

Particle Detectors

Lecture 9

06/04/16

a.a. 2015-2016

Emanuele Fiandrini

Brems: spettro di energia

$$d\sigma = \Phi(\omega)d\omega = \alpha r_e^2 \cdot \frac{d\omega}{\omega} \cdot \frac{1}{E_i^2} [(E_i^2 + E_f^2)\phi_1 - \frac{2}{3}E_i E_f \phi_2]$$

Per illustrare l'andamento di $d\sigma/d\omega$ conviene usare la frazione di energia emessa $\hbar\omega = E_f - E_i \equiv \epsilon E_i$ e per evitare la divergenza a $\omega=0$ usiamo lo spettro di energia $dE/d\omega = \hbar\omega d\sigma/d(\hbar\omega)$

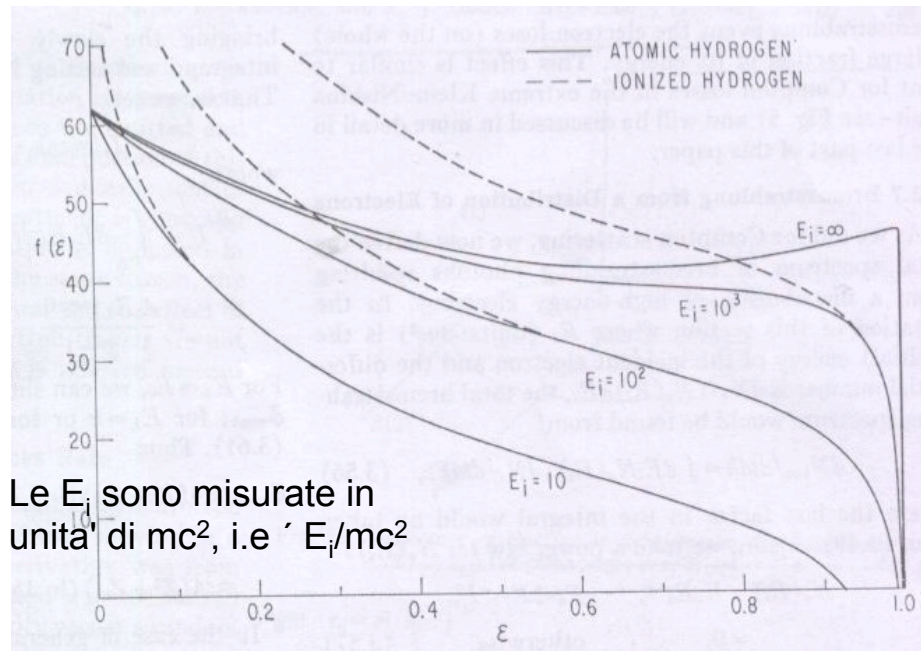
La dipendenza da ϵ si ottiene per sostituzione

$$\hbar\omega \frac{d\sigma}{d(\hbar\omega)} = \Phi(\omega) = \alpha r_e^2 \cdot \frac{1}{E_i^2} [(E_i^2 + E_f^2)\phi_1 - \frac{2}{3}E_i E_f \phi_2] = \alpha r_e^2 f(\epsilon)$$

$$f(\epsilon) = [1 + (1 - \epsilon)^2]\phi_1 - \frac{2}{3}(1 - \epsilon)\phi_2$$

La f non dipende da $\hbar\omega$ o da E_i , ma solo dalla frazione di energia emessa.

La f dipende dal parametro di screening Δ tramite Φ_1 ed Φ_2 . Fissato Δ , la f è "universale". Il numero di fotoni emessi diverge ma l'energia rimane finita.



Le E_i sono misurate in unità di mc^2 , i.e. E_i/mc^2

- Quando $E_i \rightarrow \infty$ lo spettro diventa piatto con un netto cutoff a $\epsilon = 1$
- Lo stato del mezzo (ionizzato o no) è importante a basse frequenze $d\sigma/d\omega$:
emissione maggiore per mezzo ionizzato

Perdita di energia di e^\pm

- i. Ad alta energia i fotoni sono emessi ~ collineari con l'elettrone incidente essendo l'angolo medio di emissione $\langle \theta \rangle = mc^2/E$, indipendente dall'energia del fotone emesso.
- ii. I fotoni emessi sono polarizzati con il vettore di polarizzazione \perp al piano formato dal fotone e l'elettrone incidente; la polarizzazione del γ dipende inoltre dalla polarizzazione dell' e incidente.
- iii. La σ differenziale, integrata sugli angoli di emissione del γ e di scattering della particella incidente di carica z_1 e massa M . è (nel caso di schermatura completa):

$$\frac{d\sigma}{d\omega} \approx \frac{4\alpha r_e^2}{\omega} z_1^4 z_2^2 \left(\frac{m}{M} \right)^2 \left[\left(1 + w^2 - \frac{2}{3}w \right) \cdot \ln \frac{183}{Z_2^{1/3}} + \frac{w}{9} \right]$$

$$\text{dove } w = \frac{(E_i - \hbar\omega)}{E_i} \quad \text{e} \quad E_i \gg mc^2$$

Perdita di energia di e^\pm

$$\frac{d\sigma}{d\omega} \approx \frac{4\alpha r_e^2}{\omega} z_1^4 z_2^2 \left(\frac{m}{M}\right)^2 \left[\left(1 + w^2 - \frac{2}{3}w\right) \cdot \ln \frac{183}{Z_2^{1/3}} + \frac{w}{9} \right] \quad \xrightarrow{M = m, z_1 = 1} \quad \frac{d\sigma}{d\omega} \approx \frac{4\alpha r_e^2}{\omega} z_2^2 \left[\left(1 + w^2 - \frac{2}{3}w\right) \cdot \ln \frac{183}{Z_2^{1/3}} + \frac{w}{9} \right]$$

- ❑ La sezione d'urto va come $1/M^2 \rightarrow$ importante solo per e^\pm . (Nel seguito considereremo solo elettroni, massa m e carica $z_1 = 1$)
- ❑ Dipende dal mezzo attraversato tramite $z_2 \rightarrow$ elementi più pesanti fanno perdere più energia. La Bremss. avviene anche sugli elettroni dell'atomo $\rightarrow z^2 \rightarrow z(z+1)$ essendoci z elettroni nell'atomo.
- ❑ Decresce al crescere dell'energia del fotone ($1/\omega$).

L'importanza principale degli elettroni atomici è il loro effetto di schermo. Classicamente quando il parametro d'impatto è $>$ del raggio atomico ci attendiamo una σ molto piccola in quanto gli e^- schermano la carica del nucleo \rightarrow la particella incidente vede una carica più piccola. b_{\max} (fisso $\hbar\omega$) si ottiene per q_{\min} (q = impulso trasferito al nucleo) e q_{\min} è determinato dal raggio dell'atomo, più che dal minimo valore cinematico che può assumere.

Questo fenomeno si chiama schermatura completa.

Quanto detto è vero anche per una trattazione quantistica perché possiamo sempre definire una distanza efficace della particella incidente dal nucleo = \hbar/q .

Perdita di energia di e^\pm

1. $d\sigma/d\omega \rightarrow \infty$ per $\omega \rightarrow 0$ divergenza infrarossa, eliminata con effetti di interferenza \rightarrow la formula non è valida per $k \rightarrow 0$
2. $d\sigma/d\omega$ dipende da $w=E_f/E_i$, non esplicitamente dall'energia dell'elettrone
3. dipende dal mezzo attraversato (Z_2^2)

$$\frac{d\sigma}{d\omega} \approx \frac{4\alpha Z_2^2 r_e^2}{\omega} \left[\left(1 + w^2 - \frac{2}{3}w \right) \cdot \ln \frac{183}{Z_2^{1/3}} + \frac{w}{9} \right]$$

Brems: perdita di energia

La perdita totale di energia in uno spessore dx in un materiale con densità n_s si ottiene considerando che, per definizione di sez d'urto, la perdita di energia nel volume di interazione $dV = d\sigma dx$ e' $-dE = E d\sigma dx$, $d\sigma$ e' la sez d'urto per l'emissione di fotoni con $E = \hbar\omega$ fra E e $E+dE$

La perdita totale si ha integrando su tutte le possibili perdite fra 0 ed E_i

Esprimiamo tutto in funzione di ϵ

$$\hbar\omega = E_f - E_i = \epsilon E_i$$

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dx} &= n_s \int_0^{E_i} \hbar\omega \frac{d\sigma_s}{d(\hbar\omega)} d(\hbar\omega) = n_s \alpha r_e^2 \int_0^{E_i} [1 + (1 - \epsilon)^2] \phi_1 - \frac{2}{3}(1 - \epsilon) \phi_2 d(\hbar\omega) \\ &= n_s \alpha r_e^2 E_i \left\{ \int_0^1 [1 + (1 - \epsilon)^2] \phi_1 - \frac{2}{3}(1 - \epsilon) \phi_2 \right\} \frac{d(\hbar\omega)}{E_i} = n_s \alpha r_e^2 E_i \int_0^1 f(\epsilon) d\epsilon \end{aligned}$$

La quantita' in par graffa e' un numero, che determina l'intensita' assoluta dell'emissione ma non la sua forma

➔ la potenza totale emessa dipende linearmente da E_i

Bisogna scegliere le ϕ_i in accordo alla situazione fisica: l'intensita' dell'emissione dipende dallo stato di ionizzazione del mezzo (cioe' se si ha shielding forte ($\Delta \ll 1$) o shielding debole ($\Delta \gg 1$)) e dall'energia della particella incidente

Perdita di energia di e^\pm

Nel caso di **screening completo** (il piu' frequente) la perdita specifica di energia per bremsstrahlung di un **eletttrone** che attraversa del materiale è:

$$-\left.\frac{dE}{dx}\right|_{Br} = \int_0^{k_{\max}} kn_a \cdot \frac{d\sigma}{dk} dk = 4\rho N_A \frac{Z_2^2}{A} r_e^2 \alpha E_i \ln \frac{183}{Z_2^{1/3}} \quad \text{ovvero}$$

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{E}{L_0}$$

$k_{\max} = E_i - mc^2$ è la massima energia possibile del fotone.

con

$$L_0 = \frac{A}{4\alpha N_o \rho Z_2^2 r_e^2 \ln \frac{183}{Z_2^{1/3}}} \quad (cm)$$

n_a =numero di atomi per cm^3 .

N_A è il numero di Avogadro

$X_0 = L_0 \rho$ e' la lunghezza di radiazione espressa in g/cm^2

A è il peso atomico

Un' approssimazione utile per i calcoli è:

ρ è la densità del materiale

$$X_0 = \frac{716.4 \cdot A}{Z_2^2 \ln \frac{287}{Z_2^{1/2}}} \quad (g/cm^2)$$

Perdita di energia di e^\pm

La formula $-dE/dx=E/X_0$ è molto utile in quanto esplicita la dipendenza della perdita di energia della particella incidente dalle proprietà del materiale attraversato contenute in X_0 .

Integrando otteniamo:

$$E=E_0 e^{-x/X_0}$$

Questa funzione descrive come varia l'energia di un elettrone in funzione dello spessore attraversato: l'attenuazione esponenziale dell'energia degli elettroni per Bremsstrahlung. Dopo avere attraversato un tratto $x=X_0$ l'energia si è ridotta di un fattore $1/e$.

La X_0 di un composto può essere approssimata da:

$$X_0 = 1/\sum_i (f_i / X_{0i})$$

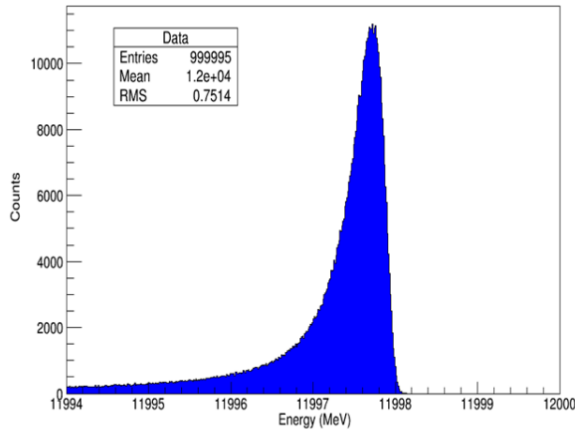
Dove f_i sono le frazioni in massa dei componenti con lunghezza di radiazione X_{0i}

La lunghezza di radiazione è espressa in g/cm^2 , ma dividendo per la densità si ottiene L_R = lunghezza di radiazione in cm.

