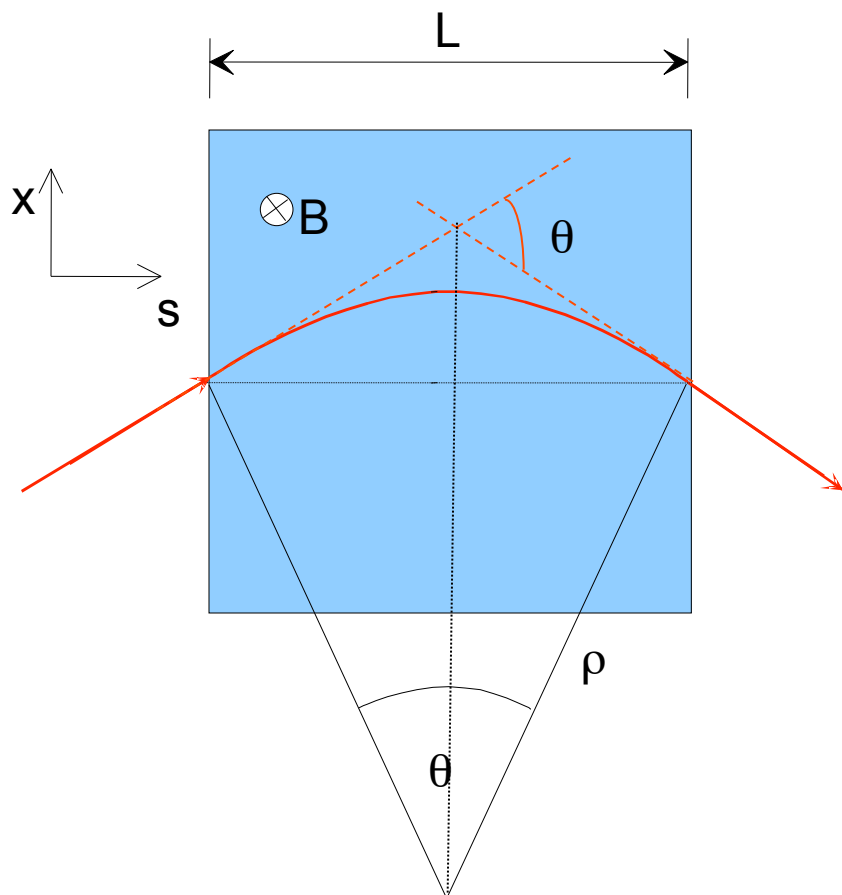


Rappresentazione schematica di uno spettrometro magnetico

# Misure d'impulso

La deflessione nel piano  $xs$  si vede dalla figura:.

$$\sin(\theta/2) = L/2\rho$$



$$\rho = p/qB, \text{ perció' } \sin(\theta/2) = LqB/2p$$

Per piccole deflessioni

$$\sin(\theta/2) \approx \theta/2, \text{ quindi}$$

$$\theta \approx LqB/p, \text{ cioè' } p = qBL/\theta$$

o

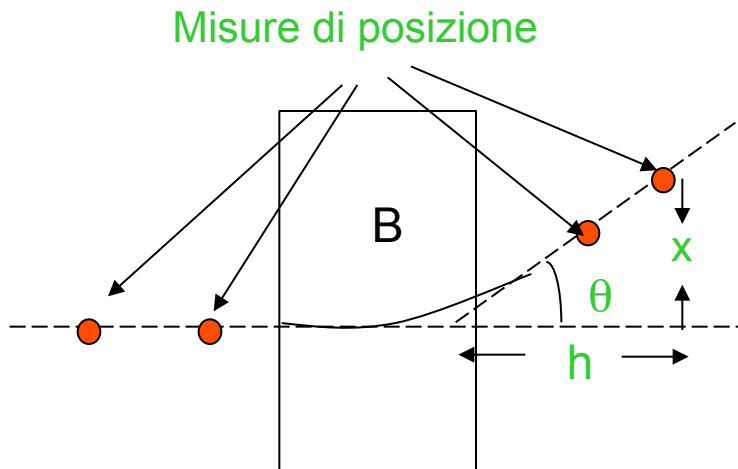
$$R = BL/\theta$$

$$\text{Con } R = p/q$$

# Misure d'impulso

## Precisione dell'apparato tracciante.

Le traiettorie prima di entrare nel magnete e dopo essere uscite sono rettilinee  
→ misura di  $\theta$ .



$$\text{da } p = qB_y L \frac{1}{\theta} \Rightarrow$$

$$\left| \frac{dp}{d\theta} \right| = qB_y L \frac{1}{\theta^2} = \frac{p}{\theta}$$

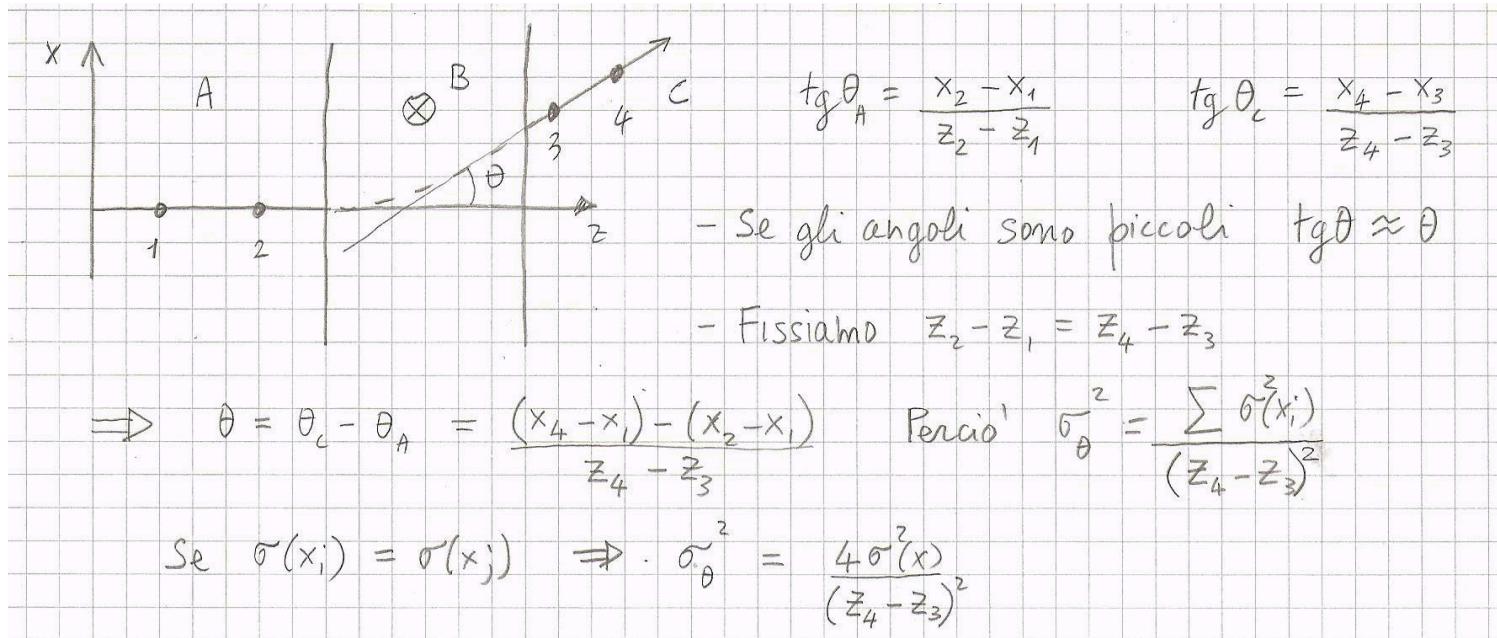
$$\Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{d\theta}{\theta} \Rightarrow \frac{\sigma(p)}{p} = \frac{\sigma(\theta)}{\theta}$$

Ovviamente dato che  $p = qR \rightarrow dp/p = dR/R$

Per determinare  $\theta$  devo avere almeno 4 punti ( 2 prima e 2 dopo il magnete), perché mi servono 2 direzioni.



# Misure d'impulso



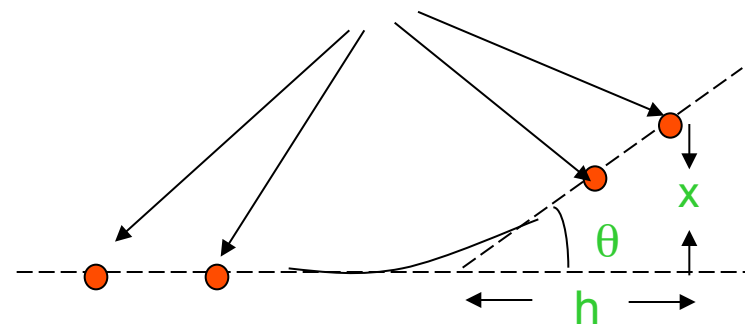
Ricordando che

$$\frac{\sigma(p)}{p} = \frac{\sigma(\theta)}{\theta} \Rightarrow \frac{\sigma(p)}{p} = \frac{2\sigma(x)/h}{qB_y L} \cdot p \quad h = z_4 - z_3$$

$\sigma(p) \propto \sigma(x) p^2 / BLh$

- dipende dal quadrato di p
- dipende dalla risoluzione spaziale della coordinata nel piano di curvatura
- dipende dal braccio di leva del magnete

Misure di posizione



$$\frac{\sigma(p)}{p} = \frac{\sigma(\theta)}{\theta} \Rightarrow$$

## Misure d'impulso

$$\frac{\sigma(p)}{p} = \frac{2\sigma(x)/h}{qB_y L} \cdot p$$

$p = qR$  Per esempio con  $L = 1\text{m}$ ,  $h = 1\text{m}$ ,  $B = 1\text{T}$  e  $\sigma_x = 0.2\text{ mm}$ , si ha

$$\frac{\sigma(p)}{p} = 1.3 \times 10^{-3} \cdot p \quad [GeV/c]$$

A seconda della qualità dell'apparato si possono ottenere risoluzioni :

$$\frac{\sigma(p)}{p} = (10^{-3} \div 10^{-4}) \cdot p \quad [GeV/c]$$

In esperimenti di astroparticelle e' tradizione definire la Maximum Detectable Rigidity, cioe' la rigidita' o momento tale che

$$\frac{\sigma(p_{\max})}{p_{\max}} = 1$$

Uno spettrometro magnetico con risoluzione data dalla (1) tipicamente può misurare impulsi fino a :

$$p_{\max} = 1 \div 10 [TeV/c]$$

Un altro metodo utilizzato per determinare l'impulso è la misura della sagitta ( $s$ ), in cui le coordinate lungo la traiettoria sono misurate NEL campo magnetico.

