

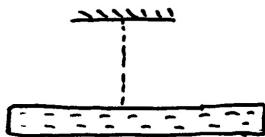
Lezioni in [http://www.fisgeo.unipg.it/~fiandrini/
didattica_fisica/did_fis1718/](http://www.fisgeo.unipg.it/~fiandrini/didattica_fisica/did_fis1718/)

Lez 15 15/11/17

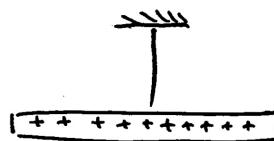
Fisica Sperimentale e Applicazioni
Didattiche

TALETE DI MILETO SCOPRI' CHE QUANDO UN PEZZO
DI AMBRA VENIVA STROFINATO ERA IN GRANDO DI
ATTRARRE PEZZETTI DI CARTA

AMBRA = ELEKTRON



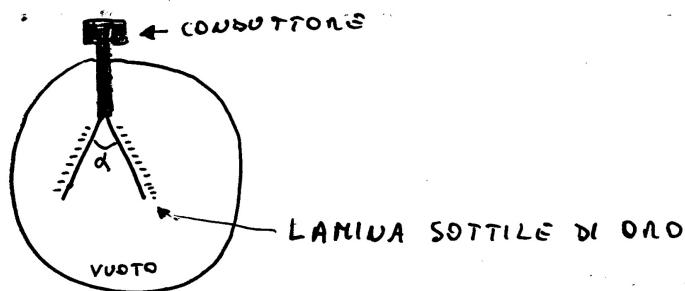
BACCHETTA DI PLASTICA STROFINATA CON
UNA PELLE



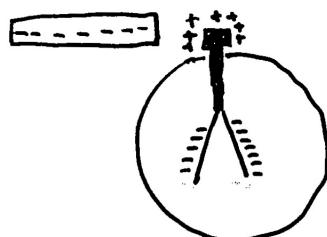
BACCHETTA DI VETRO STROFINATA CON
DELLA SETA

- DUE BACCHETTE DI VETRO SI RESPINGONO
- DUE BACCHETTE DI PLASTICA SI RESPINGONO
- UNA BACCHETTA DI VETRO ED UNA DI PLASTICA SI ATTACCONO
- SE UNA BACCHETTA "SCARICA" SI METTE A CONTATTO CON UNA "CARICA", SI CARICA ANC'ESSA.
- B. FRANKLIN (~1750) IPOTIZZO' CHE VI FOSSE UN FLUIDO ELETTRICO CHE SI TRASMETTEVA DA UN CORPO AD UN ALTRO E CHE SI CONSERVAVA

Fenomeni elettrici



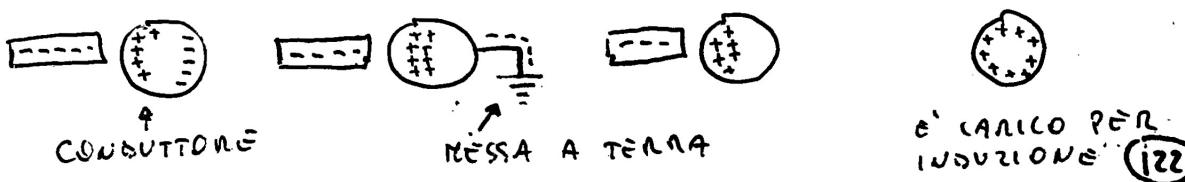
- ERA POSSIBILE MISURARE LA QUANTITÀ DI CARICA POSSESSATA DA UN OGGETTO CON UNO STRUMENTO CHIAMATO ELETTROSCOPIO.



- METTENDO A CONTATTO UN CORPO CARICO CON L'ELETTROSCOPIO, PARTE DELLA CARICA SI TRASFERIVA SULLE LAMINE D'ORO CHE SI RESPINGEVANO.
L'ANGOLÒ d È PROPORTIONALE ALLA CARICA Q.

