

# *Particle Detectors*

*Lecture 6*  
*18/03/16*

a.a. 2015-2016  
Emanuele Fiandrini

$$\epsilon = [ 1 + (2Eb)^2/(ZZ'e^2)^2 ]^{1/2} \quad (3)$$

$$\sin(\frac{1}{2}\Theta) = (1/\epsilon) \quad (4)$$

- Put (4) into left side of (3) and solve for b:

$$\Rightarrow b = b(\Theta, E) = (ZZ'e^2)/(2E) \cot(\frac{1}{2}\Theta) \quad (7)$$

(7), the impact parameter as function of  $\Theta$  & E for Coulomb scattering is an **important result!**

$$b = b(\Theta, E) = (ZZ' e^2)/(2E) \cot(\frac{1}{2}\Theta) \quad (7)$$

- Now, use (7) to compute the **Differential Scattering Cross Section for Coulomb Scattering.**

- We had:  $\sigma(\Theta) = (b/\sin\Theta) (|db|/|d\Theta|)$  (8)

(7) & (8) (after using trig identities):

$$\Rightarrow \sigma(\Theta) = (\frac{1}{4})[(ZZ' e^2)/(2E)]^2 (1/\sin^4(\frac{1}{2}\Theta)) \quad (9)$$

(9)  $\equiv$  *The Rutherford Scattering Cross Section*

- Get the same results in a (non-relativistic) QM derivation!
- Valid for spin 0 particles

# Multiple Scattering

- Il fatto che il nucleo domini la diffusione angolare si vede anche dal fatto che la sez d'urto sul nucleo va come  $Z^2e^4$
- e come  $e^4$  per i singoli e- atomici; se ci sono  $Z$  elettroni, la sez d'urto sugli e- va come  $Ze^4$
- quindi la diffusione sul nucleo e'  $Z$  volte quella degli elettroni

# Single Scattering

- Individual collisions governed by Rutherford scattering formula:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = z^2 Z^2 r_e^2 \left( \frac{m_e c}{\beta p} \right)^2 \frac{1}{4 \sin^4(\theta/2)} \quad **$$

- Does not take into account spin effects or screening
- Although single large angle scattering can occur for very small impact parameter, probability that a single interaction will scatter through a significant angle is very small due to  $1/\sin^4(\theta/2)$  dependence.
- For large impact parameter (much more probable), scattering angle is further reduced w.r.t. Rutherford formula due to partial screening of nuclear charge by atomic electrons.
- \*\*NB: the form is equivalent to the previous one, provided that  $Mv^2 = cp\beta$ ,  $M$  is the mass of incident particle and  $r_e = e^2/m_e c$  is the classical electron radius

# Scattering elastico

Nel limite di piccoli angoli  $\theta \ll 1$ ,  $\sin\theta \sim \theta \rightarrow$  la sezione d'urto si riduce a

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx 4z^2 Z^2 r_e^2 \left( \frac{m_e c}{\beta p} \right)^2 \frac{1}{\theta^4}$$

Questa formula ci dice che la sezione d'urto diverge a piccolo angolo.

Ma esiste un  $\theta$  minimo ed un  $\theta$  massimo ... .

# Scattering elastico: quick calc per $\theta \ll 1$

La sezione d'urto e' = all'elemento di area trasversa  $d\sigma = 2\pi b db$

Il momento scambiato durante l'interazione e'

$P_t = 2zZe^2/bv$ , perpendicolare all'impulso iniziale

La deflessione che la particella subisce e'

$\tan \theta \approx \theta = p_t/p$  per piccoli angoli

$\theta \approx 2zZe^2/bvp$  ovvero  $b = (2zZe^2/vp) (1/\theta)$

La sezione d'urto infinitesima e'

$d\sigma = 2(2zZe^2/vp)^2 (d\theta/\theta^3)$

Percio'  $d\sigma/d\Omega = 2\pi (2zZe^2/vp)^2 (1/\theta^3) (d\theta/d\Omega)$

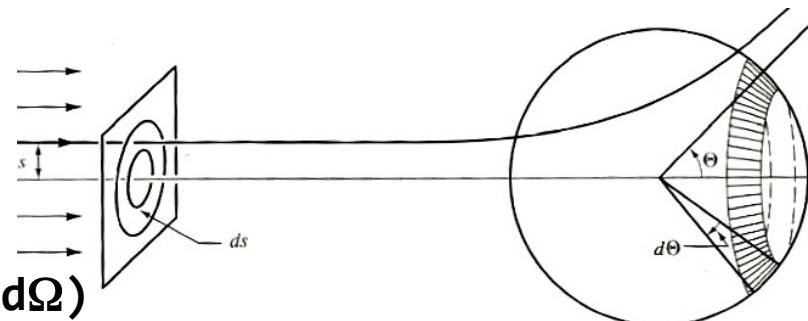


FIGURE 3.19 Scattering of an incident beam of particles by a center of force.

$$d\Omega = 2\pi \sin(\theta) d\theta \sim 2\pi \theta d\theta \text{ (per piccoli angoli)} \rightarrow \frac{d\theta}{d\Omega} = 1/2\pi\theta$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \left( \frac{2zZe^2}{vp} \right)^2 \frac{1}{\theta^4}$$

Calcolo classico, ma viene esattamente lo stesso risultato in meccanica quantistica.

NB: diverge a piccoli angoli, ma l'approx si applica fra un angolo minimo e uno massimo di deflessione

# Scattering elastico: angolo min e max

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \left( \frac{2zZe^2}{vp} \right)^2 \frac{1}{\theta^4}$$

X-section diverges for  $\theta \rightarrow 0$  because Coulomb interaction is long range for a single target-projectile pair.

But in a medium, also atomic electrons are usually present that screen nuclear charge for distances  $r$  (that is impact parameter  $b$ ) > atomic radius  $a$  and the x-section remains finite for  $\theta = 0$

The simplest classical approximation is to truncate the coulomb potential at  $r = a \rightarrow$  The scattering angle reaches a minimum,  $\theta_{\min}$ , and the x-section tends to a constant value for diffusion angles below a mimimum deflection  $\theta_{\min}$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \left( \frac{2zZe^2}{\beta p} \right)^2 \frac{1}{(\theta^2 + \theta_{\min}^2)^2}$$

$\theta_{\min}$  is obtained from  $\theta \approx 2zZe^2/bvp$  with  $b = a$   
 $\theta_{\min} = 2zZe^2/vpa$

- In terms of impact parameter,  $b$  is max (cioe'  $\theta$  e' min) when  $b_{\max} = R_{\text{atomo}}$
- $b_{\max} = a_0 = r_e/\alpha^2$  for hydrogen
  - $b_{\max} = r_a \sim [(h/2\pi\alpha mc)] Z^{-1/3}$  for materials heavier than H (Fermi-Thomas model)

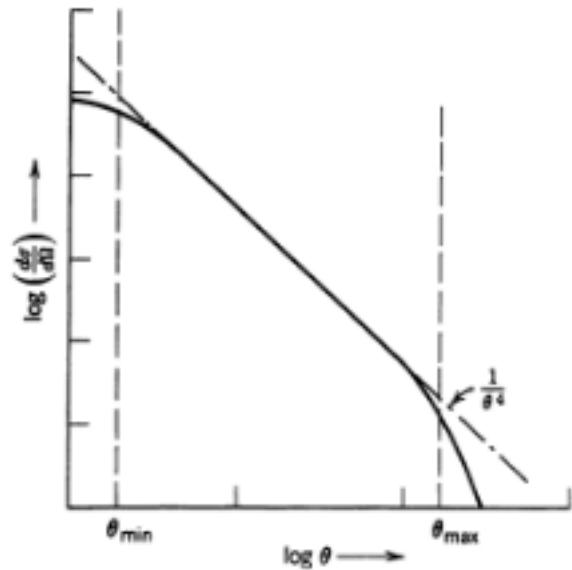
# Scattering elastico: angolo min e max

Quantisticamente, affinche' lo scattering possa avvenire, la posizione della particella incidente deve essere localizzata entro  $\delta x \sim R_{\text{atomo}}$  per avere una probabilita' apprezzabile di essere deviata.

Allora  $\Delta p \approx h/(2\pi r_{\text{atomo}})$  e  $\Delta\theta \approx \Delta p/p$  e quindi

$$\theta_{\min} \approx h/(2\pi r_{\text{atomo}} p) = (Z^{1/3}/192) (mc/p)$$

Dei due minimi, classico e quantistico, si sceglie il piu' grande (analogamente al caso della BB per la scelta del  $b_{\min}$ ). Usualmente e' quello quantistico.



# Scattering elastico: angolo min e max

Abbiamo anche un  $\theta_{\max}$  (che corrisponde a  $b_{\min}$ ).

Ad angoli grandi rispetto a  $\theta_{\min}$  (ma piccoli comunque in assoluto), la sezione 'urto devia dal valore previsto da Rutherford a causa della dimensione finita del nucleo.

Le cause sono diverse:

-per i leptoni  $e, \mu, \tau$ , l'influenza delle dimensioni nucleari è di natura puramente elettromagnetica,

-per gli adroni ( $\pi, K, p, \alpha, \dots$ ) sono in genere presenti reazioni anelastiche dovute alle interazioni nucleari forti.

L'effetto netto complessivo è quello di ridurre la sezione d'urto rispetto a quella elastica di Rutherford.

Ci limitiamo a considerare solo l'aspetto elettromagnetico, non quello delle interazioni nucleari

# Scattering elastico: angolo min e max

Abbiamo anche un  $\theta_{\max}$  (che corrisponde a  $b_{\min}$ ) ( $\theta \approx 2zZe^2/bvp$ ).

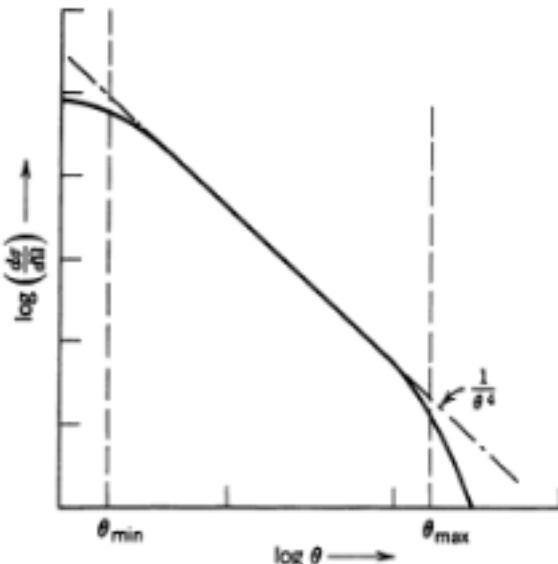
Ad angoli grandi rispetto a  $\theta_{\min}$  (ma piccoli comunque in assoluto), la sezione 'urto devia dal valore previsto da Rutherford a causa della dimensione finita del nucleo.

Quando  $\lambda = h/p \sim R_{\text{nucleo}}$ , la diffusione diventa diffrattiva e confinata entro un angolo  $\theta = \lambda/R = h/pR$

Alternativamente, con il principio di indetrm.,  $\Delta p = h/R$  e quindi  $\theta \approx \Delta p/p = h/pR$

Una stima di  $R$  e'  $R_n \sim 1.4 \times 10^{-15} A^{1/3}$

$$\Rightarrow \theta_{\max} \cong \frac{274}{A^{1/3}} \frac{mc}{p}$$



Si noti che  $1 \gg \theta_{\max} \gg \theta_{\min}$  per tutti i valori fisici di  $A$  e  $Z$

$$\theta_{\max}/\theta_{\min} = 274 \times 192/(AZ)^{1/3} \approx 2000 \text{ per l'Uranio}$$

**Figure 13.6** Atomic scattering, including effects of electronic screening at small angles and finite nuclear size at large angles.

# Scattering elastico: sezione d'urto totale

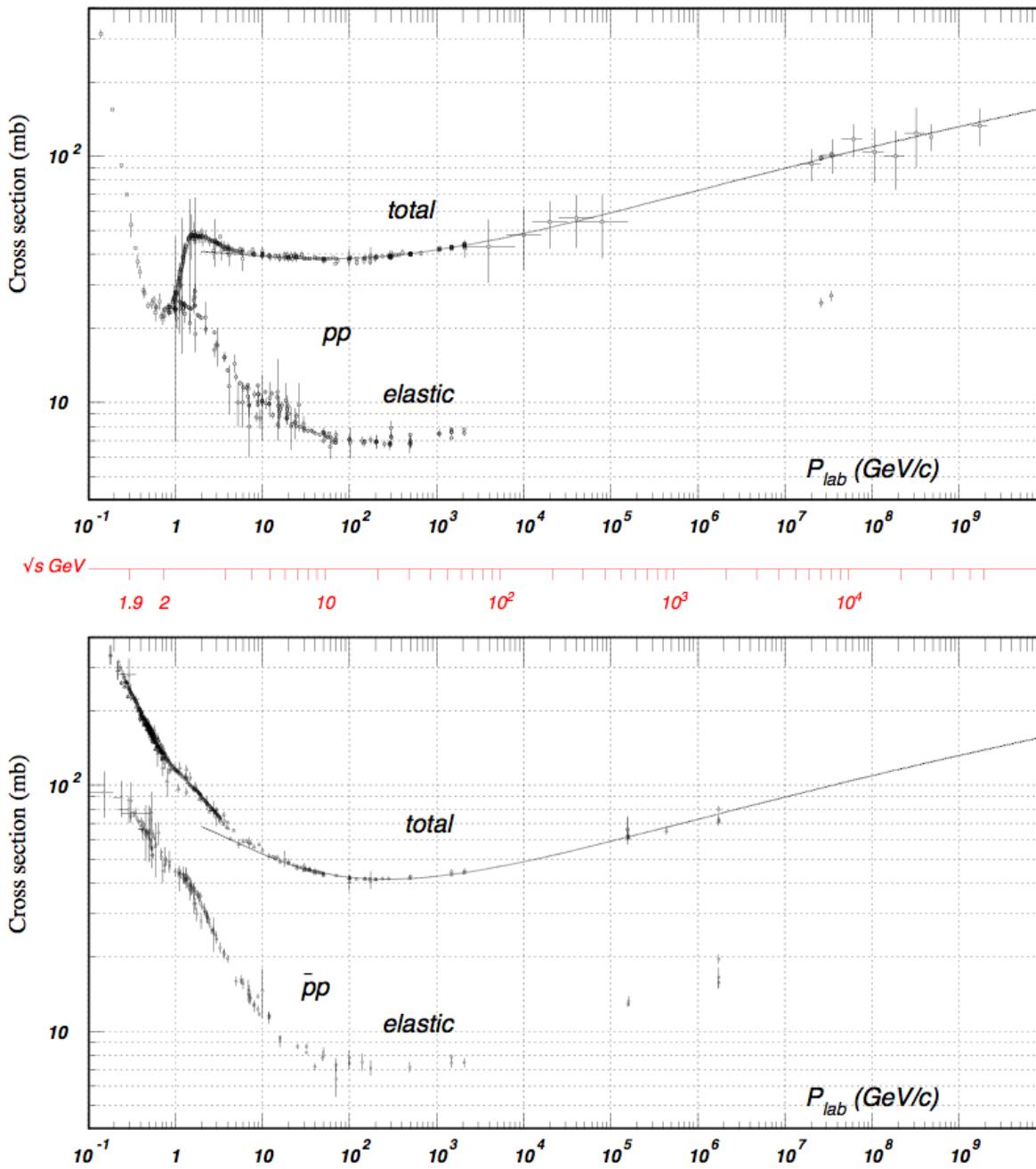
La sezione d'urto totale e' finita e puo' essere ottenuta integrando sull'angolo solido quella differenziale

$$\Rightarrow \sigma = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \frac{d\sigma}{d\Omega} 2\pi \vartheta d\theta \cong \left( \frac{2zZe^2}{\beta p} \right)^2 \frac{1}{\theta_{\min}^2}$$

$$\theta_{\min} \approx (Z^{1/3}/192) (mc/p)$$

$$\Rightarrow \sigma = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \frac{d\sigma}{d\Omega} 2\pi \vartheta d\theta \cong \pi \left( \frac{2zZe^2}{\beta} \right)^2 \left( \frac{192}{Z^{1/3}} \right)^2 \frac{1}{(mc)^2}$$

La sezione d'urto totale di deflessione per singolo urto decresce aumentando  $\beta$ .