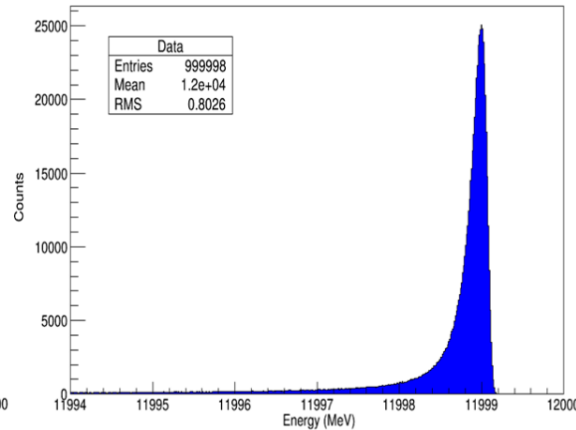
Si trovano normalmente tabulate sia X_0 che L_R .

Ricordiamo che la perdita di energia è in realtà $\propto 1/M^2$ della particella incidente \rightarrow importante solo per elettroni (e μ di alta energia). Nel definire la lunghezza di radiazione abbiamo considerato elettroni come particelle incidenti (r_e^2). In ogni caso X_0 ed L_R sono sempre tabulate per elettroni

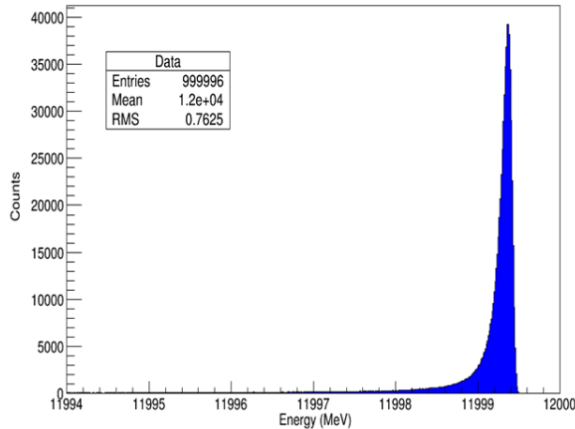
Energy Histogram - Graphite - 6.9 mm



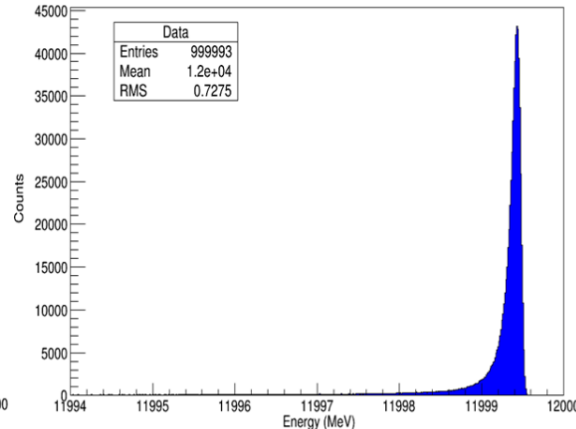
Energy Histogram - Silicon - 3.1 mm



Energy Histogram - Titanium - 1.15 mm



Energy Histogram - Iron - 600 um



$E = E_0 e^{-x/X_0}$ e' l'energia media alla profondita' x/X_0 . La distribuzione intorno al valore medio e' complicata.

Le code sono dovute all'emissione di fotoni energetici e sono di solito parametrizzate con simulazioni MonteCarlo.

Occorre minimizzarle in tutti i rivelatori che effettuano misure non distruttive, minimizzando lo spessore del materiale x/X_0 in unita' di X_0 ,

$$x/X_0 \ll 1$$

Si noti che X_0 e' lo stesso parametro che determina distribuzione dello scattering multiplo nel materiale

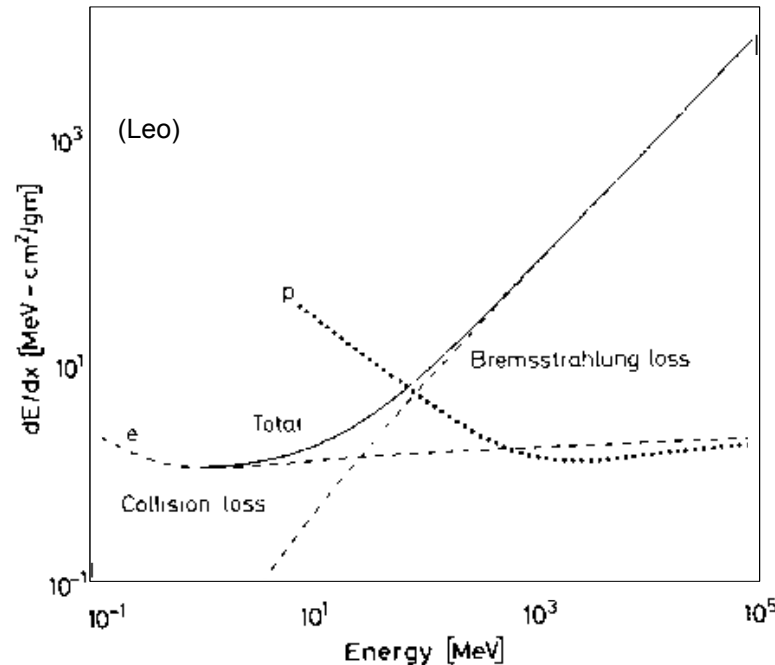
$$\theta_{ms} = z \frac{19.2}{\beta c p} [MeV] \sqrt{x/X_0} \left(1 + 0.038 \ln \left(\frac{x}{X_0} \right) \right)$$

$$\left. \frac{\sigma_p}{p} \right|_{MS} \propto \frac{1}{B \sqrt{L X_0}}$$

Perdita di energia di e^\pm

La perdita totale di energia e' la somma

$$dE/dx|_{\text{tot}} = dE/dx|_{\text{coll}} + dE/dx|_{\text{brems}}$$



energy loss
(radiative +
ionization) of
electrons and
protons in copper

Ricordiamo che si ha una probabilità non trascurabile di emettere fotoni di alta energia → la distribuzione delle perdite di energia è molto larga.

Perdita di energia di e^\pm

Energia critica.

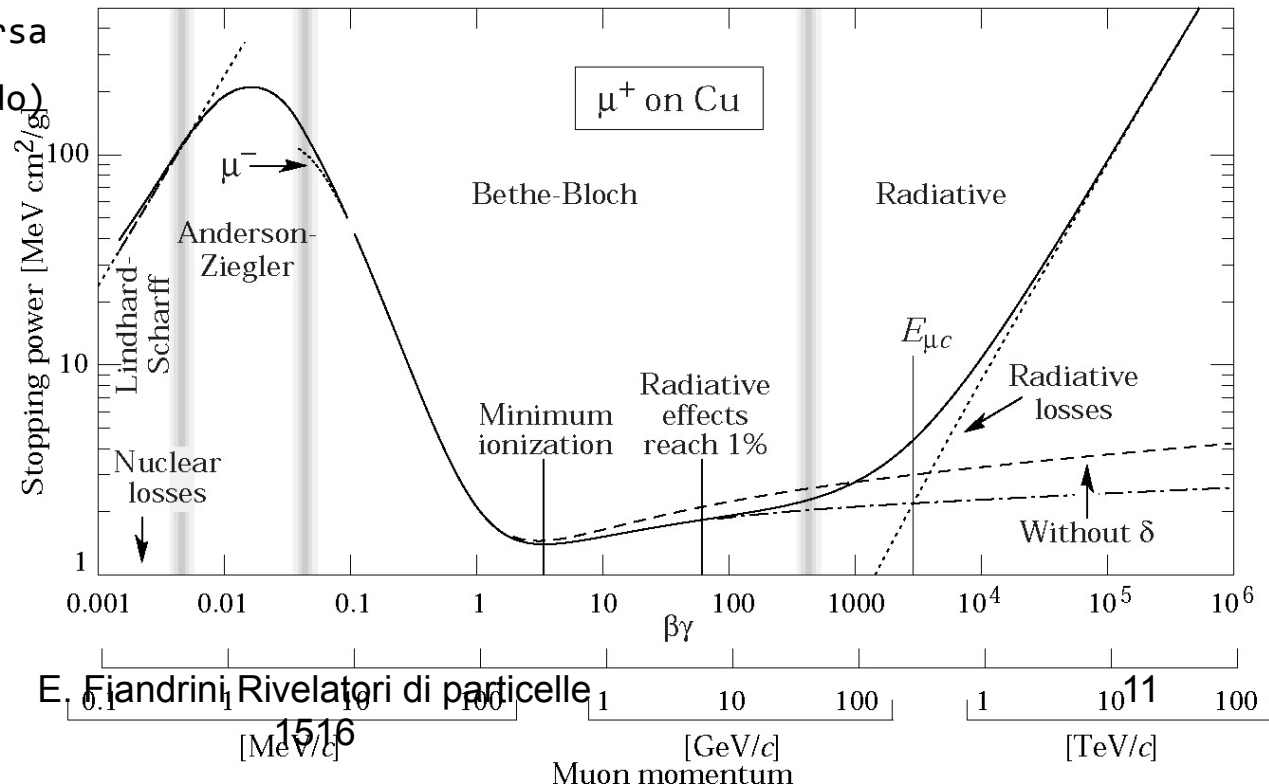
L'energia critica E_c è quell'energia alla quale le perdite per ionizzazione e bremsstrahlung sono uguali.

$$dE/dx|_{\text{coll}} = dE/dx|_{\text{brems}}$$

- per elettroni incidenti in liquidi o solidi $E_c=610/(Z+1.24)$ MeV.
- per elettroni incidenti in gas $E_c=710/(Z+0.92)$ MeV

La differenza è dovuta ad un minore effetto densità nei gas che nei solidi o liquidi. Per un elettrone che attraversa un solido od un liquido l'energia critica è di qualche decina di MeV.

Nel caso di un μ che attraversa un materiale (solido o liquido) l'energia critica scala come $E_c \propto \sqrt{Z}$.
Il rapporto delle masse al quadrato.



Landau Pomeranchuk Migdal (*LPM*) effect

In a medium, a particle will be deviated by the collisions with the atomic nuclei

A high energy particle undergoing multiple soft scatterings from a medium will experience interference effects between adjacent scattering sites.

From Heisenberg's principle as the longitudinal momentum transfer gets small, the particles wavelength will increase $\lambda = h/p_t$,

if the wavelength becomes longer than the mean free path in the medium (the average distance between scattering sites) then the scatterings can no longer be treated as independent events, this is the LPM effect.

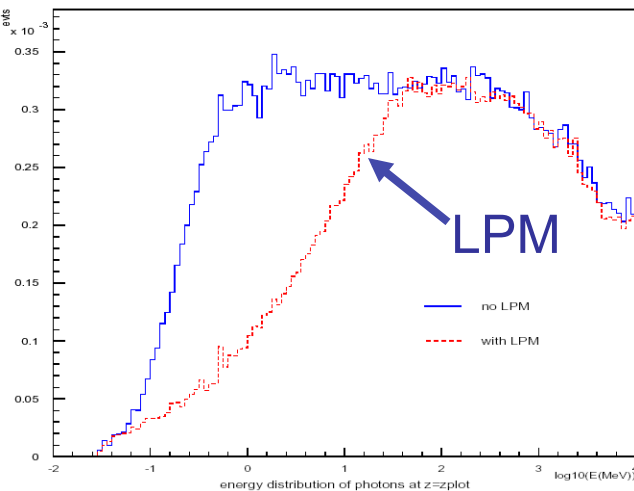
The spectrum for multiple scattering induced radiation assumes that the scatterings are independent, the quantum interference between successive scatterings caused by the LPM effect leads to suppression of the radiation spectrum relative to that predicted by Bethe-Heitler.

The suppression occurs at small photon energies.

Landau and Pomeranchuk showed that the formulas for bremsstrahlung and pair creation in matter which had been formulated by Bethe and Heitler (the Bethe-Heitler formula) were inapplicable at high energy or high matter density.

The effect of multiple Coulomb scattering by neighbouring atoms reduces the cross sections for pair production and bremsstrahlung. Migdal developed a formula applicable at high energies or high matter densities which accounted for these effects.