- INDUZIONE ELETROSTATICA

SE SI AVVICINA UN CORPO CARICO ALL'ELETTROSCOPIO
SI OSSERVA CHE LE LAMINE REGISTRANO UNA PRESENZA
DI CARICA

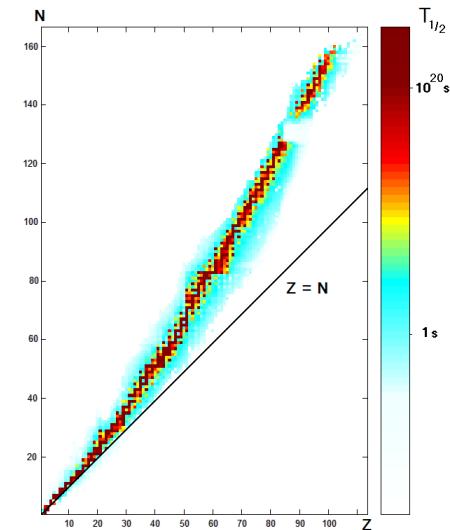
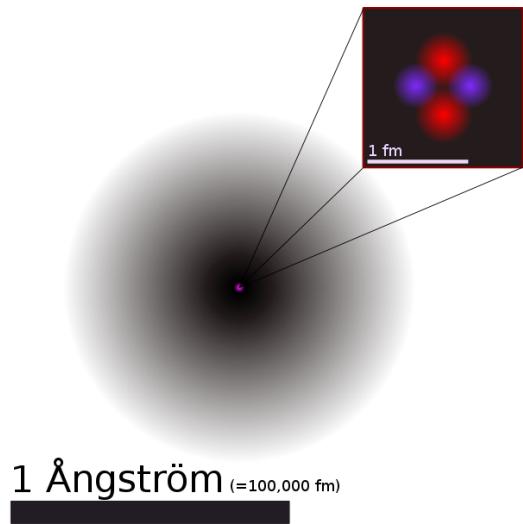
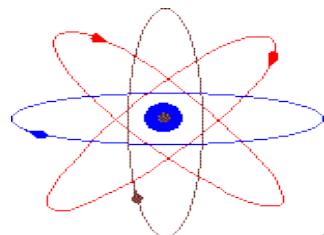


Carica elettrica

- John Dalton (1776-1844) avvalendosi delle della legge della conservazione della massa e legge delle proporzioni definite formulò la sua teoria atomica:
 - gli atomi di uno stesso elemento sono tutti uguali tra loro
 - la materia è formata da particelle chiamate atomi
 - gli atomi non sono ulteriormente scomponibili
- Geiger e Marsden (1909) studiando la deviazione di particelle alfa (nuclei di elio) emesse da sostanze radioattive (e sparate contro un foglio sottile di oro), hanno stabilito il cosiddetto “modello planetario” dell’atomo:
 - La massa è concentrata nel nucleo dell’atomo (protoni e neutroni)
 - particelle “leggere” (elettroni) “ruotano” attorno al nucleo come fanno i pianeti attorno al sole.
- La forza che trattiene gli elettroni attorno al nucleo è la forza di Coulomb tra elettroni e nucleo

Carica elettrica 2

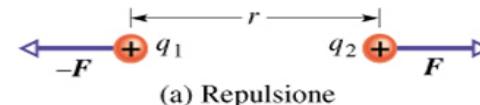
Modello atomico:



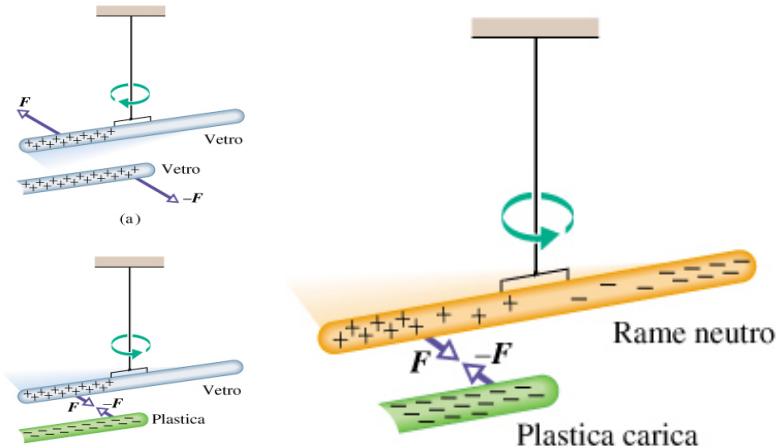
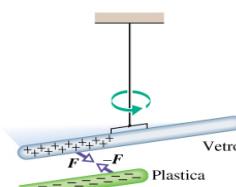
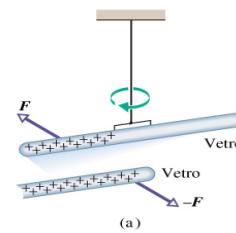
- Il nucleo è costituito da protoni e neutroni (massa $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg)
- Il numero di elettroni (massa $1/1836$ della massa del protone) è pari al numero di protoni (l'atomo è elettricamente neutro)
- Protoni ed elettroni hanno una caratteristica (analogia alla massa) detta carica elettrica. Mentre esiste un solo tipo di massa esistono due tipi di cariche elettriche (per convenzione positiva quella dei protoni, negativa quella degli elettroni).
- Cariche di segno opposto si attraggono, dello stesso segno si respingono.