**Figure 49.9D11:** Total and elastic cross sections for  $pp$  and  $\bar{p}p$  collisions as a function of laboratory beam momentum and total center-of-mass energy. Corresponding data files may be found at

# Scattering multiplo

- La distribuzione di probabilita'  $\Psi_{ms}(\theta, x)$  per gli angoli di diffusione obbedisce ad un'equazione analoga a quella per le fluttuazioni del deposito di energia:

Prob di deflessione di  $\theta - \zeta$  a x

$$\frac{\partial \psi_{ms}}{\partial x}(\theta, x) = \int \left( \psi_{ms}(\theta - \zeta, x) n_a \frac{d\sigma}{d\Omega}(\zeta) \zeta d\zeta \right) + \psi_{ms}(\theta, x) \int \left( n_a \frac{d\sigma}{d\Omega}(\zeta) \zeta d\zeta \right)$$

Prob di una deflessione qualsiasi in dx

Prob di deflessione di  $\zeta$  in dx

$n_a$  = densita' di particelle del mezzo assorbitore

La distribuzione cumulativa dipende sia dalla "storia" della propagazione fino a x sia dalla distribuzione di probabilita' di deflessione per la singola particella.

Se si assume la diffusione di Rutherford, e' possibile trovare soluzioni analitiche (Moliere)

# Scattering multiplo

$$\frac{\partial \psi_{\text{ms}}}{\partial x}(\theta, x) = \int \psi_{\text{ms}}(\theta - \zeta, x) n_a \frac{d\sigma}{d\Omega}(\zeta) \zeta d\zeta - \psi_{\text{ms}}(\theta, x) \int n_a \frac{d\sigma}{d\Omega}(\zeta) \zeta d\zeta$$

La soluzione puo' essere espressa in forma integrale

to be the small angle Rutherford cross section, becomes [22, 23]

$$\psi_{\text{ms}}(\theta, x) = \frac{1}{\theta_c^2} \int_0^\infty y dy J_0\left(\frac{\theta y}{\theta_c}\right) \exp\left[\frac{y^2}{4}\left(-b + \ln \frac{y^2}{4}\right)\right] \quad (2.89)$$

where  $J_0$  is a Bessel function and  $\theta_c$  is a characteristic angle given by

$$\theta_c^2 = \frac{4\pi n_a e^4 Z_1^2 Z_2 (Z_2 + 1)x}{(pv)^2} \quad (2.90)$$

The angle  $\theta_c$  contains the dependence of  $\psi_{\text{ms}}$  on the macroscopic properties of the scattering medium. Note that  $\theta_c^2$  grows linearly with  $x$ . The quantity  $b$  is defined as

$$b = \ln(\theta_c/\theta_a)^2 + 1 - 2C_E \quad (2.91)$$

where  $C_E$  is Euler's constant. The dependence of the scattering on the

# Scattering multiplo

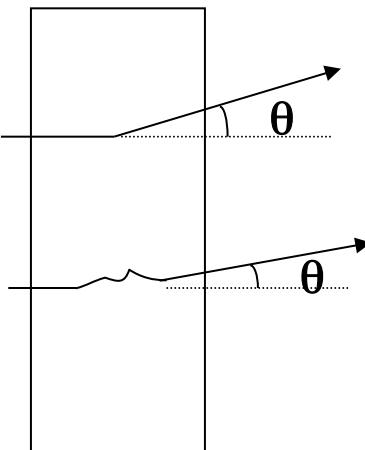
- Non risolveremo l'equazione ma tratteremo in maniera separata e approssimata le varie regioni di diffusione
  - Singolo scattering: se l'assorbitore è sottile così che la probabilità di più un singolo scattering è trascurabile, la distribuzione angolare è data dalla sezione d'urto di Rutherford.
  - Scattering “plurale”: se il numero medio di collisioni non è sufficientemente elevato,  $N < 20$ , la distribuzione è complicata perché ne’ la semplice formula di rutherford ne’ metodi statistici possono essere applicati in modo semplice.
  - Scattering multiplo: se il numero medio di collisioni è elevato,  $N > 20$ , e la perdita di energia è trascurabile, il problema può essere trattato statisticamente (cioè’ possiamo applicare il teorema del limite centrale).

# Scattering multiplo

La diffusione di Rutherford e' limitata ad angoli molto piccoli, anche per un campo coulombiano di carica puntiforme e per particelle veloci si ha sempre  $\theta_{\max} \ll 1$ .

La prob di diff a piccoli angoli e' quindi molto elevata.

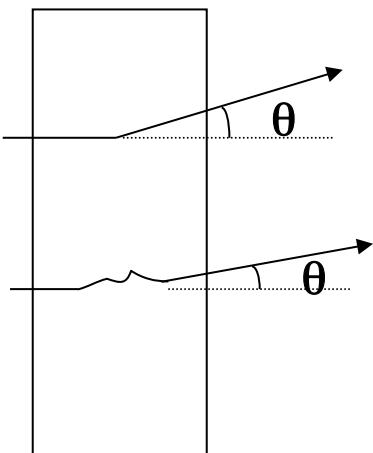
Una particella che attraversa uno spessore finito subira' un gran numero di piccole deviazioni ed emergera' dalla lastra ad un piccolo angolo rispetto alla direzione di incidenza. L'angolo e' la sovrapposizione cumulativa statistica di un gran numero di piccole deflessioni singole.



Solo raramente la particella subira' una deviazione a grande angolo. Poiche' e' poco probabile, la particella non subira' praticamente mai piu' di una (o poche) di queste deviazioni (siamo nell'ipotesi che lo spessore sia piccolo rispetto al range)

Questa constatazione ci permette di dividere l'intervallo angolare delle deviazioni in due zone: una comprendente angoli relativamente grandi, in cui si presentano soltanto diffusioni singole e una zona comprendente angoli molto piccoli che contiene le diffusioni multiple o composte.

# Scattering multiplo



Tradizionalmente si divide l'intervallo angolare delle deviazioni in due zone: una ad angoli relativamente grandi, in cui si hanno diffusioni singole, ed una ad angoli molto piccoli, che contiene le diffusioni multiple.

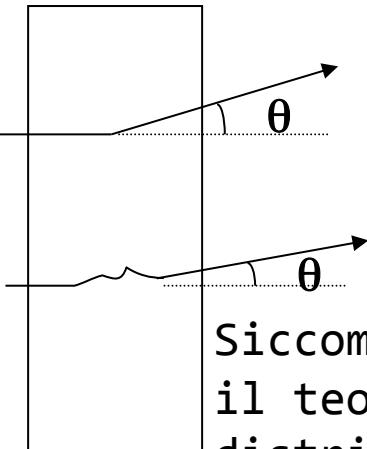
Ovviamente, noi osserviamo la deviazione finale dopo uno spessore  $x$ . Una particella può subire un solo scattering, o fare molti scattering coulombiani .

Non possiamo dire se l'angolo all'uscita dal materiale sia dovuto a un singolo scattering a grande angolo o a molti scattering a piccolo angolo

# Scattering multiplo: regione a piccoli angoli

La grandezza determinante nella zona di diffusione multipla, dove la particella subisce numerose deflessioni a piccoli angoli, distribuite simmetricamente intorno alla direzione di incidenza, e' l'angolo quadratico medio di deflessione.

In ogni urto singolo le deflessioni angolari seguono la legge di Rutherford, tra  $\theta_{\min}$  e  $\theta_{\max}$  con valore medio nullo,  $\langle\theta\rangle = 0$  (se considerate rispetto alla dir di incidenza), e con un angolo quadratico medio  $\langle\theta^2\rangle \neq 0$ .



$$\langle\theta^2\rangle = \frac{\int \theta^2 \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega}{\int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega} \cong \frac{\int \frac{d\theta}{\theta}}{\int \frac{d\theta}{\theta^3}} \cong 2\theta_{\min}^2 \left[ \ln\left(\frac{\theta_{\max}}{\theta_{\min}}\right) \right]$$

Siccome gli urti successivi sono statisticamente indipendenti, il teorema del limite centrale ci assicura che la distribuzione dopo un gran numero N di urti e' una gaussiana con deviazione standard data dalla somma (in quadratura) delle larghezze nelle singole collisioni:

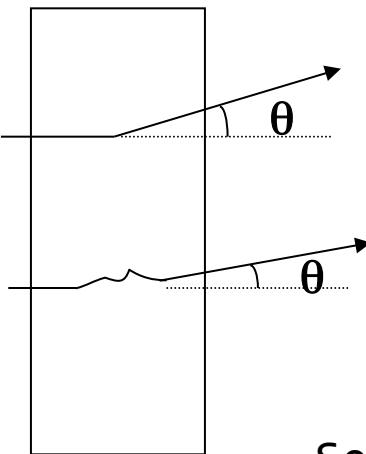
$$\langle\Theta^2\rangle = N\langle\theta^2\rangle$$

# Scattering multiplo: regione a piccoli angoli

Il numero di urti che una particella subisce nell'attraversare uno spessore  $x$  e'  $N = n\sigma x$ , dove  $\sigma$  e' la sez. d'urto totale di deflessione ed  $n$  e' la densita' di particelle del mezzo, perciò

$$\Rightarrow \sigma \approx \left( \frac{2zZ\alpha}{\beta p} \right)^2 \frac{1}{\theta_{\min}^2} \quad N \approx \pi n \left( \frac{2zZe^2}{pv} \right) \frac{x}{\theta_{\min}^2}$$

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{\int \theta^2 \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega}{\int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega} \approx \frac{\int \frac{d\theta}{\theta}}{\int \frac{d\theta}{\theta^3}} \approx 2\theta_{\min}^2 \left[ \ln \left( \frac{\theta_{\max}}{\theta_{\min}} \right) \right]$$



$$\Rightarrow \langle \Theta^2 \rangle = 2\pi n x \left( \frac{2zZe^2}{\beta p} \right)^2 \ln \left( \frac{\theta_{\max}}{\theta_{\min}} \right)$$

Considerando che  $n = N_A \rho / A$

$$\Rightarrow \langle \vartheta_{ms}^2 \rangle \approx \frac{N_A \rho x}{A} \cdot 2\pi \left( \frac{2zZe^2}{\beta p} \right)^2 \cdot \ln \frac{2}{\alpha^2 A^{1/3} Z^{1/3}}$$

Se  $A \sim 2Z$  il termine logaritmico diventa  $2\ln(173Z^{-1/3})$ .

Il fattore nel logaritmo cambia da autore ad autore (Le considerazioni svolte qui sono tratte dal Jackson, Elettrodinamica Classica, Cap. 13)

L'angolo quadratico medio cresce linearmente con il grammaggio attraversato  $\rho x$ , avendo in mente che  $\rho x$  e' comunque tale che le perdite di energia della particella sono trascurabili

Non c'e' quasi piu' dipendenza da  $\theta_{\min}$

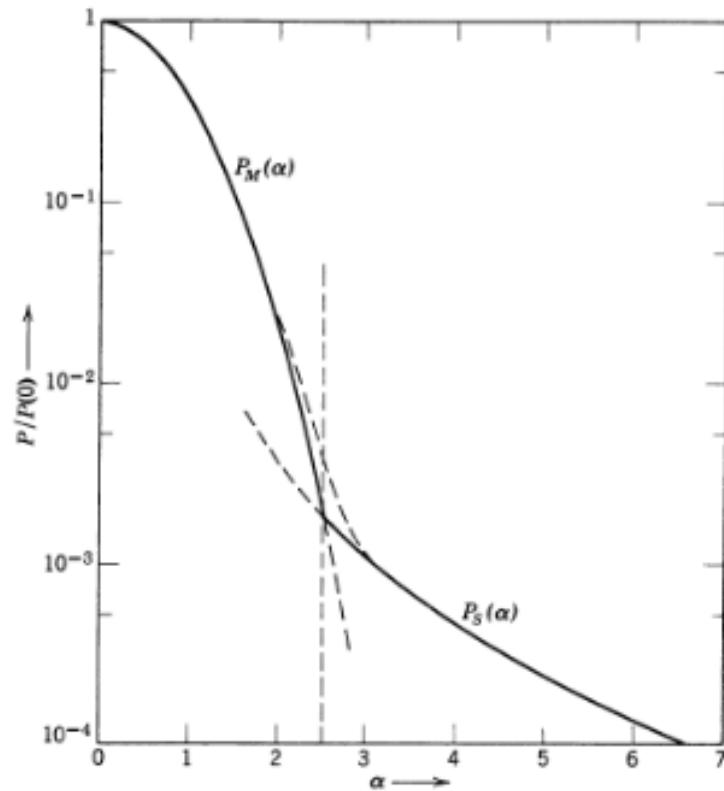
# Scattering multiplo: regione a piccoli angoli

A piccoli angoli, N e' molto grande e quindi si puo' applicare il teorema del limite centrale.

A piccoli angoli quindi la probabilita' di avere uno scattering fra  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  e' una gaussiana di larghezza

$$\langle \Theta_{ms} \rangle = \langle \Theta^2 \rangle^{1/2}$$

$$P_M(\alpha) d\alpha \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2} d\alpha \quad \alpha = \frac{\theta}{\langle \theta_{RMS} \rangle}$$



**Figure 13.8** Multiple- and single-scattering distributions of projected angle. In the region of plural scattering ( $\alpha \sim 2-3$ ) the dashed curve indicates the smooth transition from the small-angle multiple scattering (approximately Gaussian in shape) to the wide-angle single scattering (proportional to  $\alpha^{-3}$ ).

# Scattering multiplo: regione a grandi angoli

La diffusione a grandi angoli e' dovuta a singoli (o pochi) scattering.

La distribuzione di probabilita' e' quella di singolo scattering

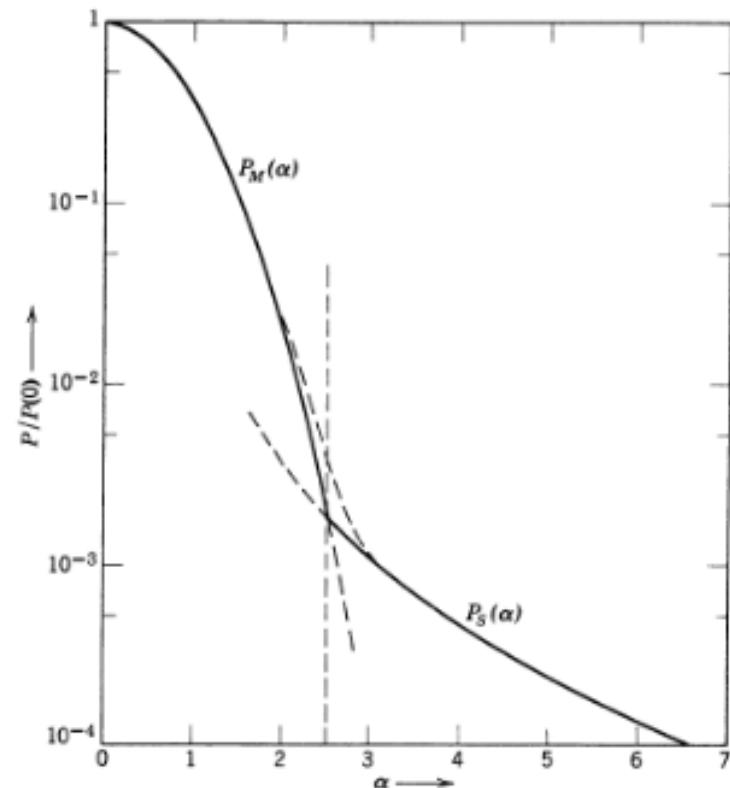
$$P_S d\Omega \approx \left( \frac{2zZe^2}{\beta p} \right)^2 \frac{d\Omega}{(\theta^2 + \theta_{\min}^2)^2}$$

nel limite di piccoli angoli (ie  $\theta \ll 1$ ,  $d\Omega = 2\pi\theta d\theta$ ) e vicini a  $\theta_{\max}$ :

$$P_S d\theta \approx \left( \frac{2zZe^2}{\beta p} \right)^2 * \frac{2\pi\theta d\theta}{\theta^4}$$

$$\alpha = \frac{\theta}{\langle \theta_{RMS} \rangle}$$

$$P_S d\alpha \approx \frac{1}{8 \ln(173Z^{-1/3})} * \frac{d\alpha}{\alpha^3}$$



**Figure 13.8** Multiple- and single-scattering distributions of projected angle. In the region of plural scattering ( $\alpha \sim 2-3$ ) the dashed curve indicates the smooth transition from the small-angle multiple scattering (approximately Gaussian in shape) to the wide-angle single scattering (proportional to  $\alpha^{-3}$ ).