Landau Pomeranchuk Migdal (LPM) effect



In the bremsstrahlung process the longitudinal momentum transfer from the nucleus to the electron can be very small. For $E \gg mc^2$ and $E \gg k$:

$$q_{long} \sim \frac{k(mc^2)^2}{2E(E-k)} \sim \frac{k}{2\gamma^2}$$

Thus, the uncertainty principle requires that the emission take place over a comparatively long distance :

$$f_v \sim \frac{2\hbar c\gamma^2}{k} \quad (7)$$

f_v is called the **formation length** for bremsstrahlung in vacuum. It is the distance of coherence, or the distance required for the electron and photon to separate enough to be considered as separate particles. If anything happens to the electron or photon while traversing this distance, the emission can be disrupted.

The electron can multiple scatter with the atoms of the medium while it is still in the formation zone. If the angle of multiple scattering, θ_{ms} , is greater than the typical emission angle of the emitted photon, $\theta_{br} = mc^2/E$, the emission is suppressed.

In the gaussian approximation : $\theta_{ms}^2 = \frac{2\pi}{\alpha} \frac{1}{\gamma^2} \frac{f_v(k)}{X_0}$ where f_v is the formation length in vacuum, defined in equation 7.

Writing $\theta_{ms}^2 > \theta_{br}^2$ show that suppression becomes significant for photon energies below a certain value, given by E_{lpm} is a **characteristic energy** of the effect :

$$\frac{k}{E} < \frac{E}{E_{lpm}}$$

$$E_{lpm} = \frac{\alpha^2}{4\pi} \frac{mc^2}{r_e} X_0 \sim (7.7 \text{ TeV/cm}) \times X_0 \text{ (cm)}$$

Perdita di energia di e^\pm

Annichilazione di e^+

Il destino finale dei positroni nella materia è l'annichilazione con un e^-

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma\gamma$$

Se l' e^- è legato al nucleo si può avere annichilazione in un solo γ , ma la σ è più bassa.

La σ_{ann} in 2 γ di un e^+ con energia nel laboratorio pari ad E è

$$\sigma_{ann} = \pi r_e^2 \frac{1}{\gamma + 1} \left[\frac{\gamma^2 + 4\gamma + 1}{\gamma^2 - 1} \ln(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}) - \frac{\gamma + 3}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \right]$$

La σ è massima per $\gamma = E/m \rightarrow 1$. Il positrone prima perde energia e poi si annichila.

NOTA: si può anche formare il positronio che poi decade in $\gamma\gamma$ (singoletto) monocromatico o in $\gamma\gamma\gamma$ (tripletto)

Matter-photon interactions

Physical properties of photon:

massless: $m_{\text{ph}} = 0$

no electric charge: $Q_{\text{ph}} = 0$

spin: $S = 1$

energy: $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 = p^2c^2$

momentum: $p = \hbar k / 2\pi = \hbar \nu / c$

Photons are detected **indirectly** via interactions in the medium of the detector. In these processes charged particles are produced and recorded through their ionisation in the sensitive volume of the detector.

Interactions of photons are fundamentally different from ionisation processes of charged particles because in every photon interaction, the **photon is either completely absorbed** (photoelectric effect, pair production) **or scattered** through a relatively large angle (Compton effect).

Interazioni dei γ

Le principali interazioni dei fotoni con la materia che ci interessano sono ai fini della rivelazione:

- Effetto fotoelettrico
- Effetto Compton
- Produzione di coppie

Tutte queste interazioni sono di tipo elettromagnetico.

A queste va aggiunta la diffusione elastica o quasi elastica, ovvero diffusione Thomson e di Rayleigh

Interazioni dei γ

- For low energies ($500 \text{ keV} \geq E_\gamma \geq \text{ionisation energy}$) the photoelectric effect dominates,
$$\gamma + \text{atom} \rightarrow \text{atom}^+ + e^-$$
- In the range of medium energies ($E_\gamma \approx 1 \text{ MeV}$) the Compton effect, which is the scattering of photons off quasi-free atomic electrons,

$$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$$

has the largest cross section,

- and at higher energies ($E_\gamma \gg 1 \text{ MeV}$, typically 50 MeV) the cross section for pair production dominates,

$$\gamma + \text{nucleus} \rightarrow e^+ + e^- + \text{nucleus}$$

A basse energie possiamo avere scattering coerente (Rayleigh). Il fotone interagisce con tutti gli elettroni atomici, senza eccitarli od ionizzarli (nessuna perdita di energia). È il responsabile del cielo blu

Interazioni dei γ

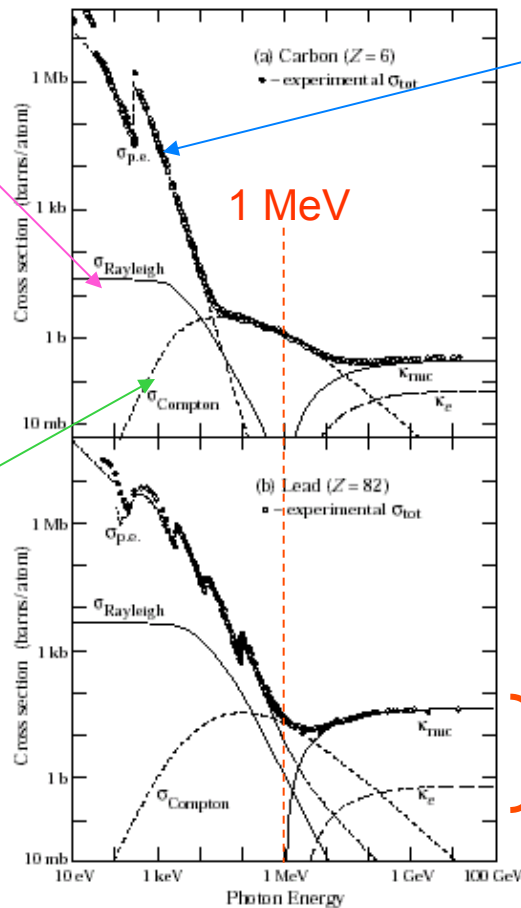
Le sezioni d'urto dei processi di interazione dei fotoni con la materia

Rayleigh
(cielo blu)

Compton

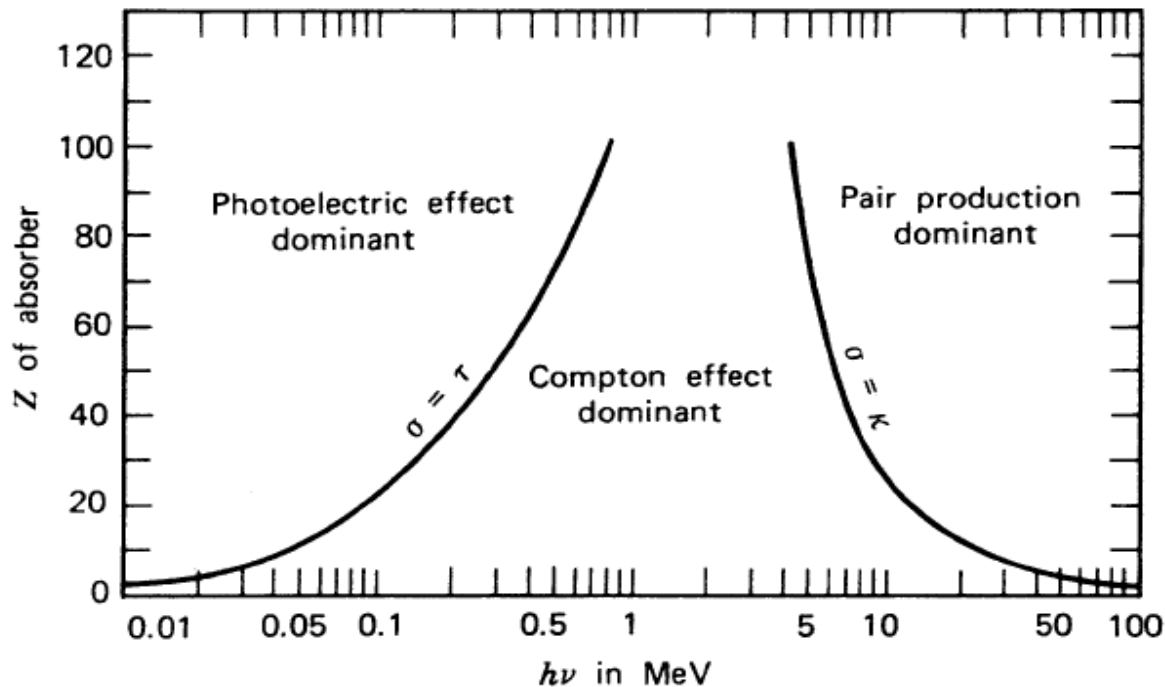
Fotoelettrico

Produzione di coppie



Photon Interactions

- Relative importance of the photoelectric effect, Compton scattering, and pair production versus energy and atomic number Z

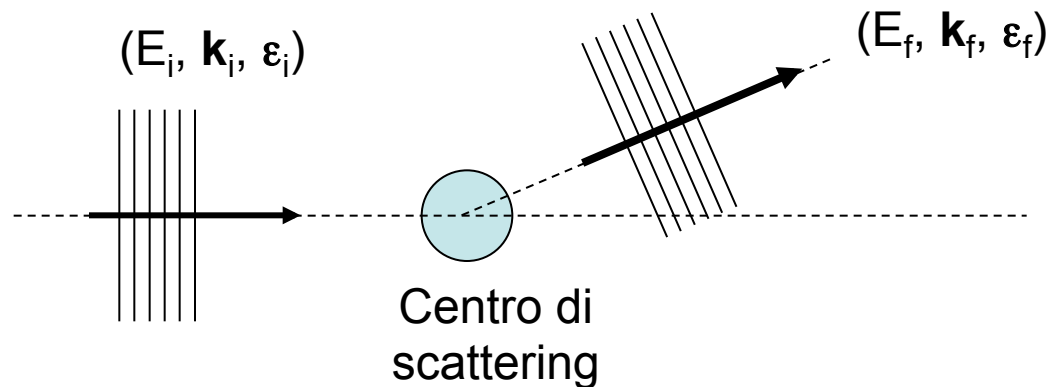


(from Knoll)

The lines show the values of Z and $E_\gamma = h\nu$ where the two neighboring are equal.

Scattering di radiazione elm

- Ogni volta che un'onda elm interagisce con una particella carica, le sue proprietà (direzione, energia, polarizzazione,...) vengono alterate, insieme a quelle della particella colpita.



Diffusione di fotoni

Tradizionalmente si parla di diffusione Thomson e Compton a seconda dell'intervallo di energie in gioco:
quando $h\omega \ll mc^2$ si parla di diffusione Thomson,
mentre quando $h\omega \gg mc^2$ si parla di diffusione Compton.

Tuttavia da un punto di vista fisico non c'è alcuna differenza
poiché il processo è esattamente lo stesso.
Quello che cambia è l'approccio: classico per Thomson,
quantistico per Compton

Diffusione Thomson

► La sezione d'urto Thomson compare in tutti i processi di radiazione

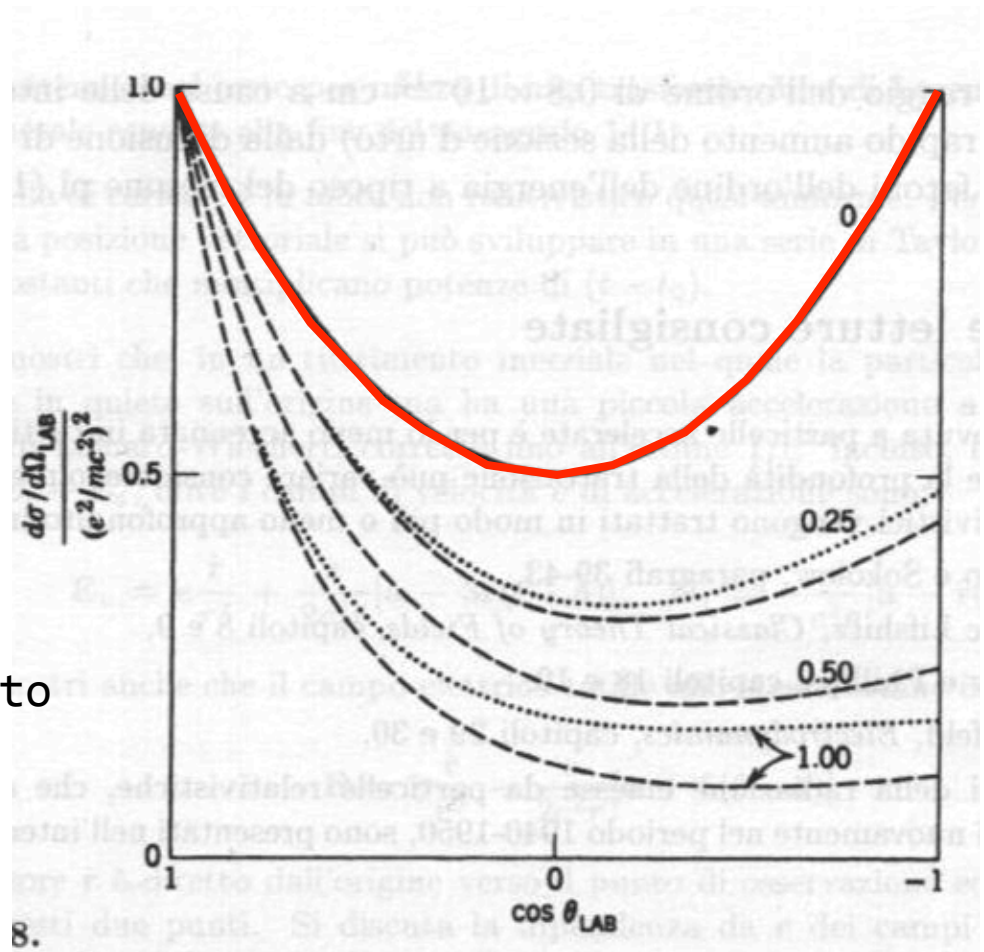
$$\sigma_T = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0^2 m^2 c^4} = \frac{8\pi}{3} r_e^2 = 0.665 \text{ barns}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_e^2 (1 + \cos^2 \alpha)$$

► L'emissione e' simmetrica rispetto alla direzione di incidenza dato che $d\sigma/d\Omega \sim \cos^2 \alpha$ e la frequenza della radiazione emessa e' la stessa di quella incidente, dato che $a \sim E$

La diffusione e' elastica: l'energia del fotone dopo l'urto e' la stessa.

