

Particle Detectors

Lecture 3

9/03/16

a.a. 2015-2016

Emanuele Fiandrini

Comunicazione di servizio

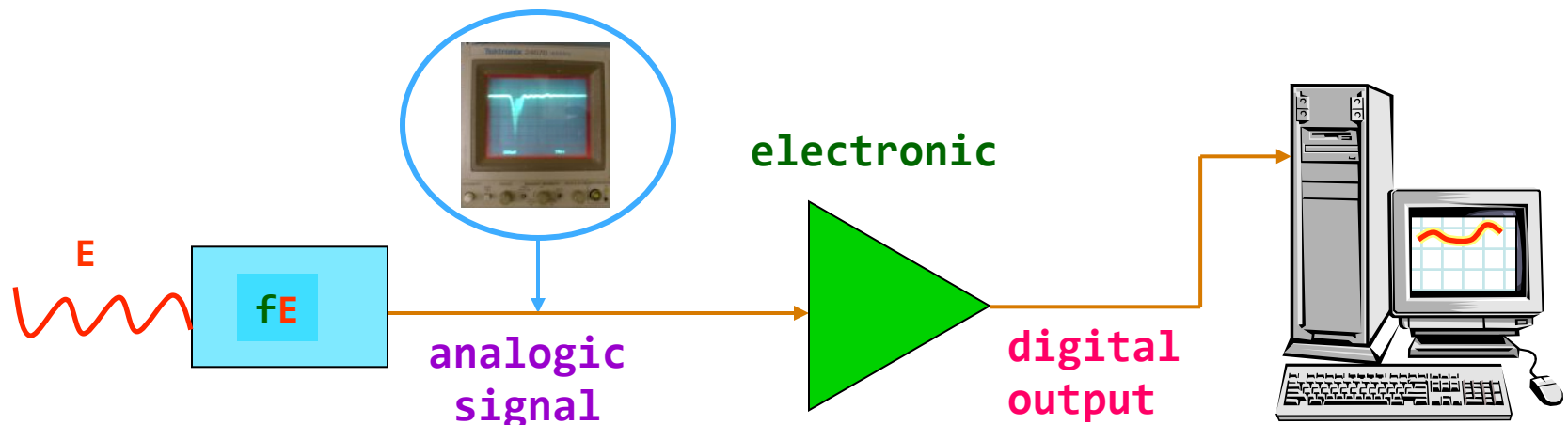
- Vacanze accademiche di pasqua 24-29/3
- Il 23/3 sono a Roma per un meeting
- Quindi il 23/3 e 25/3 NON c'e' lezione

Particles interactions with matter

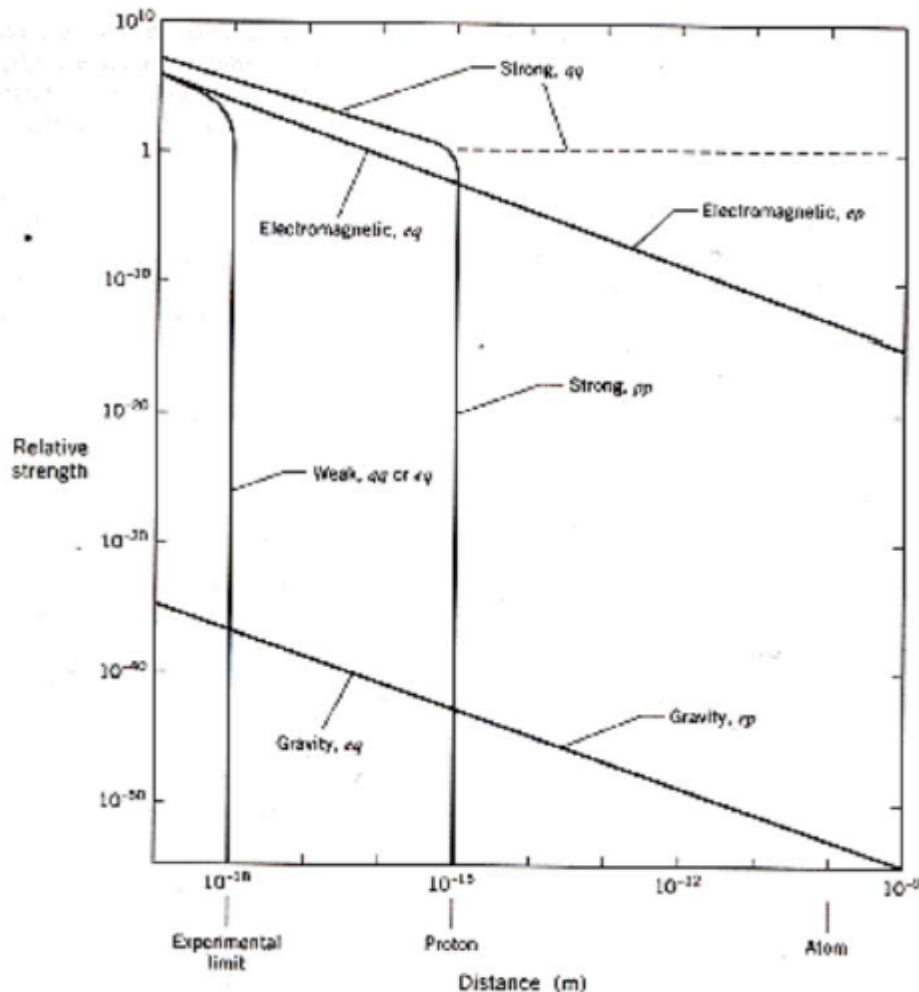
General operation principle of a detector:
Particle with energy $E \rightarrow$ transfer of energy fE ($f \leq 1$) to the detector $\rightarrow$ conversion in an accessible, measurable form of energy (light, current, voltage, heat,...)

Modern detectors are essentially electrical: fE converted in electrical pulses $\rightarrow$ needed electronic circuitry to form the signal

First step to understand the operation of a detector is to study all the physical processes that make $f \neq 0$, i.e. that allow for the transfer of a fraction of the particle energy to the active medium of the detector



Strength versus distance



- At atomic distances only EM & gravity have sizable strengths
- EM is ~40 orders of magnitude stronger than gravity
- If quarks could be separated force would be enormous (see dashed line)
- At proton size distances strong force turns on & becomes ~100 times stronger than EM force
- At distances ~1/1000 of proton size weak force turns on abruptly

Concentrate on elm forces since a combination of their strength and reach make them the primary responsible for energy loss in matter.

For neutrons, hadrons generally and neutrinos other effects obviously enter.

Particle interactions with matter

- electromagnetic interactions:

- ◆ excitation
- ◆ ionization
- ◆ Cherenkov radiation
- ◆ transition radiation
- ◆ bremsstrahlung
- ◆ photoelectric effect
- ◆ Compton scattering
- ◆ pair production

Charged particles

photons

- strong interactions:

- ◆ secondary hadron production,
- ◆ hadronic showers

hadronic particles

- some amplification mechanism may multiply the initial signal

More than one process can occur at the same time

Interaction of particles with matter

- when passing through matter:
 - particles interact with the electrons and/or nuclei of the medium;
 - this interaction can be *weak*, *electromagnetic* or *strong interaction*, depending on the kind of particle; its effects can be used to detect the particles;
- possible interactions and effects in passage of particles through matter:
 - **excitation** of atoms or molecules (e.m. int.):
 - ◆ charged particles can excite an atom or molecule (i.e. lift electron to higher energy state);
 - ◆ subsequent de-excitation leads to emission of photons;
 - **ionization** (e.m. int.)
 - ◆ electrons liberated from atom or molecule, can be collected, and charge is detected
 - **Cherenkov radiation** (e.m. int.):
 - ◆ if particle's speed is higher than speed of light in the medium, e.m. radiation is emitted -- “Cherenkov light” or Cherenkov radiation, which can be detected;
 - ◆ amount of light and angle of emission depend on particle velocity;

Interaction of particles with matter, cont'd

■ transition radiation (e.m. int.):

- ◆ when a charged particle crosses the boundary between two media with different speeds of light (different “refractive index”), e.m. radiation is emitted -- “transition radiation”
- ◆ amount of radiation grows with (energy/mass);

■ bremsstrahlung (= braking radiation) (e.m. int.):

- ◆ when charged particle's velocity changes, e.m. radiation is emitted;
- ◆ due to interaction with nuclei, particles deflected and slowed down emit bremsstrahlung;
- ◆ effect stronger, the bigger (energy/mass) $\Rightarrow$ electrons with high energy most strongly affected;

■ pair production (e.m. int.):

- ◆ by interaction with e.m. field of nucleus, photons can convert into electron-positron pairs

■ electromagnetic shower (e.m. int.):

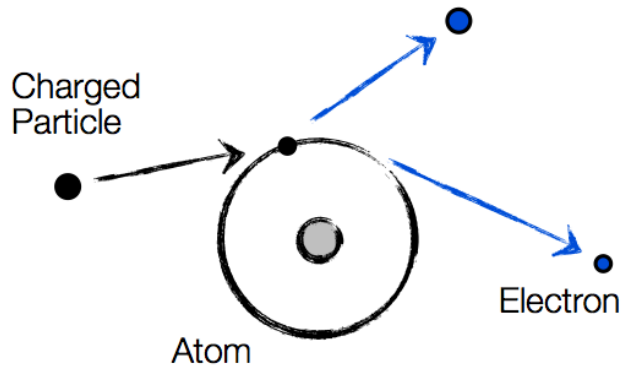
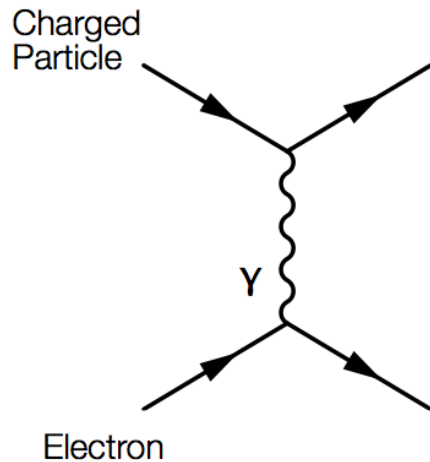
- ◆ high energy electrons and photons can cause “*electromagnetic shower*” by successive bremsstrahlung and pair production