# An Early Measurement with Electrons

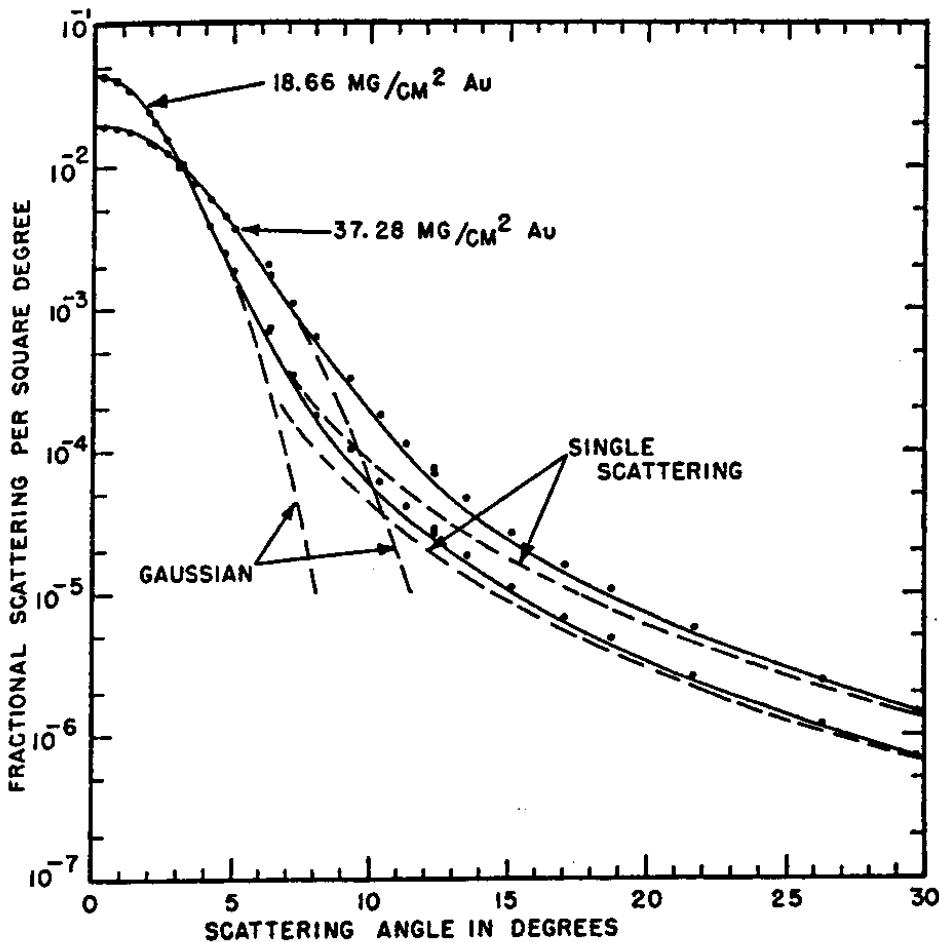


FIG. 3. Angular distribution of electrons from thick and thin gold foils from  $0^\circ$  to  $30^\circ$ . The solid line represents the theory of Molière extrapolated through the region where his small and large angle approximations give different values. The dotted lines at small angles represent the continuation of the gaussians of Fig. 1. At larger angles, the dotted line represents the single scattering contribution.

- Continuous line is the exact solution of the transport differential equation.
- At small angles the gaussian approximation is very good
- The single scattering distribution approximates well the data only at very large angles

# Scattering multiplo

Tradizionalmente si scrive l'angolo di scattering in termini della lunghezza di radiazione  $X_0$ .

Attenzione  $X_0$  è definita per processi radiativi. Lo scattering multiplo non è un processo radiativo  $\rightarrow \theta_{ms}$  e' espressa in funzione di  $X_0$  solo per fini pratici poiche'  $X_0$  e' facilmente misurabile e nota per tutti i materiali

$$\langle \theta_{ms}^2 \rangle = z^2 \frac{x}{X_0} \frac{2\pi}{\alpha} \frac{m_e^2 c^4}{\beta^2 p^2} \text{ ed in termini di energia}$$

$$\theta_{ms} = z \frac{E_s}{\beta cp} \sqrt{\frac{x}{X_0}} \quad \left( E_s = \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha}} \cdot mc^2 \approx 21 \text{ MeV} \right)$$

(1)

# Radiation Length (cfr. Bremsstrahlung)

- Define Radiation Length,  $X_0$ :

$$-\frac{dE}{dX} \Big|_{rad} = \frac{E}{X_0} \quad \text{where} \quad \frac{1}{X_0} = 4\alpha N_A r_e^2 \frac{Z^2}{A} \ln \frac{183}{Z^{1/3}}$$

$$\Rightarrow E = E_0 e^{-x/X_0}$$

Units of  $X_0$ : g cm<sup>-2</sup>

Divide by density  $\rho$  to get  $X_0$  in cm

- Radiation length is the mean distance over which a high-energy electron loses all but 1/e of its energy by bremsstrahlung.
- e.g. Pb: Z=82, A=207,  $\rho=11.4$  g/cm<sup>3</sup>:
  - $X_0 \approx 5.9$  g/cm<sup>2</sup>
  - Mean penetration distance:  $x = X_0/\rho = 5.9/11.4 = 5.2$  mm

# Scattering multiplo

$$\langle \theta_{ms}^2 \rangle = z^2 \frac{x}{X_0} \frac{2\pi}{\alpha} \frac{m_e^2 c^4}{\beta^2 p^2} \text{ ed in termini di energia}$$

$$\theta_{ms} = z \frac{E_s}{\beta cp} \sqrt{x/X_0} \quad \left( E_s = \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha}} \cdot mc^2 \approx 21 \text{ MeV} \right)$$

Valida solo se attraverso molte lunghezze di radiazione,  
altrimenti è una sovrastima di  $\theta_{ms}$ . Più accurata:

$$\theta_{ms} = z \frac{19.2}{\beta cp} [\text{MeV}] \sqrt{x/X_0} \left( 1 + 0.038 \ln \left( \frac{x}{X_0} \right) \right)$$

Formule valide per piccoli angoli. Non tengono conto delle code non gaussiane dovute ai singoli scattering

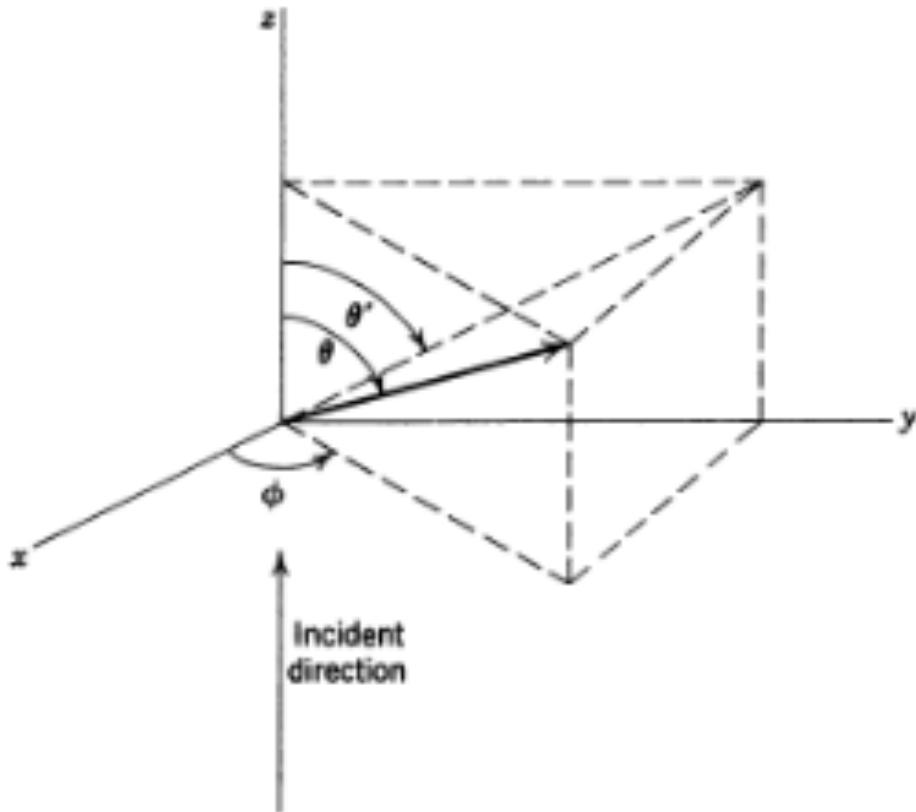


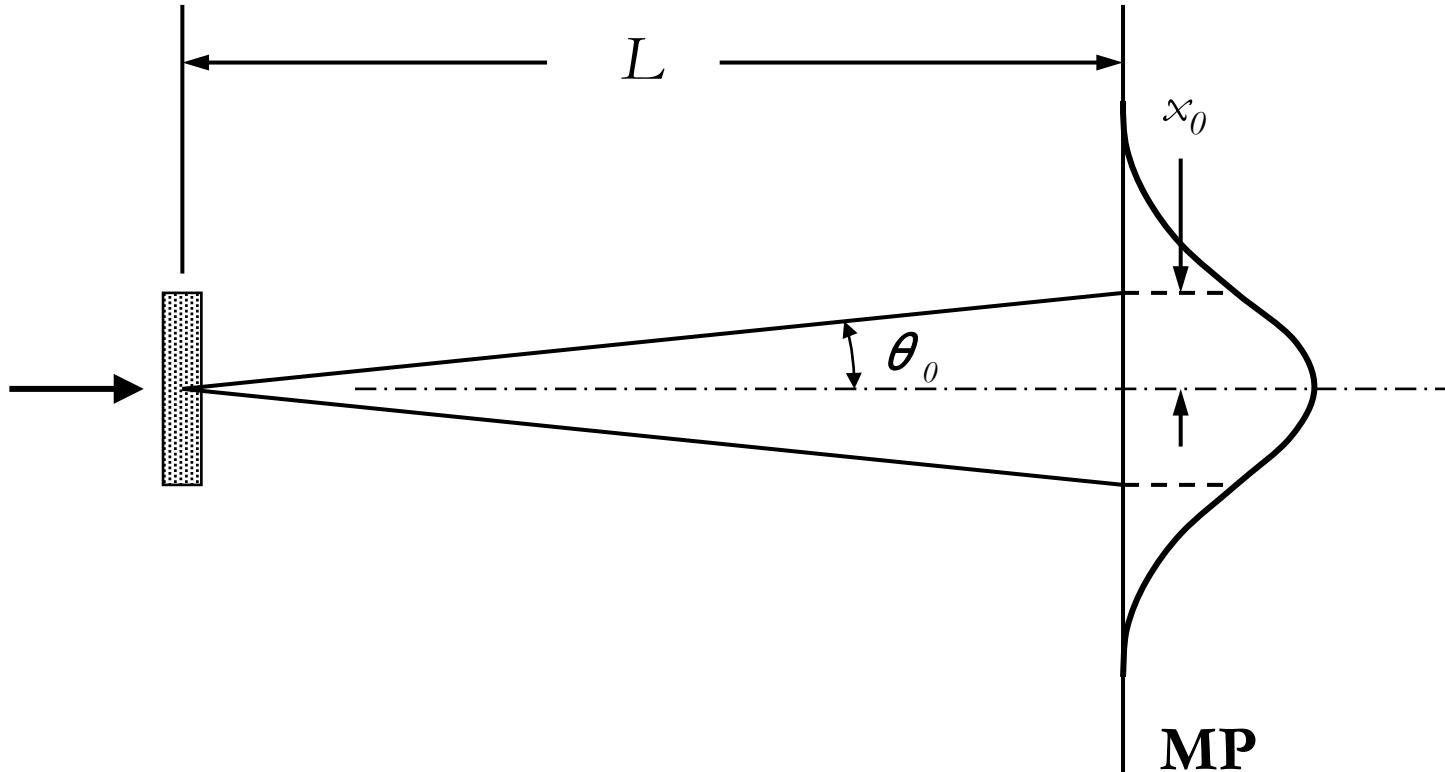
Figure 13.7

It is often desirable to use the projected angle of scattering  $\theta'$ , the projection being made on some convenient plane such as the plane of a photographic emulsion or a bubble chamber, as shown in Fig. 13.7. For small angles it is easy to show that

$$\langle \theta'^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \theta^2 \rangle \quad (13.63)$$

Infatti,  $\tan \theta' = \tan \theta \sin \Phi \rightarrow \theta' \approx \theta \sin \Phi$ , perciò  $\langle \theta'^2 \rangle = 1/2 \langle \theta^2 \rangle$

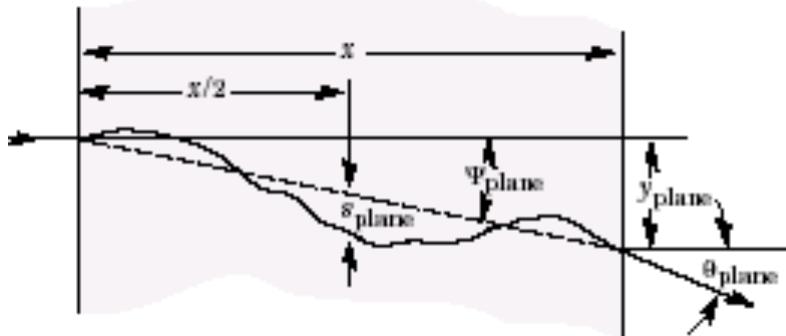
# Multiple Scattering



When protons pass through a slab of material they suffer millions of collisions with atomic nuclei. The statistical outcome is a *multiple scattering angle* whose distribution is approximately Gaussian. For protons, this angle is always small so the projected displacement in any measuring plane **MP** is also Gaussian. The width parameter of the angular distribution is  $\theta_0$ . The corresponding displacement,  $x_0$ , can easily be measured by scanning a dosimeter across the MP. The task of multiple scattering theory is to predict  $\theta_0$  given the scattering material and thickness, and the incident proton energy.

# Scattering multiplo

La deviazione angolare causata dallo scattering multiplo produce anche uno spostamento laterale della posizione di uscita della particella rispetto al punto di ingresso, dopo aver attraversato uno spessore  $x$  di materiale.