La particella semplicemente riemette il fotone in un'altra direzione



Diffusione Thomson

La potenza totale emessa puo' essere espressa in termini della densita' di energia elettromagnetica incidente

Integrando la distribuzione angolare di potenza trovata prima si ha la potenza totale

$$\frac{dP_{tot}}{d\Omega} = r_e^2 (1 + \cos^2 \alpha) \frac{\langle S \rangle}{2}$$

$$\frac{dE_{tot}}{dt} = \int_{4\pi} \frac{dP_{tot}}{d\Omega} d\Omega$$

$$\frac{dE_{tot}}{dt} = 2\pi r_e^2 \frac{\langle S \rangle}{2} \int (1 + \cos^2 \alpha) d(\cos \alpha) = 2\pi r_e^2 \frac{\langle S \rangle}{2} \frac{8}{3} = \sigma_T \langle S \rangle$$

con $S = \frac{c}{4\pi} E^2$ $u_{rad} = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) = \frac{1}{4\pi} E^2$ Perche' $E=B$

quindi $S = cu_{rad}$  $\frac{dE_{tot}}{dt} = \sigma_T cu_{rad}$

Diffusione Thomson: e- legato

Nel caso di diffusione thomson, l'e- e' libero e stazionario.

Un'approssimazione migliore e' di considerare l'e- legato elasticamente con una forza $-m\omega_o^2\vec{r}$, i.e. con una frequenza naturale ω_o

$$\text{L'equazione del moto e' } \vec{a} = \frac{e}{m}\vec{E} - \omega_o^2\vec{r}$$

A regime il moto e' descritto dalla soluzione particolare dell'equazione, che per un'onda monocromatica incidente

$$\vec{E} = \vec{E}_o e^{i(k\cdot r - \omega t)} \quad \text{ha la forma} \quad \vec{r} = \vec{A}_o e^{i(k\cdot r - \omega t)}$$

$$\text{La costante si ottiene per sostituzione } \vec{a} = -\omega^2\vec{r} \quad -\omega^2\vec{r} = \frac{e}{m}\vec{E} - \omega_o^2\vec{r}$$

$$(-\omega^2 + \omega_o^2)\vec{r} = \frac{e}{m}\vec{E} \quad \vec{r} = \frac{e}{m(-\omega^2 + \omega_o^2)}\vec{E}$$


$$\text{L'accelerazione e' quindi } \vec{a} = \frac{-\omega^2 e}{m(-\omega^2 + \omega_o^2)}\vec{E} \quad \vec{a} = \frac{e}{m(1 - \omega_o^2/\omega^2)}\vec{E}$$



Diffusione Thomson: e- legato

$$\vec{a} = \frac{e}{m(1 - \omega_0^2/\omega^2)} \vec{E}$$

A questo punto si puo' procedere esattamente come per thomson, il fattore $(1 - \omega_0^2/\omega^2)$ compare cosi' nella sezione d'urto

$$\sigma = \frac{\sigma_T}{(1 - \omega_0^2/\omega^2)^2}$$

Se $\omega \gg \omega_0$  $\sigma \approx \sigma_T$ Se la rad incidente ha frequenza grande rispetto a quella naturale del sistema si ottiene la sez d'urto thomson, i.e. l'e- puo' essere considerato libero

Se $\omega \ll \omega_0$  $1 - \omega_0^2/\omega^2 \approx -\omega_0^2/\omega^2$  $\sigma \approx \sigma_T \frac{\omega^4}{\omega_0^4}$

In questo caso si parla di diffusione alla Rayleigh: la frequenza di legame deprime la sezione d'urto

P. Es. La diffusione di Rayleigh e' in parte responsabile del colore blu del cielo: i potenziali di ionizzazione di O ed N sono nell'UV $\rightarrow \omega_0 \gg \omega_{vis}$

L'opacita' a frequ basse, i.e. **rosse**, e' < di quella ad alta frequ, i.e. **blu**,

$\sigma_{blu}/\sigma_{rosso} \approx 16 \rightarrow$ il blu viene diffuso molto piu' del rosso. Il rosso attraversa l'atmosfera senza deflessione, mentre il blu viene diffuso al di fuori della

linea di vista con la sorgente (il sole) e il **cielo** appare **blu** quando si guarda lontano dal sole

Thomson and Rayleigh Scattering

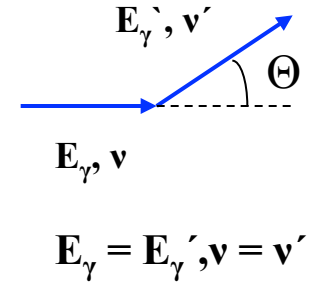
Coherent scattering on bounded electrons (whole atom) (energy is not transferred only direction of momentum is changed) - in the limit **Rayleigh scattering**

More realistically, a line width γ_0 can be introduced (classically a damping) $\nu \ll \nu_0 \Rightarrow \sigma_R = \sigma_T \frac{\nu^4}{\nu_0^4}$

$$\sigma_R = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \frac{\nu^4}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + (\gamma_0 \nu)^2} = \sigma_T \frac{\nu^4}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + (\gamma_0 \nu)^2}$$

$$\nu \approx \nu_0 \Rightarrow \sigma_R = \sigma_T \frac{\nu_0^2}{\gamma_0^2}$$

$$\frac{d\sigma_R}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_0^2 (1 + \cos^2 \Theta) \cdot F(q, Z) \quad \nu \gg \nu_0 \Rightarrow \sigma_R = \sigma_T$$



$F(q, Z)$ - probability of momentum transfer on Z electron atom without energy transfer

r_0 - classical electron radius (SI units):

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} = 2,82 \cdot 10^{-15} \text{ m} = \frac{\alpha \cdot \hbar c}{m_e c^2} = 2,82 \text{ fm}$$

$$\alpha = 1/137$$

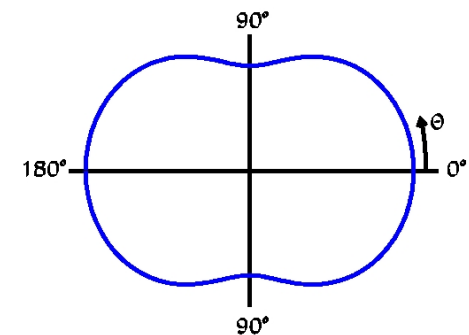
$$\hbar c = 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$$

$$m_e c^2 = 0,511 \text{ MeV}$$

Polar graph of cross-section without inclusion of $F(q, Z)$ influence, classical limit of Thomson scattering

High energy \rightarrow scattering to small angles

Thomson scattering - scattering on free electrons in classical limit (coherent as well as incoherent)



$$\frac{d\sigma_T}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_0^2 (1 + \cos^2 \Theta)$$

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_0^2 = 6,65 \cdot 10^{-29} \text{ m}^2 = 0,665 \text{ barn}$$

Diffusione Thomson/Compton

La sezione d'urto Thomson descrive bene la diffusione della radiazione nel laboratorio in cui l'e- e' stazionario finche' l'energia del fotone e' $h\omega \ll mc^2$

Piu' in generale σ_T descrive bene la diffusione della radiazione finche' l'energia del fotone e' $h\omega \ll mc^2$
nel sistema di riferimento di quiete dell'elettrone

Quando questa condizione non e' piu' verificata, il formalismo classico non si puo' piu' usare poiche' c'e' trasferimento di energia fra fotone e particella carica, l'aspetto corpuscolare del fotone diventa importante e si parla di **effetto Compton**

Diffusione Compton: cinematica

Tralasciando per ora la dinamica del processo, i.e. la probabilita' che avvenga, dal punto di vista semi-classico, la cinematica dell'interazione fra un fotone ed un elettrone puo' essere descritta come l'urto relativistico fra due particelle

E' sufficiente quindi considerare la conservazione del 4-impulso

$$P + K = P' + K' \quad (\text{a})$$

$$P_\mu = (m\gamma c^2/c, m\gamma \vec{v}) \quad P'_\mu = (m\gamma' c^2/c, m\gamma' \vec{v}')$$

Devo risolvere rispetto a K'

$$K_\mu = (\hbar\omega/c, (\hbar\omega/c)\vec{i}_k) \quad K'_\mu = (\hbar\omega'/c, (\hbar\omega'/c)\vec{i}_{k'})$$

Elevando al quadrato $(P + K)^2 = (P' + K')^2 \Rightarrow P^2 + K^2 + 2K \cdot P = P'^2 + K'^2 + 2K' \cdot P'$

Ma $P^2 = P'^2 = m^2 c^2 \quad K^2 = K'^2 = 0 \Rightarrow K \cdot P = K' \cdot P' \quad (\text{b})$

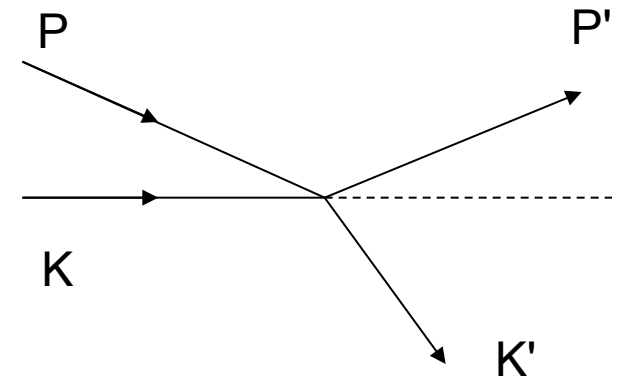
Moltiplico (a) scalarmente per K'

$$K' \cdot (P + K) = K' \cdot (P' + K')$$

$$K' \cdot P + K' \cdot K = K' \cdot P' + K' \cdot K'$$

$$K' \cdot P + K' \cdot K = K' \cdot P' \quad \text{Perche' } K'^2=0$$

$$K' \cdot P + K' \cdot K = K \cdot P \quad \text{Da (b)}$$



Diffusione Compton: cinematica

$K' \cdot P + K' \cdot K = K \cdot P$ Sviluppiamo il 4-prodotto scalare

$$K \cdot K' = \frac{\hbar\omega}{c} \cdot \frac{\hbar\omega'}{c} - \frac{\hbar\omega}{c} \cdot \frac{\hbar\omega'}{c} \vec{i}_k \cdot \vec{i}_k = \frac{\hbar^2}{c^2} \omega\omega' (1 - \vec{i}_k \cdot \vec{i}_k) = \frac{\hbar^2}{c^2} \omega\omega' (1 - \cos \alpha)$$

$$K' \cdot P = \frac{\hbar\omega'}{c} \cdot mc\gamma - \hbar\omega' \gamma m \vec{i}_k \cdot \frac{\vec{v}}{c} = m\gamma \hbar\omega' (1 - \frac{v}{c} \cos \theta')$$