■ hadron production (strong int.):

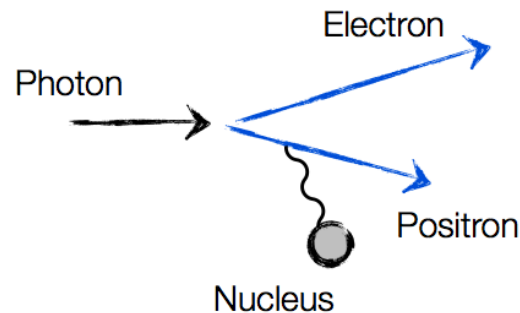
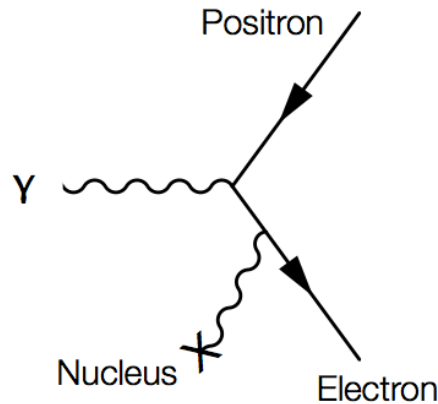
- ◆ strongly interacting particles can produce new particles by strong interaction, which in turn can produce particles, ... “*hadronic shower*”

Particle Interactions – Examples

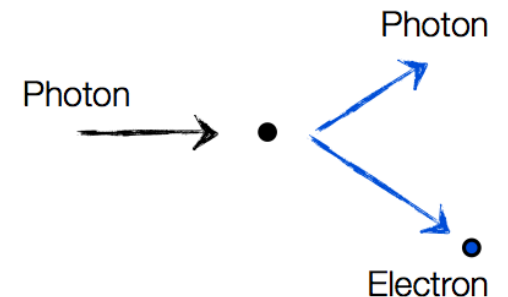
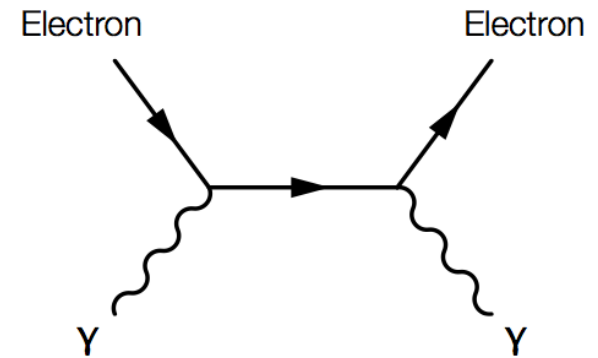
Ionization:



Pair production:



Compton scattering:



Interazioni delle particelle con La materia

Due possibili classi di interazioni:

- Interazioni non distruttive: l'interazione col mezzo trasferisce poca energia al mezzo stesso. I parametri cinematici e dinamici della particella non cambiano in maniera significativa (in prima approx).
- Interazioni distruttive: tutta o una frazione consistente dell'energia della particella viene depositata nel rivelatore. in molti casi, la particella viene assorbita (calorimetria), ovvero viene "distrutta".

Ionizzazione

Particelle cariche che attraversano un mezzo vanno incontro a :

1. Perdite di energia continue → ionizzazione
2. Deflessione della direzione originaria → scattering multiplo

Questi effetti sono principalmente dovuti a due processi:

1. Collisioni inelastiche con gli elettroni atomici del materiale
2. Collisioni elastiche con i nuclei del materiale

Le perdite per ionizzazione comprendono:

- Ionizzazione di atomi o ioni
- Eccitazione di stati atomici o ionici
- L'interazione può essere distruttiva o no, a seconda dello spessore del materiale attraversato
- NB: non possiamo prevedere quante interazioni subirà la particella né quanta energia perde in ogni urto, ma possiamo calcolare la perdita media di energia e le sue fluttuazioni (ie deviazione standard)

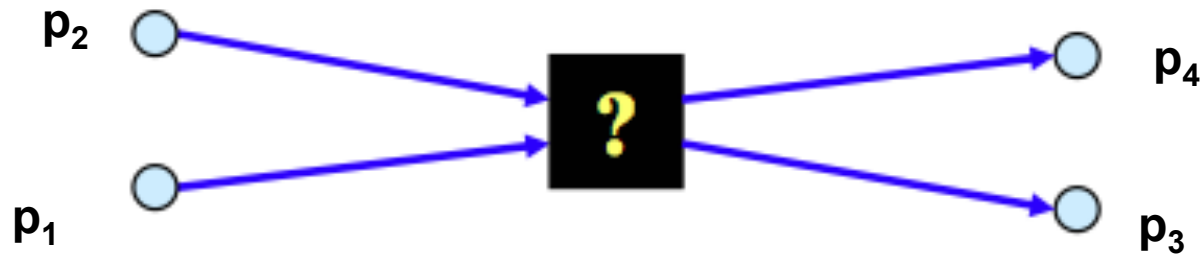
Largamente usata per rivelatori di particelle (misure di posizione, di carica elettrica)

In astrofisica, causa di perdite di energia per le particelle nel mezzo interstellare.

Perdita di energia: cinematica

Coulomb interaction of charged particles is a “collision”: 4-momentum conservation determines uniquely the cinematic of the interaction.

- Force exchanged when they collide
- Free motion between collisions



- We don't know and we don't need to know what happens in the box: it is a “black box”
- Motion outside the box is determined by relativistic cinematics only
- Dynamics tells us what is the probability of a given final state, i.e. conservation of 4-momentum (or momentum and energy in classical collisions)

Esempio Classico: Urto centrale



La cinematica fissa momento ed energia dello stato finale

$$Mv = Mv' + m_e v_e$$

$$v' = (Mv - m_e v_e) / M$$

$$Mv^2 = Mv'^2 + m_e v_e^2$$

$$Mv^2 = M[(Mv - m_e v_e) / M]^2 + m_e v_e^2$$

$$\cancel{Mv^2} = \cancel{Mv^2} + m_e^2 v_e^2 / M - 2m_e v v_e + m_e v_e^2$$

$$0 = m_e v_e / M - 2v + v_e$$

$$v_e = 2v / (1 + \frac{m_e}{M}) \simeq 2v \quad \text{La perdita di energia della particella incidente e'}$$

$$\Delta E_{inc} = (1/2) m_e v_e^2 = (1/2) m_e [2v / (1 + \frac{m_e}{M})]^2$$

$$\frac{\Delta E_{inc}}{E_{inc}} = \frac{(1/2) m_e [2v / (1 + \frac{m_e}{M})]^2}{(1/2) M v^2} = 4m_e \frac{M}{(m_e + M)^2} \simeq 4m_e / M$$

Se $m_e \ll M$, $E_{inc} \approx \text{costante} \rightarrow$ la particella incidente prosegue indisturbata ($\theta \approx \Delta p_t / p$) (trascurando il rinculo del nucleo), mentre l'e- riceve un kink a causa dell'interazione elettrostatica

Perdita di energia: cinematica caso relativistico

- Local interactions conserve total 4-momentum
 - i.e., total energy and total 3-momentum are conserved

$$p^\mu = \sum_{s=1}^n p_s^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) \longleftrightarrow E = \sum_{s=1}^n E_s \quad \mathbf{p} = \sum_{s=1}^n \mathbf{p}_s$$

- We know how to Lorentz transform it

$$p'^\mu = \sum_s p_s'^\mu = \sum_s L^\mu_\nu p_s^\nu = L^\mu_\nu p^\nu \quad \text{as usual}$$

- Define the **center-of-momentum** frame in which $\mathbf{p} = 0$
 - It's the frame in which the total 3-momentum is zero
 - Or, the center of mass is at rest
 - Often called center-of-mass frame as well

Perdita di energia: cinematica

$$p^\mu = \sum_{s=1}^n p_s^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) \xrightarrow{\text{CoM frame}} p'^\mu = \left(\frac{E'}{c}, \mathbf{0} \right)$$

- There are two particularly useful quantities

- CoM energy E'

- Lorentz invariance $p^\mu p_\mu = p'^\mu p'_\mu \Rightarrow \frac{E'^2}{c^2} = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2$
 - E' is the smallest possible E

- Boost β of CoM frame relative to the lab. frame

- Lorentz transformation

$$p^\mu = L_\nu^\mu p'^\nu = \left(\frac{\gamma E'}{c}, \frac{\gamma \beta E'}{c} \right) \Rightarrow \beta = \frac{\mathbf{p}c}{E} \quad \gamma = \frac{E}{E'}$$