Momentum is determined by measurement of **track curvature**  $\kappa = 1/\rho$  in B field:

Measure **sagitta**  $s$  of the track. For the momentum component transverse to B field:

$$p_T = qB\rho \quad q = ez$$

Units:  $p_T[\text{GeV}] = 0.3B[\text{T}]\rho[\text{m}]z$

$$\frac{L/2}{\rho} = \sin\frac{\theta}{2} \approx \frac{\theta}{2} \quad (\text{for small } \theta) \Rightarrow \theta \approx \frac{L}{\rho} = \frac{0.3B \cdot L}{p_T} z$$

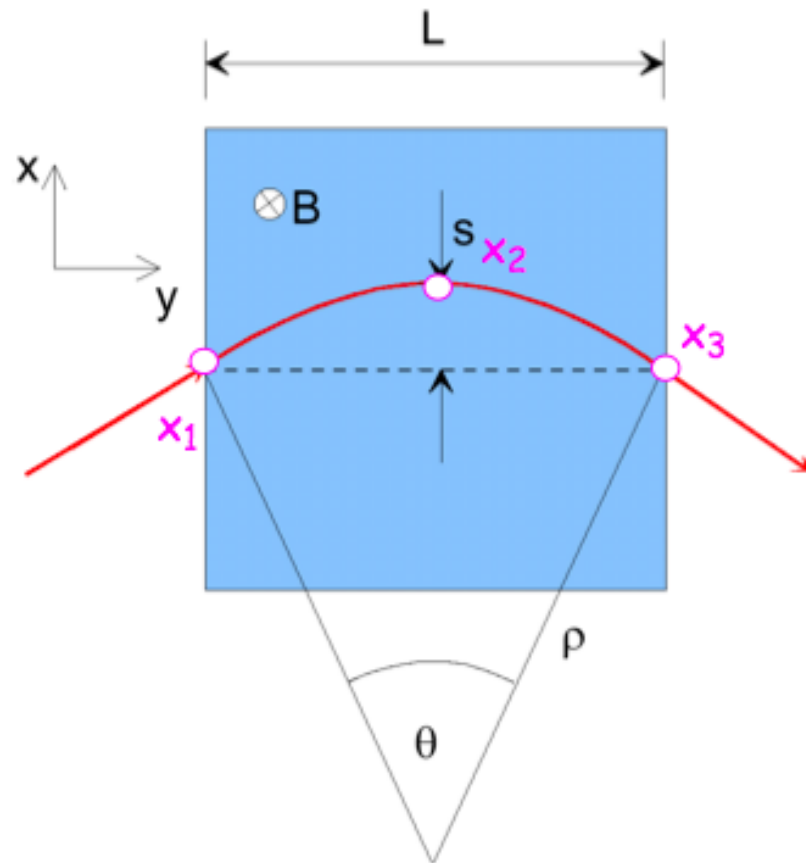
$$s = \rho \left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right) \approx \rho \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\theta^2}{4}\right)\right) = \rho \frac{\theta^2}{8} \approx \frac{0.3L^2B}{8 p_T} z$$

For the simple case of **three measurements**:

$$s = x_2 - (x_1 + x_3)/2 \Rightarrow ds = dx_2 - dx_1/2 - dx_3/2$$

with  $\sigma_x \approx dx_i$  uncorrelated error of single measurement:

$$\sigma_s^2 = \sigma_x^2 + \frac{\sigma_x^2}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}\sigma_x^2$$



$$\frac{\sigma_{p_{\perp}}}{p_{\perp}} = \frac{\sigma_s}{s} = \frac{\sqrt{3/2}\sigma_x}{Z(0.3BL^2)/(8p_{\perp})} = \frac{8p_{\perp}\sqrt{3/2}\sigma_x}{0.3BL^2 Z} = 32.6 \frac{p_{\perp}\sigma_x}{BL^2 Z} \text{ (m, GeV/c, T)}$$

For 3 points the relative momentum resolution is given by:  $\frac{\sigma(p_T)}{p_T} = \frac{\sigma_s}{s} = \sqrt{\frac{3}{2}}\sigma_x \cdot \frac{8p_T}{0.3BL^2}$

- degrades **linearly** with **transverse momentum**
- improves **linearly** with increasing **B field**
- improves **quadratically** with **radial extension** of detector

In the case of  $N$  equidistant measurements according to **Gluckstern** [NIM 24 (1963) 381]:

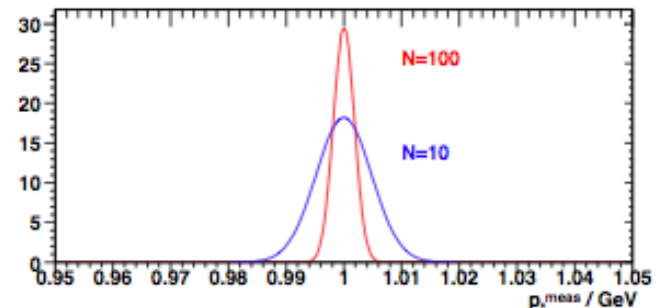
$$\boxed{\frac{\sigma(p_T)}{p_T} = \frac{\sigma(\kappa)}{\kappa} = \frac{\sigma_x \cdot p_T}{0.3BL^2} \sqrt{\frac{720}{(N+4)}}} \quad (\text{for } N \geq 10, \text{ curvature } \kappa = 1/\rho)$$

- Increases only as  $N^{1/2}$  with the nbr. of coord measurement

Example: For  $p_T = 1\text{GeV}$ ,  $L = 1\text{m}$ ,  $B = 1\text{T}$ ,  $\sigma_x = 200\mu\text{m}$  and  $N = 10$  one obtains:

$$\frac{\sigma(p_T)}{p_T} \approx 0.5\% \quad \text{for a sagitta } s \approx 3.8\text{cm}$$

Important track detector parameter:  $\frac{\sigma(p_T)}{p_T^2} \text{ (%/GeV)}$



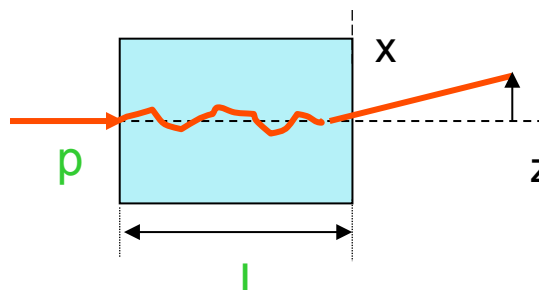
# Cfr.: Effect of Multiple Scattering on Resolution

The position measurement contribution to the momentum resolution is only part of the story. We also have contributions from multiple scattering (MS) and angular resolution. Previously we saw that the momentum resolution contribution to MS was given by:

## ■ Approximate relation (PDG):

$$\theta_0 = \theta_{plane}^{RMS} \approx \frac{13.6 MeV}{p\beta c} z \sqrt{\frac{L}{X_0}} \quad \text{i.e.} \quad \theta_0 \propto \frac{1}{\beta p} \sqrt{\frac{L}{X_0}}$$

Charge of incident particle  $\rightarrow z$       Radiation length of absorbing material  $\rightarrow X_0$



## ■ Apparent sagitta due to multiple scattering (from PDG):

■  $s_{app} = r\theta^2/8$  e  $r = L/\theta$  per cio'  $s_{app} = L\theta/8$

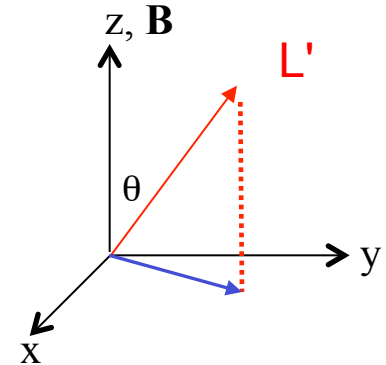
Il calcolo esatto da'

$$s_{plane} = \frac{L\theta_0}{4\sqrt{3}}$$

# More on Momentum Resolution

$$\frac{\sigma_{p_T}}{p_T} = \frac{s_{plane}^{rms}}{s_B} = \frac{\frac{L'}{4\sqrt{3}} \frac{13.6 \times 10^{-3}}{p\beta} z \sqrt{L'/X_0}}{0.3BL^2 z / (8p_{\perp})} \quad \text{with } L' = L / \sin \theta, p_{\perp} = p \sin \theta$$

If a particle enters the B field  
with an angle  $\theta$



$$\frac{\sigma_{p_T}}{p_T} = \frac{52.3 \times 10^{-3}}{\beta B \sqrt{LX_0} \sin \theta}$$

**MS depends on the total path length ( $L'$ ) and momentum ( $p$ ).  
Bending in the magnetic field depends on  $p_{\perp}$  ( $=p \sin \theta$ ) and projected path length ( $L$ ).**

combined resolution is the two added in quadrature:

$$\left( \frac{\sigma_{p_{\perp}}}{p_{\perp}} \right)^2 = \left( \sqrt{\frac{720}{n+4}} \frac{\sigma_y p_{\perp}}{(0.3BL^2)} \right)^2 + \left( \frac{52.3 \times 10^{-3}}{\beta B \sqrt{LX_0} \sin \theta} \right)^2 \quad (\text{m, GeV/c, T})$$

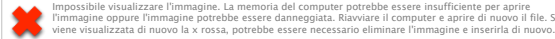
Technically speaking, the above is only the transverse momentum ( $p_{\perp}$ ) resolution.  
We want an expression for the total momentum resolution!

# Even More on Momentum Resolution

We can get an expression for the total momentum ( $p$ ) resolution using:

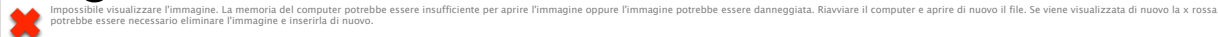


& treating  $\theta$  and  $p_{\perp}$  as independent variables. Using propagation of errors we find:



Often detectors measure the  $r$ - $\phi$  coordinate independently of the  $z$  coordinate. In these cases  $p_{\perp}$  and  $\theta$  are independent.

Putting it all together we have for the total momentum resolution:



GeV/c, T, m, radians

Position resolution

Multiple scattering

Angular resolution

While the above expression is only approximate it illustrates many important features:

- a)  $p_{\perp}$  resolution improves as  $B^{-1}$  and depends on  $p$  as  $L^{-2}$  or  $L^{-1/2}$ .
- b) For low momentum ( $\beta \rightarrow 0$ ), MS will dominate the momentum resolution.
- c) Improving the spatial resolution ( $\sigma_y$ ) only improves momentum resolution if the first term dominate.
- d) Angular resolution is not usually the most important term since  $\theta_{\min} \approx 30-45^\circ$  and  $\sigma_{\theta} \approx 10^{-3}$  rad.

For more detailed information must do a Monte Carlo simulation (GEANT+detector).

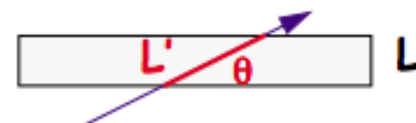
Include: hit efficiencies, discrete scattering off of wires, non-gaussian tails, etc, etc....



The contribution to the momentum error from  $MS$  is given by:

$$\left. \frac{\sigma(p_T)}{p_T} \right|_{MS} = \frac{\sigma^{MS}(s)}{s} = \frac{4 \frac{L'}{\sqrt{3}} \frac{13.6 \times 10^{-3}}{p\beta} z \sqrt{\frac{L'}{X_0}}}{0.3BL^2 z / (8p_T)} = \frac{0.053}{\beta B \sqrt{LX_0 \sin \theta}} \quad \text{with} \quad \begin{aligned} L' &= L / \sin \theta & \text{total path} \\ p_T &= p \sin \theta \end{aligned}$$

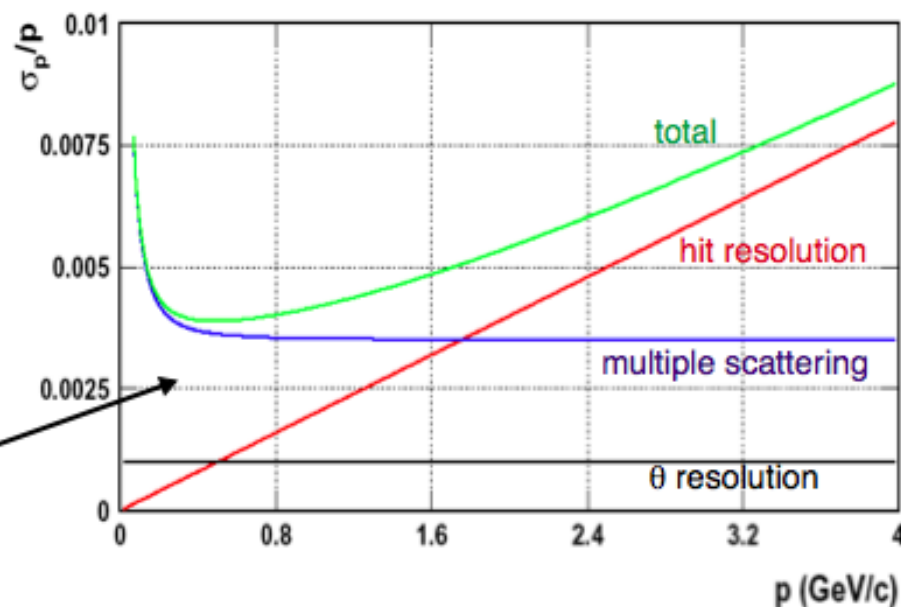
for  $\beta \rightarrow 1$  this part is momentum independent !