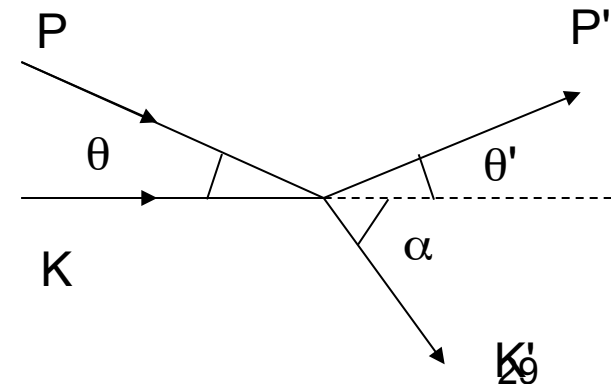
$$K \cdot P = \frac{\hbar\omega}{c} \cdot mc\gamma - \hbar\omega \gamma m \vec{i}_k \cdot \frac{\vec{v}}{c} = m\gamma \hbar\omega (1 - \frac{v}{c} \cos \theta)$$

$$\frac{\hbar^2}{c^2} \omega\omega' (1 - \cos \alpha) + m\gamma \hbar\omega' (1 - \frac{v}{c} \cos \theta') = m\gamma \hbar\omega (1 - \frac{v}{c} \cos \theta)$$

Divido per $m\gamma$

$$\frac{\hbar \omega \omega'}{c^2 m \gamma} (1 - \cos \alpha) + \omega' (1 - \frac{v}{c} \cos \theta') = \omega (1 - \frac{v}{c} \cos \theta)$$

$$\omega' \left[\frac{\hbar \omega}{c^2 m \gamma} (1 - \cos \alpha) + (1 - \frac{v}{c} \cos \theta') \right] = \omega (1 - \frac{v}{c} \cos \theta)$$



Diffusione Compton

$$\omega' \left[\frac{\hbar}{c^2 m \gamma} \omega (1 - \cos \alpha) + \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta'\right) \right] = \omega \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)$$

$$\omega' = \frac{\omega \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)}{\left[\frac{\hbar}{c^2 m \gamma} \omega (1 - \cos \alpha) + \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta'\right) \right]} \quad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)}{\left[\frac{\hbar}{c^2 m \gamma} \omega (1 - \cos \alpha) + \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta'\right) \right]}$$

E' il rapporto delle frequenze prima e dopo


l'urto

Usualmente si considera $v=0$ per l'e-



$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{\left[\frac{\hbar \omega}{m c^2} (1 - \cos \alpha) + 1 \right]}$$

In termini di λ si ha $\frac{2\pi c}{\lambda} = \omega$



$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\lambda}{\lambda'}$$

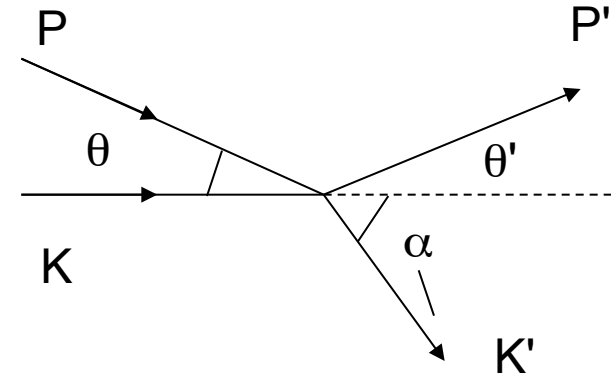
$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{2\pi c}{\lambda} \frac{\hbar}{m c^2} (1 - \cos \alpha) + 1$$

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{h}{m c \lambda} (1 - \cos \alpha) + 1 = \frac{\lambda_c}{\lambda} (1 - \cos \alpha) + 1$$

$$\lambda_c = \frac{h}{m c} = 3.86 \times 10^{-13} \text{ m} \quad \text{Lunghezza d'onda Compton}$$

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{\lambda'}{\lambda} - 1 = \frac{\lambda_c}{\lambda} (1 - \cos \alpha)$$

La variazione assoluta di lunghezza d'onda e' al max $2\lambda_c \rightarrow$ se $\lambda \gg \lambda_c$, lo scattering e' elastico



Diffusione Compton

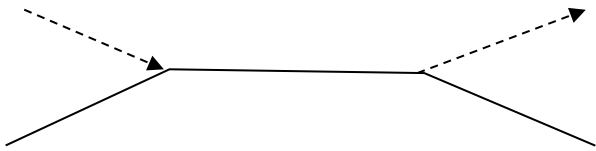
Gli effetti quantistici compaiono in due modi:

(a) nella cinematica della diffusione \rightarrow quando $h\omega \gg mc^2$, la diffusione non e' piu' elastica a causa del rinculo dell'elettrone, $\omega \neq \omega'$

(b) la sezione d'urto del processo cambia da quella di Thomson, indipendente da ω a quella di Klein-Nishina, piu' piccola, che invece e' funzione di ω

Diffusione Compton

Il processo di scattering Compton e' descritto dalla QED



Consideriamo un e- stazionario

Il processo di diffusione di Thomson e' elastico: $\omega' = \omega$

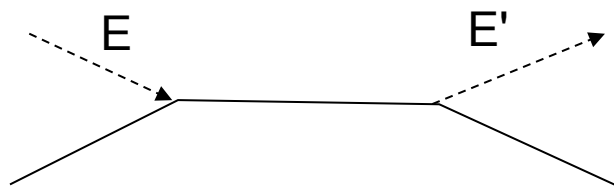
La natura quantistica del fotone entra in gioco
quando $\hbar\omega \sim mc^2$

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{\left[\frac{\hbar\omega}{mc^2}(1 - \cos\alpha) + 1\right]} \neq 1$$

Il processo non e' piu' elastico e non puo' piu' essere
descritto dalla diffusione Thomson → sezione d'urto dalla QED

Diffusione Compton: Klein-Nishina

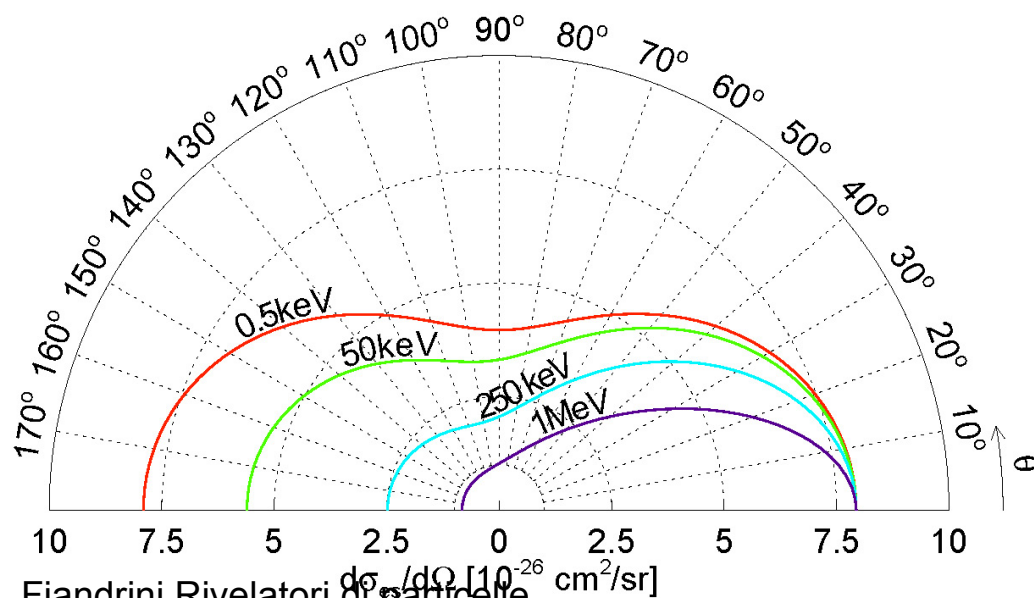
Nel caso in cui l'energia del fotone e' dell'ordine dell'energia di riposo dell'e- la sezione d'urto Thomson non vale piu', ma occorre usare la QED



Per fotoni non polarizzati incidenti su e- stazionari la sezione d'urto differenziale e':

$$\frac{d\sigma_{KN}}{d\Omega} = \frac{3}{16\pi} \sigma_T \left(\frac{E'}{E}\right)^2 \left(\frac{E'}{E} + \frac{E}{E'} - \sin^2 \alpha\right)$$

Con la condizione che $E' = \frac{E}{[\frac{E}{mc^2}(1 - \cos \alpha) + 1]}$ Per la conservazione del 4-impulso



La distribuzione angolare viene piccata in avanti al crescere dell'energia del fotone incidente
At high energies, say > 10 MeV, most of the photons are scattered in the forward direction
Because of the high forward momentum of the incident photons, most of the electrons will also be scattered in the forward direction

ticelle

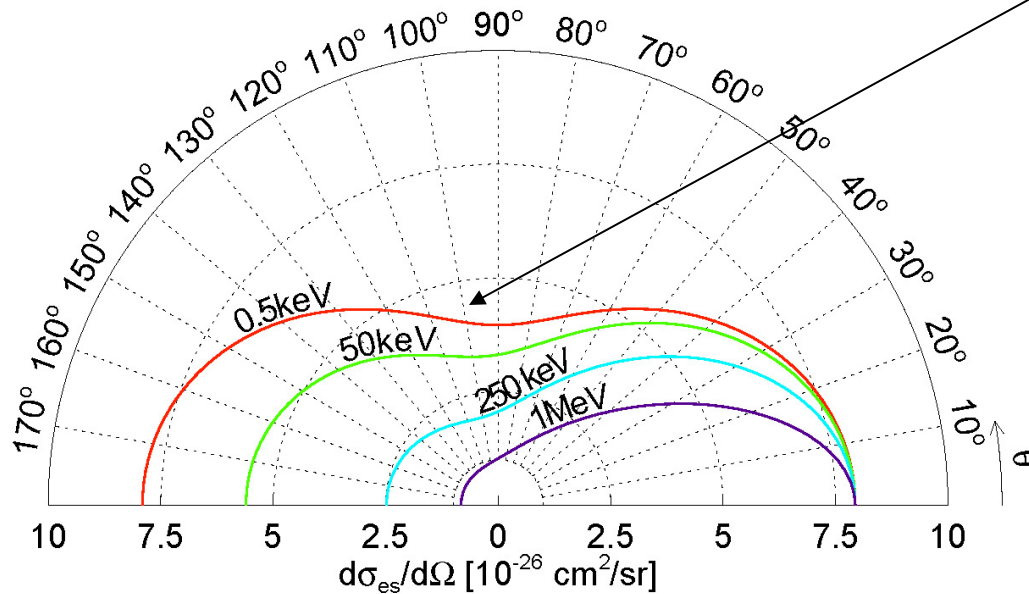
33

Diffusione Compton: Klein-Nishina

La sezione d'urto di KN si riduce a quella thomson quando $E' \rightarrow E$,
cioe' quando $E \ll mc^2$

$$\frac{d\sigma_{KN}}{d\Omega} = \frac{1}{2}r_e^2 \left(\frac{E'}{E}\right)^2 \left(\frac{E'}{E} + \frac{E}{E'} - \sin^2 \alpha\right) \longrightarrow \frac{d\sigma_{KN}}{d\Omega} = \frac{1}{2}r_e^2 (1 + 1 - \sin^2 \alpha)$$