Perdita di energia: cinematica

- Consider collision of particle 1 on particle 2 at rest



$$p_1 = (E_1/c, \mathbf{p}_1)$$

$$p_2 = (m_2 c, \mathbf{0})$$

Fixed-target collision

- Total 4-momentum is $p = (E_1/c + m_2 c, \mathbf{p}_1)$

- Total CoM energy

$$E'^2 = p^\mu p_\mu c^2 = (m_1^2 + m_2^2)c^4 + 2E_1 m_2 c^2$$

- Boost of CoM frame is

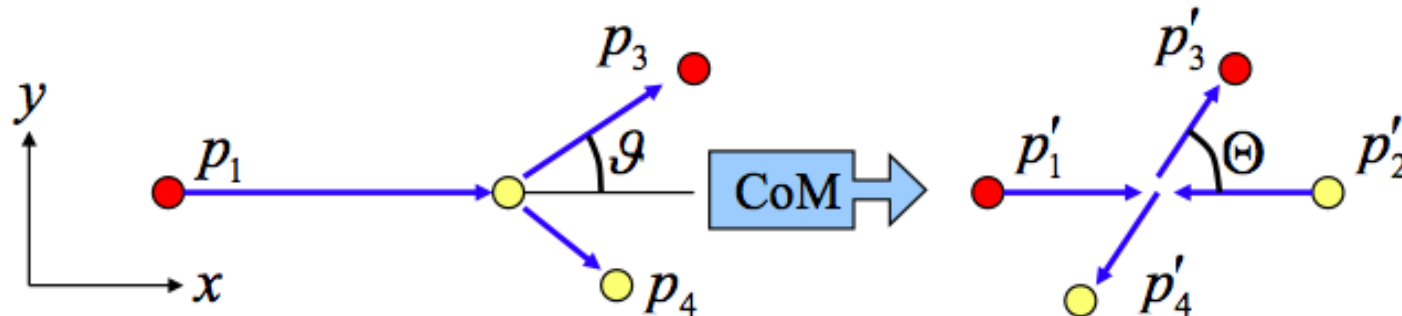
$$\beta = \frac{\mathbf{p}_1}{E_1/c + m_2 c} = \frac{m_1 \gamma_1 \mathbf{v}_1}{m_1 \gamma_1 c + m_2 c}$$

E' grows slowly with E_1

Approaches $\mathbf{v}_1/c$ for large E_1

Perdita di energia: cinematica max trasferimento di energia

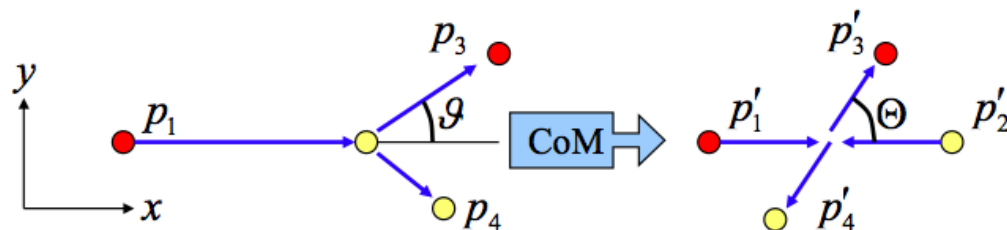
- Particle 1 hits particle 2 and get elastically scattered



- Cross section is calculated in CoM frame
 - By treating it as a central-force problem
- Experiment is done in the laboratory frame
- We need to learn how to translate between the CoM and the laboratory frames

It is more convenient to study the collision in the CM frame wrt the LAB frame since everything is symmetric and the particle momenta don't change length but only direction

Perdita di energia: cinematica



- Total momentum is $p^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu = (E_1/c + m_2c, \mathbf{p}_1)$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\mathbf{p}}{p^0} = \frac{\mathbf{p}_1 c}{E_1 + m_2 c^2}$$

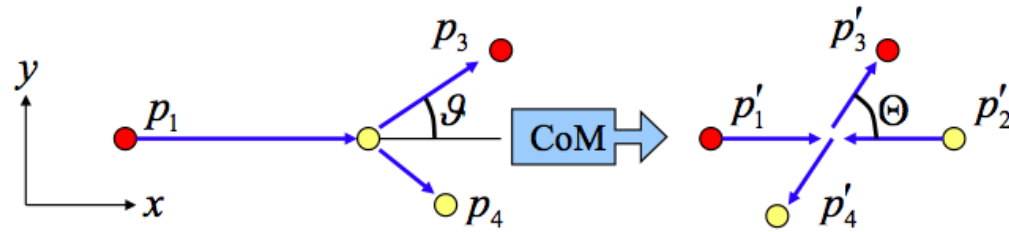
$$p^0 = E/c$$

- Let's get γ as well

$$E_{\text{cm}}^2/c^2 = (E_1/c + m_2c)^2 - \mathbf{p}_1^2 = m_1^2c^2 + m_2^2c^2 + 2E_1m_2$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{E_{\text{lab}}}{E_{\text{cm}}} = \frac{E_1 + m_2c^2}{\sqrt{m_1^2c^4 + m_2^2c^4 + 2E_1m_2c^2}}$$

Perdita di energia: cinematica



- Now we can boost p_1 to CoM

$$p_1^\mu = (E_1/c, p_1, 0, 0) \Rightarrow p_1'^\mu = (E'_1/c, p'_1, 0, 0)$$

$$\Rightarrow E'_1 = \gamma(E_1 - \beta p_1 c) \quad p'_1 = \gamma(p_1 - \beta E_1/c)$$

- p_3' is given by rotating p_1' by Θ

$$p_3'^\mu = (E'_1/c, p'_1 \cos \Theta, p'_1 \sin \Theta, 0) \quad \text{Since the collision is elastic}$$

- Boost this back to get p_3

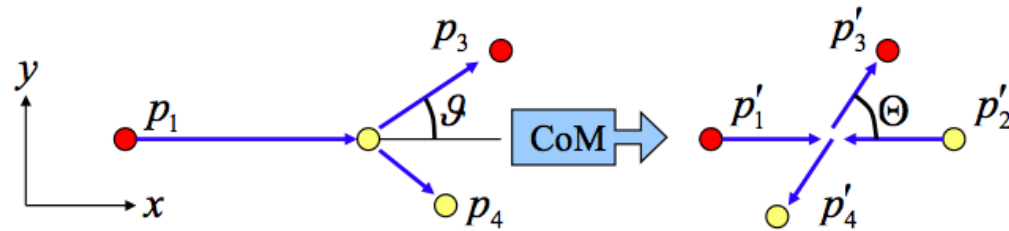
$$E_3 = \gamma(E'_1 + \beta p'_1 c \cos \Theta) \quad p_3^1 = \gamma(p'_1 \cos \Theta + \beta E'_1/c) \quad p_3^2 = p'_1 \sin \Theta$$

- Scattering angle in lab frame is

$$\tan \vartheta = \frac{p_3^2}{p_3^1} = \frac{\sin \Theta}{\gamma(\cos \Theta + \beta E'_1/(p'_1 c))} = \frac{\sin \Theta}{\gamma(\cos \Theta + \beta/\beta'_1)}$$

Velocity of
1 in CoM

Perdita di energia: cinematica



- What happens to the kinetic energy?

$$E_3 = \gamma^2 \left[(1 - \beta^2 \cos \Theta) E_1 - \beta (1 - \cos \Theta) p_1 c \right]$$

- At $\Theta = 0$ $E_3 = \gamma^2 (1 - \beta^2) E_1 = E_1$ Makes sense

- With a little bit of work

Kinetic energies

$\rightarrow \frac{T_3}{T_1} = 1 - \frac{2\rho(1 + \mathcal{E}_1/2)}{(1 + \rho)^2 + 2\rho\mathcal{E}_1} (1 - \cos \Theta)$

$\mathcal{E}_1 = T_1 / m_1 c^2$

$\rho = m_1 / m_2$

- Worst case is $\Theta = \pi$

$$\frac{(T_3)_{\min}}{T_1} = \frac{(1 - \rho)^2}{(1 + \rho)^2 + 2\rho\mathcal{E}_1}$$

This corresponds to the max energy transfer to the target $\Delta E_{\max} = T_1 - T_{3\min}$

The min energy transfer corresponds to $\cos \Theta = 1$ where $T_3 = T_1$ and therefore $\Delta E_{\min} = 0$

Perdita di energia: cinematica

$$\frac{(T_3)_{\min}}{T_1} = \frac{(1-\rho)^2}{(1+\rho)^2 + 2\rho\mathcal{E}_1}$$

■ Non-relativistic limit

$$T_1 \ll m_1 c^2, m_2 c^2$$

$$\frac{(T_3)_{\min}}{T_1} = \frac{(1-\rho)^2}{(1+\rho)^2}$$

If $m_1 \ll m_2$, almost no energy lost in the collision, as if $m_2 \ll m_1$, max loss for $m_1 = m_2$, ie $T_{3\min} = 0$

■ Ultra-relativistic limit

$$T_1 \gg m_1 c^2, m_2 c^2$$

$$\frac{(T_3)_{\min}}{T_1} = \frac{(1-\rho)^2}{2\rho\mathcal{E}_1} = \frac{(m_2 - m_1)^2 c^2}{2m_2 T_1}$$

$(T_3)_{\min}$ is independent of T_1

Perdita di energia: cinematica

We are interested to energy transferred to the target

The energy lost by the projectile is transferred to the target (initially at rest)

The max energy of the target after the collision is

$$T_{\max target} = T_1 - T_{1\min} = T_1(1 - T_{1\min}/T_1)$$

Making the substitution $T_1 = m_1 c^2(\gamma - 1)$, with very little algebra we get

$$T_{\min target} = 0 \quad \text{per} \quad \cos \Theta = 1, \Theta = 0 \quad \text{where} \quad m_1 \rightarrow m \text{ e } m_2 \rightarrow M$$

$$T_{\max target} = \frac{2m(\beta\gamma)^2}{\left[1 + \left(\frac{m}{M}\right)^2 + 2\gamma \frac{m}{M}\right]} \quad \text{for} \quad \cos \Theta = -1, \Theta = \pi$$

$$\text{e.g. protons on electrons} \quad \frac{m}{M} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \frac{\gamma m}{M} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \quad T_{\max target} \approx 2m(\beta\gamma)^2 = 2m\left(\frac{p_0}{M}\right)^2$$

Elastic scattering

- Conservation of momentum alone dictates some features of projectile-target elastic scattering
 - Target mass $\gg$ incoming energy implies momentum transfer but nearly no energy transfer to target; incoming particle can scatter at large angles
 - Target mass $\ll$ incoming energy implies potentially large energy transfer to target, but little change in direction of incoming particle
- As a result, scattering off electrons and off nuclei have very different characteristics

Collisions of charged particles

In a medium a particle with mass $\gg$ of e^- collides on:

- **Nuclei** $\rightarrow$ small energy transferred to the nucleus, but significative scattering angle.
- **Atomic Electrons** $\rightarrow$ incident particle loses energy on electrons, but get negligible deviation.