La deviazione quadratica media della proiezione su un piano (che e' di solito quella che si misura) è data da :

$$\langle y_{\text{plane}}^2 \rangle \cong \frac{1}{6} \langle \vartheta_{\text{ms}}^2 \rangle x^2$$

# Scattering multiplo

Vediamo di ricavare  $\langle y_{plane}^2 \rangle \cong \frac{1}{6} \langle \vartheta_{ms}^2 \rangle x^2$

A tale scopo consideriamo un elemento di spessore  $dx$  a profondità  $x$  e vediamo il contributo di  $dy^2$  a  $\langle y^2 \rangle$

$$y(x+dx) = y(x) + \vartheta_y(x) dx$$

$$\vartheta_y(x+dx) = \vartheta_y(x) + \delta\vartheta$$

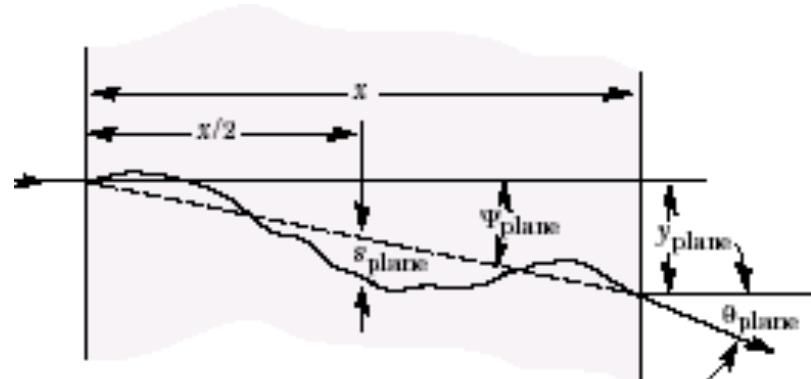
$$\langle y^2(x+dx) \rangle = \langle y^2(x) \rangle + 2\langle y(x)\vartheta_y(x) \rangle dx$$

$$d\langle y^2 \rangle = 2\langle y(x)\vartheta_y(x) \rangle dx$$

$$d\langle \vartheta_y^2 \rangle = \langle \delta\vartheta^2 \rangle$$

$$d\langle y\vartheta \rangle = \langle \vartheta_y^2 \rangle dx \quad \text{infatti } y(x+dx)\vartheta_y(x+dx) \cong y(x)\vartheta_y(x) + \vartheta_y^2(x)dx + y(x)\delta\vartheta$$

$$\langle y(x+dx)\vartheta_y(x+dx) \rangle - \langle y(x)\vartheta_y(x) \rangle = \langle \vartheta_y^2(x) \rangle dx + \langle y(x)\delta\vartheta \rangle$$



il  $\langle \rangle$  dell'ultimo termine e' = 0 perche'  $\langle d\theta \rangle = 0$  ed e' indipendente da  $y$

# Scattering multiplo

Ora:

$$\langle \vartheta_y^2 \rangle = \frac{\langle \vartheta_{ms}^2 \rangle}{2} = k \cdot s / 2 \quad \text{con} \quad k = \left( 21 [MeV] \frac{1}{p\beta} \right)^2$$

$$\langle y\vartheta \rangle = \int_0^s kx dx = k \frac{s^2}{4} = \frac{1}{4} s \langle \vartheta_{ms}^2 \rangle$$

Con  $s = X/X_0$

$$\langle y^2 \rangle = 2 \int_0^s kx^2 \frac{1}{4} dx = \frac{1}{6} ks^3 = \frac{1}{6} \langle \vartheta_{ms}^2 \rangle s^2$$

$$\langle y_{plane}^2 \rangle \cong \frac{1}{6} \langle \vartheta_{ms}^2 \rangle s^2$$

In genere lo spostamento e' piccolo

# Scattering multiplo

**Notiamo:** lo scattering multiplo è un fattore limitante per le misure.

- **Misure d' impulso** precisione della misura limitata dallo scattering multiplo.
- **Sciame elettromagnetici** dimensioni trasverse dello sciame dovute allo scattering multiplo.

# Effect of Multiple Scattering on Resolution

- #### ■ Approximate relation (PDG):

$$\theta_0 = \theta_{plane}^{RMS} \approx \frac{13.6 MeV}{p\beta c} z \sqrt{\frac{L}{X_0}}$$

i.e.  $\theta_0 \propto \frac{1}{p} \sqrt{\frac{L}{X_0}}$

- Apparent sagitta due to multiple scattering (from PDG):

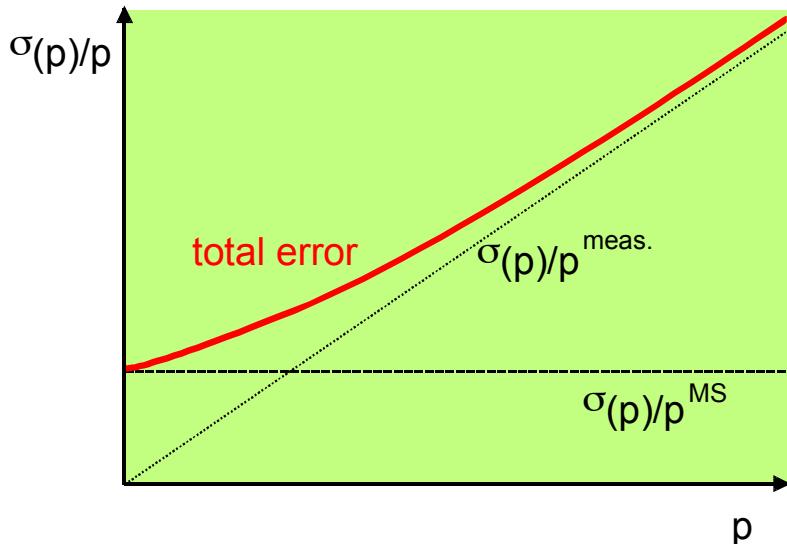
$$s_{plane} = \frac{L\theta_0}{4\sqrt{3}}$$

- ## ■ Contribution to momentum resolution from multiple scattering:

$$\left. \frac{\sigma_p}{p} \right|_{MS} = \frac{s_{plane}}{s} \approx \frac{0.05}{B\sqrt{LX_0}} \quad \text{using } s \approx \frac{0.3BL^2}{8p_T} \quad \text{i.e.} \quad \left. \frac{\sigma_p}{p} \right|_{MS} \propto \frac{1}{B\sqrt{LX_0}}$$

## Independent of $p$ !

# Effect of Multiple Scattering on Resolution



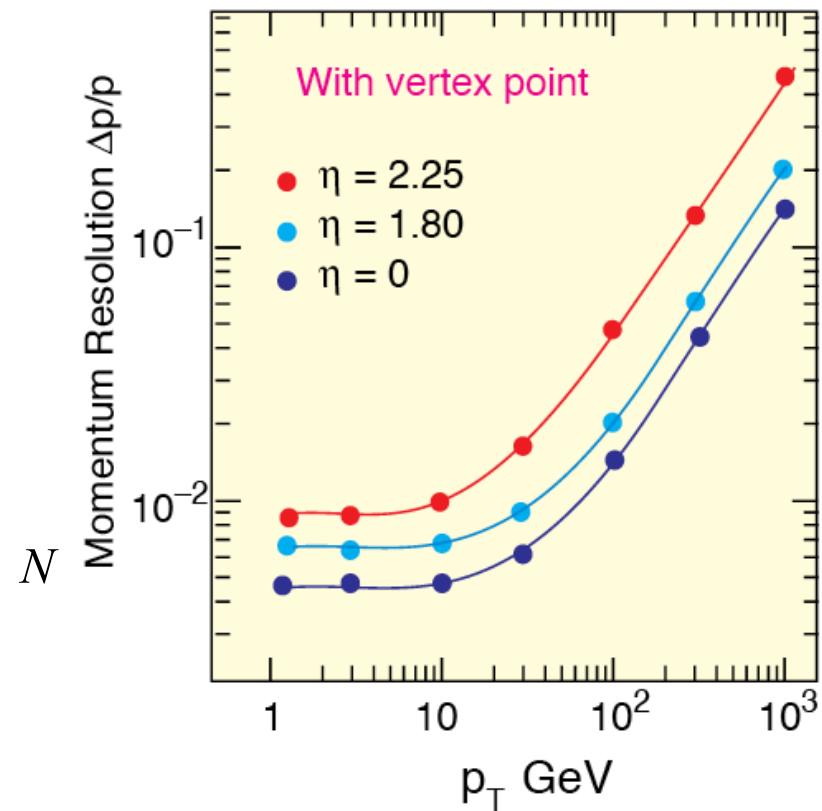
- Example:
  - $p_T = 1 \text{ GeV}/c, L = 1\text{m}, B = 1 \text{ T}, N = 10, \sigma_x = 200\mu\text{m}:$

$$\left. \frac{\sigma_p}{p} \right|_{meas} \approx 0.5\%$$

- For detector filled with Ar,  $X_0 = 110\text{m}:$

$$\left. \frac{\sigma_p}{p} \right|_{MS} \approx 0.5\%$$

Estimated Momentum Resolution  
vs  $p_T$  in CMS



# Emissione Cherenkov e di radiazione di transizione

- Per rivelare e identificare particelle cariche due processi di emissione di radiazione elettromagnetica sono importanti in **mezzi diversi dal vuoto**:
  - emissione cherenkov
  - emissione di radiazione di transizione

# (Cenni di) Emissione di radiazione elm nella materia condensata

- Per discutere i processi di emissione Cherenkov e di radiazione di transizione e' necessario fare alcuni brevi richiami di elettrodinamica classica

# Equazioni di Maxwell (unità' Gauss)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4)$$

Da (1), si puo' definire un potenziale vettore  $\mathbf{A}$  t.c.  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

Da (4) segue che esiste un potenziale scalare  $\Phi$  t.c.  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

Da (3) e (2) si ottengono le equazioni dei potenziali

$$\vec{\nabla}^2\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}) = -4\pi\rho$$

$$\vec{\nabla}^2\vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

# Potenziali elm (1)

$$\vec{\nabla}^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}) = -4\pi\rho$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Grazie all'invarianza di gauge ( $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \chi$ ,  $\Phi \rightarrow \Phi - \partial \chi / \partial t \rightarrow$  stessi campi  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ) si possono scegliere i potenziali in modo da “semplificare” le equazioni:

Gauge di Lorentz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

Gauge di Coulomb

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

In questo gauge,

$$\vec{\nabla}^2 \Phi = -4\pi\rho$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}_t$$

Il potenziale scalare e' "statico", mentre quello vettore si propaga come un'onda la cui sorgente e' la componente trasversa della corrente

- Per gli immancabili entusiasti: le soluzioni...

# Potenziali elm: soluzioni

Gauge di Lorentz  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$

$$\vec{\nabla}^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

4 Equazioni ( 3  $\mathbf{A}$ , 1  $\phi$  ) d'onda non omogenee disaccoppiate di forma

$$\vec{\nabla}^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\vec{x}, t) \quad f(\vec{x}, t) = \rho, j_i/c$$

Soluzione:

soluzione dell'equ. omogenea associata + soluzione particolare della non omogenea

Soluzione omogenea: l'equazione omogenea e' quella delle onde  $\rightarrow$

$$\vec{A} = A_{k1} \vec{\epsilon}_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} + A_{k2} \vec{\epsilon}_2 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

$\vec{\epsilon}$  vettori di polarizzazione

$\Phi \equiv 0$  Nel nostro caso e' sufficiente solo  $\mathbf{A}$ , cioe'  
posso fare una ulteriore trasformazione  
(ristretta) di gauge t.c.  $\phi' = 0$  (non  $\mathbf{A}$  perche'  
c'e' solo una funzione scalare  $\chi$  arbitraria  
che si puo' aggiungere

E. Φιανδρινι Ριωελατορι δι

Onda piana lungo  $\mathbf{k}$  con vel. c

$k$  ed  $\omega$  sono legate dalla relazione di dispersione, necessaria affinche'  $\mathbf{A}$  sia soluzione dell'equazione

$$k = \frac{\omega}{c}$$

# Potenziali elm: soluzioni (2)

$$\vec{A} = \int [A_{k1}\vec{\epsilon}_1 e^{i(kx-\omega t)} + A_{k2}\vec{\epsilon}_2 e^{i(kx-\omega t)}] d^3 k$$

La condizione di Lorentz ( $\Phi = 0$ )

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = i\vec{k} \times \vec{A} \quad (1)$$

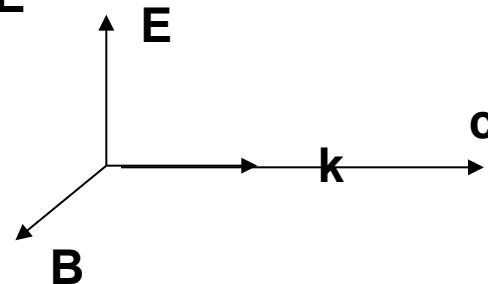
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = ik\vec{A} \quad (2)$$

dice che  $\vec{k} \cdot \vec{A} = 0$   
 $\rightarrow \mathbf{k} \perp \mathbf{A}$

Da (1) e (2) segue che  $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$ ,  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$  e  $\mathbf{k} \perp \mathbf{E}$

Le onde elettromagnetiche sono trasversali



# Potenziali elm: propagatore

$$\vec{\nabla}^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\vec{x}, t) \quad (1)$$

La soluzione particolare si ottiene con il propagatore  $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$

$$\Psi = \int G(\vec{x}, t; \vec{x}', t') f(\vec{x}', t') d^3x' dt'$$

Facciamo le trasformate di Fourier nel tempo per eliminare la dipendenza esplicita da t della (1)

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{x}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega & f(\vec{x}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ \Psi(\vec{x}, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\vec{x}, t) e^{i\omega t} dt & f(\vec{x}, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{x}, t) e^{i\omega t} dt\end{aligned}$$

Sostituisco in (1)

$$\vec{\nabla}^2 \Psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{\nabla}^2 \tilde{\Psi}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\Psi}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$



$$(\vec{\nabla}^2 + k^2) \tilde{\Psi} = -4\pi \tilde{f}(\vec{x}, \omega)$$

Equazione di Helmholtz, per ciascun valore di  $\omega$ , con  $k=\omega/c$

# Potenziali elm: propagatore (2)

$$(\vec{\nabla}^2 + k^2)\tilde{\Psi} = -4\pi\tilde{f}(\vec{x}, \omega) \quad \text{Equ. ellittica derivate parziali che si riduce a quella di Poisson per } k=0$$

Posto  $\tilde{\Psi}(\vec{x}, \omega) = \int \tilde{G}_k(\vec{x}, \vec{x}') \tilde{f}(\vec{x}', \omega) d^3x'$

L'equazione che  $\tilde{G}_k(\vec{x}, \vec{x}')$  soddisfa e'  $(\vec{\nabla}_x^2 + k^2)\tilde{G}_k(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')$

NB: l'operatore  $\vec{\nabla}$  agisce sulle coordinate  $x$  non su  $x'$

Nel vuoto, senza superfici di confine essa puo' dipendere solo da  $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$  e poiche' deve esserci simmetria sferica a causa della omogeneita' e simmetria dello spazio

$$\tilde{G}_k(\vec{x}, \vec{x}') = \tilde{G}_k(|\vec{x} - \vec{x}'|) = \tilde{G}_k(R)$$

In coord. sferiche  $\nabla^2 = \frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial R^2}R$    $\frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial R^2}R\tilde{G}_k(R) + k^2\tilde{G}_k(R) = -\delta(R)$

In tutti i punti tranne che in  $R=0$ ,  $G$  soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2}(R\tilde{G}_k) + k^2(R\tilde{G}_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad R\tilde{G}_k(R) = Ae^{ikR} + Be^{-ikR}$$

# Potenziali elm: propagatore (3)

$$\tilde{\Psi}(\vec{x}, \omega) = \int \tilde{G}_k(\vec{x}, \vec{x}', \omega) \tilde{f}(\vec{x}', \omega) d^3x'$$

$$(\vec{\nabla}_{\vec{x}}^2 + k^2) \tilde{G}_k(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2}(R\tilde{G}_k) + k^2(R\tilde{G}_k) = 0$$