The combined total momentum error is:

$$\left( \frac{\sigma_p}{p} \right)^2 = \left( \sqrt{\frac{720}{N+4}} \frac{\sigma_x p \sin \theta}{0.3BL^2} \right)^2 + \left( \frac{0.053}{\beta B \sqrt{LX_0 \sin \theta}} \right)^2 + (\cot \theta \sigma_\theta)^2$$

Example for momentum dependence of individual contributions





# Still More on Momentum Resolution

Let's examine the momentum resolution equation for a **typical particle spectrometer**:

$$B=1.5\text{T}$$

$$\sigma_y=1.5\times 10^{-4}\text{ m}$$

$$N=50$$

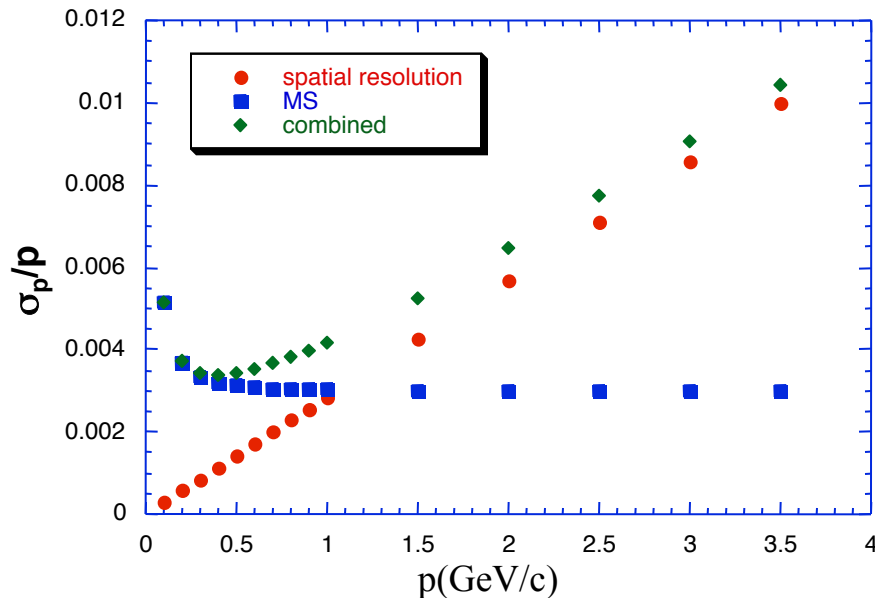
$$\sigma_\theta=10^{-3}\text{ radians}$$

$$L=0.8\text{ m}$$

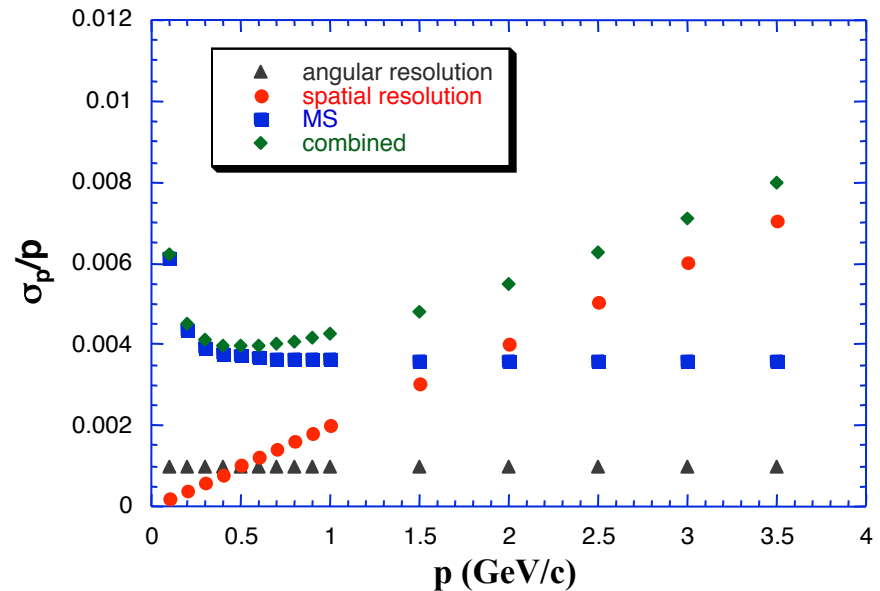
$$L_r=166.7\text{ m (gas+wires)}$$

$$\left(\frac{\sigma_p}{p}\right)^2 = \left(2.85 \times 10^{-3} p \sin \theta\right)^2 + \left(\frac{3.0 \times 10^{-3}}{\beta \sqrt{\sin \theta}}\right)^2 + \left(3.0 \times 10^{-3} \cot \theta\right)^2$$

momentum resolution at 90°



momentum resolution at 45°



# Misure d'impulso

L'impulso totale della particella è ottenuto da  $p_T$  e dall'angolo polare  $\theta$ :

$$p = p_T / \sin \vartheta$$

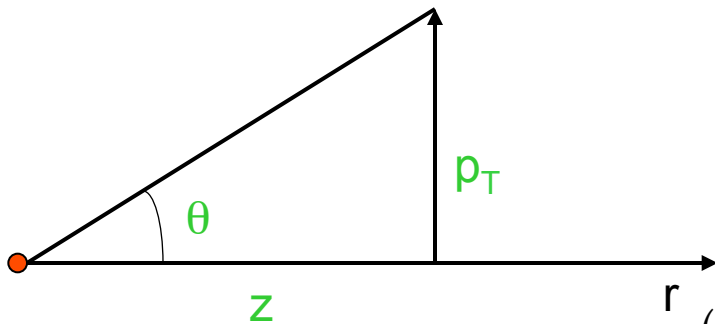
Come nel caso del piano  $r\phi$  (trasverso) anche la misura dell'angolo polare ha un errore, sia dovuto alla risoluzione del tracciatore, sia allo scattering multiplo.

Nel caso di una misura di 2 sole  $z$

$$\sigma(\vartheta) = \frac{\sigma(z)}{z} \sqrt{2}$$

Se la traccia è misurata in  $N$  punti equidistanti si avrà:

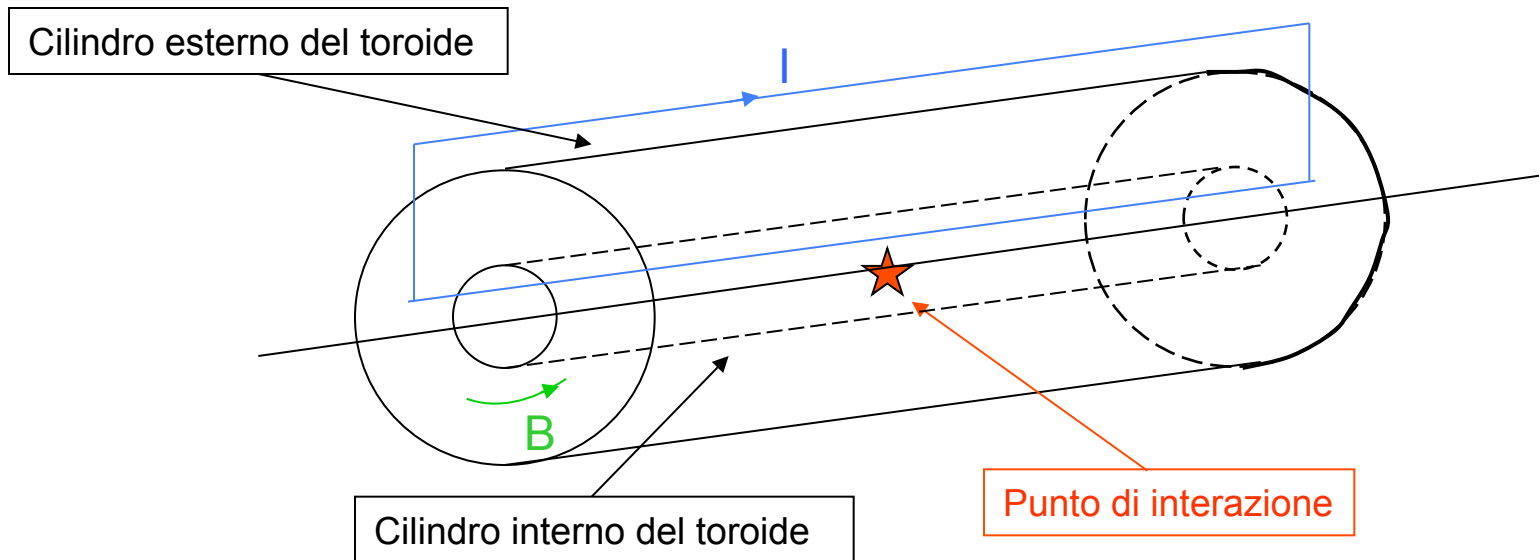
$$\sigma(\vartheta)^{tr} = \frac{\sigma(z)}{z} \cdot \sqrt{\frac{12(N-1)}{N(N+1)}}$$



# Misure d'impulso

Il **magnete toroidale** non disturba i fasci del collider, in quanto il campo è nullo nella zona dei fasci. Fra i 2 cilindri **B** è circolare e di intensità  $\sim 1/r$ .

Lo svantaggio maggiore in un toro è lo scattering multiplo nel cilindro interno del toro e nei suoi avvolgimenti. ➔ **nella risoluzione della misura d'impulso lo scattering multiplo e' importante. Domina a basse energie.**

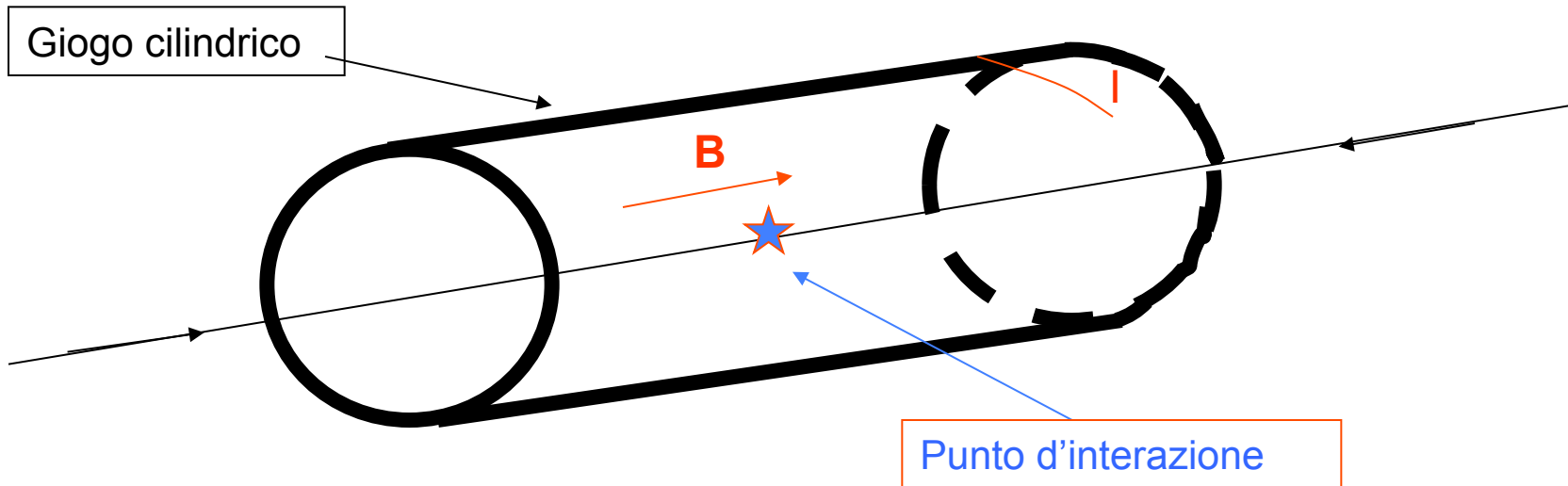


# Misure d'impulso

I magneti più comunemente usati in un collider sono quelli **solenoidali**. In questo caso i fasci viaggiano paralleli al campo magnetico quindi **non sono disturbati** dal magnete ( a parte effetti di bordo ).

Sia toroidi che solenoidi non causano radiazione di sincrotrone →

Vanno bene sia per anelli di collisione di protoni che di elettroni.



# Misure d'impulso

In un **solenoid**e i tracciatori sono installati all'interno del solenoide stesso e sono cilindrici.

Il campo magnetico (solenoidale quindi // ai fasci) agisce solo sulla componente trasversa dell' impulso delle particelle →

$$\left. \frac{\sigma(p_T)}{p_T} \right|^{trac} = \frac{\sigma(x)}{0.3BL^2} \cdot \sqrt{\frac{720}{(N+4)}} \cdot p_T$$

Dove  $\sigma(x)$  è la risoluzione per la coordinata nel piano ortogonale all'asse dei fasci.

Per determinare l'impulso devo misurare anche  $p_L$  (componente longitudinale dell'impulso) →

# Ionizzazione dei gas

Cominciamo a descrivere il dettaglio del meccanismo di raccolta della carica creata dal passaggio di una particella.