Collisioni fra particelle cariche.

- Quando una particella attraversa un mezzo continuo siamo interessati a conoscere:
 - quanta E deposita
 - che deviazione subisce
- Tratteremo i due processi in maniera indipendente (anche se perdite di energia e deviazione NON sono in realta' indipendenti)

Perdite di energia: Ionizzazione

Dei due processi elettromagnetici, le collisioni inelastiche con gli e⁻ atomici sono praticamente le sole responsabili delle perdite continue di energia di particelle pesanti nella materia.

In queste collisioni ($\sigma \approx 10^{-17} - 10^{-16} \text{ m}^2$), la particella proiettile cede E all'atomo.

Le perdite nelle singole collisioni sono piccole, ma il # e' grande per unita' di lunghezza → effetto cumulativo osservabile anche nel caso di spessori sottili (e.g. Un p di 10 MeV perde tutta la sua energia in 0.25 mm di Cu).

Le perdite per ionizzazione comprendono:

- Collisioni *soft* $\leftrightarrow$ Eccitazione di stati atomici o ionici, $\Delta E < E_{\text{ionizz}}$
- Collisioni *hard* $\leftrightarrow$ Ionizzazione di atomi o ioni, $\Delta E > E_{\text{ionizz}}$
se $E \gg E_{\text{ionizz}} \rightarrow e^-$ energetici, raggi δ

lo scattering elastico su nucleo avviene frequentemente ma le perdite di energia sono trascurabili se la massa del bersaglio e' $\ll$ di quella del proiettile.

Energy loss

La perdita totale di energia per una particella che attraversa un mezzo e'

$$-\Delta E = \sum_{i=1}^N \delta E_i$$

dove N e' il numero di collisioni e δE_i e' la perdita di energia nello i 'esimo urto

Il processo di perdita e' stocastico: il numero di urti e la perdita di energia in ciascun urto non sono note a priori. Cioe' facendo attraversare ad N particelle lo stesso spessore di materiale in generale la perdita di energia sara' differente in ciascun evento, poiche' il # di urti e' diverso per ogni particella e in ciascun urto la particella perde energie diverse.

Tuttavia, se N e' grande, e' possibile calcolare la perdita MEDIA di energia e la sua deviazione standard ("fluttuazioni")

- we want to know the energy lost by a particle when crossing a medium:
 - correct approach: get diff cross section as a function of E $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}d\varepsilon$
 - calculate the average energy loss

$$-dE = nZdx \int_{\varepsilon_{cut}}^{\varepsilon_{max}} \varepsilon \frac{d\sigma}{d\varepsilon} d\varepsilon$$

- This is the Bethe-Bloch approach
- We can get most of results from a classical calculation of energy loss in a medium

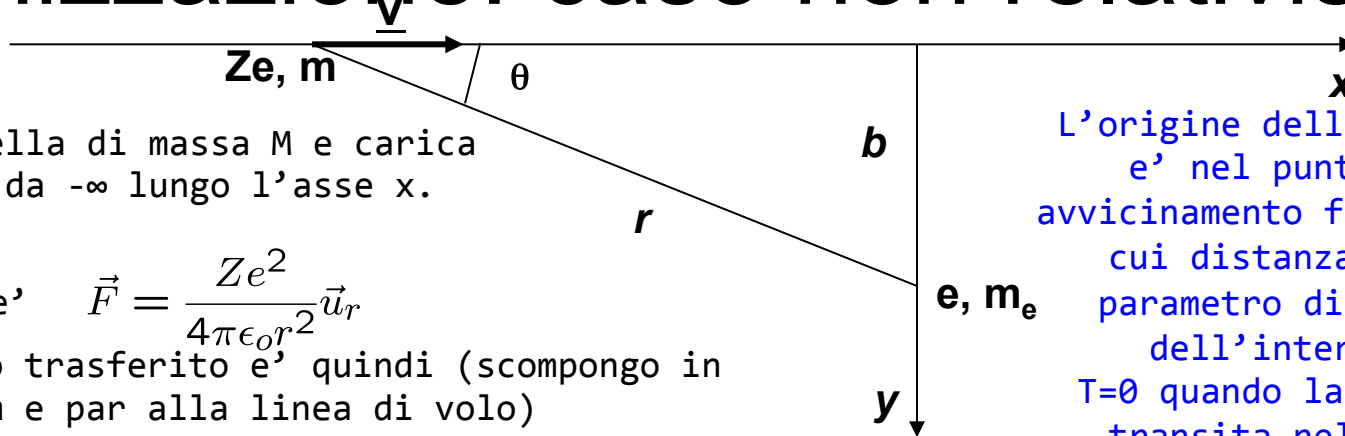
Energy loss – classical approach

La trattazione rigorosa richiede l'uso della meccanica quantistica ma e' possibile ottenere le caratteristiche principali con una trattazione semiclassica

Useremo l'approssimazione $M \text{ proiettile} \gg M \text{ bersaglio}$, cosi' che nell'interazione il proiettile (veloce) non viene deviato (in maniera apprezzabile) e prosegue indisturbato.

Quello che vogliamo fare e' ottenere la perdita di energia per unita' di lunghezza percorsa ("perdita specifica") in un mezzo dE/dx

Ionizzazione: caso non relativistico



La particella di massa M e carica Ze arriva da $-\infty$ lungo l'asse x .

La forza e' $\vec{F} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$

L'impulso trasferito e' quindi (scompongo in comp norm e par alla linea di volo)

$$\vec{p}_t = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}_p dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}_n dt$$

$$\vec{p}_t = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\theta dx}{r^2} \frac{1}{v} \right) \vec{u}_x + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\theta dx}{r^2} \frac{1}{v} \right) \vec{u}_y \right]$$

Elimino r : $b = r \sin\theta \rightarrow r = b / \sin\theta$

$$x = r \cos\theta \rightarrow x = b \cos\theta / \sin\theta \rightarrow dx = -b d\theta / \sin^2\theta$$

$$\vec{p}_t = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_0^\pi \frac{\cos\theta \sin^2\theta}{b^2} \frac{-bd\theta}{v \sin^2\theta} \vec{u}_x + \int_0^\pi \frac{-b}{\sin^2\theta} \frac{d\theta \sin^3\theta}{v b^2} \vec{u}_y \right]$$

Il primo integrale e' zero per simmetria

$$\vec{p}_t = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 b v} \left[\int_0^\pi \sin\theta d\theta \vec{u}_y \right] = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 b v} \vec{u}_y$$

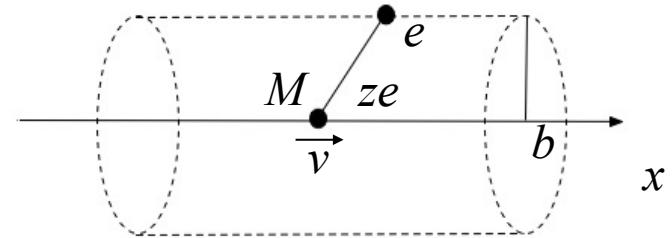
E' l'impulso trasferito dalla particella incidente all'e-

L'origine delle coordinate e' nel punto di max avvicinamento fra M ed m , la cui distanza e' detta parametro di impatto b dell'interazione.
 $T=0$ quando la particella transita nell'origine

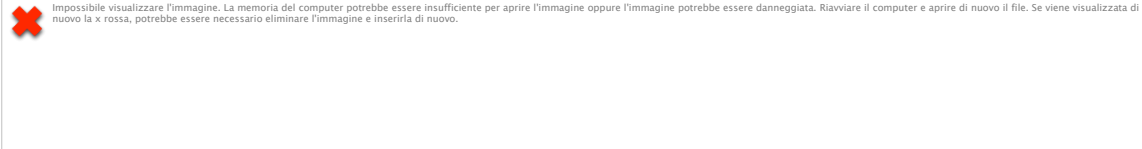
$$dt = dx/v$$

Another way to get p_t

- Consider heavy particle, mass M , charge ze , velocity v .
- Atomic electron at distance b from particle trajectory:

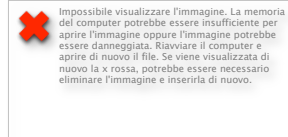


- Impulse transferred to the electron:

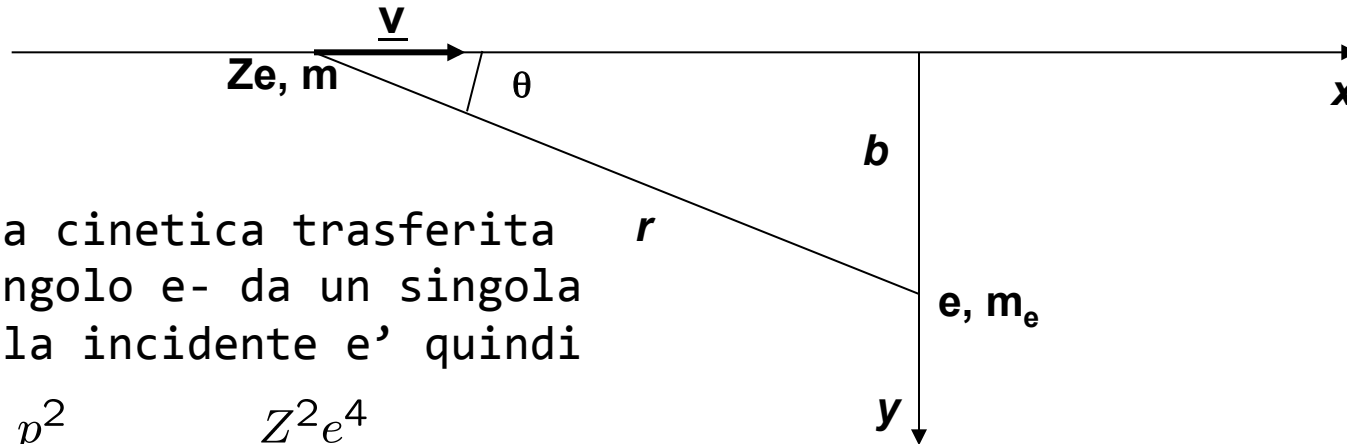


- by symmetry only the component $\perp$ to line of flight contributes

- Gauss Law:



Ionizzazione: caso non relativistico



L'energia cinetica trasferita ad un singolo e- da un singola particella incidente e' quindi

$$\Delta E_{cin} = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{Z^2 e^4}{8\pi^2 \epsilon_0^2 b^2 v^2 m_e}$$

Se abbiamo una densita' di volume di e- N_e , allora l'energia trasferita per unita' di volume e'

$$U_{cin} = N_e \Delta E_{cin} = \frac{N_e Z^2 e^4}{8\pi^2 \epsilon_0^2 b^2 v^2 m_e} = \left(\frac{e^4 N_e}{8\pi^2 \epsilon_0^2 m_e} \right) \frac{Z^2}{b^2 v^2}$$

L'energia trasferita dipende dal parametro d'impatto b, dalla velocita' e dalla carica della particella incidente

NB: questa e' l'energia trasferita all'eletttrone (positiva), che corrisponde a quella persa dalla particella incidente (negativa): $E_{e,fin} = \Delta E$, $E_{fin,M} = E_{inc,M} - \Delta E$

Ionizzazione: caso non relativistico

Nel percorrere un tratto dx , particella cede energia a tutti gli e^- con parametro di impatto fra b e $b+db$, contenuti nel volume $dV=2\pi b db dx$ quindi

$$-dE = U_{cin} \times dV = U_{cin} \times 2\pi b db dx$$

$$\downarrow$$

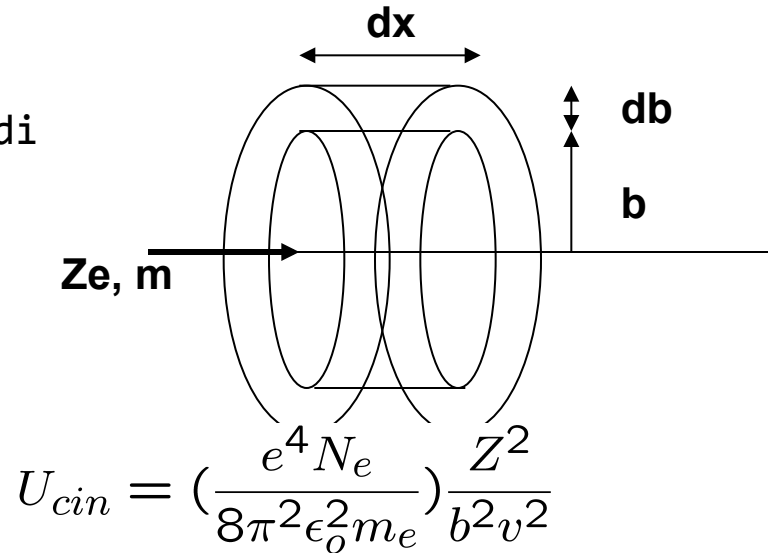
$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi U_{cin} b db$$

La perdita totale media di energia si ottiene integrando sui parametri d'impatto (NB: b non e' un osservabile).

Si potrebbe pensare che $b_{min}=0$ e $b_{max}=+\infty$, ma ci sono argomenti che suggeriscono che non sia cosi'

$$-\frac{dE}{dx} = \int_{b_{min}}^{b_{max}} 2\pi \left(\frac{e^4 N_e}{8\pi^2 \epsilon_0^2 m_e} \right) \frac{Z^2}{b^2 v^2} b db$$

Argomenti: $b > \lambda_{DeBroglie}$, i.e. principio di indeterminazione, $b < \infty$ a causa dello screening della carica

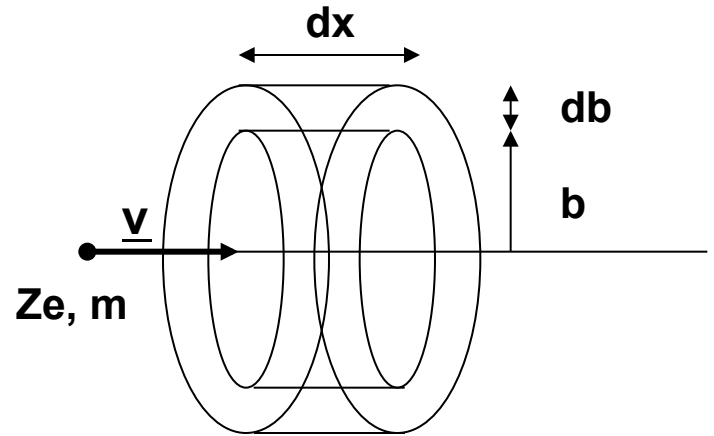


Ionizzazione: caso non relativistico

Quindi occorre stabilire valori finiti degli estremi con qualche argomento fisico

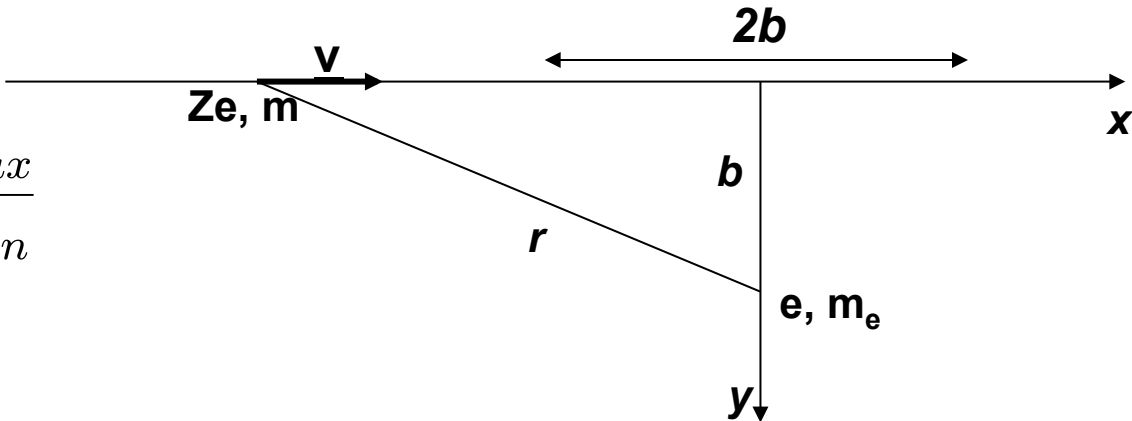
$$-\frac{dE}{dx} = \int_{b_{min}}^{b_{max}} 2\pi \left(\frac{e^4 N_e}{8\pi^2 \epsilon_0^2 m_e} \right) \frac{Z^2}{b^2 v^2} b db$$

$$-\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi \epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{b_{max}}{b_{min}}$$



La dipendenza log viene dal fatto che $p \propto b^{-2}$, ma $dN \propto N_e b db$, quindi per piccoli b , p è grande ma dN è piccolo e viceversa. Dato che la dipendenza da b (inosservabile) è solo log, non è necessario conoscere con grande precisione il loro rapporto

Ionizzazione: caso non relativistico

$$-\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{b_{max}}{b_{min}}$$


Il limite superiore b_{max} puo' essere ottenuto considerando il limite superiore alla durata dell'interazione, oltre il quale l'e⁻ non puo' piu' essere considerato in quiete, cioe' quando la durata dell'interazione τ e' dello stesso ordine del periodo orbitale dell'e⁻.