$R \neq 0$

$$R\tilde{G}_k(R) = Ae^{ikR} + Be^{-ikR}$$

La  $\delta$  influisce solo nel limite  $R \rightarrow 0$ , ma in questo limite,  $kR \ll 1$  e l'equazione si riduce a quella dell'elettrostatica, per cui

$$\lim_{R \rightarrow 0} \tilde{G}_k(R) = \frac{1}{R}$$

e' la condizione di normalizzazione corretta

La soluzione e' quindi

$$\tilde{G}_k(R) = A\tilde{G}_k^{(+)}(R) + B\tilde{G}_k^{(-)}(R) \quad \text{con} \quad \tilde{G}_k^{\pm}(R) = \frac{e^{\pm ikR}}{R} , \mathbf{A+B=1}$$

**- = onda sferica che esce dall'origine, + = onda sferica entrante**

La scelta di A e B dipende dalle condizioni al contorno nel tempo per il problema fisico in questione: e', ovvio che se una sorgente e' "spenta" fino ad un tempo  $t=0$ , la funzione di Green corretta e' quella di un'onda sferica uscente

Ora dobbiamo trovare la dipendenza temporale delle funzioni di Green

# Potenziali elm: propagatore (4)

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\vec{x}, t) \quad (1)$$

Sostituendo  $\Psi$  in (1) si ottiene subito l'equazione soddisfatta da  $G$

$$\text{Posto } G(R, t, t') = \int \tilde{G}_k(R, t') e^{-i\omega t} d\omega \quad \text{e} \quad \delta(t - t') = \int e^{-i\omega(t-t')} d\omega \quad \text{Si ha}$$

$$(\nabla_x^2 + k^2) \tilde{G}_k(R, t') = -4\pi \delta(R) e^{i\omega t'}$$

E' la stessa equazione di prima con un fattore di fase



$$\tilde{G}_k^\pm(R) = \frac{e^{\pm ikR}}{R} e^{i\omega t'} \quad \rightarrow$$

$$G^\pm(R, t, t') = \int \frac{e^{\pm ikR}}{R} e^{i\omega t'} e^{-i\omega t} d\omega$$

$$G^\pm(R, t, t') = \frac{1}{R} \int e^{\pm i\frac{\omega R}{c}} e^{-i\omega(t-t')} d\omega$$

$$= \frac{1}{R} \delta(t - t' \mp \frac{R}{c})$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'(t')$$

$$G^\pm(R, t, t') = \frac{1}{R} \int e^{-i\omega(t-t' \mp \frac{R}{c})} d\omega$$

E' il propagatore cercato: - = funzione ritardata, + funzione anticipata

**La soluzione particolare e' quindi:**  $\Psi = \int \frac{1}{R} \delta(t' - (t \mp \frac{R}{c})) f(\vec{x}', t') d^3x' dt'$

# Potenziali elm: propagatore (5)

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\vec{x}, t)$$

$$\Psi = \int G(\vec{x}, t; \vec{x}', t') f(\vec{x}', t') d^3x' dt'$$

$$\vec{R}(t) = \vec{x} - \vec{x}'(t')$$

$$G^\pm(R, t, t') = \frac{1}{R} \delta(t - t' \mp \frac{R}{c})$$

$$\Psi = \int \frac{1}{R} \delta(t' - (t \mp \frac{R}{c})) f(\vec{x}', t') d^3x' dt'$$

La funzione di Green ritardata mostra il comportamento causale associato ad una perturbazione ondulatoria: l'argomento della  $\delta$  indica che l'effetto in un punto  $x$  all'istante  $t$  e' dovuto all'azione di una sorgente ad un istante precedente o ritardato  $t'=t-R(t')/c$ .

La differenza temporale  $t - t' = R/c$  e' semplicemente interpretata come propagazione a velocita'  $c$  della perturbazione da un punto all'altro dello spazio

# Potenziali ritardati (1)

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \int \frac{1}{cR} \delta(t' - (t - \frac{R}{c})) \vec{j}(\vec{x}', t') d^3x' dt'$$

$$\Phi(\vec{x}, t) = \int \frac{1}{R} \delta(t' - (t - \frac{R}{c})) \rho(\vec{x}', t') d^3x' dt'$$

Correnti e densità in  $\mathbf{x}'$  contribuiscono a  $\mathbf{x}$  all'istante  $t$ , solo agli istanti  $t' = t - R/c$ , cioè con un ritardo  $R/c$  dovuto alla velocità di propagazione finita delle onde elm

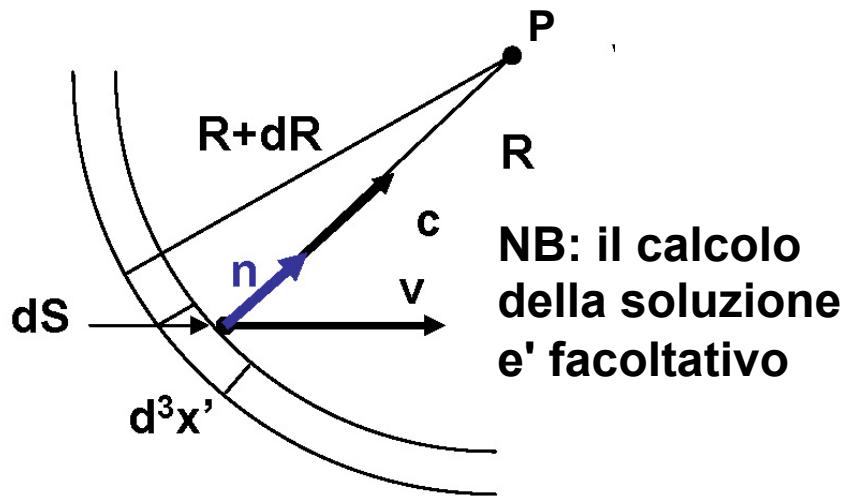
$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \int \frac{1}{cR} \delta(t' - (t - \frac{R}{c})) \vec{j}(\vec{x}', t') d^3x' dt' \quad \Phi(\vec{x}, t) = \int \frac{1}{R} [\rho(\vec{x}', t')]_{rit} d^3x'$$

Dove con  $[\mathbf{F}]_{rit} \equiv \mathbf{F}(\mathbf{r}', t - (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\mathbf{c})$ , i.e va usato il valore ritardato  $t' = t - R(t')/\mathbf{c}$

Gli integrandi non rappresentano (a parte il termine  $R$  al denominatore) la carica e la corrente nel volume, come nel caso statico, dato che gli elementi di carica in  $d^3\mathbf{x}'$  contribuiscono a istanti  $t'$  diversi al potenziale in  $\mathbf{x}$ , cioè l'integrale va valutato con  $t' = t'(\mathbf{x}')$  mentre la carica totale nel volume  $V$  è pari all'integrale con  $t' = \text{cost.}$

Bisogna esprimere  $[\dots]_{rit}$  in funzione della carica TOTALE contenuta nel volume che contribuisce al potenziale in P all'istante t:  
per questo occorre tenere conto del moto delle cariche

# Potenziali ritardati (2): Lienard e Wiechert



Il tempo impiegato dalla sfera a spazzare il volume fra  $R$  e  $R+dR$  e'  $dt'=dR/c$

La carica che sfugge dalla superficie nel tempo  $dt'$  e'  $dq' = \vec{j} \cdot \vec{n} dt' dS$  con  $\vec{j} = \rho \vec{v}$

$$dq' = \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dt' dS = \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \frac{dR}{c} dS = \rho \vec{n} \cdot \frac{\vec{v}}{c} d^3x' \quad \text{All'istante } t'=t-R/c$$

Quindi la carica che contribuisce e'

$$dq = \rho d^3x' - dq' = \rho d^3x' - \rho \vec{n} \cdot \frac{\vec{v}}{c} d^3x' = \rho d^3x' \left(1 - \vec{n} \cdot \frac{\vec{v}}{c}\right)$$

Per farlo consideriamo una sfera centrata in  $P$  che si contrae con velocita'  $c$  e che raggiunge  $P$  proprio all'istante  $t$ , l'equazione oraria della sfera e'

$$\mathbf{R}(t') = \mathbf{c}(t-t')$$

L'istante in cui i punti della distribuzione di carica in  $d^3x'$  contribuiscono al punto  $P$  all'istante  $t$  sono quelli che vengono raggiunti dalla sfera quando essa attraversa l'elemento  $d^3x'$ , cioe'  $t'=t-R/c$ . Parte della carica sfugge dall'elemento di volume  $d^3x'=dr\phi dS$  nel tempo impiegato dalla sfera a spazzarlo e va sottratta a quella presente a  $t'$

# Potenziali ritardati (3): L&W

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \int \frac{1}{cR} [\vec{j}(\vec{x}', t')]_{rit} d^3x' \quad \Phi(\vec{x}, t) = \int \frac{1}{R} [\rho(\vec{x}', t')]_{rit} d^3x'$$

$$dq|_{t-r/c} = [1 - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{n}] \rho(\vec{x}', t')|_{t-r/c} d^3x'$$

Quindi  $\rho(\vec{x}', t')|_{t-r/c} d^3x' = \frac{dq}{[1 - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{n}]}|_{t-r/c}$

$$\Phi(\vec{x}, t) = \int \frac{dq}{[R(1 - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{n})]|_{t-r/c}}$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \int \frac{\vec{v}|_{t-r/c} dq}{[cR(1 - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{n})]|_{t-r/c}}$$

Sono **i potenziali di Lienard e Wiechert** per una distribuzione di cariche in moto arbitrario

# Potenziali di Lienard e Wiechert (1)

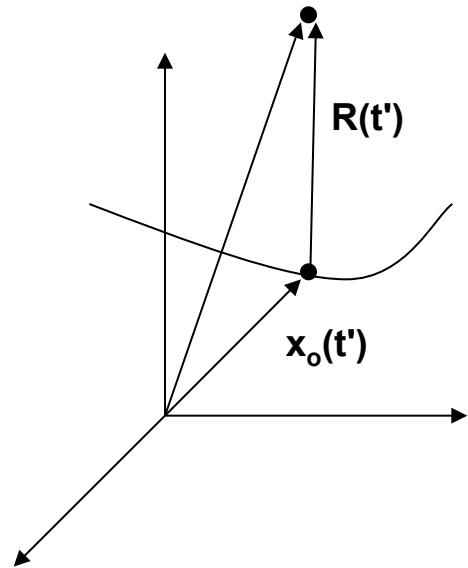
Nel caso di una particella puntiforme che si muove lungo una traiettoria

$\vec{x}(t) = \vec{x}_0(t)$  con velocita'  $\dot{\vec{x}}(t) = \dot{\vec{x}}_0(t)$ , le densita' di carica e corrente sono date da

$$\rho(\vec{x}, t) = q\delta(\vec{x} - \vec{x}_0(t)) \quad \vec{j}(\vec{x}, t) = q\dot{\vec{x}}\delta(\vec{x} - \vec{x}_0(t)) \quad \vec{R}(t) = \vec{x} - \vec{x}_0(t') \quad P$$

La funzione  $\delta$  ha la proprieta' di localizzare carica e corrente e di dare le corrette carica e corrente totali

$$q = \int \rho(\vec{x}, t)d^3x \quad q\vec{v} = \int \vec{j}(\vec{x}, t)d^3x$$



# Potenziali di Lienard e Wiechert (2)

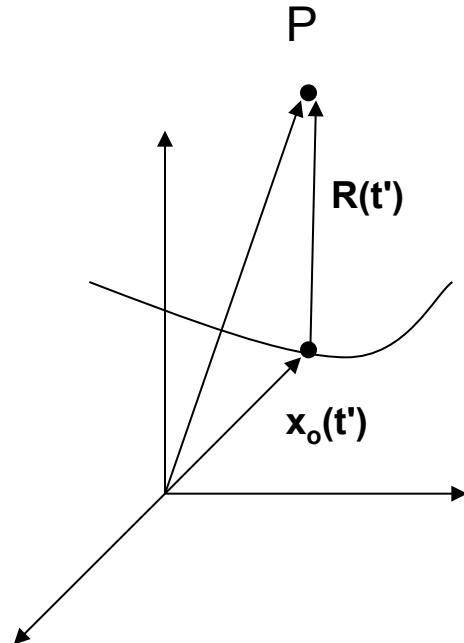
I potenziali elm hanno la forma  $\Psi = \int \frac{1}{R} \delta(t' - t + \frac{R}{c}) f(\vec{x}', t') d^3x' dt'$

dove  $\Psi = \Phi, \mathbf{A}_i$  e  $f = \rho, \mathbf{j}_i/c$ ,  $i=1,2,3$

Possiamo usare la  $\delta$  per effettuare l'integrazione nello spazio  $d^3x'$

$$\Phi = q \int \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_o(t')|} \delta(t' - t + \frac{|\vec{x} - \vec{x}_o(t')|}{c}) dt'$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{q}{c} \int \frac{\vec{v}(t')}{|\vec{x} - \vec{x}_o(t')|} \delta(t' - t + \frac{|\vec{x} - \vec{x}_o(t')|}{c}) dt'$$



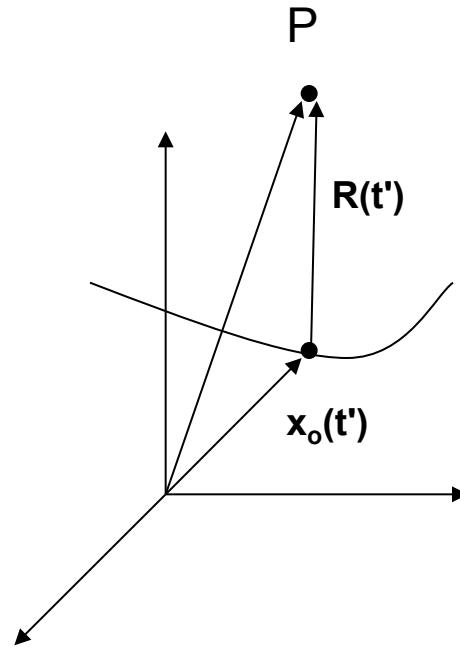
$$\vec{R}(t) = \vec{x} - \vec{x}_o(t')$$

# Potenziali di Lienard e Wiechert (3)

$$\Phi = q \int \frac{1}{R(t')} \delta(t' - t + \frac{R(t')}{c}) dt' \quad A(\vec{x}, t) = \frac{q}{c} \int \frac{\vec{v}(t')}{R(t')} \delta(t' - t + \frac{R(t')}{c}) dt' \quad \vec{R}(t) = \vec{x} - \vec{x}_o(t')$$

Si possono semplificare ancora notando che l'argomento della  $\delta$  si annulla quando  $t' = t_{\text{rit}}$  dato da  $c(t-t_{\text{rit}}) = R(t_{\text{rit}})$ , i.e. l'equazione oraria di una perturbazione che viaggia a vel. c (la sfera di prima)

Si noti che questa e' una relazione implicita in  $t_{\text{rit}}$  dato che  $R=R(t_{\text{rit}})$ , mentre t rimane fissato, i.e. fissato l'istante di osservazione cerchiamo gli istanti precedenti connessi causalmente al campo in x all'istante t



# Potenziali di Lienard e Wiechert (4)

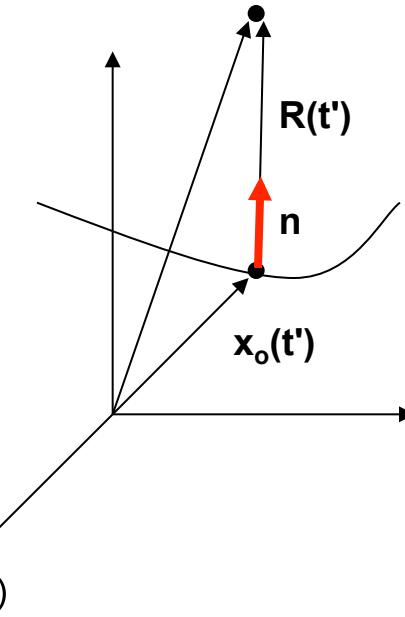
$$\Phi = q \int \frac{1}{R(t')} \delta(t' - t + \frac{R(t')}{c}) dt' \quad A(\vec{x}, t) = \frac{q}{c} \int \frac{\vec{v}(t')}{R(t')} \delta(t' - t + \frac{R(t')}{c}) dt' \quad \vec{R}(t) = \vec{x} - \vec{x}_o(t')$$