- Una volta generata dal deposito di energia, la carica deve "viaggiare" nel mezzo fino agli elettrodi di raccolta.
- Durante la propagazione possono avvenire vari processi che influenzano la raccolta di carica, sia in termini di efficienza di raccolta ( $Q_{\text{raccolta}}/Q_{\text{generata}}$ ) che di distribuzione spaziale e temporale del segnale → **risoluzione spaziale e temporale**.
- Tratteremo separatamente la ionizzazione in rivelatori a gas e quella in rivelatori a stato solido (ovvero silicio), con particolare attenzione alle problematiche relative alla precisione della misura di posizione, ovvero per applicazioni a misure di posizione, cioè dispositivi di tracciamento delle particelle. La trattazione formale è la stessa (cioè entrambi i tipi di rivelatori sono governati dallo stesso tipo di processi).

# Ionizzazione dei gas

- ❑ The primary modes of interaction involve ionization and excitation of gas molecules along the particle track. Although the excited molecules can at times be used to derive an appropriate signal (as in the gas scintillators discussed), the majority of gas-filled detectors are based on sensing the direct ionization created by the passage of the radiation.
- ❑ The term ***ionization* chamber** has conventionally come to be used **exclusively for the type of detector in which ion pairs are collected from gases**. The corresponding process in solids is the collection of electron-hole pairs in the semiconductor detectors. Ion chambers in principle are the simplest of all gas-filled detectors.
- ❑ **Their normal operation is based on collection of all the charges created by direct ionization within the gas through the application of an electric field.**
- ❑ Ion chambers can be operated in current or pulse mode.

# ***Ionizzazione dei gas***

As a fast charged particle passes through a gas, the interaction creates both excited molecules and ionized molecules along its path:  $x + A \rightarrow x + A^+ + e^-$ ,  $A^{++} + e^- + e^-$ , ....

- ❑ After a neutral molecule is ionized, **the resulting positive ion and free electron are called an *ion pair***, and it serves as the basic constituent of the electrical signal developed by the ion chamber. Ions can be formed either by direct interaction with the incident particle, or through a secondary process in which some of the particle energy is first transferred to an energetic electron or "delta ray", which in turn ionizes.
- ❑ The pairs, generated around the particle trajectory, form a ionisation cylinder of few tens of microns radius, which then evolves in time and space.
- ❑ Regardless of the detailed mechanisms involved, the practical quantity of interest is the total number of ion pairs created along the track of the radiation.



Ionization cylinder

Ground

Intrinsic collection time is O(tens of ns)

$t=5$  ns

Time evolution of current

300 um Silicon layer

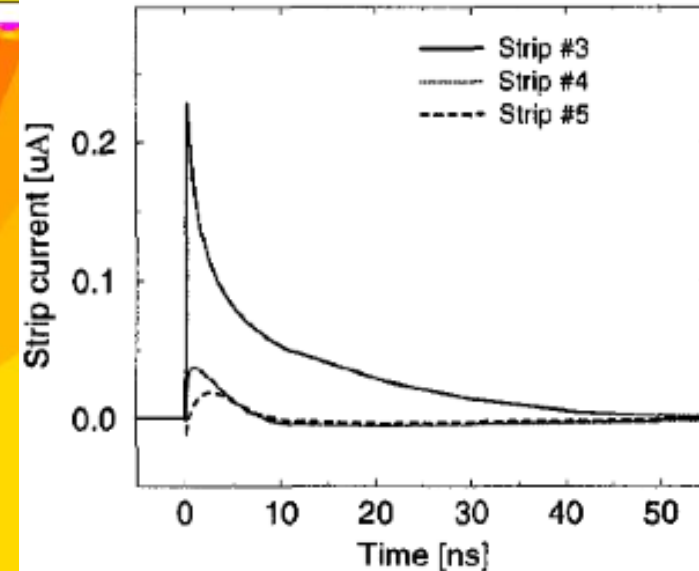
$t=0$

$V_{\text{bias}}$

Il raggio del cilindro di ionizzazione e' fissato essenzialmente dal range dei raggi  $\delta$  della ionizzazione secondaria

$t=12$  ns

$t=30$  ns



# Ionizzazione dei gas

Una particella carica (veloce) che attraversa un mezzo lascia una traccia di ionizzazione lungo la sua traiettoria (Bethe-Block):

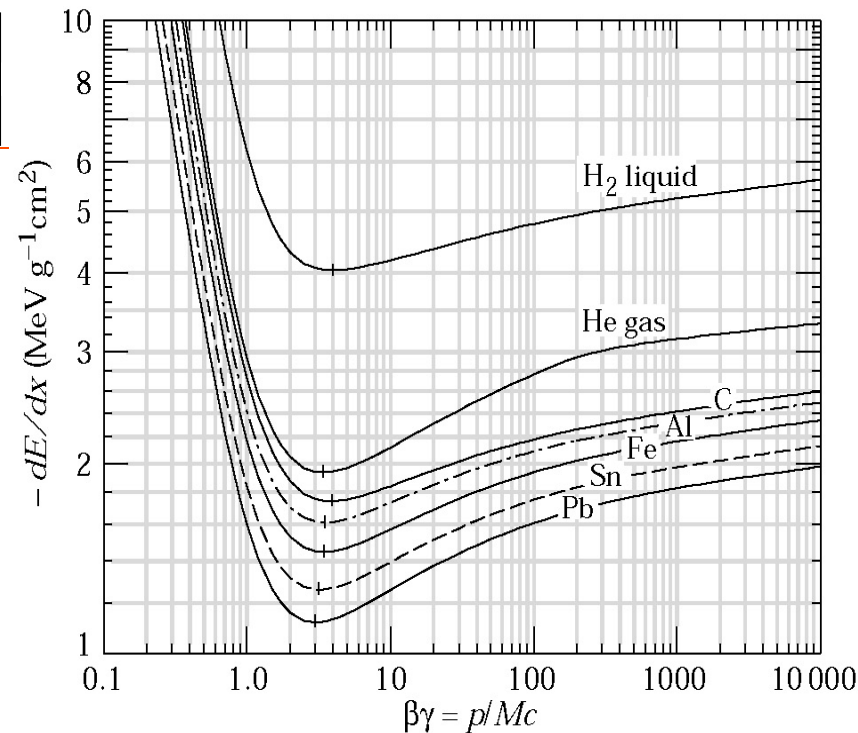
$$\frac{dE}{dx} = -KZ^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{2mc^2 \beta^2 \gamma^2 T_{\max}}{I^2} - \beta^2 - \frac{\delta(\gamma)}{2} \right]$$

Se il mezzo è molto sottile ( in gr/cm<sup>2</sup> ) i raggi  $\delta$  molto energetici possono lasciare il mezzo → per alcune applicazioni si usa la perdita di **energia ristretta**.

$$\frac{dE}{dx} = -KZ^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{2mc^2 \beta^2 \gamma^2 T_{\text{cut}}}{I^2} - \beta^2 - \frac{\delta(\gamma)}{2} \right]$$

dove  $T_{\text{cut}}$  non è più la massima energia trasferibile, ma è quella energia per cui il **range** dell'elettrone è **>** dello **spessore** del materiale.

Ricordiamo  $T_{\max} = 2mc^2 \beta^2 \gamma^2$



# Energy loss probability

- Trascurando lo spin dell'e- (ie scattering di Coulomb), la probabilita' di espellere un e- di energia fra E ed E + dE e' :

$$P(E)dE = k \frac{X}{E^2} dE \quad \text{where} \quad k = 2\pi N_A r_e^2 m_e c^2 Z^2 \frac{1}{A \beta^2} \quad (1)$$

Si ricordi la distribuzione del # di e- espulsi con E fra E ed E+dE in una collisione  $n(E) = -\frac{dN}{dE dx} = \pi N_e \left( \frac{e^4 Z^2}{8\pi^2 \epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \frac{1}{E^2}$

Infatti il # di interazioni e'  $dN = n dV$ .

dV e' il volume di interazione disponibile: per definizione di sezione d'urto, tutte gli atomi in  $dV = L d\sigma$  interagiscono con la particella incidente, quindi  $n L d\sigma$  e' il # di interazioni.

Poiche' osserviamo la distribuzione di energia,  $d\sigma = (d\sigma/dE)dE \equiv P(E)dE$  e quindi la (1)

La distribuzioni esatta per elettroni e'  $P(E)dE = k \frac{X}{E^2} (1 - \beta^2 \frac{E}{E_{\max}}) dE$

La distribuzioni esatta per particelle pesanti di spin ½ e'

$$P(E)dE = k \frac{X}{E^2} (1 - \beta^2 \frac{E}{E_{\max}} + \frac{1}{2} \frac{E}{E + mc^2}) dE$$

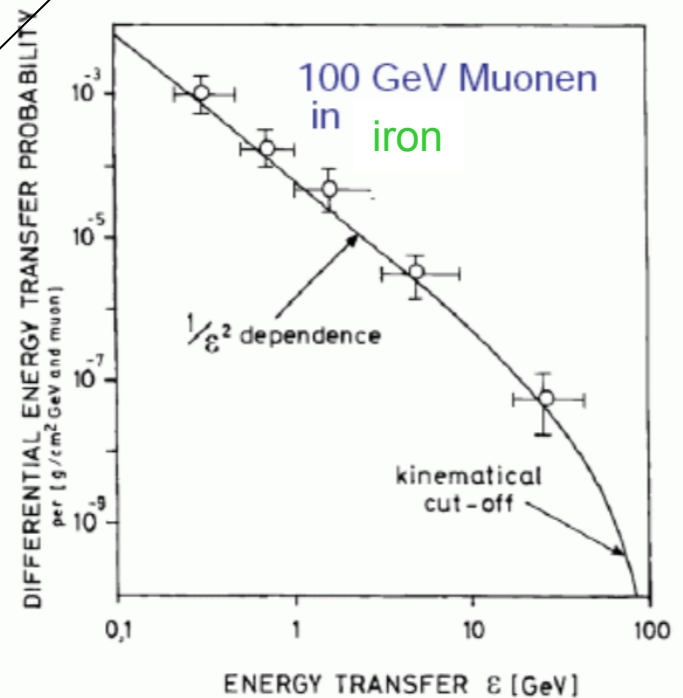
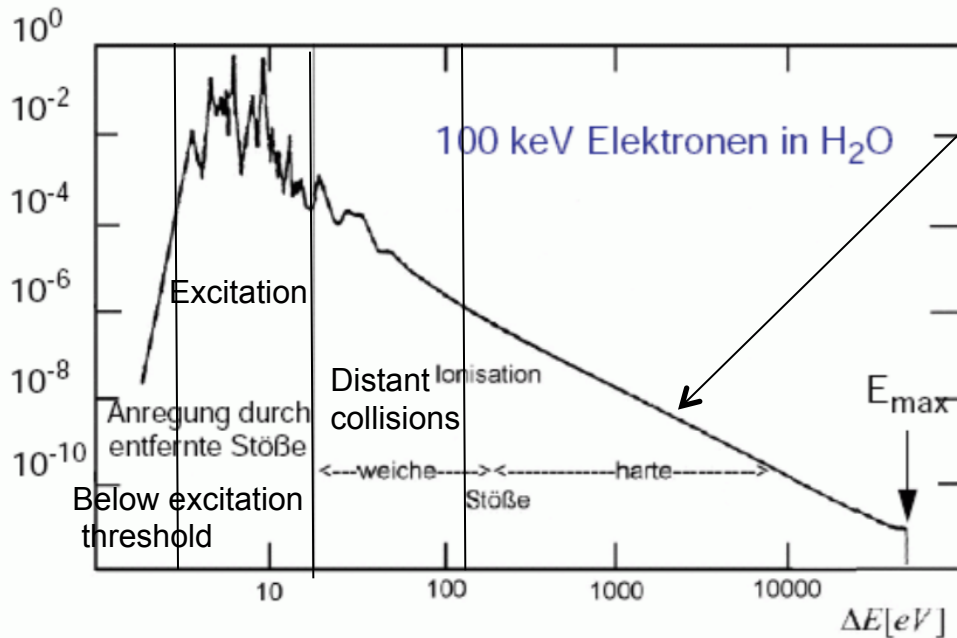
La probabilita' di emissione (cosi' come lo spettro) e' limitata dalla cinematica fra  $E_{\min} < E < E_{\max}$