La durata dell'interazione puo' essere calcolata nel seguente modo:

La forza elettrostatica alla distanza di max avvicinamento e'

$$F = \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 b^2}$$

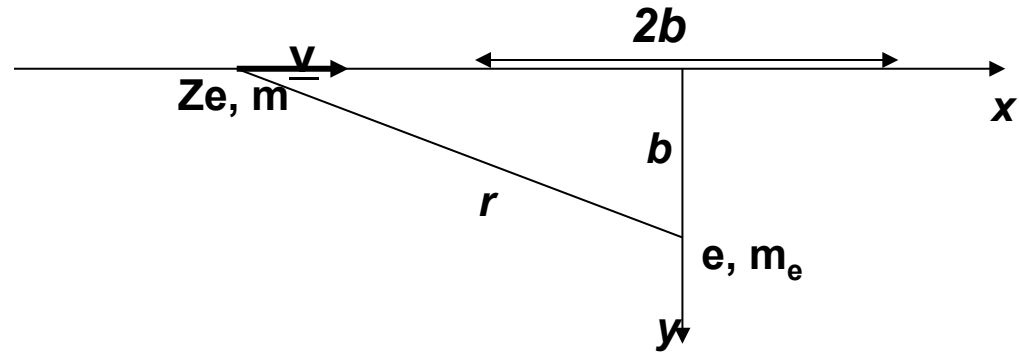
Se la durata dell'interazione e' τ , allora $\Delta p \sim F(b)\tau$
 confrontando con $\Delta p = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 bv}$ si vede che e' "come se" l'interazione durasse
 $\tau = 2b/v$

$$\text{Così } \tau_{max} \sim 1/\nu_0 \rightarrow 2b_{max}/v \sim 2\pi/\omega_0 \rightarrow b_{max} = \pi v/\omega_0$$

Per durate maggiori, l'interazione e' adiabatica $\rightarrow$ non c'e' trasferimento netto di energia

Ionizzazione: caso non relativistico

$$-\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{b_{max}}{b_{min}}$$



Per il limite inferiore b_{min} ci sono due possibilita' a seconda che sia valido un approccio classico o quantistico.

Classicamente, b e' minimo quando e' max il trasferimento di energia, che, come si e' visto, e', per urti centrali:

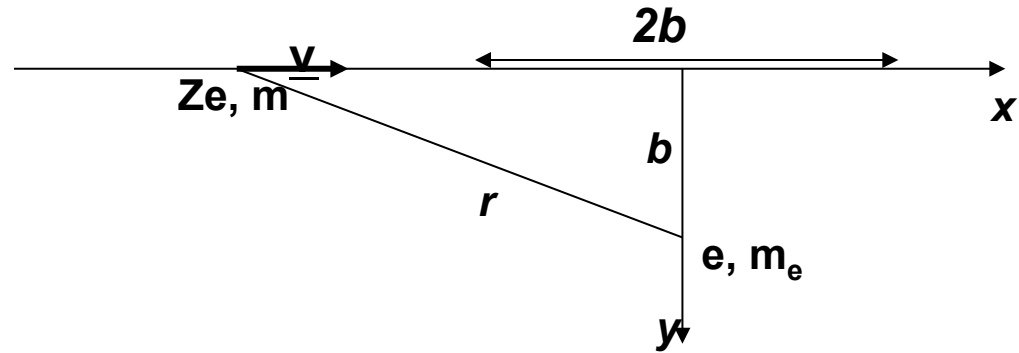
$$\Delta E_{inc} = (1/2)m_e v_e^2 \simeq (1/2)m_e (2v)^2 = 2m_e v^2$$

La distanza di minimo avvicinamento e' quella per cui l'energia potenziale elettrostatica di interazione e' uguale alla energia cinetica trasferita:

$$\frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 b_{min}} \simeq 2m_e v^2 \quad \Rightarrow \quad b_{min} \simeq \frac{e^2 Z}{8\pi\epsilon_0 m_e v^2}$$

Ionizzazione: caso non relativistico

$$-\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{b_{max}}{b_{min}}$$



L'altra possibilità viene dal fatto che dovremmo usare la meccanica quantistica per descrivere le interazioni a piccole distanze.

La max velocità dell'e⁻ è $v_e \approx 2v$ per cui la variazione di impulso è $\Delta p \approx 2m_e v$ e quindi dal principio di indeterminazione $\Delta x \approx h/2m_e v \rightarrow b_{min} = h/2m_e v$

Se b_{min} è quello quantistico, dovremmo calcolare propriamente dE/dx con la meccanica quantistica. Fatto salvo questo, b_{min} ci dice il minimo valore per il quale i calcoli fatti fanno *senso*

Bisogna avere un criterio per la scelta di b_{min}

Ionizzazione: caso non relativistico

Il criterio di scelta e' quello di prendere il piu' grande $b_{\min}$ fra quello classico e quello quantistico per il problema in questione

$$\frac{b_{\min}(QU)}{b_{\min}(CL)} \simeq \frac{\hbar}{2m_e v} \frac{8\pi\epsilon_0 m_e v^2}{e^2 Z} = \frac{4\pi\hbar\epsilon_0 v}{e^2 Z}$$

Ponendo $\alpha = \frac{e^2}{4\pi c \epsilon_0 \hbar} \approx \frac{1}{137}$ Si ottiene

$$a \equiv \frac{b_{\min}(QU)}{b_{\min}(CL)} = \left(\frac{1}{\alpha Z}\right) \frac{v}{c} \simeq \left(\frac{137}{Z}\right) \frac{v}{c}$$

Se $v/c < Z/137 \rightarrow a < 1 \rightarrow$ limite classico

Se $v/c > Z/137 \rightarrow a > 1 \rightarrow$ limite quantistico

Per particelle con $v/c \approx 0.012$, occorre usare il limite QU, ma ci sono casi in cui si puo' applicare il caso classico, p. es. nel caso di nubi di H caldo nella galassia

Ionizzazione: caso non relativistico

Assumendo che si applichi il limite quantistico si ha

$$-\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{2\pi m_e v^2}{\hbar\omega_0}$$

La frequenza puo' essere espressa come potenziale di ionizzazione I :
L'energia dello stato fondamentale (in un modello naive alla Bohr) e'
 $E = (1/2) \hbar\omega_0$, che e' anche l'energia minima per liberare l'e- $\rightarrow \hbar\omega_0 = 2I$

$$-\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{\pi m_e v^2}{I}$$

Tenendo conto che in un atomo ci sono Z elettroni, I e' in realta' una media pesata sui vari livelli di E degli e- che possono essere espulsi dall'atomo (difficile da calcolare eccetto che per gli atomi piu' semplici e va trovata empiricamente): $I \rightarrow \bar{I}$ $\pi/2$ per convenzione $\rightarrow$

$$-\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{2m_e v^2}{\bar{I}} \quad \Longrightarrow \quad -\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{E_{max}}{\bar{I}}$$

Ionizzazione: spettro degli e-

Gli elettroni di rinculo hanno una distribuzione di energia caratteristica. Può essere facilmente calcolata

Il # di e⁻ con b fra b e b+db e' $dN=2\pi N_e b db dx$
 → devo esprimere b in funzione di E

$$E_{cin} = \left(\frac{e^4 Z^2}{8\pi^2 \epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \frac{1}{b^2} = \frac{k}{b^2}$$

Quindi $dE = -\frac{2kdb}{b^3} \Rightarrow db = -\frac{b^3 dE}{2k}$

$dN = 2\pi N_e b db dx \Rightarrow dN = -2\pi N_e dx \frac{b^4 dE}{2k}$

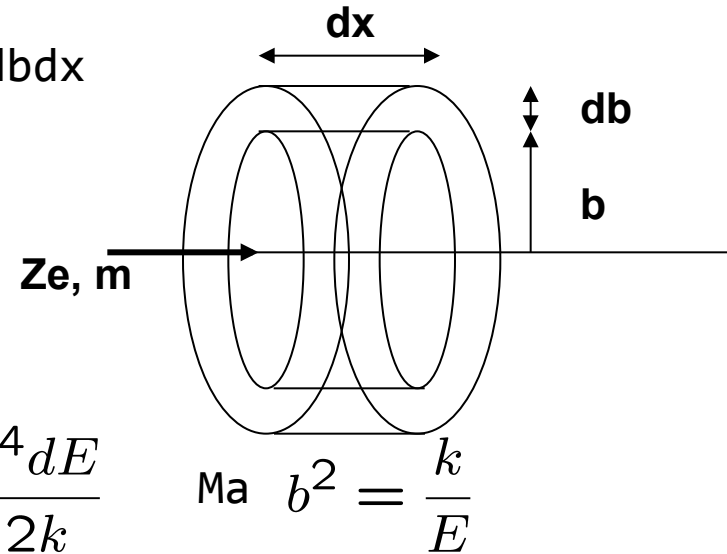
$dN = -\pi N_e dx \left(\frac{k}{E} \right)^2 \frac{dE}{E^2}$ $dN = -\pi N_e \frac{k}{E^2} dE dx$

$dN = -\pi N_e \left(\frac{e^4 Z^2}{8\pi^2 \epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \frac{1}{E^2} dE dx$

$n(E) = -\frac{dN}{dE dx} = \pi N_e \left(\frac{e^4 Z^2}{8\pi^2 \epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \frac{1}{E^2}$

E' il # di e- emessi con E fra E ed E + dE nel tratto di lunghezza dx

Lo spettro degli e- emessi segue una legge di potenza E^{-2}
 $[n(E)] = [E^{-1} L^{-1}]$



Con $I < E < E_{max}$

Gli elettroni emessi con $E \approx E_{max}$ vengono detti **raggi δ**

Ionizzazione: spettro degli e-

$$n(E) = -\frac{dN}{dEdx} = \pi N_e \left(\frac{e^4 Z^2}{8\pi^2 \epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \frac{1}{E^2}$$

Nel limite ultrarelat. $\beta \approx 1$ per i δ , si puo' riscrivere tenendo conto che

$$N_e = (Z_T/A_T) N_A \rho_T \quad \lambda_e = h/m_e c \quad \alpha = e^2/4\pi\epsilon_0 \hbar c$$

Dove ρ_T e' la densita' di massa del materiale che ha numero atomico Z_T e massa molare A_T (kg/mol)

$$\frac{dN_\delta}{dE} = 2\pi \left(\frac{N_A Z_T}{A_T} \right) Z_{inc}^2 \alpha^2 \frac{\lambda_e}{E^2} \rho dx$$