Cambiamo variabile  $t'' = t' - t + R(t')/c$    $dt'' = dt' + \frac{\dot{R}(t')}{c} dt'$

P

Dobbiamo eliminare  $\dot{R}(t')$  esprimendolo in funzione di  $\mathbf{v}$   
e della direzione di osservazione

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} |R|^2 &= 2R(t')\dot{R}(t') \\ \frac{d}{dt} \vec{R}^2 &= 2\vec{R} \cdot \dot{\vec{R}}\end{aligned}$$



Dall'identità  $|R|^2 = \vec{R} \cdot \vec{R}$  

  $R(t')\dot{R}(t') = \vec{R} \cdot \dot{\vec{R}}$  ma  $\vec{R} = -\vec{x}_o(t') = -\vec{v}(t')$

  $\vec{R} \cdot \dot{\vec{R}} = -\vec{R}(t') \cdot \vec{v}(t')$    $R(t')\dot{R}(t') = -\vec{R}(t') \cdot \vec{v}(t')$

  $\dot{R}(t') = -\frac{\vec{R}(t') \cdot \vec{v}(t')}{R(t')}$  Posto  $\vec{n}(t') = \frac{\vec{R}(t')}{R(t')}$   $\vec{R}(t') = -n(t') \cdot \vec{v}(t')$

  $dt'' = dt' + \frac{\dot{R}(t')}{c} dt' = dt' - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c} dt' = dt' \left(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c}\right)$

# Potenziali di Lienard e Wiechert (5)

$$\Phi = q \int \frac{1}{R(t')} \delta(t' - t + \frac{R(t')}{c}) dt' = q \int \frac{1}{R(t')} \delta(t'') \frac{dt''}{(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c})}$$

$t'' = t' - t + R(t')/c$   
i.e.  $t' = t''(t'')$

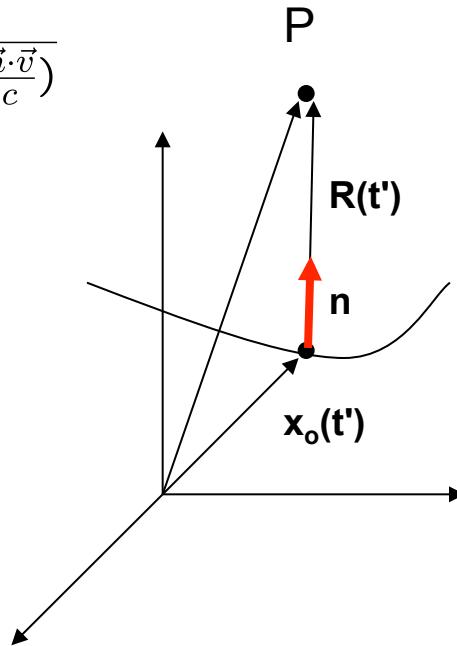
$$A(\vec{x}, t) = \frac{q}{c} \int \frac{\vec{v}(t')}{R(t')} \delta(t' - t + \frac{R(t')}{c}) dt' = \frac{q}{c} \int \frac{\vec{v}(t')}{R(t')} \delta(t'') \frac{dt''}{(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c})}$$

Integrando su  $t''$  si ottiene quindi

$$\Phi = q \frac{1}{R(t')} \frac{1}{(1 - \frac{\vec{n}(t') \cdot \vec{v}(t')}{c})}$$

$$t' = t - R/c$$

$$A(\vec{x}, t) = \frac{q}{c} \frac{\vec{v}(t')}{R(t')} \frac{1}{(1 - \frac{\vec{n}(t') \cdot \vec{v}(t')}{c})}$$



**NB: il calcolo e' facoltativo**

Questi sono i potenziali di LW per una carica puntiforme

# Potenziali di Lienard e Wiechert (6)

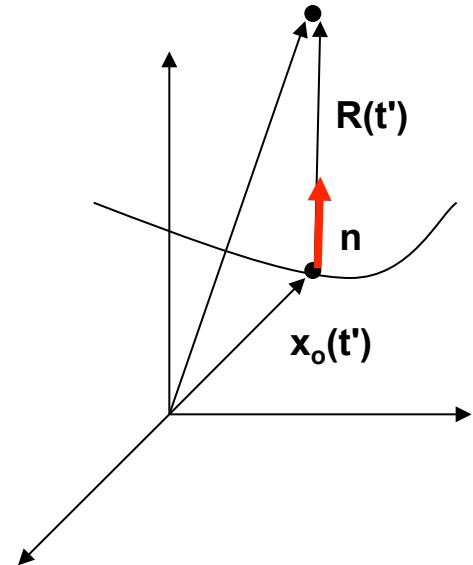
$$\Phi(\vec{x}, t) = q \frac{1}{R(t')} \frac{1}{(1 - \frac{\vec{n}(t') \cdot \vec{v}(t')}{c})} \quad \vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{q}{c R(t')} \frac{\vec{v}(t')}{(1 - \frac{\vec{n}(t') \cdot \vec{v}(t')}{c})}$$

$t' = t - R/c$   
P

I potenziali differiscono da quelli statici in due aspetti:

- il fattore  $k(t') = (1 - \frac{\vec{n}(t') \cdot \vec{v}(t')}{c})$

tende a concentrare i potenziali in uno stretto cono intorno alla direzione della velocità quando la velocità  $\rightarrow c$



- tutte le quantita' a destra vanno valutate al tempo ritardato. La conseguenza piu' importante e' che la carica puo' irraggiare. Se la dipendenza fosse solo in R, i potenziali decrescerebbero come  $1/R$ , cosi' che differenziando si avrebbe una dipendenza  $1/R^2$ . La dipendenza implicita sulla posizione tramite il tempo ritardato  $t'=t-R/c$  porta ad una dipendenza di tipo  $1/R$  per una componente dei campi, il che implica il trasporto netto di energia a distanza  $\infty$ , i.e. propagazione per onde

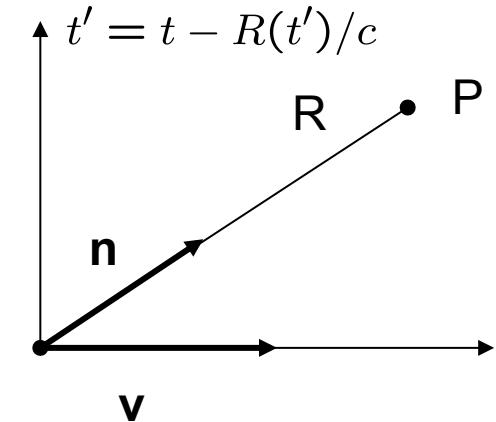
# Campi di L&W (7): campi

$$\Phi(\vec{x}, t) = q \frac{1}{R(t')} \frac{1}{(1 - \frac{\vec{n}(t') \cdot \vec{v}(t')}{c})} \quad \vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{q}{c R(t')} \frac{\vec{v}(t')}{(1 - \frac{\vec{n}(t') \cdot \vec{v}(t')}{c})}$$

I campi sono  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}|_{rit}$        $\vec{E} = (-\vec{\nabla} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})|_{rit}$

**NB: il calcolo e' facoltativo**

Le derivate sono calcolate al tempo  $t$  nella posizione  $\mathbf{x}$ , i potenziali vanno valutati al tempo ritardato  $t' = t - R(t')/c$



$\mathbf{R}(t') = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')$  (1)  $\rightarrow t'$  e' una funzione implicita delle coord.  $\mathbf{x}, t \rightarrow$  quando si deriva rispetta a  $\mathbf{x}$  e  $t$  bisogna fare una derivata di una funzione di funzione

P.es. Il campo elettrico:

$$\vec{E} = (-\vec{\nabla} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})|_{rit} \equiv -\vec{\nabla}_x \Phi[t'(\vec{x}, t)] - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}[t'(\vec{x}, t)]}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t'} \vec{\nabla}_x t'(\vec{x}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t'} \frac{\partial t'(\vec{x}, t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = 1 - \frac{\partial R}{c \partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} \implies \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 + \frac{\partial R}{c \partial t'}}$$

$$\therefore dR/dt' \text{ si ricava notando che } |R|^2 = \vec{R} \cdot \vec{R} \implies R \frac{dR}{dt'} = \vec{R} \cdot \frac{d\vec{R}}{dt'} = -\vec{R} \cdot \vec{v} \quad \text{da (1)}$$

$$\implies \frac{dR}{dt'} = -\vec{R} \cdot \vec{v}/R \implies \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \vec{R} \cdot \vec{v}/cR} = \frac{1}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}}$$

E. Φιανδρίνη Ριωελατορί δι

# Campi di Lienard e Wiechert (8)

$$\Phi(\vec{x}, t) = q \frac{1}{R(t')} \frac{1}{(1 - \frac{\vec{n}(t') \cdot \vec{v}(t')}{c})} \quad \vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{q}{c} \frac{\vec{v}(t')}{R(t')} \frac{1}{(1 - \frac{\vec{n}(t') \cdot \vec{v}(t')}{c})} \quad \vec{E} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t'} \vec{\nabla}_x t'(\vec{x}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t'} \frac{\partial t'(\vec{x}, t)}{\partial t}$$

$$t' = t - R(t')/c \quad \frac{dR}{dt'} = -\vec{R} \cdot \vec{v}/R \quad \mathbf{R}(t') = \mathbf{x} - \mathbf{x}_o(t') \quad (1)$$

Calcolo  $\vec{\nabla}_x t'(\vec{x}, t)$

$$\vec{\nabla}_x t'(\vec{x}, t) = -\vec{\nabla}_x R(\vec{x}, t')/c = -\frac{\partial R(\vec{x}, t')}{c \partial t'} \vec{\nabla}_x t' - \vec{\nabla}_x R(\vec{x}, t') \quad \text{ma} \quad \vec{\nabla}_x R(\vec{x}, t') = \vec{R}/R$$



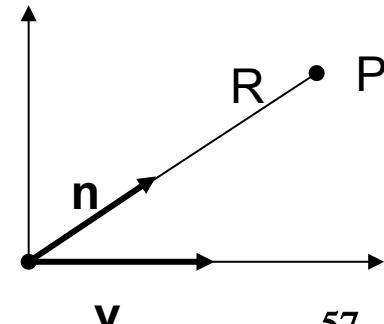
$$\vec{\nabla}_x t' = -\frac{\partial R}{c \partial t'} \vec{\nabla}_x t' - \vec{R}/R \quad \text{Risovo in } r_x t'$$

$$\vec{\nabla}_x t' = -\frac{\vec{R}/R}{1 + \frac{\partial R(\vec{x}, t')}{c \partial t'}} = -\frac{\vec{R}/R}{1 - \vec{R} \cdot \vec{v}/cR} = -\frac{\vec{n}}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}}$$

Le derivate dei potenziali rispetto a  $t'$  sono immediate. Si ottiene

$$\vec{E} = q \left[ \frac{\vec{n} - \vec{\beta}}{\gamma^2 (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3 R^2} \right] + \frac{q}{c} \left[ \frac{\vec{n} \times (\vec{n} - \vec{\beta}) \times \vec{\beta}}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3 R} \right] \quad \vec{B} = \vec{n} \times \vec{E}$$

(Elettrodin. Classica, Jackson par. 14.1, Landau, Teoria dei campi par 63)



# Campi di Lienard e Wiechert (9)

$$\vec{E} = q \left[ \frac{\vec{n} - \vec{\beta}}{\gamma^2 (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3 R^2} \right] + \frac{q}{c} \left[ \frac{\vec{n} \times (\vec{n} - \vec{\beta}) \times \vec{\beta}}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3 R} \right]$$

↑

↑

Ci sono due correnti.

## Campo di velocita' $E_v$

- ✓  $\sim R^{-2}$ , si riduce a quello di Coulomb nel caso di  $\beta = 0$ ,
  - ✓ Il campo punta nella direzione della posizione attuale (i.e. all'istante  $t$ ) della particella: infatti la distanza dal punto ritardato è  $\vec{r} - \vec{r}_{rit}$  dove  $\vec{t} = t - t_{rit}$

Nello stesso tempo, la particella si e' spostata di  $\vec{\beta}ct$

La posizione della particella rispetto al punto di osserv. e'

$$(\vec{n} - \vec{\beta})c\tilde{t}$$

che e' appunto la direzione  
del campo di velocita'

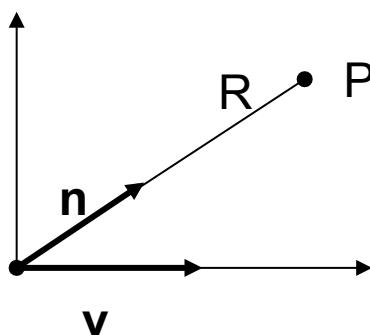
 Ci sono due componenti con caratteristiche diverse

- $\sim R^{-1}$ ,
  - Dipende da  $a$ ,
  - Il campo  $E_a$  e'  $\perp n$ , e  $B \perp E, n$
  - Trasporta energia a tutte le distanze

A spanne (i.e. leading terms), il rapporto  $E_a/E_v$  e'

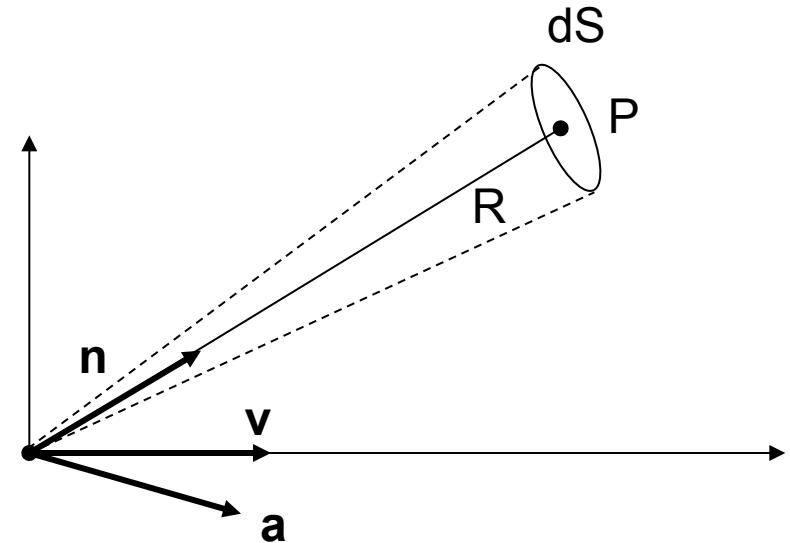
$$\frac{E_a}{E_v} \sim \frac{R\gamma^2 a}{c^2}$$

Il campo di radiazione domina a distanze t.c.  $R \gg \frac{c^2}{\gamma^2 a}$



# Potenza emessa

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = \vec{n} \times \vec{E} \\ \\ \vec{E} = q \underbrace{\left[ \frac{\vec{n} - \vec{\beta}}{\gamma^2 (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3 R^2} \right]}_{\mathbf{E}_v} + \underbrace{\frac{q}{c} \left[ \frac{\vec{n} \times (\vec{n} - \vec{\beta}) \times \vec{\beta}}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3 R} \right]}_{\mathbf{E}_a} \end{array} \right.$$



Il trasporto di energia e' descritto dal vettore di Poynting

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} \quad [\text{ES}^{-2}\text{T}^{-1}]$$