$$= \frac{1}{2}r_e^2 (1 + \cos^2 \alpha)$$

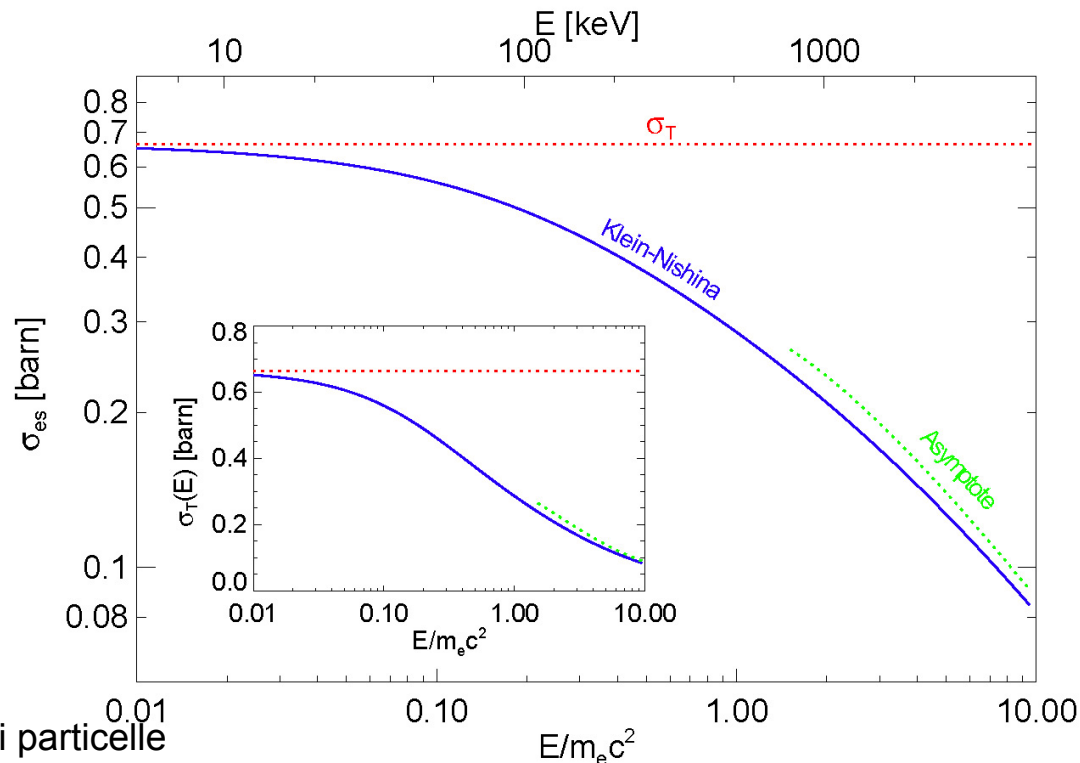


Diffusione Compton: Klein-Nishina

La sezione d'urto totale si ottiene integrando sull'angolo solido $d\Omega$, tenendo conto della condizione $E' = \frac{E}{[\frac{E}{mc^2}(1 - \cos \alpha) + 1]}$

$$\sigma_{KN} = \int_{4\pi} \frac{1}{2} r_e^2 \left(\frac{E'}{E} \right)^2 \left(\frac{E'}{E} + \frac{E}{E'} - \sin^2 \alpha \right) \delta \left(E' - \frac{E}{[\frac{E}{mc^2}(1 - \cos \alpha) + 1]} \right) d\Omega$$

$$\sigma_{KN} = \frac{3}{4} \sigma_T \left\{ \frac{1+x}{x^3} \left[\frac{2x(1+x)}{1+2x} - \ln(1+2x) \right] + \frac{1}{2x} \ln(1+2x) - \frac{1+3x}{(1+2x)^2} \right\} \quad \mathbf{x = h\omega/mc^2}$$



Diffusione Compton: Klein-Nishina

$$\sigma_{KN} = \frac{3}{4}\sigma_T \left\{ \frac{1+x}{x^3} \left[\frac{2x(1+x)}{1+2x} - \ln(1+2x) \right] + \frac{1}{2x} \ln(1+2x) - \frac{1+3x}{(1+2x)^2} \right\}$$

$$E' = \frac{E}{\left[\frac{E}{mc^2} (1 - \cos \alpha) + 1 \right]}$$

I valori asintotici sono

Limite non relativistico per $x \ll 1$

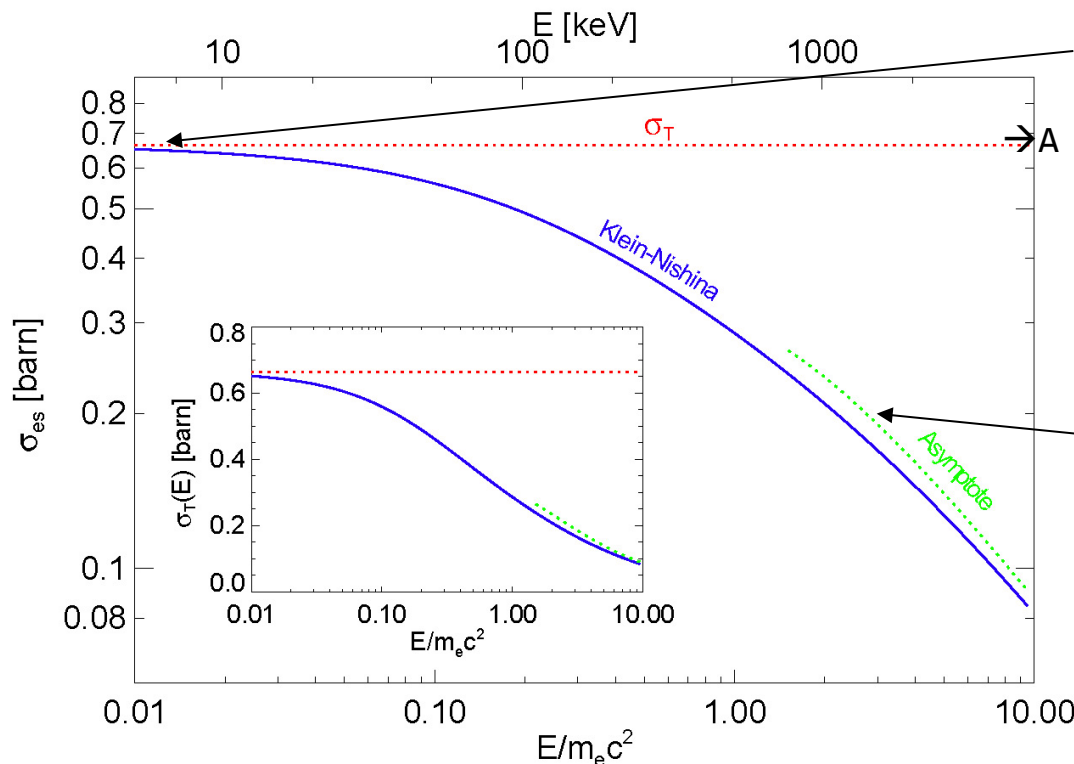
$$\sigma_{KN} \approx \sigma_T \left(1 - 2x + \frac{26x^2}{5} \right)$$

A basse energie si ha scattering Thomson

Limite ultra -relativistico per $x \gg 1$

$$\sigma_{KN} \approx \frac{3}{8}\sigma_T \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2} + \ln 2x \right)$$

Ad alte energie la sezione d'urto $\rightarrow 0$, quindi gli elettroni diventano centri di scattering meno efficienti per fotoni di alta energia



Compton su atomi

Nel caso di elettroni atomici, si possono considerare liberi se l'energia di legame e' piccola rispetto a quella del fotone incidente

In tal caso, se ci sono Z_{el} elettroni atomici, la sezione d'urto Compton e' semplicemente $Z_{el} \sigma_{KN}$

Elettroni Compton

La sez d'urto di KN da la probabilita' di emissione di un fotone con una certa energia, cioe' distribuzione di energia dei fotoni dopo l'urto.

Di conseguenza, anche gli elettroni Compton -quelli del mezzo dopo l'urto- possiedono una distribuzione caratteristica di energia.

Infatti la conservazione del 4 impulso $E_{ef} = E - E'$ con

$$E' = \frac{E}{[\frac{E}{mc^2}(1 - \cos \alpha) + 1]}$$

L'energia dell'elettrone dopo l'urto e' max

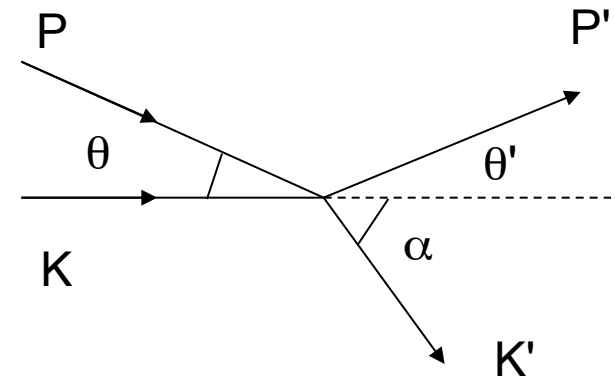
quando E' e' min. Cio' avviene quando $\cos \alpha = -1$

$$T_{\max} = hv \left(\frac{2\gamma}{1+2\gamma} \right) \text{ and } \gamma = \frac{hv}{m_e c^2}$$

$$hv - T_{\max} = hv \left(1 - \frac{2\gamma}{1+2\gamma} \right) = \frac{hvm_e c^2}{m_e c^2 + 2hv}$$

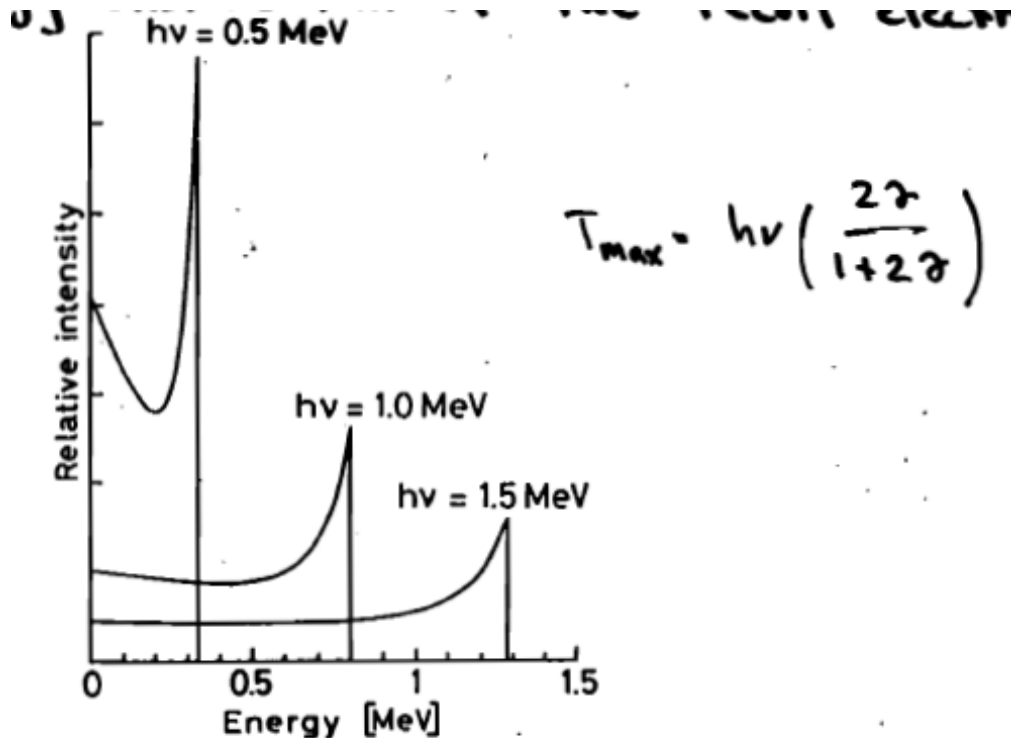
and for hv large

$$hv - T_{\max} \rightarrow \frac{m_e c^2}{2} = 0.2555 \text{ MeV}$$



Compton Scattering

- The electrons are expelled from atoms with a characteristic energy distribution, which, after a normalization gives the differential cross section $d\sigma/dT$

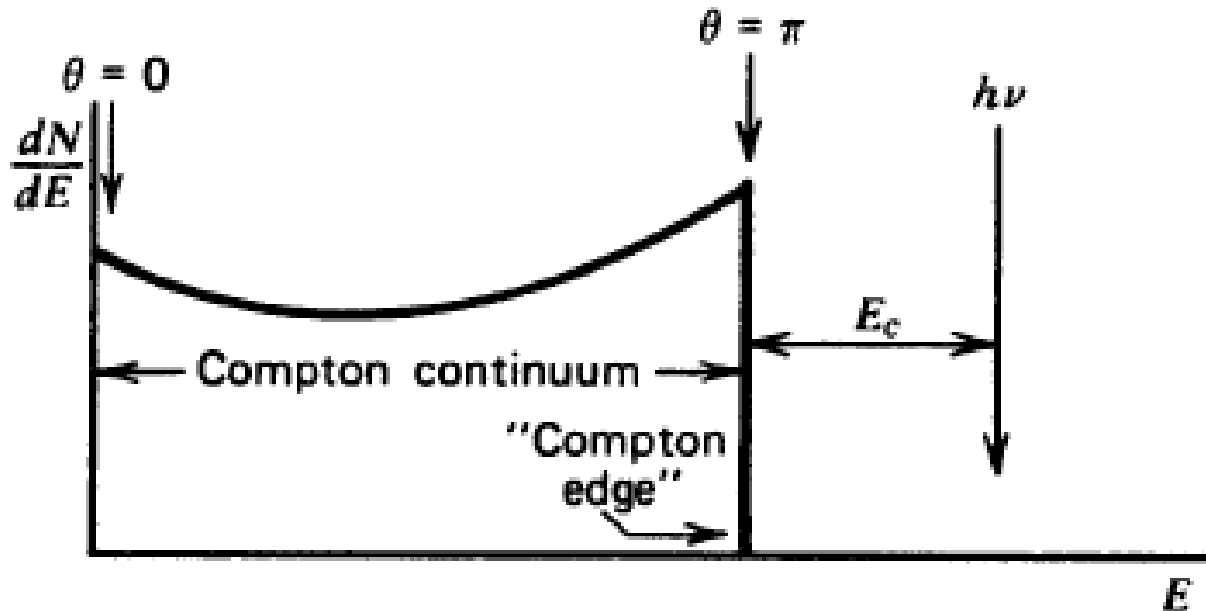


After the interaction we have a degraded photon and an energetic electron (in some sense analogous to a δ electron). Unless the photon has an appreciable prob to undergo to photoelectric effect, what we see in the material is only the energy deposited by the e^-