# δ Electrons

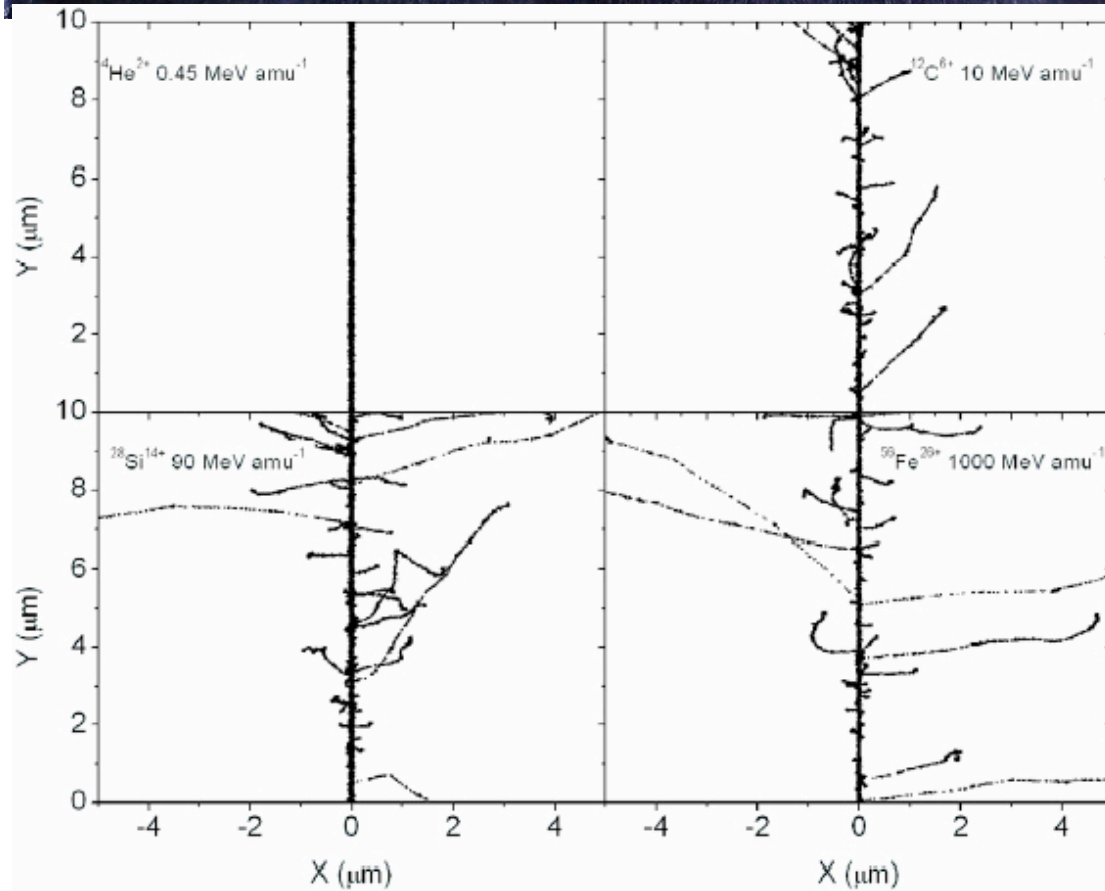
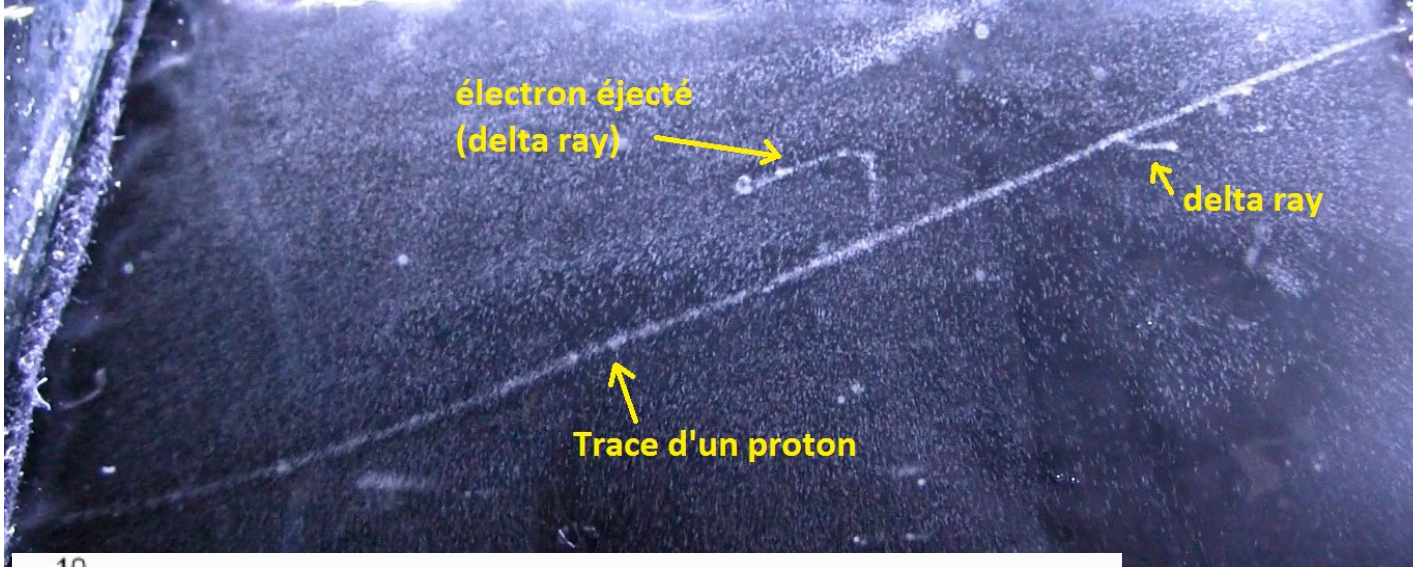
Energy distribution of secondary electrons:

$$F(T) = 1 - \beta^2 T / T_{max} \quad (\text{Spin } 0)$$

$$\frac{dN^2}{dT dx} = \frac{1}{2} k z^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \frac{F(T)}{T^2}$$



Example: 500 MeV pion in 300 μm Si: 5% produce an electron with T > 166 keV  
 important background in Cherenkov counter  
 Number of δ-electrons proportional z<sup>2</sup>/β<sup>2</sup>



Delta rays can make additional secondary ionization trails that:

- may escape the active volume, so their energy can not be collected → potential bias to energy deposit
- confuse the main track, making difficult the pattern recognition, that is the task of assigning a energy deposit to a given track.

That's why we hate  $\delta$ -rays<sup>20</sup>

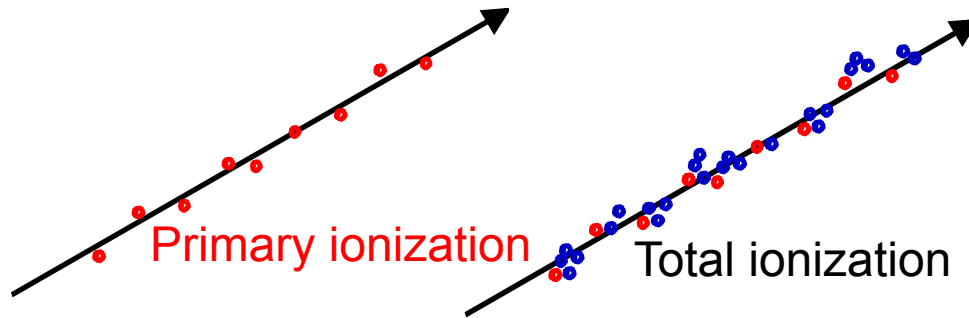


# ***Ionizzazione dei gas***

## **Meccanismi di ionizzazione**

- **Primaria** uno o più elettroni sono strappati dall'atomo dalla particella incidente. (e.g.  $\pi A \rightarrow \pi A^+ e^-$ ,  $\pi A^{++} e^- e^- \dots$ )
- **Secondaria istantanea**: gli elettroni sono strappati da atomi non colpiti dalla particella incidente. Questa ionizzazione è essenzialmente dovuta ai raggi  $\delta$  prodotti dalla ionizzazione primaria. (il potenziale di ionizzazione medio è  $\sim 10 - 20$  eV mentre la massima energia trasferibile all'atomo è  $2mc^2\beta^2\gamma^2$  con una distribuzione di energia  $\propto 1/E^2 \rightarrow$  è facile avere elettroni con energia cinetica dell'ordine dei KeV)
- **Secondaria ritardata** : gli elettroni sono emessi da stati intermedi eccitati  $A^*$ . Se il gas  $A$  contiene un altro gas  $B$  con potenziale di ionizzazione minore di quello di  $A$  posso avere  $\pi A \rightarrow \pi A^*$  e  $A^* B \rightarrow AB^+ e^-$ . (effetto Penning)

# Ionizzazione dei gas



Lohse and Witzeling, Instrumentation In High Energy Physics, World Scientific, 1992

Fast charged particles ionize atoms of gas.  
Often resulting **primary electron** will have enough kinetic energy ( $dN/dE \propto 1/E^2$ ) to ionize other atoms.

$$n_{total} = \frac{\Delta E}{W_i} = \frac{\frac{dE}{dx} \Delta x}{W_i}$$

$n_{total}$  - number of created electron-ion pairs  
 $\Delta E$  = total energy loss

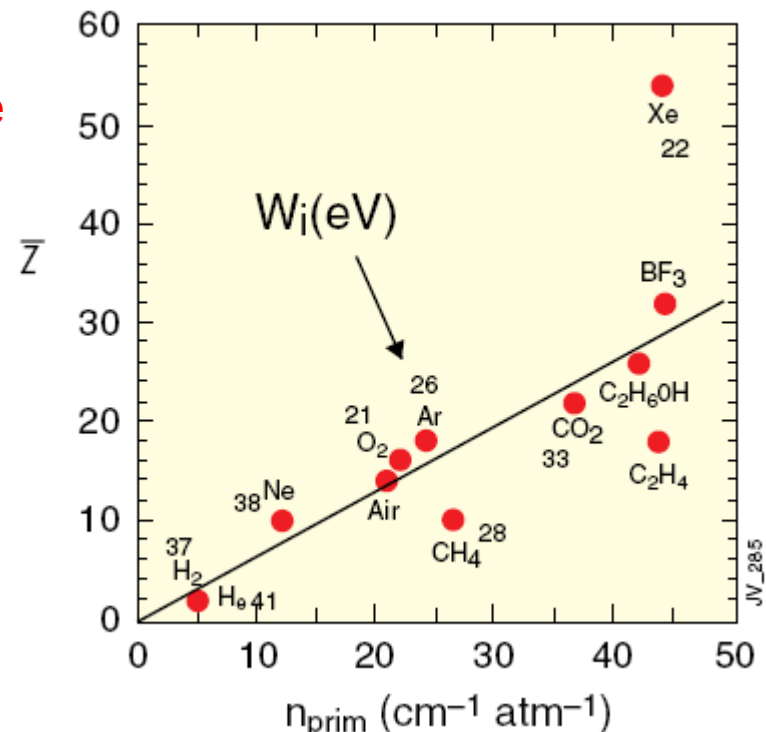
$$n_{total} \approx 3 \dots 4 \cdot n_{primary}$$

$W_i$  = effective <energy loss>/pair

**$W_i$  - NOT the ionisation potential**

$$W_i N_i = N_i I_0 + E_{ex} N_{ex}$$

( $I$ =mean ion. Pot., mean  $E_{ex}$  excitation energy)



Number of primary electron/ion pairs in frequently used gases for MIP.

# Ionizzazione dei gas

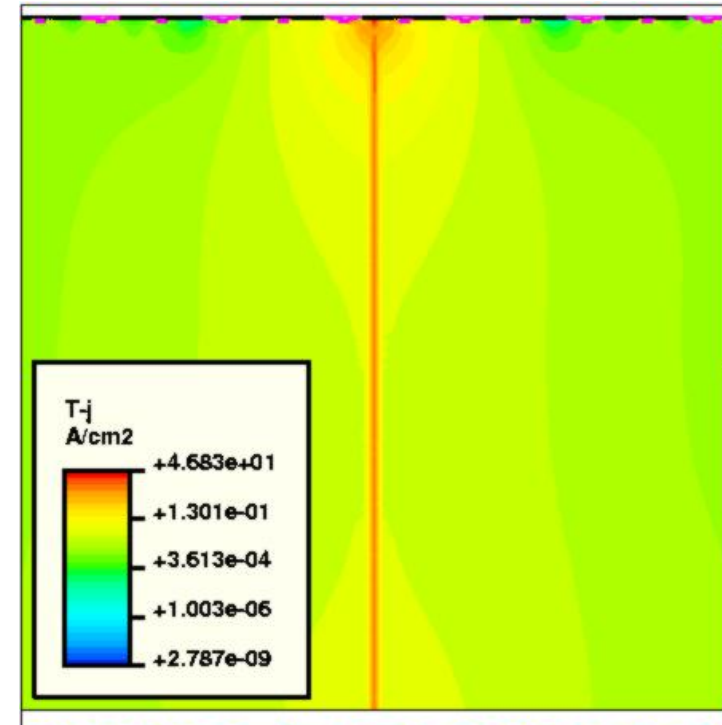
I raggi  $\delta$  non troppo energetici ( $E \ll E_{\max}$ ) sono emessi quasi ortogonali alla direzione di volo della particella incidente ( $\cos^2\theta = E/E_{\max}$ ), ma... lo scattering multiplo randomizza la direzione del moto dei raggi  $\delta$ , che diventa completamente casuale dopo pochi  $\mu\text{m}$ .