La potenza emessa e' quindi  $dP = \vec{S} \cdot \vec{n} dS = \vec{S} \cdot \vec{n} R^2 d\Omega$



$$\frac{dP}{d\Omega} = R^2 \vec{S} \cdot \vec{n}$$

E' la distribuzione angolare della potenza emessa

# Potenza emessa (2)

$$\vec{B} = \vec{n} \times \vec{E} \quad \vec{E} = q \left[ \frac{\vec{n} - \vec{\beta}}{\gamma^2 (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3 R^2} \right] + \frac{q}{c} \left[ \frac{\vec{n} \times (\vec{n} - \vec{\beta}) \times \vec{\beta}}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3 R} \right]$$

I campi sono tali che  $|\vec{B}| = |\vec{E}| \quad \vec{B} \perp \vec{E} \quad \vec{B}, \vec{E} \perp \vec{n}$  

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} E^2 \vec{n} \quad \rightarrow \quad \frac{dP}{d\Omega} = \frac{cE^2}{4\pi} R^2$$

Per il campo di velocita'  $E_v$  ( $\sim R^{-2}$ )

$(\frac{dP}{d\Omega})_v \propto R^{-2}$   $\rightarrow$  la potenza va a zero all'infinito  $\rightarrow$  non si ha trasporto netto di energia

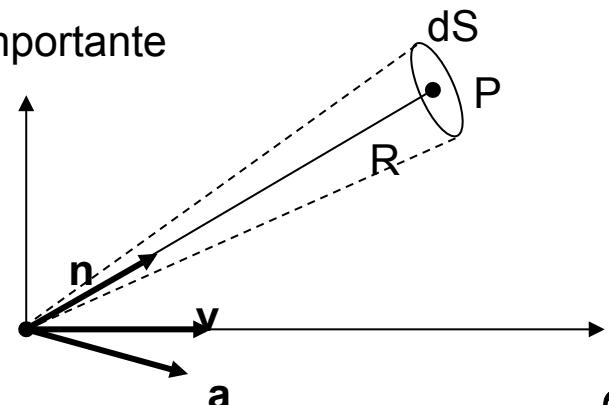
Per il campo di radiazione  $E_a$  ( $\sim R^{-1}$ )

$(\frac{dP}{d\Omega})_a \propto \text{cost.}$   $\rightarrow$  la potenza rimane finita per ogni  $R \rightarrow$  si ha trasporto netto di energia sotto forma di onde

Per l'emissione a grandi distanze dalla sorgente  $R \gg \frac{c^2}{\gamma^2 a}$  e' importante solo il campo di accelerazione

$$\vec{E}_a = \frac{q}{c} \left[ \frac{\vec{n} \times (\vec{n} - \vec{\beta}) \times \vec{\beta}}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3 R} \right]$$

NB: i campi di LW sono validi per tutte le velocita' e accelerazioni



# Potenza: Larmor

$$\vec{E}_a = \frac{q}{c} \left[ \frac{\vec{n} \times (\vec{n} - \vec{\beta}) \times \vec{\beta}}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3 R} \right]$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{cE^2}{4\pi} R^2$$

Nel sistema di quiete istantanea della carica (o per particelle in moto non relativistico)  $\beta = 0$  ma  $d\beta/dt \neq 0$

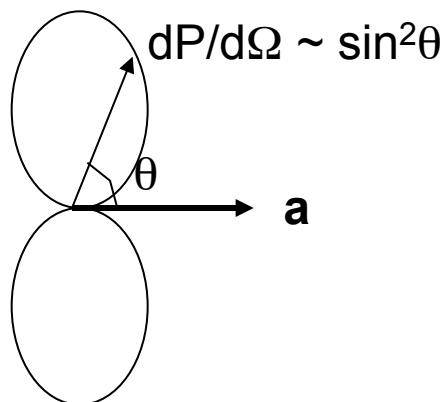
$$\vec{E}_a = \frac{q}{c} \left[ \frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta})}{R} \right]$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} |\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta})|^2$$

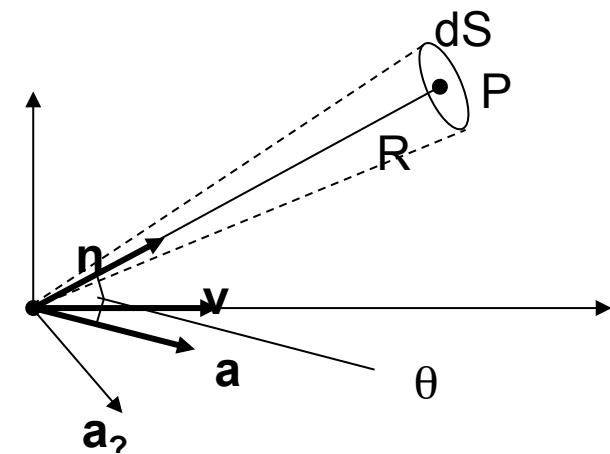
Sviluppo il doppio prodotto vettoriale  $\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta}) = (\vec{n} \cdot \vec{\beta})\vec{n} - \vec{\beta} = -\vec{\beta}_{\perp n}$

$$|\vec{\beta}_{\perp n}| = \dot{\beta} \sin \theta$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \dot{\beta}^2 \sin^2 \theta = \frac{q^2}{4\pi c^3} a^2 \sin^2 \theta$$



- E' la distribuzione angolare di potenza emessa nel riferimento in cui  $v_{ist} = 0$ :
- diagramma polare di tipo dipolare
  - Emissione nulla lungo  $a$
  - Max a  $\pi/2$  rispetto ad  $a$

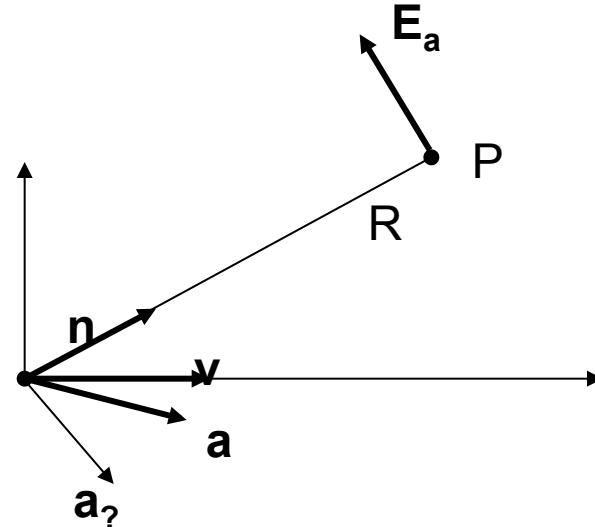
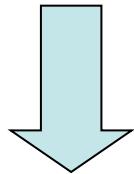


# Larmor (2): polarizzazione

Nel sistema di quiete istantanea  
della carica ( $\beta = 0$ )

$$\vec{E}_a = \frac{q}{c} \left[ \frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta})}{R} \right] \propto -a_{\perp} \vec{n}$$

Il campo **E** oscilla nel piano  $\perp n$  con la  
direzione della proiezione di **a** su tale  
piano ( $a_{\perp}$ )



La radiazione emessa e' polarizzata, se la direzione dell'accelerazione e' costante

# Larmor (3): potenza totale

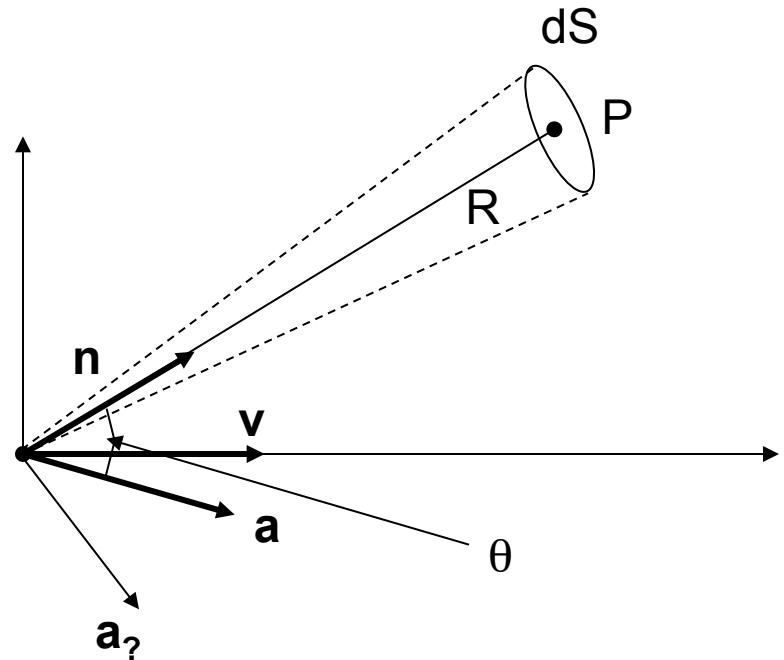
La potenza totale emessa si ottiene integrando sull'angolo solido  $\frac{dE}{dt} = \int \frac{dP}{d\Omega} d\Omega$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q^2}{4\pi c^3} a^2 \int \sin^2 \theta d\Omega = \frac{q^2}{4\pi c^3} a^2 \int_{-1}^{+1} (1 - \cos^2 \theta) 2\pi d(\cos \theta)$$

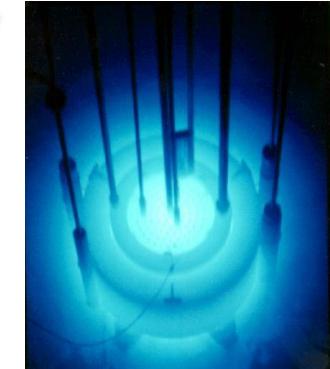
$$= \frac{q^2}{4\pi c^3} a^2 2\pi (4/3) = \frac{2q^2}{3c^3} a^2$$

Formula di Larmor per la potenza emessa da una carica accelerata in moto non relativistico.

E' valida in tutti i casi in cui  $v \ll c$

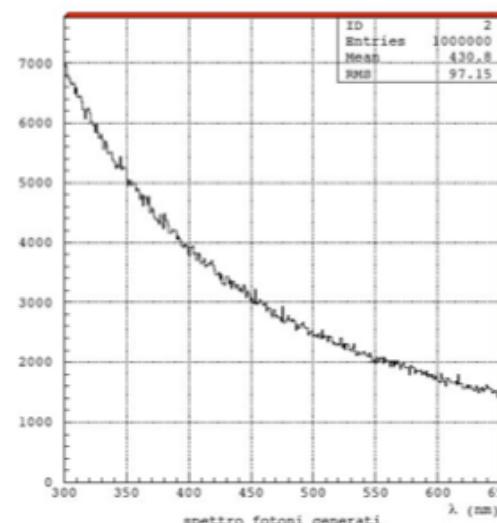
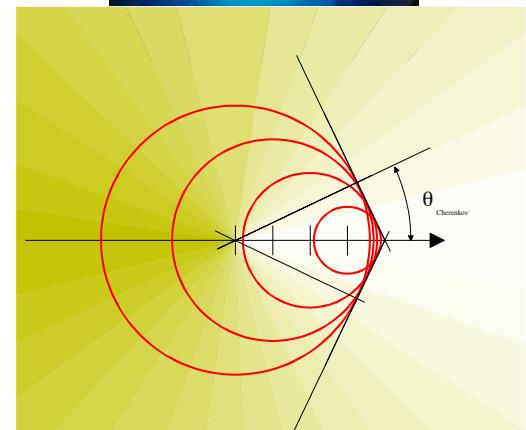


# Emissione Cerenkov



I fatti sperimentali:

- in un materiale con indice di rifrazione  $n$ , una particella carica emette fotoni se la sua velocità  $\beta c$  è maggiore della velocità di fase locale della luce  $\beta c = v > c/n$
- l'emissione avviene lungo una direzione ben precisa rispetto alla linea di volo della particella nel mezzo,  $\theta = 1/\beta n$
- ha una distribuzione spettrale caratteristica



# Emissione Cerenkov

Come fa una particella che viaggia a velocità costante a emettere radiazione?

Intuitivamente la particella carica polarizza gli atomi lungo la sua traiettoria.

I dipoli sono dipendenti dal tempo (causa del moto della particella nel mezzo) ed emettono radiazione.

Se  $v < c/n$  la distribuzione dei dipoli intorno alla posizione della particella è simmetrica → il dipolo totale è nullo.

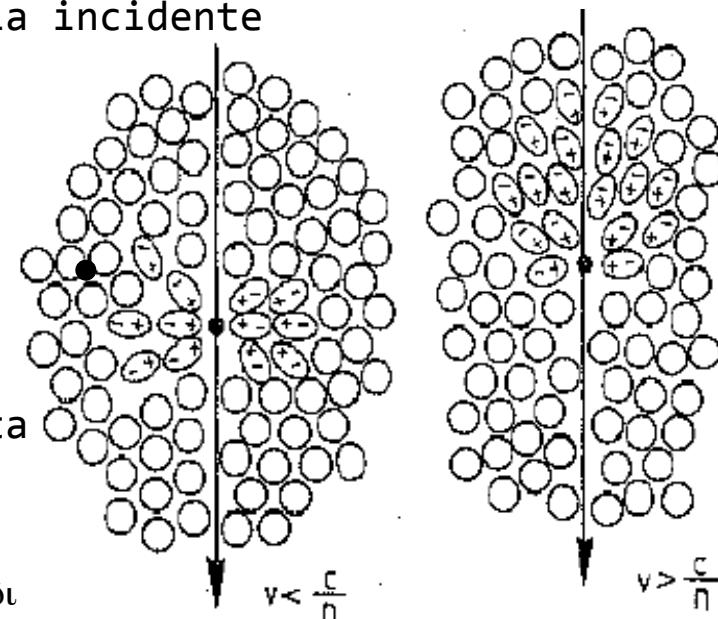
Se  $v > c/n$  la distribuzione è asimmetrica nella direzione avanti/indietro → il momento di dipolo netto non è nullo e irraggia.

L'energia irraggiata è fornita della particella incidente.

È un effetto dei campi elettrici della particella incidente sugli atomi del mezzo, lo stesso che da luogo all'effetto densità nella Bethe Bloch

L'emissione avviene solo nella direzione in cui i campi di radiazione dei dipoli sono coerenti.

L'emissione cherenkov avviene insieme alla perdita di E per collisioni.