Fig. 2.24. Energy distribution of Compton recoil electrons. The sharp drop at the maximum recoil energy is known as the *Compton edge*

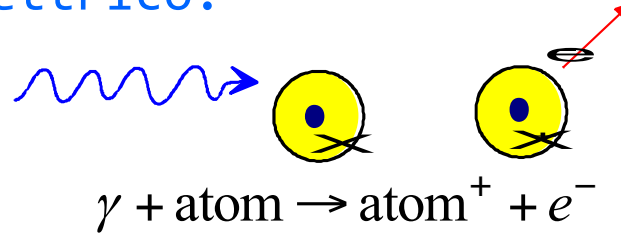
Compton Scattering

- In cases where the scattered photon leaves a detector without interaction one would observe



Interazioni dei γ

Effetto fotoelettrico.



L' effetto fotoelettrico consiste nell'assorbimento di un fotone da parte dell'atomo con emissione di un fotoelettrone. L'elettrone viene emesso con energia cinetica

$$T = \hbar\omega - E_b$$

Con E_b energia di legame dell'atomo e $\hbar\omega$ energia del fotone incidente.

Per energie del fotone incidente poco sopra soglia l'elettrone è emesso a 90° rispetto alla direzione del fotone incidente. Crescendo l'energia l'angolo di emissione diminuisce; ma ... scattering multiplo \rightarrow la direzione dell' elettrone è random rispetto alla direzione del fotone incidente.

Photoelectric Effect

- The energy of the (photo)electron is

$$E_e = E_\gamma - E_b$$

- Binding energies for some of the heavier elements are shown on the next page
- Recall from the Bohr model, the binding energies go as

$$E_n = -\frac{m_e Z^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{13.6Z^2}{n^2} eV$$

$$E_1 = -13.6 eV \text{ for } H$$

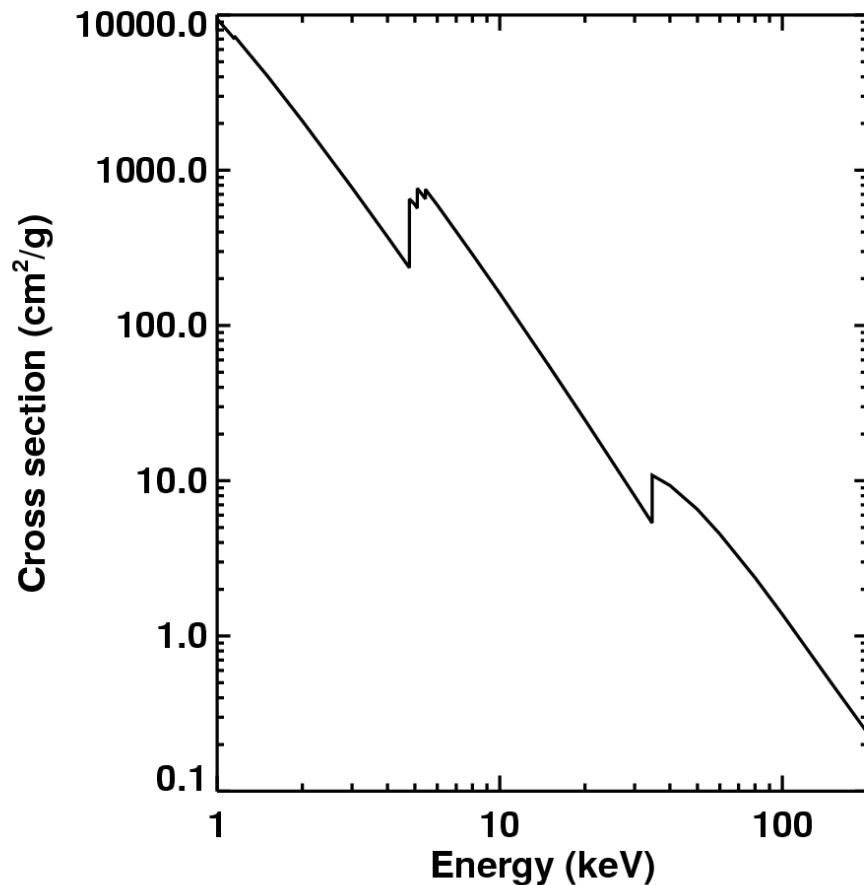
Photoelectric Effect

Table 1-1. Electron binding energies (continued).

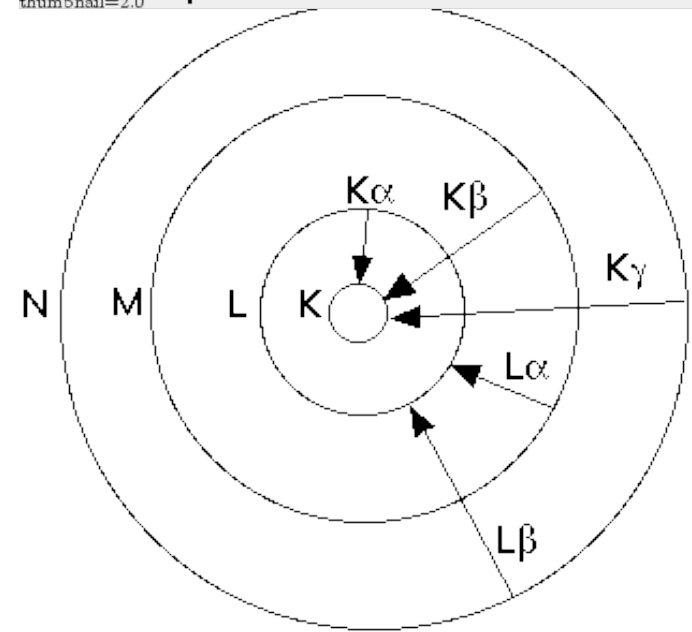
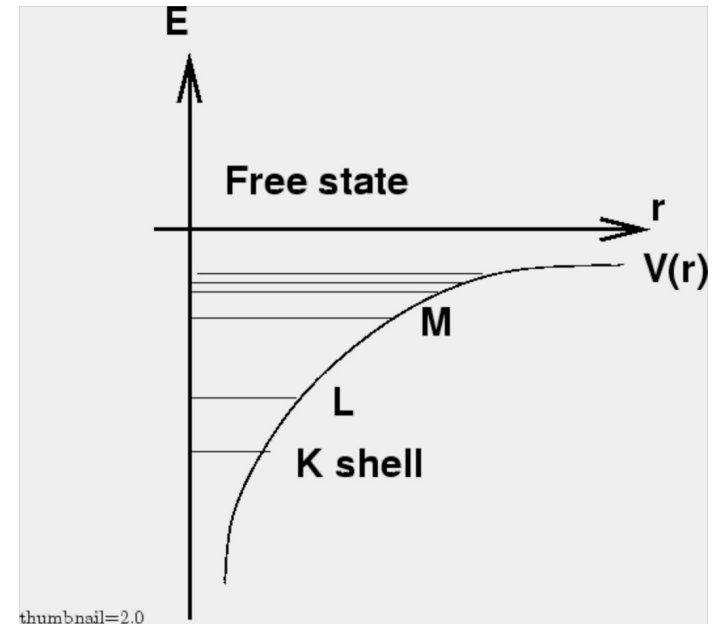
Element	K 1s	L ₁ 2s	L ₂ 2p _{1/2}	L ₃ 2p _{3/2}	M ₁ 3s	M ₂ 3p _{1/2}	M ₃ 3p _{3/2}	M ₄ 3d _{3/2}	M ₅ 3d _{5/2}	N ₁ 4s	N ₂ 4p _{1/2}	N ₃ 4p _{3/2}
71 Lu	63314	10870	10349	9244	2491	2264	2024	1639	1589	506.8*	412.4*	359.2*
72 Hf	65351	11271	10739	9561	2601	2365	2108	1716	1662	538*	438.2†	380.7†
73 Ta	67416	11682	11136	9881	2708	2469	2194	1793	1735	563.4†	463.4†	400.9†
74 W	69525	12100	11544	10207	2820	2575	2281	1872	1809	594.1†	490.4†	423.6†
75 Re	71676	12527	11959	10535	2932	2682	2367	1949	1883	625.4†	518.7†	446.8†
76 Os	73871	12968	12385	10871	3049	2792	2457	2031	1960	658.2†	549.1†	470.7†
77 Ir	76111	13419	12824	11215	3174	2909	2551	2116	2040	691.1†	577.8†	495.8†
78 Pt	78395	13880	13273	11564	3296	3027	2645	2202	2122	725.4†	609.1†	519.4†
79 Au	80725	14353	13734	11919	3425	3148	2743	2291	2206	762.1†	642.7†	546.3†
80 Hg	83102	14839	14209	12284	3562	3279	2847	2385	2295	802.2†	680.2†	576.6†
81 Tl	85530	15347	14698	12658	3704	3416	2957	2485	2389	846.2†	720.5†	609.5†
82 Pb	88005	15861	15200	13035	3851	3554	3066	2586	2484	891.8†	761.9†	643.5†
83 Bi	90524	16388	15711	13419	3999	3696	3177	2688	2580	939†	805.2†	678.8†
84 Po	93105	16939	16244	13814	4149	3854	3302	2798	2683	995*	851*	705*
85 At	95730	17493	16785	14214	4317	4008	3426	2909	2787	1042*	886*	740*
86 Rn	98404	18049	17337	14619	4482	4159	3538	3022	2892	1097*	929*	768*
87 Fr	101137	18639	17907	15031	4652	4327	3663	3136	3000	1153*	980*	810*
88 Ra	103922	19237	18484	15444	4822	4490	3792	3248	3105	1208*	1058	879*
89 Ac	106755	19840	19083	15871	5002	4656	3909	3370	3219	1269*	1080*	890*
90 Th	109651	20472	19693	16300	5182	4830	4046	3491	3332	1330*	1168*	966.4†
91 Pa	112601	21105	20314	16733	5367	5001	4174	3611	3442	1387*	1224*	1007*
92 U	115606	21757	20948	17166	5548	5182	4303	3728	3552	1439*b	1271*b	1043†

Photoelectric cross section in Xe

“Edges” occur at the characteristic electronic transition energies



When in emission, elements produce characteristic lines at these energies



Interazioni dei γ

- Il calcolo della sezione d'urto e' complicato perche' occorre tenere conto di tutti gli elettroni atomici.
- Di norma si calcolano le sezioni d'urto parziali delle singole shell atomiche K, L, M,...
- Per una data shell, la sezione d'urto e' massima quando $E_\gamma \approx E_{bi}$ e nulla per $E_\gamma < E_{bi}$
- La sezione d'urto totale e' la somma delle sezioni d'urto parziali sulle singole shell (no interferenza)

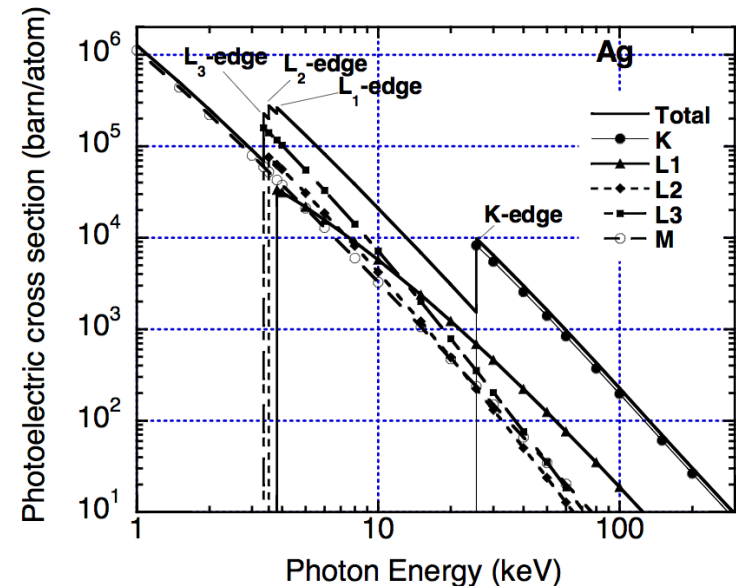


Figure 2: Total and partial atomic photoeffect of Ag.[9].