Il range  $R_T$  di un raggio  $\delta$  di energia  $E$  può essere calcolato integrando la Bethe-Block sulla traiettoria, richiedendo che l'integrale sia  $= E$ , ma lo scattering multiplo rende complicato il calcolo.

- si usa un range empirico (ottenuto da misure di assorbimento). Andamento tipico:  $R = AE^b$
- In Ar, per i primari  $R_p = 0.71 E^{1.72}$  ( $E$  in MeV ed  $R_p$  in  $\text{gcm}^{-2}$ ) valida fino a  $\sim 100$  KeV

In argon un elettrone di 1 KeV si ferma in  $\sim 50 \mu$ , mentre uno di 10 KeV fa  $\sim 1.5$  mm.

Il range medio dei delta fissa il raggio del cilindro di ionizzazione iniziale creato dalla particella incidente. Ai fini pratici può essere considerato unidimensionale (ma non sempre).

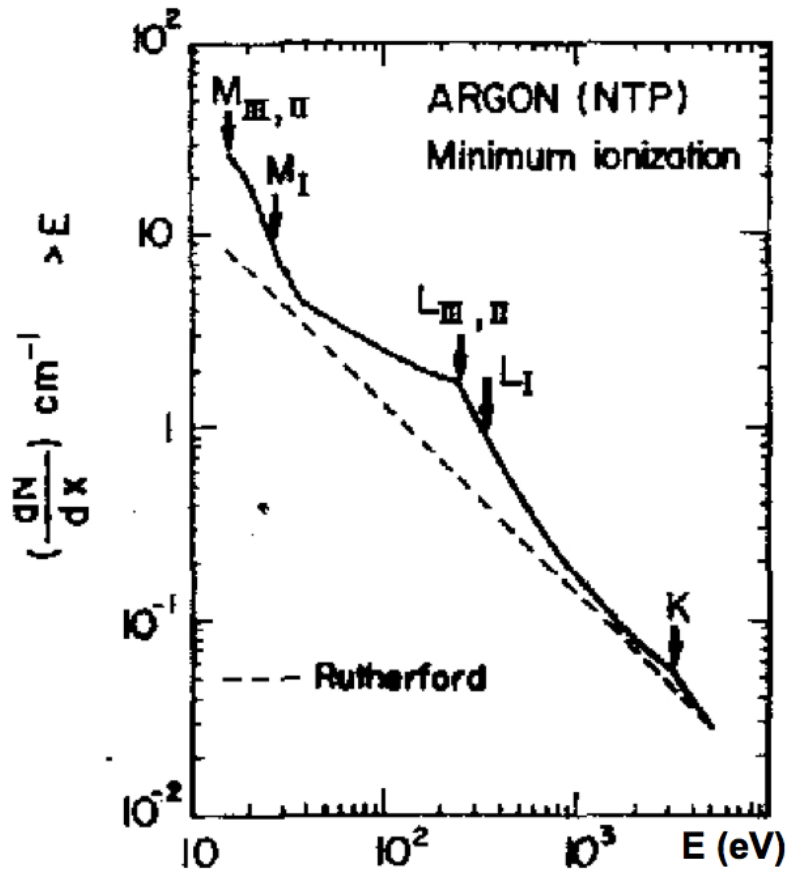


Cilindro di ionizzazione



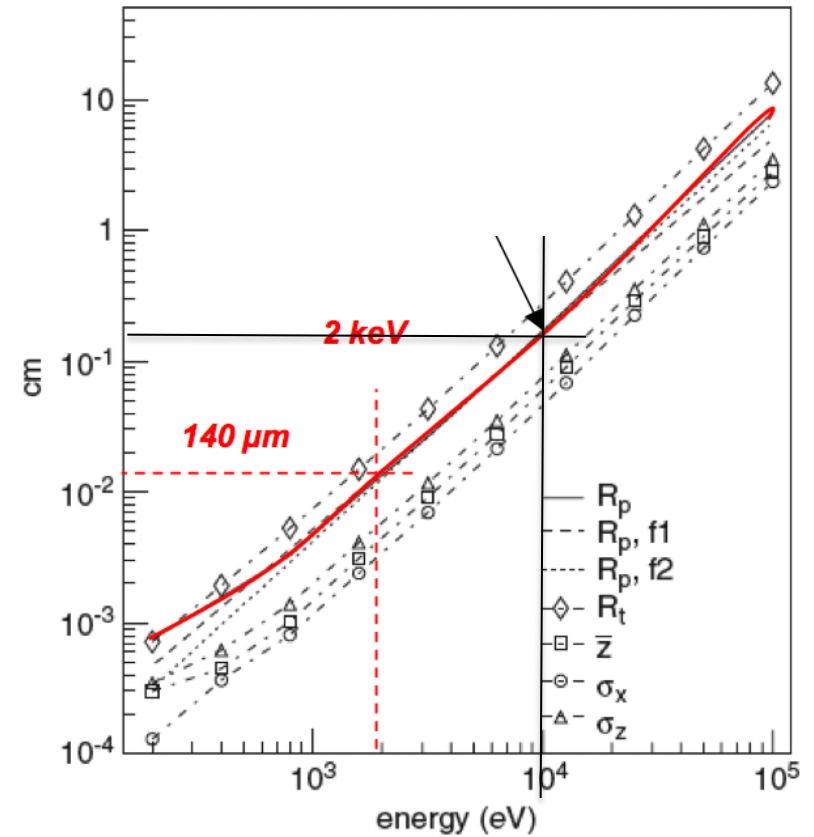
# PROBABILITY AND RANGE OF DELTA ELECTRONS

PROBABILITY FOR AN ELECTRON OF ENERGY  $> E$ :



*F. Lapique and F. Piuz,  
Nucl. instr. and Meth. 175(1980)297*

ELECTRON RANGE IN ARGON STP:



*I. B. Smirnov,  
Nucl. Instr. and Meth. A554(2005)474*

# ***Ionizzazione dei gas***

At minimum, the particle should transfer  $\delta E = E_{\text{ion}}$  of the gas molecule for the ionization process to occur. In most gases  $E_{\text{ion}} = 10\text{-}25\text{ eV}$ .

However, there are other mechanisms by which the incident particle may lose energy within the gas that do not create ions. Examples are excitation processes in which an electron may be elevated to a higher bound state in the molecule without being completely removed or atom excited as seen for the Fano factor.

**Therefore, the average energy lost by the incident particle per ion pair formed (defined as the W-value) is always substantially greater than the ionization energy.**

$$wN_i = N_i I_0 + E_{\text{ex}} N_{\text{ex}}$$

Empirical observations show that it is a remarkably constant parameter for many gases and different types of radiation.

A typical value is 25-35 eV/ion pair.

For an incident 1 MeV particle, if fully stopped in the gas,  $N_{\text{pair}} \approx 30,000$  ion pairs.

# Ionizzazione dei gas

Gas	Z	A	$E_{\text{ex}}$ eV	$E_i$ eV	$I_0$ eV	$W_i$ eV	$dE/dx$ MeV/g cm <sup>-2</sup>	$dE/dx$ KeV/cm	$n_p$ i.p/cm	$n_T$ i.p/cm
Ar	18	39.9	11.6	15.7	15.8	26	1.47	2.44	28	94
Kr	36	83.8	10.0	13.9	14.0	24	1.32	4.60	22	192
Xe	54	131.3	8.4	12.1	12.1	22	1.23	6.76	44	307
CO <sub>2</sub>	22	44	5.2	13.7	13.7	33	1.62	3.01	34	91
CH <sub>4</sub>	10	16		15.2	13.1	28	2.21	1.48	16	53
C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	34	58		10.6	10.8	23	1.86	4.50	46	195

Dove:  $E_{\text{ex}}$  = energia minima di eccitazione;  $E_i$  = energia minima di ionizzazione;  
 $I_0 = I/Z$  = potenziale efficace medio di ionizzazione per elettrone atomico;  
 $W_i$  = perdita di energia media per produrre una coppia ione-elettrone;  
 $dE/dx$  = perdita di energia per particelle al minimo (MIP);  
 $n_p$  = numero di coppie primarie;  $n_T$  = numero totale di coppie.

Nel caso di composti e miscugli Z, A ed I sono valori medi.

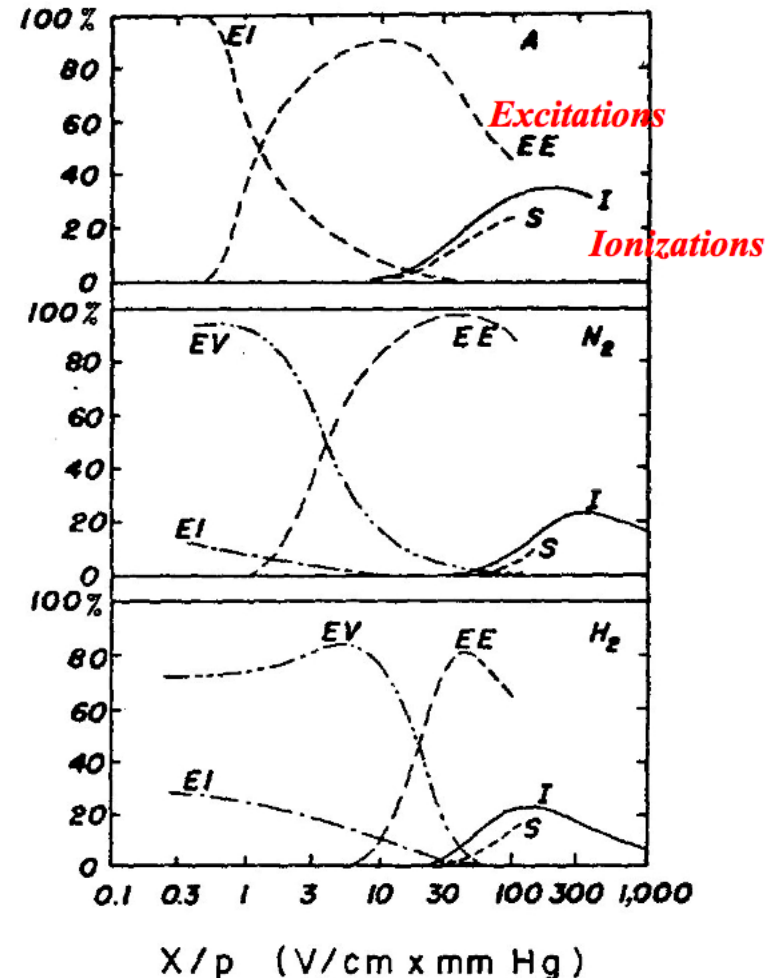
# HIGH FIELD-INELASTIC COLLISIONS

## MAIN ELECTRON-MOLECULE INELASTIC PROCESSES:

1) $A+e \Rightarrow A^++e+e$	Ionisation by electronic impact.
2) $A+e \Rightarrow A^++e$	Excitation by electronic impact.
3) $A^++e \Rightarrow A+e$	Deexcitation by electronic collision.
4) $A+h\nu \Rightarrow A^*$	Photo-excitation (absorption of light).
5) $A^* \Rightarrow A+h\nu$	Photo-emission (radiative deexcitation).
6) $A+h\nu \Rightarrow A^++e$	Photoionisation.
7) $A^++e \Rightarrow A+h\nu$	Radiative recombination.
8) $A^++B+e \Rightarrow A+B$	Three body recombination.
9) $A^++B \Rightarrow A+B^*$	Collisional deexcitation.
10) $A^++B \Rightarrow A+B^++e$	Penning effect.
11) $A^++B \Rightarrow A+B^+$	Charge exchange.
12) $A^++B \Rightarrow A^++B^++e$	Ionisation by ionic impact.
13) $A+B \Rightarrow A^++B$	Excitation by atomic impact.
14) $A+B \Rightarrow A^++B+e$	Ionisation by atomic impact.
15) $A+e \Rightarrow A^-$	Formation of negative ions.
16) $A^- \Rightarrow A+e$	Electrons release by negative ions.
17) $A^{++}+A \Rightarrow A_2^++e$	Associative ionisation.
18) $A^++2A \Rightarrow A_2^++A$	Molecular ion formation.
19) $A^++A+A \Rightarrow A_2^++A$	Excimer formation.
20) $A_2^* \Rightarrow A+A+h\nu$	Radiative excimer dissociation.
21) $(XY)^* \Rightarrow X+Y^*$	Dissociation.
22) $(XY)^++e \Rightarrow X+Y^*$	Recombinational dissociation.