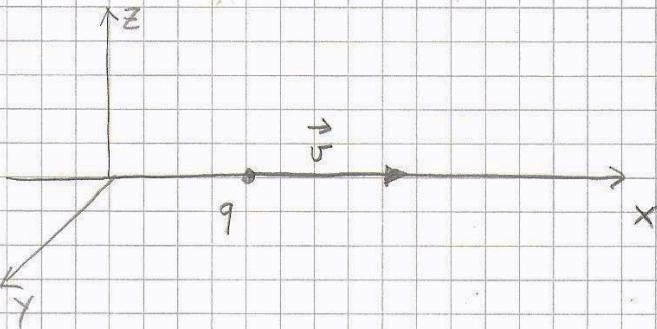


# Meccanismo di emissione

Per gli incurabili maniaci dei conti, una trattazione completa (classica) dell'effetto Cerenkov in Jackson: *Classical Electrodynamics* cap 13 e paragrafi 13.4 e 13.5

Per quelli almeno un po' entusiasti, una semplice derivazione si trova in "*High Energy Astrophysics*", Vol.1 Longair (disponibile in formato pdf)

# Emissione cherenkov: meccanismo di emissione



- PART CON VEL. COST. LUNGO  $x$   $\vec{v} = \text{cost.}$

$$\Rightarrow \text{CORRENTE } \vec{J}(x, t) = q \vec{v} \delta(y) \delta(z) \delta(x - vt)$$

- MEZZO POLARIZZABILE MA NON MAGNETICO

(Di fourier)

$$\epsilon \neq \epsilon_0 \quad \mu = \mu_0$$

DECOMPOS. IN CORRENTI OSCILLANTI A FREQ.  $w$

$$\vec{J}(\vec{x}, t') = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int \vec{J}(w, \vec{r}) e^{-iwt} dw$$

$$\text{CON } \vec{J}(w, \vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int \vec{J}(\vec{r}, t) e^{iwt} dt$$

CORRISPONDE A RAPPRESENTARE IL MOTO  
DELLA PART CON UNA DISTRIB. LINEARE

$$= \frac{q}{(2\pi)^{1/2}} \delta(y) \delta(z) e^{iwx/v} \hat{u}_x \quad (1)$$

DI CORRENTI OSCILLANTI DI AMPIEZZA (1)

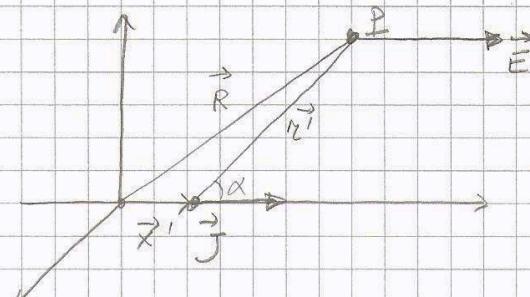
# Emissione cherenkov: meccanismo di emissione

LA SOLUZ. STANDARD E'

(ps: la  $\delta$  dirac in  $t'$  e' sottintesa)

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\vec{j}(x, t - |\vec{r}'|/c)] d^3x'}{|\vec{r}'|} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\vec{j}] d^3x'}{|\vec{r}'|}$$

$$e \quad \vec{E}(\vec{R}, t) = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\vec{j}] d^3x'}{|\vec{r}'|} \quad \text{NB: [...] significa valutare al tempo ritardato}$$



Nel limite di campo lontano, la componente del campo di radiazione  $E_r$  e' perpendicolare alla direzione di osservazione che risulta →

$$(\sim \| \vec{R})$$

$$\vec{E}_n = \vec{E} \times \vec{n} \Rightarrow |E_n| = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi} \left| \int d^3x' \frac{[\vec{j}]}{|\vec{r}'|} \right|$$

$$\text{LA POT. EMESSA } E' \quad P = \int_S \vec{S} \cdot d\vec{A}$$

$S = v u_E$  dove  $v$  e' la vel. Di propagazione dell'onda e  $u$  e' la densita' di energia. In un mezzo polarizzabile, ma non magnetico  $v = c/n$  e  $u_E = \epsilon E^2$ . Quindi  $S = c \epsilon E^2 / n$ . Ma  $n^2 = \epsilon \rightarrow S = n c E^2$

$$= \int_{\Omega} n c E_n^2 R^2 d\Omega$$

$$= \frac{n \epsilon_0 \mu_0 c}{16\pi^2} \int_{\Omega} R^2 \sin^2 \theta \left| \int d^3x' \frac{[\vec{j}]}{|\vec{r}'|} \right|^2 d\Omega$$

SE  $|R| \gg L$ , DIM DELLA REGIONE

NE CHE EMETTE

$$\text{NOTO CHE } \epsilon_0 \mu_0^{-1} = \frac{1}{\epsilon_0 c^4}$$

$$P \approx \frac{n}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \int_{\Omega} \sin^2 \theta \left| \int d^3x' [\vec{j}] \right|^2 d\Omega$$

$$|r'|^2 = |R|^2 + |x'|^2 - 2|x'|R \cos \alpha \approx \\ \approx |R|^2 \left( 1 - 2 \frac{|x'| \cos \alpha}{|R|} \right) \approx |R|^2$$

# Emissione cherenkov: meccanismo di emissione

$$\text{L'ENERGIA TOTALE EMESSA E' } U(\vec{R}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P dt = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{\Omega} d\Omega \sin^2 \theta \left| \int d\vec{x}' [\vec{j}] \right|^2 \cdot \frac{m}{(16\pi\epsilon_0 c^3)}$$

CON IL TEOR DI PARSEVAL PASSO DA  $t \rightarrow w$   $\left( \int_{-\infty}^{+\infty} dt |f(t)|^2 = 2 \int_0^{\infty} dw |f(w)|^2 \right)$

$$U(\vec{R}, w) = \frac{2m}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int_{\Omega} d\Omega \sin^2 \theta \int dw \left| \int d\vec{x}' [\vec{j}(w, \vec{x}')] \right|^2$$

$\underbrace{\quad \quad \quad}_{B(w)}$

LA POT. EMESSA DIPENDE DALLA VAR DELLA CORR. RITARDATA

I CAMPI IN P ALL'IST.  $t$  SONO LA SOMMA DEI CONTRIBUTI DEGLI ELEM. DI CORR.

$[\vec{j}(w, \vec{x}') d\vec{x}']$ , CIOE' DI ELEM. IN PUNTI  $\vec{x}'$  DIVERSI A IST.  $t' = t - |w|/c$  DIVERSI

CIASCUN CONTRIBUTO ARRIVA IN P all'ist.  $t$  DA CAMPI EMESSI A  $r(t')$  DA  $\vec{x}'$

IL CONTRIB IN P AT  $t$  DA  $\vec{j}(w, \vec{x}') e^{-iwt'} = \vec{j}(w, \vec{x}') e^{-i(w(t - r)/c)} = \vec{j}(w, \vec{x}') e^{+iwr/c} e^{iwt}$

$\omega/c = k, k \parallel r' \rightarrow \omega r'/c = k \cdot r'$   
IN P C'E' UNA FASE

INOLTRE  $\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \vec{j}(w, \vec{x}') e^{iwt'} \right\} = i\omega \vec{j}(w, \vec{x}') e^{iwt'} \quad (\text{cfr. } t' = t - r/c) \Rightarrow [\vec{j}(w, \vec{x}')] = i\omega [\vec{j}(w, \vec{x}')]$

QUINDI  $B(w) = w \left| \int d\vec{x}' [\vec{j}(w, \vec{x}') e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}'}] \right| = w \left| \int d\vec{x}' \frac{q}{(2\pi)^{1/2}} \delta(y) \delta(z) e^{i(wx'/c + \vec{k} \cdot \vec{x}')} \right|$

DOVE  $\vec{k} = \frac{w}{c} \hat{m}$

$$= \frac{q w}{(2\pi)^{1/2}} \left| \int d\vec{x}' [e^{i(wx'/c + \vec{k} \cdot \vec{x}')}] \right|$$

# Emissione cherenkov: meccanismo di emissione

$$B(\omega) = \frac{q\omega}{(2\pi)^{1/2}} \left| \int dx' [e^{i(\omega x'/v + \vec{k} \cdot \vec{r}')}] \right|$$

$$\vec{r}' = \vec{R} - \vec{x}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{r}' = k \cdot R - k' x'$$

$$= \frac{q\omega}{(2\pi)^{1/2}} \left| e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} \int dx' [e^{i(\frac{\omega x'}{v} + k x \cos\theta)}] \right| =$$

$$= \frac{q\omega}{(2\pi)^{1/2}} \left| \int dx' [e^{ix'(\frac{\omega}{v} + k \cos\theta)}] \right|$$

PERCIO'

$$(2) U = \frac{n}{8\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int d\Omega \sin^2\theta \int dw \frac{q^2 \omega^2}{(2\pi)} \left| \int dx' [e^{ix'(\frac{\omega}{v} + k \cos\theta)}] \right|^2$$

E' L'ENERGIA TOTALE CHE ARRIVA  
IN P

La chiave per l'emissione e' nell'integrale dentro | ... |: se l'integrando oscilla, l'integrale e' nullo

- SE LA FASE E' T.C.  $\neq 0 \Rightarrow$  L'INTEGRALE = 0 NON C'E' ENERGIA NETTA

$= 0$  " " "  $\neq 0$  C'E' E NETTA !

# Emissione cherenkov: meccanismo di emissione

CON  $k = \frac{\omega}{c}$  SI HA  $\omega\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{c} \cos\theta\right) = \frac{\omega}{c}\left(\frac{c}{v} + \cos\theta\right)$  NELL' EXP

• NEL VUOTO  $\frac{c}{v} > 1, \forall v \Rightarrow \frac{c}{v} + \cos\theta > 0, \forall \theta \Rightarrow$  NO EMISSIONE

• IN UN MEZZO  $c' = \frac{c}{n} < c \Rightarrow \frac{c'}{v} = \frac{c}{nv} < 1$  PER  $v > \frac{c}{n}$

ALLORA QUANDO  $\frac{c}{v} + \cos\theta = 0,$  L' EXP NON OSCILLA PIU'  $\Rightarrow$

LUNGO LA DIR  $\cos\theta = -\frac{c}{nv} = -\frac{1}{m\beta}$  C'E' EMISSIONE NETTA!  
(I.E. I CAMPI SONO COERENTI)

$$\text{DA (2) SI HA } \frac{dU}{dw} = \frac{m\omega^2 q^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c^3} \int_{\Omega} d\Omega \sin^2\theta \left| \int dx [e^{ikx'(\cos\theta + \frac{c}{v})}] \right|^2$$

POICHÉ SI HA EMISSIONE SOLO QUANDO  $\alpha = k(\cos\theta + \frac{c}{v}) \approx 0, \Rightarrow$

$\sin^2\theta \approx \sin^2\theta_c = 1 - \cos^2\theta = 1 - \frac{1}{m^2\beta^2}$  SI PUO' RITENERE  $\approx$  COSTANTE

$$\frac{dU}{dw} = \frac{m\omega^2 q^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c^3} \left(1 - \frac{1}{m^2\beta^2}\right) \int_{\Omega} d\Omega \left| \int dx [e^{i\alpha x'}] \right|^2, \quad \alpha \approx 0$$

$$\int_{-L}^L dx e^{i\alpha x'} = \frac{e^{i\alpha L} - e^{-i\alpha L}}{i\alpha} = \frac{2 \sin \alpha L}{\alpha} \Rightarrow$$

L'integrale formalmente va  $-\infty$  a  $+\infty$ ; per eseguirlo prendiamo un  $L$  finito  
(eventualmente facciamo il limite a  $\infty$ )

$$\frac{dU}{dw} = \frac{m\omega^2 q^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c^3} \left(1 - \frac{1}{m^2\beta^2}\right) \int_{\Omega} 4 \frac{\sin^2 \alpha L}{\alpha^2} 2\pi d\cos\theta$$

# Emissione cherenkov: meccanismo di emissione

$$\frac{dU}{dw} = \frac{n q^2 w^2}{2\pi^2 \epsilon_0 c^3} \left(1 - \frac{1}{n^2 \beta^2}\right) \int \frac{\sin^2 \alpha L}{\alpha^2} d\cos \theta$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{C}$

$$\alpha = k(\cos \theta + \frac{c}{v}) \Rightarrow d\alpha = k d\cos \theta$$

$$C = L \int \frac{d\alpha}{k} \frac{\sin^2 \alpha L}{\alpha^2 L^2} = \frac{L}{K} \int_{-\infty}^{+\infty} du \frac{\sin^2 u}{u^2} = \frac{\pi L}{K} = \frac{\pi L c}{m w}$$

$$\frac{dU}{dw} = \frac{q^2 w}{2\pi \epsilon_0 c^3} \left(1 - \frac{1}{n^2 \beta^2}\right) L$$

$\Rightarrow$  POICHE' LA REGIONE DI EMISSIONE E' LUNGA  $2L$  SI HA  $\frac{du}{dw dx} = \frac{1}{2L} \frac{dw}{dx}$

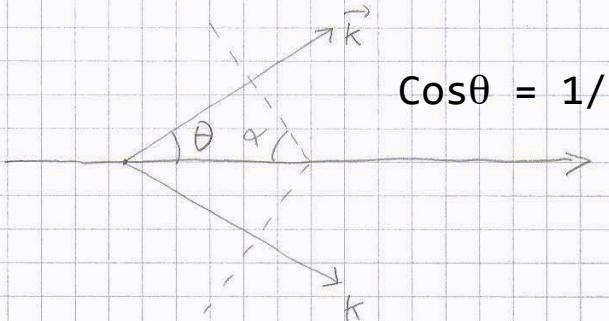
$$\frac{dU}{dw dx} = \frac{q^2 w}{4\pi \epsilon_0 c^2} \left(1 - \frac{1}{n^2 \beta^2}\right)$$

E' L'ENERGIA EMESSA PER UNITA' DI LUNGHEZZA PERCORSO NEL MATERIALE, ALLA FREQ.  $w$  NELLA DIR.  $\theta$  (RISP. ALLA LINEA DI VOLO DELLA PART.)

LA POTENZA ALLA FREQ.  $w$ :  $dx = v dt \Rightarrow$

$$\frac{dP}{dw} = \frac{q^2 w v}{4\pi \epsilon_0 c^2} \left(1 - \frac{1}{n^2 \beta^2}\right)$$

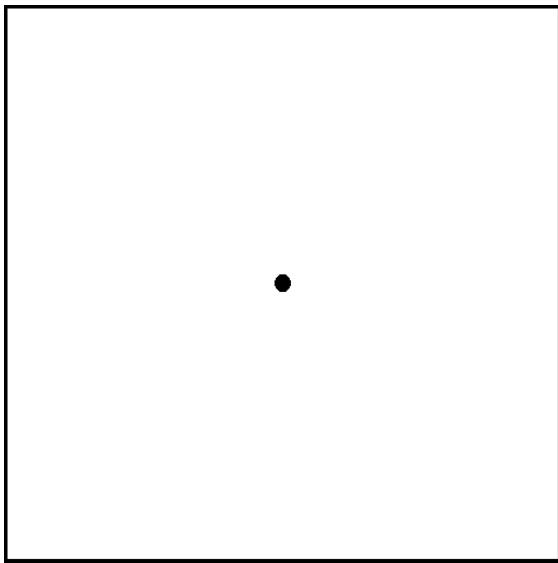
NB: poiche' la potenza e' positiva, non c'e' emissione quando  $1 - 1/\beta^2 n^2 < 0$



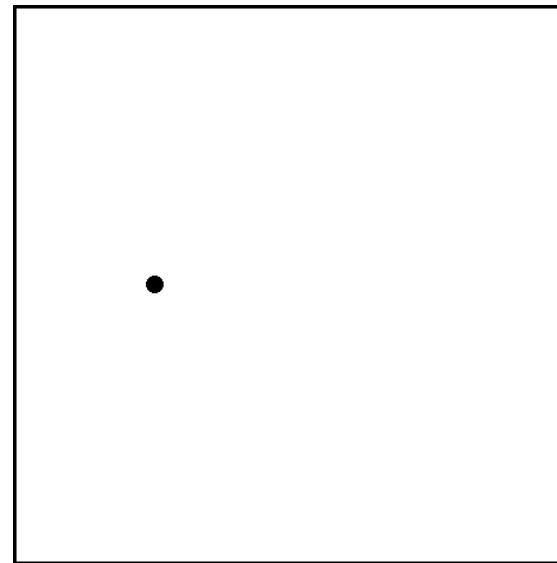
$$\cos \theta = 1/n\beta$$

# Radiazione Cherenkov

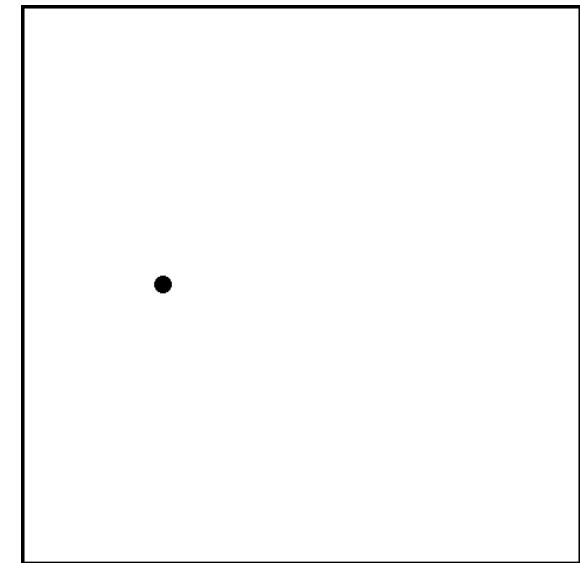
- Carica in moto nella materia



a riposo



lenta



veloce