L'intensita' dello spettro di energia non dipende da dx ma ρdx !
 $X = \rho dx$ si misura in $g\ cm^{-2}$ ed e detto "grammaggio": rappresenta il numero di bersagli attraversati dalla particella incidente e rende lo spettro indipendente dalla densita'

$$\frac{dN_\delta}{dEd(\rho x)} = \frac{dN_\delta}{dEdX} = 2\pi \left(\frac{N_A Z_T}{A_T} \right) Z_{inc}^2 \alpha^2 \frac{\lambda_e}{E^2}$$

Ponendo $Z/A \sim 1/2$, i raggi δ di energia $> 1\ MeV$ in $1\ gr/cm^2$ sono circa l'8% della ionizzazione totale. Questo porta a delle grosse fluttuazioni della perdita di energia quando lo spessore attraversato e' sottile. (cfr. code di Landau)

Ionizzazione: caso non relativistico

La perdita media di energia per unita' di lunghezza si ottiene da

$$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle = \int_{E_{min}=\bar{I}}^{E_{max}} En(E) dE \quad \longrightarrow \quad \frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{E_{max}}{\bar{I}}$$

Questa e' la formula **classica**, in cui ci sono le dipendenze corrette dalle variabili e costanti fondamentali:

- ❖ la perdita specifica non dipende dalla massa della particella incidente,

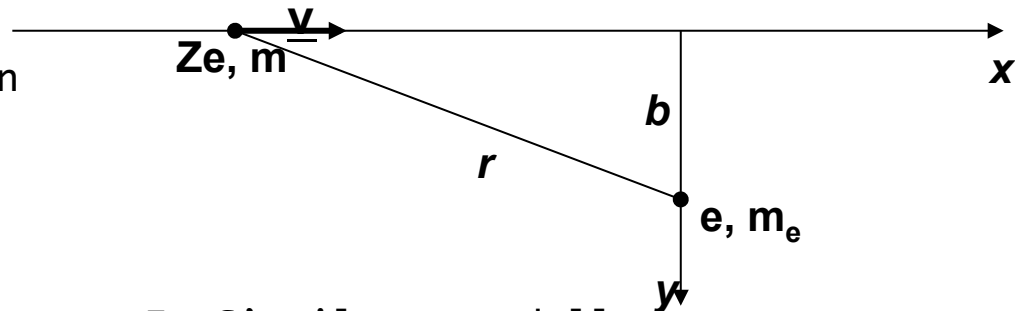
- ❖ dipende dalla m^{-1} della particella bersaglio $\rightarrow$ perdite per ionizzazione trascurabili per interazione di ionizzazione con particelle pesanti (i.e. su nuclei),

- ❖ dipende da v^{-2} della particella incidente $\rightarrow$ particelle "lente" perdono piu' energia

Ionizzazione: caso relativistico

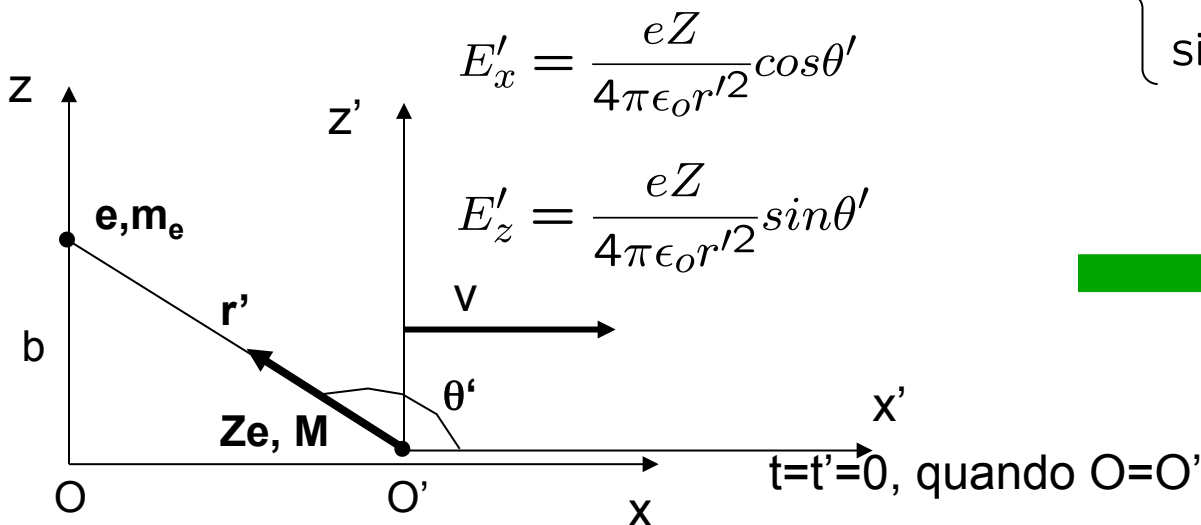
L'estensione al caso relativistico e' semplice.

In questo caso, il campo della particella incidente che viene misurato alla posizione dell'e- e' un campo relativistico, ma se ci mettiamo nel riferimento in cui la particella incidente e' quiete, il campo e' quello elettrostatico di Coulomb → facciamo una trasformazione di Lorentz dal riferimento del "laboratorio" S, in cui l'e- e' in quiete, a quello di quiete della particella incidente, S'



In S', il campo della particella incidente sull'elettrone e' $\vec{E}' = \frac{eZ}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \vec{u}_r'$

$$\begin{cases} \cos \theta' = -x'/r' \\ \sin \theta' = z'/r' \end{cases}$$



$$E'_x = \frac{eZ}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \cos \theta'$$

$$E'_z = \frac{eZ}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \sin \theta'$$



$$E'_x = -\frac{eZ}{4\pi\epsilon_0 r'^3} x'$$

$$E'_z = \frac{eZ}{4\pi\epsilon_0 r'^3} z'$$

Ionizzazione: caso relativistico

In S' , l'e- ha coordinate $(-vt', 0, b, t')$ $\rightarrow r' = \sqrt{b^2 + (vt')^2}$

I tempi misurati in S' e da un osservatore in S sono connessi dalla trasformazione

$$t' = \gamma(t - \frac{vx}{c^2}) \quad \text{Ma in } S, \text{ le coordinate dell'e- sono } (0, 0, b, t) \quad t' = \gamma t$$

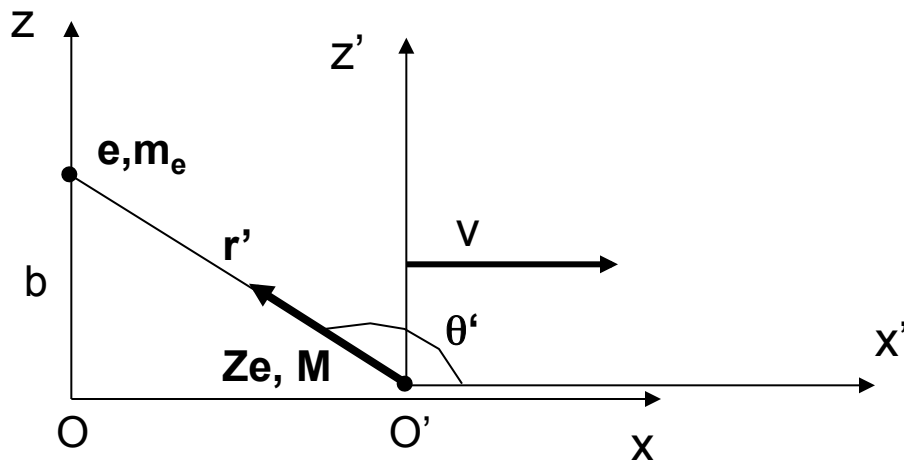
$$r' = \sqrt{b^2 + (v\gamma t)^2}$$

e' la distanza in S' tra M ed l'e- espressa in funzione delle coordinate in S



$$E'_x = -\frac{eZ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma vt}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}}$$

$$E'_z = \frac{eZ}{4\pi\epsilon_0} \frac{b}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}}$$



In questo modo abbiamo espresso i campi in S' in funzione delle coordinate misurate in S , ma questi NON sono i campi in S . Per trovarli dobbiamo trasformare i campi da S' ad S

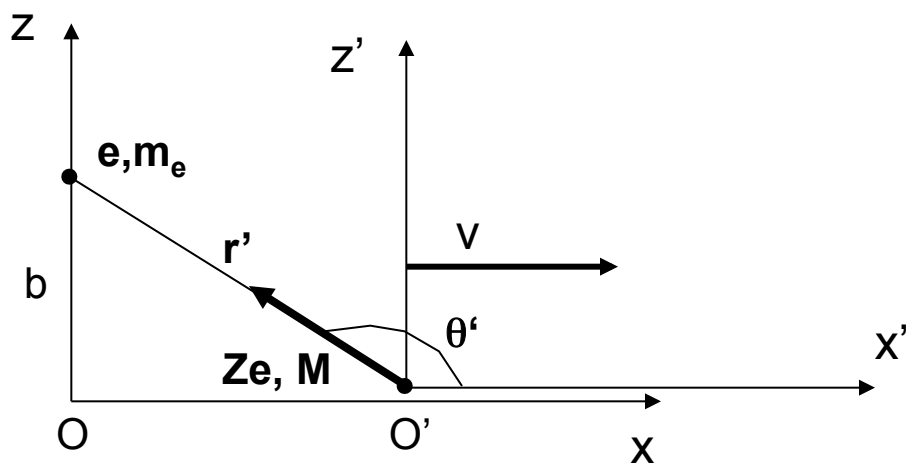
Ionizzazione: caso relativistico

Per ottenere i campi in S, dobbiamo fare le trasformazioni da S' ad S, cioè' dobbiamo trovare i campi misurati in un rif in moto con velocità' $-v$ lungo x'