*J. Meek and J. D. Cragg, Electrical Breakdown of Gases (Clarendon Press, Oxford 1953)*

## ENERGY SHARING BETWEEN COLLISION PROCESSES:



*L. B. Loeb, Basic Processes of Gaseous Electronics (UC Berkeley Press, 1961)*

# Ionizzazione dei gas

La particella incidente incontra gli atomi del gas e li ionizza. Gli scontri con gli atomi del gas sono casuali e caratterizzati da una lunghezza di interazione  $\lambda$ , dato dalla sezione d'urto di ionizzazione  $\sigma_i$  e dalla densità  $N$  di elettroni  $\lambda = 1/(N\sigma_i)$

La prob che una particella subisca un'interazione in  $dl$  e'  $dP = dl/\lambda$ , quindi in un tratto  $dl$ ,  $-dN = N(l)dP$  e' il # di di particelle che hanno interagito in  $dl \rightarrow N(l) = N(0)e^{-l/\lambda}$  e' il # di particelle che hanno viaggiato un tratto  $l$  senza interagire  $\rightarrow P_{\text{surv}}(l) = N(l)/N(0)$  e' la prob che di arrivare alla profondita'  $l$

Quindi la prob che una particella arrivi alla profondita'  $l$  senza interagire e che interagisca nel successivo  $dl$  e'  $f(l)dl = P_{\text{surv}}(l) \times dP$

$$f(l)dl = \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-l/\lambda} dl$$

# Ionizzazione dei gas

La particella incidente incontra gli atomi del gas e li ionizza. Gli scontri con gli atomi del gas sono casuali e caratterizzati da una lunghezza di interazione  $\lambda$ , dato dalla sezione d'urto di ionizzazione  $\sigma_i$  e dalla densità  $N$  di elettroni.

$$\lambda = 1/(N\sigma_i)$$

Il numero di scontri in  $L$  ha una media  $L/\lambda$  e la **distribuzione in frequenza** è una **Poissoniana** (pochi scontri):

$$P(L/\lambda, k) = ((L/\lambda)^k)/k! e^{-L/\lambda} \quad (*)$$

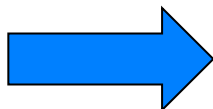
→ la distribuzione di probabilità  $f(l)dl$  dei cammini liberi medi è un esponenziale. Infatti la probabilità di non trovare atomi nel tratto  $l$  per la probabilità di uno scontro in  $dl$  è :

$$f(l)dl = P(l/\lambda, 0)P(dl/\lambda, 1) = \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-l/\lambda} dl$$

La (\*) fornisce anche la probabilità di avere 0 scontri in un percorso  $L$

$$P(L/\lambda, 0) = e^{-L/\lambda}$$

# Ionizzazione dei gas



Nella tabella abbiamo una collezione di misure eseguite con particelle veloci (è indicato il  $\gamma$ ).

Se ho un contatore, sensibile nel tratto L, capace di contare anche un solo elettrone, posso misurare  $\lambda$ , contando tutte le volte che conto 0.

Naturalmente, per quanto perfetto sia tale contatore, bisogna applicare una correzione per gli elettroni sotto soglia.

gas	1cm/ $\lambda$ (# collisioni)	$\gamma$
H <sub>2</sub>	5.32±0.06	4.0
He	5.02±0.06	4.0
Ne	12.4±0.13	4.0
Ar	27.8±0.3	4.0
Xe	44	4.0
N <sub>2</sub>	19.3	4.9
O <sub>2</sub>	22.2±2.3	4.3
Aria	18.5±1.3	3.5

# Ionization of Gases

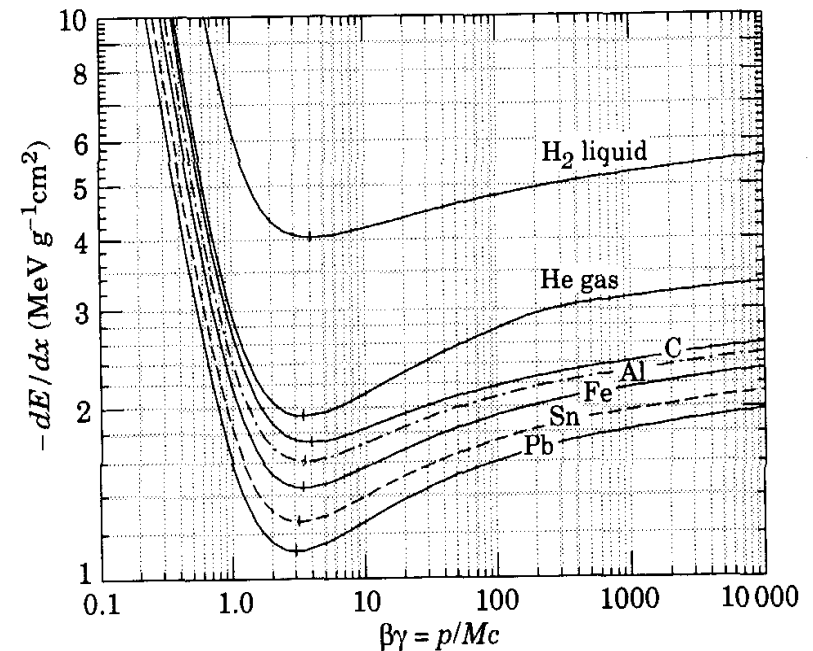
*Example: Ar*

Density  $\sim 1.7 \text{ g/l}$

$\Delta_E = 1.8 \text{ MeV}/(\text{g}/\text{cm}^2) \sim 3 \text{ keV}/\text{cm}$

$W_i = 26 \text{ eV/ion}$

$n_{total} \sim 100 \text{ ions/cm}$  ( $\sim 25 \text{ primary}$ )



- We just saw the number of **primary** electron/ion pairs is approximately **Poisson** distributed.

$$P(m) = \frac{\bar{n}^m e^{-\bar{n}}}{m!} \quad \bar{n} = \frac{L}{\lambda} = LN\sigma_i$$

The detection efficiency is therefore limited to :  $\varepsilon_{det} = 1 - P(0) = 1 - e^{-\bar{n}}$

For thin layers  $\varepsilon_{det}$  can be significantly lower than 1.

For example for 1 mm layer of Ar  $n_{primary} = 2.5 \rightarrow \varepsilon_{det} = 0.92$ .

Variation of the number of electron/pairs:  $\sigma_n = \sqrt{\bar{n}}$  NOT exactly correct!



# Ionization of Gases: second approximation

The number of electron/ion pairs is NOT **Poisson** distributed.

$$\sigma_n = \sqrt{F n};$$

F – Fano factor, related to the correlations in the ionization avalanche process (provided that the  $\delta$ -electrons deposit all the energy).

Material dependent.

F ~ 1 for scintillators

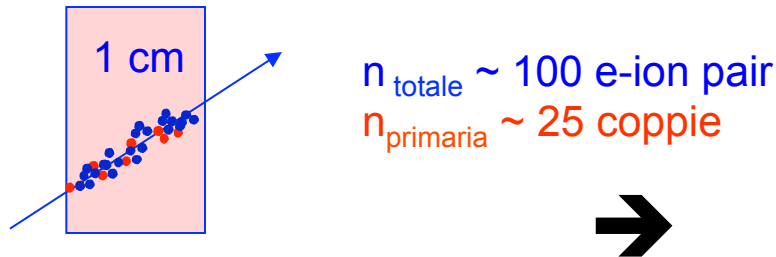
F ~ 0.2 – 0.8 for gas detectors

F ~ 0.12 for Silicon detectors

# Ionizzazione dei gas

## Commenti

- Assumiamo un apparato spesso 1 cm e riempito di Argon



- elettroni ioni primari fluttuano alla Poisson (poco), ma ... sono solo  $\sim 25$  ➔ contare il numero di cluster non e' banale
- $n_{\text{totale}} \sim 100$  e code di Landau ➔ difficile misurare  $dE/dx$  con una sola misura e strati sottili di gas e da questo dedurre (noto l'impulso) la massa della particella

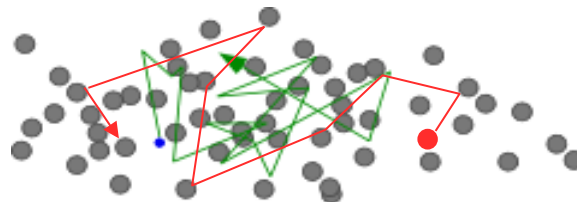
**In ogni caso il rumore degli amplificatori è  $\sim 1000$  e<sup>-</sup> (ENC) ➔ bisogna aumentare il numero di coppie ioni-elettroni.**

# Ionizzazione nei gas

- Dopo che e' stata generata, la carica si muove verso gli elettrodi di raccolta sotto l'azione del campo elettrico esterno applicato.
- Il moto avviene in un mezzo  $\rightarrow$  ci sono urti in cui le cariche in moto perdono energia.
- Il risultato netto e' una velocita' di deriva costante nel tempo nella direzione del campo.
- Oltre al moto di deriva, c'e' anche un moto termico in tutte le direzioni, cioe' diffusione.
- Esistono processi che catturano le cariche prima che esse raggiungano gli elettrodi.
- L'evoluzione della nuvola di carica creata dalla ionizzazione a  $t = 0$  e' descritta da un'equazione di trasporto "abbastanza" semplice.

# ***Ionizzazione dei gas***

- The neutral atoms or molecules of the gas are in constant thermal motion, characterized by a mean free path for typical gases under standard conditions of about  $10^{-6}$ - $10^{-8}$  m.
- Positive ions or free electrons created within the gas also take part in the random thermal motion and therefore have some tendency to diffuse away from regions of high density.
- This diffusion process is much more pronounced for free electrons than for ions since their average thermal velocity is much greater.
- A point-like collection of free electrons will spread about the original point into a Gaussian spatial distribution whose width will increase with time.



# Diffusion of Free Charges

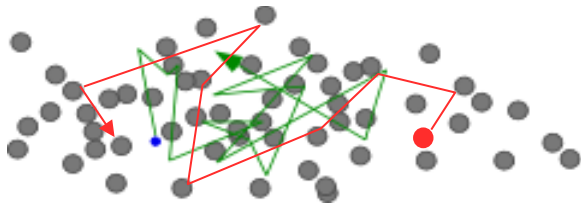
At the end, of the ionization stage (incident particle + A  $\rightarrow$  A<sup>+</sup>e (primary)-, e<sup>-</sup> + A  $\rightarrow$  A<sup>+</sup>e-e<sup>-</sup> (secondary), ... (terziary), ..., the N<sub>i</sub> free pairs (e<sup>-</sup> and ions) are in thermal equilibrium with the medium.

Free charges in a medium, regardless their origin, have a thermal random motion due to collisions with gas atoms and molecules.