Interazioni dei γ

- Atomic electrons can absorb the energy of a photon completely, while – because of momentum conservation – this is not possible for free electrons. The absorption of a photon by an atomic electron requires a third collision partner which in this case is the atomic nucleus.
- The cross section for absorption of a photon of energy $E_\gamma \sim 0(>20 \text{ KeV})$ in the K shell is particularly large ($\approx 80\%$ of the total cross section), because of the proximity of the third collision partner, the atomic nucleus, which takes the recoil momentum.

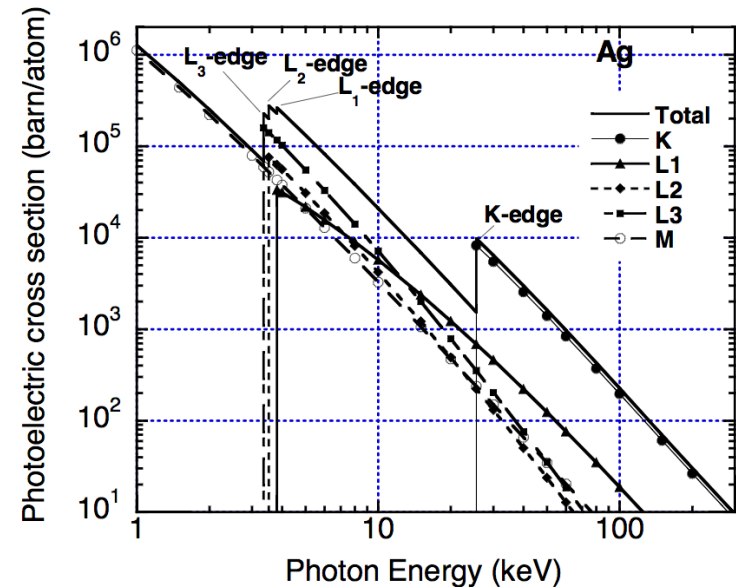


Figure 2: Total and partial atomic photoeffect of Ag.[9].

Interazioni dei γ

La sezione d'urto per basse energie è: (non relativistiche)

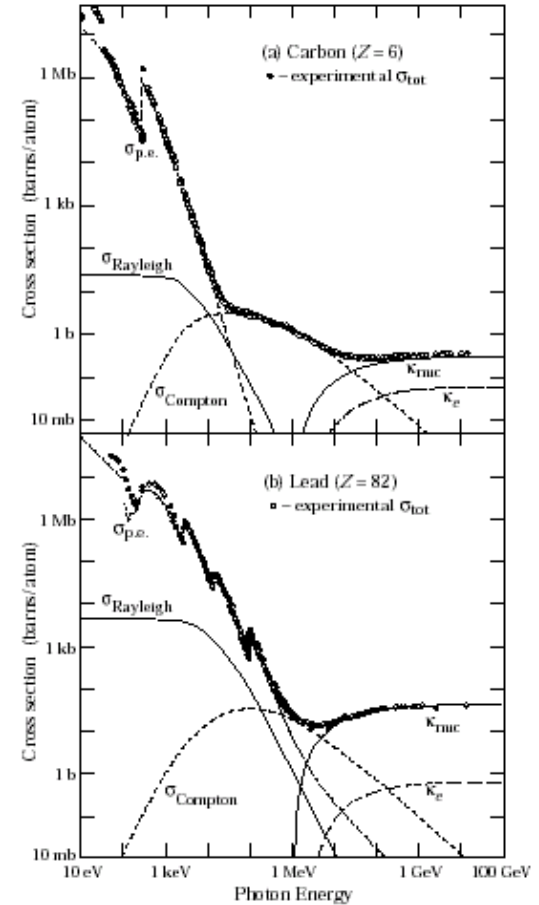
$$\sigma_{photo}^K = \left(\frac{32}{\epsilon^7}\right)^{\frac{1}{2}} \alpha^4 Z^5 \sigma_{Th}^e \quad \epsilon = \frac{E_\gamma}{m_e c^2} \quad \sigma_{Th}^e = \frac{8}{3} \pi r_e^2 \quad (\text{Thomson})$$

Presenta dei picchi corrispondenti ai livelli atomici K, L, M...

Se siamo sopra soglia vengono emessi preferibilmente elettroni dallo shell K.

Ad alte energie $\epsilon \gg 1$ la σ è:

$$\sigma_{photo}^K = 4\pi r_e^2 \alpha^4 Z^5 \frac{1}{\epsilon}$$



Interazioni dei γ

- A basse energie decresce con $\hbar\omega^{-7/2} \rightarrow$ fenomeno importante a bassa energia (tenuto conto che e' proporzionale a α^4).
- Dipende dal materiale come $Z^5 \rightarrow$ importante per la costruzione di rivelatori di fotoni (e.g. camere a Xenon).

Per fotoni incidenti di bassa energia la dipendenza da Z è una complicata funzione di Z e comunque minore di Z^5 . Ad esempio per energie $0.1 \text{ MeV} \leq E_\gamma \leq 5 \text{ MeV}$ l'esponente di Z varia fra 4 e 5.

Photoelectric effect relaxation

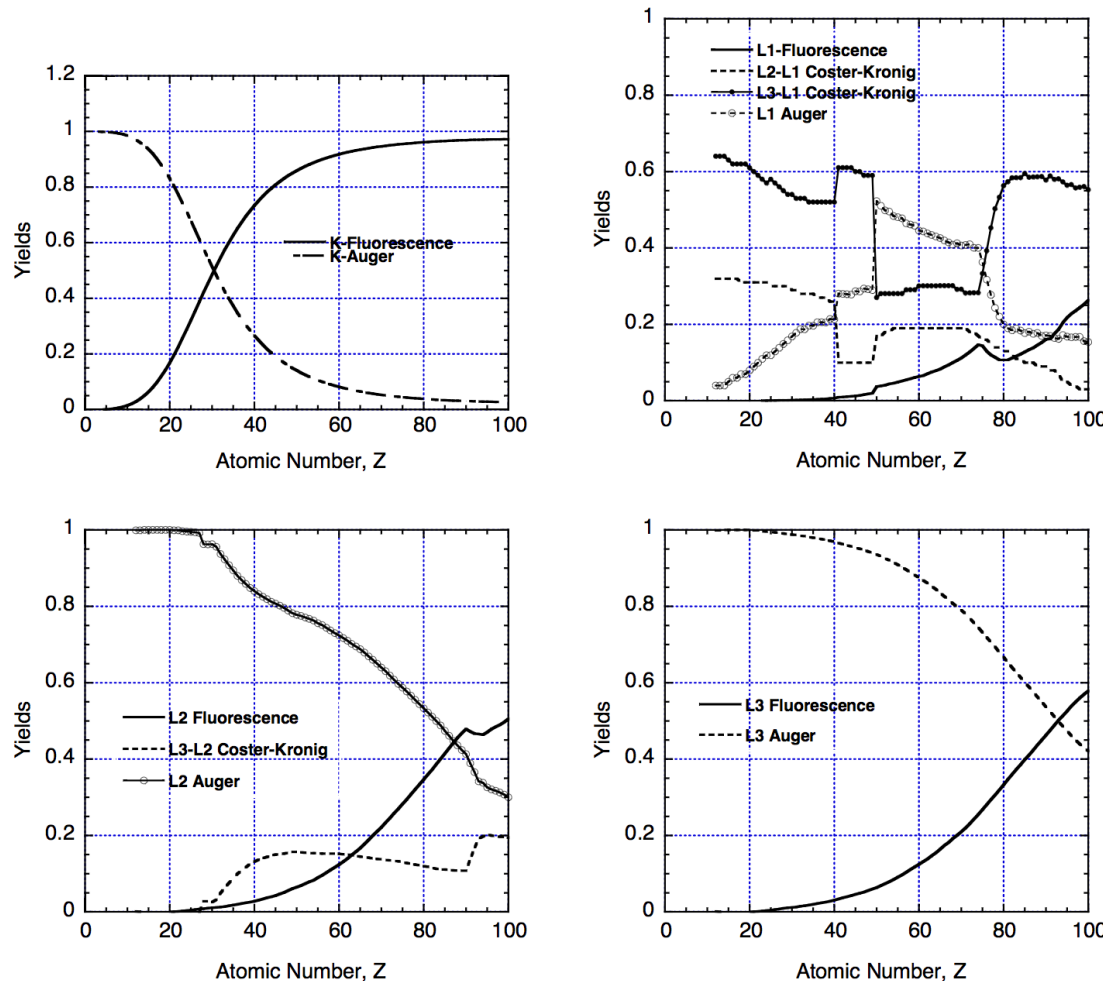
A vacancy created by the ejection of an electron from an inner shell is filled by an outer electron falling into it (de-excitation); this

Process may be accompanied by one of the following modes:

1. A fluorescence X-ray is emitted from the atom, with a photon energy equal to the difference between the vacancy-site inner-shell energy level and energy level of the particular outer shell which happens to supply the electron to the vacancy (fluorescence yield, w , is the fraction of fluorescence X-ray emission). The energy of characteristic X rays is given by Moseley's law $E = R_y(Z-1)^2(1/n^2 - 1/m^2)$, R_y = Rydberg constant
2. The excess energy ejects an outer-shell electron from the atom. This electron is known as an Auger electron (Auger yield, a , is the fraction of Auger emission). If the photoionisation occurs in the K shell (binding energy B_K), and if the hole in the K shell is filled up by an electron from the L shell (binding energy B_L), the excitation energy of the atom ($B_K - B_L$) can be transferred to an L electron. If $B_K - B_L > B_L$, the L electron can leave the atomic shell with an energy $B_K - 2B_L$ as an Auger electron. The energy of these Auger electrons is \ll the energy of the primary photoelectrons
3. A vacancy is filled by an electron in a higher sub shell, like from the L2 subshell to the L1 subshell. This process is called Coster-Kronig. As a result, a new vacancy is created, in which is filled by one of the modes (Coster-Kronig yield, f , is the fraction of Coster-Kronig).

The sum of fluorescence yield, w , Auger yield, a , and Coster-Kronig yield, f , is unity: $w + a + f = 1$

Photoelectric effect relaxation



Emission of Auger electrons competes with X-rays.

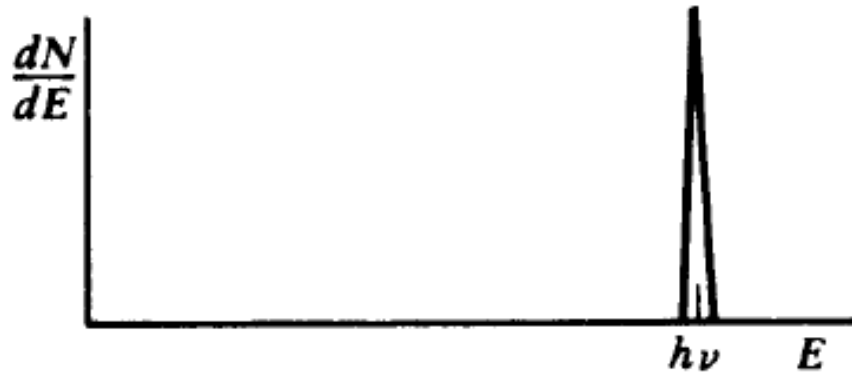
Considerations for photon detectors:

- ❑ In thin detectors, the X rays after photoemission may escape the detector.
- ❑ Auger electrons will certainly add to the signal in detectors

Figure 3: Yields of fluorescence, Auger electrons and Coster-Kronig after the K-, L₁-, L₂- or L₃-photoelectric effect[13].

Photoelectric Effect

- The energy spectrum looks like



- This is because at these photon/electron energies the electron is almost always absorbed in a short distance
 - As are any x-rays emitted from the ionized atom