I campi trasformano come le componenti del tensore doppio di Maxwell

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F'_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta} F_{\alpha\beta}$$



$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} \quad \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}$$

$$\vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} + \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}_{\perp})$$

$$\vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} - \vec{v} \times \vec{B}_{\perp})$$

Queste sono le trasformazioni standard che danno i campi in S', noti quelli in S

Ionizzazione: caso relativistico

A noi servono le trasf inverse, che si ottengono semplicemente scambiando gli apici e trasformando $\mathbf{v}$ in $-\mathbf{v}$

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel} \quad \vec{E}_{\perp} = \gamma(\vec{E}'_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}'_{\perp})$$

$$\vec{B}_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel} \quad \vec{B}_{\perp} = \gamma(\vec{B}'_{\perp} - \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}'_{\perp})$$

$$B_x = B'_{x'} = 0$$

$$B_z = -(\gamma \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}'_{\perp})_z = -\gamma v E'_y = 0$$

$$B_y = -(\gamma \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}'_{\perp})_y = -\frac{eZ}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\gamma b v}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}}$$

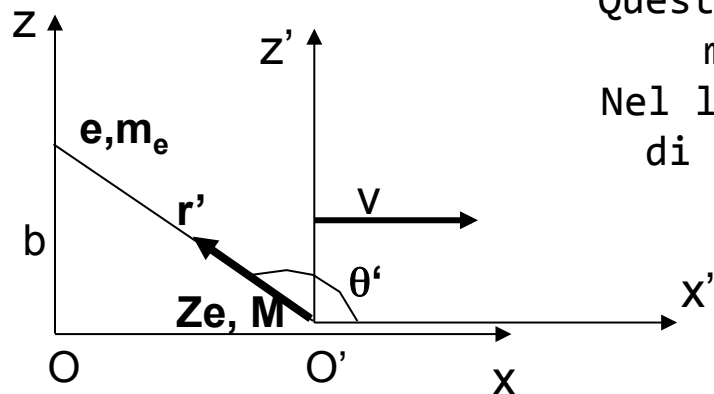
In S' , $\mathbf{B}' = 0 \rightarrow$

$$E_x = E'_{x'} \quad E_z = \gamma E'_z \quad E_y = \gamma E'_y = 0$$

$$E_x = -\frac{eZ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma v t}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}}$$

$$E_z = \frac{eZ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma b}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}}$$

$$B_y = -\frac{v}{c^2} E_z$$



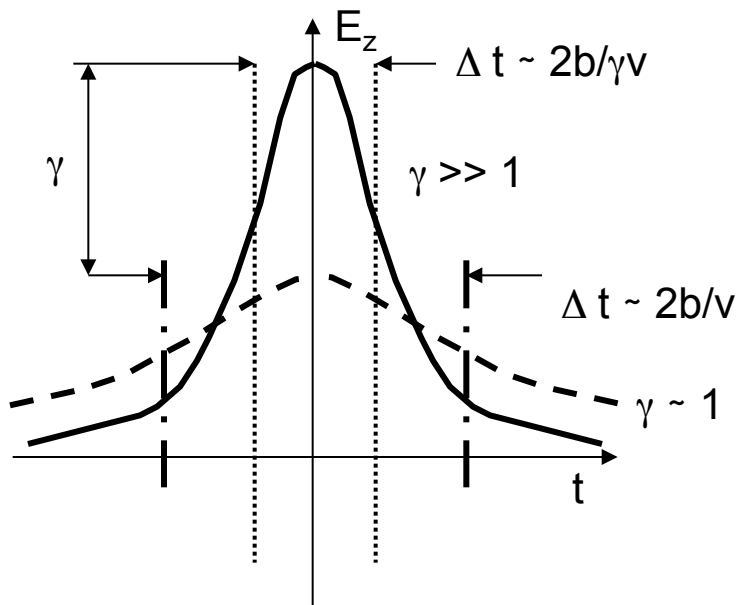
Questi sono i campi dovuti ad una particella in moto, misurati in una posizione fissa nello spazio
Nel limite $v \rightarrow c$, $E_z = -cB_y$, indistinguibile da quello di un'onda polarizzata linearmente che si propaga lungo x

Ionizzazione: caso relativistico

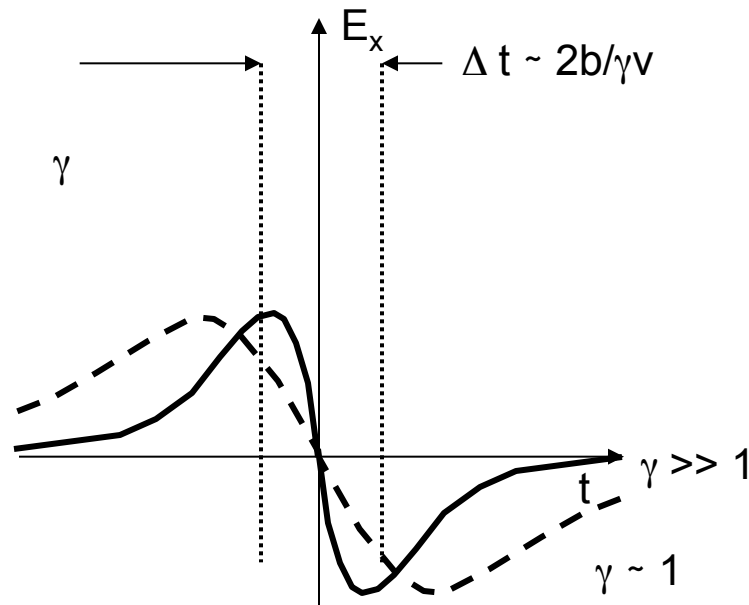
$$E_z = \frac{eZ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma b}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}}$$

$$E_x = -\frac{eZ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma vt}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}}$$

Alla distanza di max avvicinamento a $t=0$, $E_z = \gamma E_z(\text{NR})$, ma la durata dell'interazione $2b/v$ in S' e' contratta di un fattore γ (contrazione di Lorentz per b lungo x) in S



Alla distanza di max avvicinamento a $t=0$, $E_x = 0$



Ionizzazione: caso relativistico

Ora si procede esattamente come nel caso non rel. p trasferito e'

$$\vec{p}_t = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}_{\parallel} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}_{\perp} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}_x dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}_z dt$$

Come prima la comp. $\parallel$ da contributo nullo perche' dispari in t

$$\vec{p}_t = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e E_z dt \right) \vec{u}_z \quad \vec{p}_t = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^2 Z \gamma b dt}{4\pi\epsilon_0 [b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}} \right) \vec{u}_z$$

$$\vec{p}_t = \frac{e^2 Z \gamma b}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}} \right) \vec{u}_z = \frac{e^2 Z \gamma b}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{b^3 [1 + (v\gamma t/b)^2]^{3/2}} \right) \vec{u}_z$$

$$\text{Pongo } x = \gamma v t / b \rightarrow dx = (\gamma v / b) dt \rightarrow dt = (b / \gamma v) dx$$

$$= \frac{e^2 Z \gamma}{4\pi\epsilon_0 b^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(b/\gamma v) dx}{[1 + x^2]^{3/2}} \right) \vec{u}_z = \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 b v} \left(\int_0^{+\infty} \frac{dx}{[1 + x^2]^{3/2}} \right) \vec{u}_z$$

$$= \frac{e^2 Z}{2\pi\epsilon_0 b v} \cdot 1 \cdot \vec{u}_z$$

L'impulso trasferito e' $\perp$ alla traiettoria di volo

Ionizzazione: caso relativistico

$$p_t = \frac{e^2 Z}{2\pi\epsilon_0 b v} \quad \text{Il risultato e' esattamente lo stesso del caso non relativistico, dato che } E_z \rightarrow \gamma E_z \text{ ma } \tau \rightarrow \tau/\gamma \text{ e } \mathbf{p} = \mathbf{F}(\mathbf{b})\tau$$

Procedo come prima e ottengo

$$-\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{b_{\max}}{b_{\min}}$$

Nel caso relativistico $\tau_{\max} = 2b_{\max}/\gamma v$

Così, $\tau_{\max} \sim 1/v_0 \rightarrow 2b_{\max}/\gamma v \sim 2\pi/\omega_0 \rightarrow b_{\max} = \pi v \gamma / \omega_0 = \gamma b_{\max}(\text{NR}) = \pi \hbar v \gamma / 2I$

Per $b_{\min}$, da principio di indeterminazione di Heisenberg, si ha

$$\Delta x = \hbar / \Delta p = \hbar / \gamma \Delta p \text{ (NR)} \rightarrow b_{\min} = b_{\min}(\text{NR}) / \gamma$$

$$\text{Quindi } b_{\max}/b_{\min} = \gamma^2 \frac{2m_e v^2}{I}$$

$$-\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{2\gamma^2 m_e v^2}{I}$$

Bethe-Bloch

Il calcolo corretto e' quello quantistico, che non faremo (ma per i soliti entusiasti e' disponibile, se lo chiedete).

Il risultato ottenuto da Bethe e Bloch e'

$$\frac{dE}{dx} = \frac{z^2 e^4 N_e}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \left[\ln\left(\frac{2\gamma^2 m_e v^2}{I}\right) - \frac{v^2}{c^2} \right]$$

La relazione corretta e' molto simile a quella ricavata, con solo un termine di ordine $O(1)$ che non c'e' in quella "classica". Compare quando si tiene conto dello spin dell'elettrone: la sez d'urto non e' quella di Rutherford ma quella di Mott

$$d\sigma/d\Omega = (d\sigma/d\Omega)_R (1 - \beta^2 \sin^2(\theta/2))$$

Valida per particelle non troppo relativistiche in mezzi non troppo densi