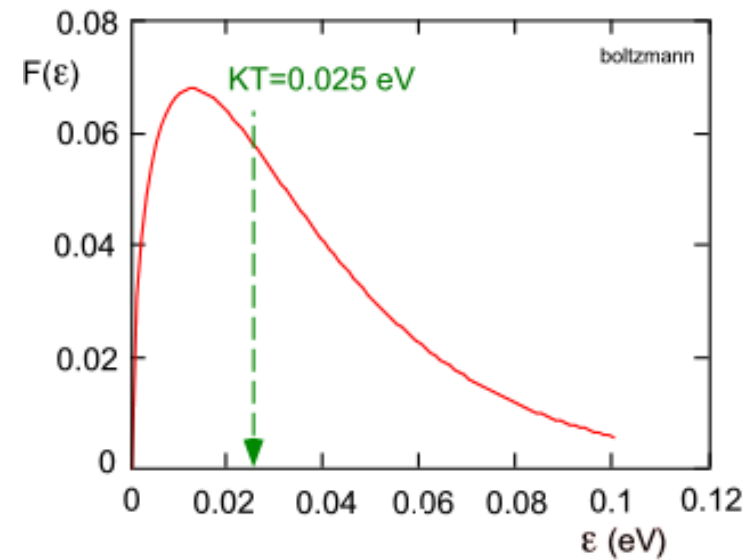
Maxwell - Boltzmann energy distribution:

$$F(\varepsilon) = \text{const} \sqrt{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$$

Average (thermal) energy:



$$\varepsilon_T = \frac{3}{2}kT \approx 0.040 \text{ eV}$$



La velocità termica media si ricava immediatamente dal principio di equipartizione dell'energia

$$(3/2)KT = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = (3kT/m)^{1/2} = c(3kT/mc^2)^{1/2}$$

Ioni ed elettroni hanno masse molto diverse:  $m_e \ll m_{\text{ione}}$

**velocità termica elettroni**

$$v_t \sim 10^7 \text{ cm/s}$$

**velocità termica ioni**

$$v_t \sim 10^4 \text{ cm/s}$$

A T ambiente

# Equazione di diffusione

The convection–diffusion equation can be derived in a straightforward way from the continuity equation or mass conservation law\*\*, which states that the rate of change  $dn/dt$  for a scalar quantity in a differential control volume is given by flow and diffusion into and out of that part of the system along with any generation or destruction inside the control volume:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = R,$$

where  $\vec{j}$  is the total flux and  $R$  is a net volumetric source for  $n$ . There are two sources of flux in this situation. First, **diffusive flux** arises due to diffusion. This is typically approximated by Fick's first law:

$$\vec{j}_{\text{diffusion}} = -D \nabla n$$

i.e., the flux of the diffusing material (relative to the bulk motion) in any part of the system is proportional to the local concentration gradient. Second, when there is overall convection or flow, there is an associated flux called **advective flux**:

$$\vec{j}_{\text{advective}} = \vec{v} n$$

The total flux is given by the sum of these two:  $\vec{j} = \vec{j}_{\text{diffusion}} + \vec{j}_{\text{advective}} = -D \nabla n + \vec{v} n$

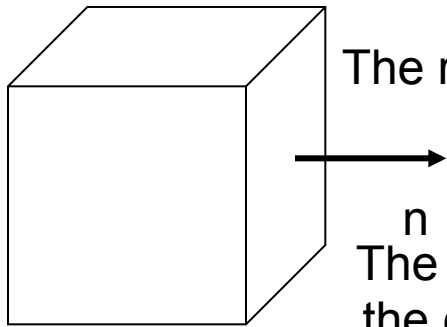
$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (-D \nabla n + \vec{v} n) = R.$$

# **\*\*Mass conservation law**

The mass cannot be created nor destroyed (in non-relativistic classical dynamics)

Therefore in a volume  $V$  the mass can change only because some of it leaves or enters the volume or if there is some source feeding mass with rate  $Q$

The amount of mass through  $d\mathbf{A}$  per time unit is  $dF = \mathbf{j} \cdot d\vec{A}$  Convention:  
dF>0 if  
outgoing



The rate of outgoing mass is  $(\frac{dM}{dt})_{out} = \int_S \mathbf{j} \cdot d\vec{A}$

The outgoing flux must be balanced by the change of mass in the volume and the source  $\frac{\partial M_V}{\partial t} = -(\frac{dM}{dt})_{out} + Q$

$$\frac{\partial M_V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_V \rho dV \right) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_V \rho dV \right) = - \int_S \mathbf{j} \cdot d\vec{A} = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} dV$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j} \quad + \int_V R dV$$

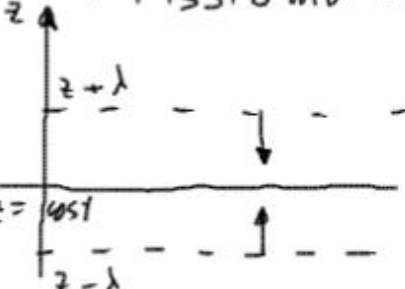
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = R$$

$R$  is the the rate/volume

# Parentesi: moto diffusivo

- Il moto di diffusione si ha in presenza di gradienti di densità
  - Vale la legge di Fick:  $\vec{J} = -D \vec{\nabla} n$
  - Il parametro  $D$  è il coeff. di diffusione: dipende dal mezzo in cui avviene la propagazione  $[L^2 T^{-1}]$

Es. diffusione in un gas diluito

- Fissiamo un piano arbitrario nel gas. Il flusso netto è dato dalla somma dei flussi da sopra e da sotto il piano,  $J_+$  e  $J_-$ .
$$J_{net} = J_+ + J_-$$
- Se  $l$  è il libero cammino medio, le particelle che attraversano il piano hanno subito l'ultimo urto in media a una dist.  $\pm l$  dal piano, cioè a  $z' = z \pm l$ .
- Moto random  $\Rightarrow$  il # di part in moto con vel. media  $\langle v \rangle$  in una direzione è lo stesso in tutte le direzioni (isotropia)  $\Rightarrow n_x = n_y = n_z = n/3$  si muovono con vel  $\langle v \rangle$  lungo le 3 direzioni  $\perp$  del rif. scelto.
- Di queste  $1/2$  si muovono verso  $+z$  e  $1/2$  lungo  $-z \Rightarrow$ 
$$J_{\pm} \approx J(z \pm l) = \pm \frac{\langle v \rangle}{6} n(z \pm l) \approx \pm \frac{\langle v \rangle}{6} \left[ n(z) \pm \frac{\partial n}{\partial z} l \right]$$



• quindi.  $J_{nel} = \frac{\langle v \rangle}{6} \left[ -\frac{\partial n}{\partial z} \cdot l \right] - \frac{\langle v \rangle}{6} \left[ \frac{\partial n}{\partial z} \cdot l \right] = -\frac{l \langle v \rangle}{3} \left( \frac{\partial n}{\partial z} \right)$

$\Rightarrow D = \frac{l \langle v \rangle}{3}$

• Se le part. diffondono in un mezzo di densità  $N \Rightarrow l \sim \frac{1}{N \sigma_i}$

$\sigma_i$  = sez. d'urto di collisione fra le part. che diffondono e quelle del mezzo

$\Rightarrow D = \frac{\langle v \rangle}{3 N \sigma_i}$

\*  $\langle v \rangle \ll c \Rightarrow v \sim \left( \frac{kT}{m} \right)^{1/2}$

$p = N kT \Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{kT}{p} \Rightarrow D \propto \frac{(kT)^{3/2}}{3 \sigma_i p}$

\*  $\langle v \rangle \approx c \Rightarrow D \approx \frac{c}{3 N \sigma_i} \Rightarrow D \propto \frac{c (kT)}{3 \sigma_i p}$

\* Se il moto avviene in un campo magnetico, la dist. alla quale la part. ha cambiato "molto" la direzione è il raggio di Larmor  $\Rightarrow$

$l \sim r_L = \frac{cp}{e \hbar B} \approx \frac{E}{\hbar \omega_B} \quad (\text{se } v \approx c) \Rightarrow D \approx \frac{\lambda_L}{3} = \frac{c E}{3 \hbar \omega_B} \Rightarrow D \propto E$

In tal caso il coefficiente di diffusione dipende da  $E$

# Diffusione spaziale

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (-D \nabla n + \vec{v} n) = R.$$

No convezione (per ora)

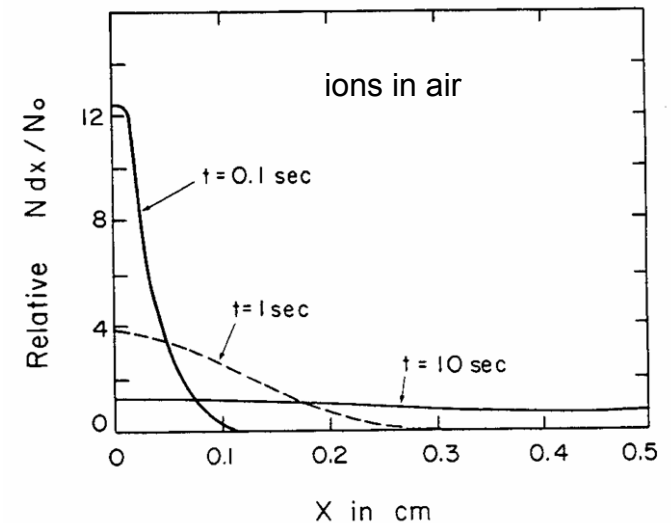
Se iniettiamo N particelle nell'origine con una distribuzione spaziale  $N = N_0 \delta(x)$  a  $t = 0$ , l'evoluzione temporale e' data da

$$N(x,t) = \frac{N_0}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad (\text{calcolato alla lavagna?})$$

Il bunch di particelle rimane in media fermo nell'origine, ma si allarga nel tempo con una distribuzione gaussiana di larghezza crescente

$$\sigma_x = \sqrt{2Dt}$$

Una frazione della carica  $N/N_0$ , inizialmente tutta in  $x = 0$ , la si ritrova ad una distanza  $x$  dopo un tempo  $t$



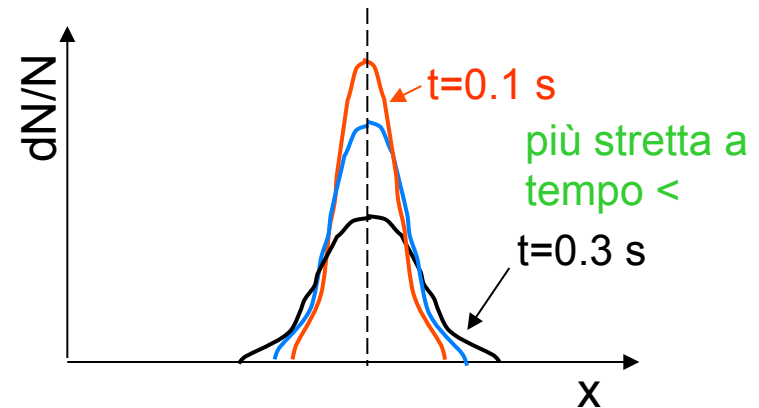
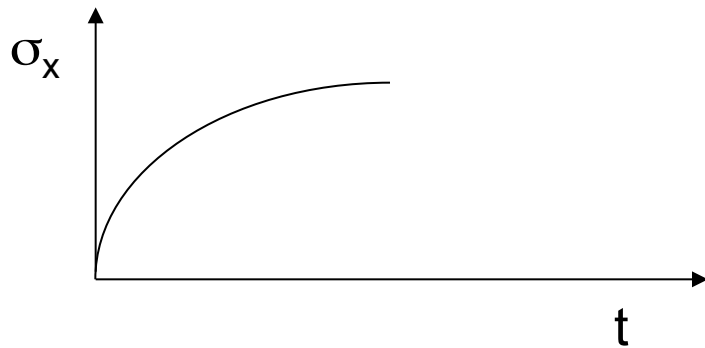
# Ionizzazione dei gas

Varianza lineare

$$\sigma_x(t) = \sqrt{2Dt}$$

Varianza nel volume

$$\sigma_V(t) = \sqrt{3}\sigma_x = \sqrt{6Dt}$$



# Ionizzazione dei gas

## Diffusione e deriva in presenza di campo elettrico.

Se applico un campo elettrico alla velocità termica  $v_t \approx \sqrt{\frac{3KT}{m}}$ , si sommerà una velocità di deriva dovuta al campo **E**. Infatti fra una collisione e l'altra gli elettroni sono accelerati dal campo elettrico. Se  $\langle L \rangle$  è il cammino libero medio e  $\tau$  il tempo medio fra collisioni avremo (da  $\mathbf{a} = e\mathbf{E}/m$ ):

$$\langle v_D \rangle = a\tau / 2 = \frac{e\tau}{2m} E = \frac{e}{2m} \left( \frac{\langle L \rangle}{v_t} \right) E$$

Ma  $L = \frac{1}{N\sigma}$  quindi  $\langle v_D \rangle = \frac{e}{2mv_t N\sigma} E$

In un gas, di solito non si misura la concentrazione ma la pressione e temperatura

$p = NkT \rightarrow L = \frac{kT}{p\sigma} \rightarrow \langle v_D \rangle = \frac{e}{2m} \frac{KT}{v_t \sigma} \left( \frac{E}{p} \right)$  Elimino anche  $v_t$

$$\langle v_D \rangle = \frac{e}{2\sigma} \left( \frac{KT}{m} \right)^{1/2} \left( \frac{E}{p} \right)$$

La velocità di deriva dipende da:

- $(E/p)$ , il campo elettrico per unità di pressione (V/m)/Pa, a T costante
- dal parametro  $\mu = \frac{e}{2\sigma} \left( \frac{KT}{m} \right)^{1/2}$