Cariche elettriche – Isolanti e Conduttori

- La struttura dell'atomo fornisce l'interpretazione dei fenomeni elettrici noti già ai greci.
- Strofinando tra loro (anche mettendo in contatto sostanze diverse) un certo numero di elettroni passa da una sostanza all'altra, una sostanza avrà cariche elettriche in eccesso, l'altra in difetto. Se gli elettroni in eccesso non sono liberi di muoversi (sostanze isolanti) i due corpi si attraggono.
- In alcune sostanze (conduttori come l'acqua con sali disiolati, metalli, il corpo umano – altissima percentuale di acqua) gli elettroni si muovono quasi liberamente e tendono ad allontanarsi disperdendosi.
- Con questo processo i corpi isolanti si caricano elettricamente.



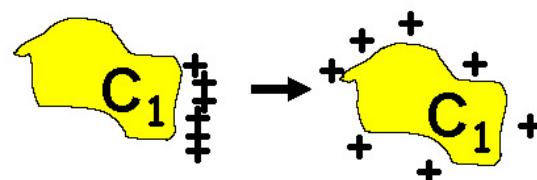
$q_1 + \rightarrow$ $\leftarrow q_2 -$



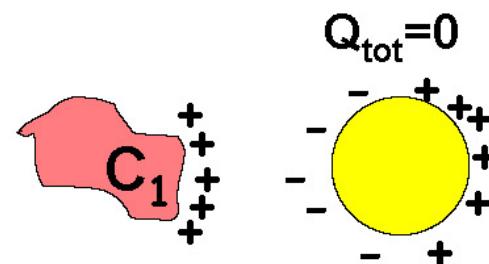
Il comportamento di un materiale è legato alla sua struttura atomica:

→ **isolanti**: gli elettroni sono ben vincolati al nucleo. Se aggiungiamo della carica in una zona non si muove verso altre parti del corpo (vetro, plastica)

→ **conduttori**: gli elettroni esterni sono debolemente legati e quindi si muovono " facilmente " sotto l'azione di una forza esterna. Se aggiungiamo della carica in una zona tende a disperdersi. (metalli)



Se avviciniamo un corpo isolante carico ad un conduttore isolato la carica sul conduttore si ridistribuisce: abbiamo il fenomeno dell'**induzione elettrostatica**.



Carica elettrica

La carica non e' continua, come non lo e' nessun materiale:

Essi sono costituiti da entita' discrete, atomi o molecole.

Allo stesso modo si 'e trovato che la carica elettrica puo' assumere solo valori discreti, multipli interi della carica elettrica fondamentale $e = 1.6021 \times 10^{-19} \text{ C}$, cioe' la carica elettrica e quantizzata, $q = ne$ dove $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

La carica e e' una delle costanti fondamentali della natura

NB: la carica elettrica non e' una "sostanza": le particelle materiale sono sostanza, la carica elettrica e' una propriet'a delle particelle, come la massa

La carica elettrica totale di un sistema isolato e' conservata in tutti i processi fisici: $Q_{\text{prima}} = Q_{\text{dopo}}$

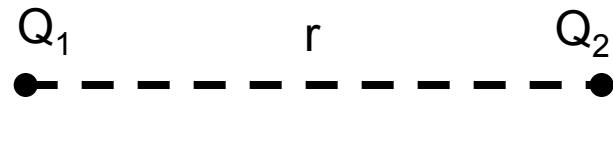
E' una delle leggi di conservazione fondamentali (come quelle di quantita' di moto, energia e momento angolare)

Particolarmente evidente e importante in fisica delle particelle elementari

Legge di Coulomb

La forza che si esercita fra due cariche puntiformi in quiete vale

$$\vec{F} = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \hat{u}_r$$



- NEL VUOTO, NELL' S. I., SI HA:

$$k = 8.9876 \cdot 10^9 \text{ N} \frac{\text{m}^2}{\text{C}^2} \approx 9.0 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$$

- PER SEMPLIFICARE LE LEGGI DELL'ELETTRORAGNETISMO SI PONE:

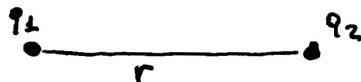
$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

- $\epsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$ [costante dielettrica del vuoto (permittività)]

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

- LA FORZA E' DIRETTA LUNGO LA RETTA CONGIUNGENTE LE DUE CARICHE
- PUO' ESSERE ATTRATTIVA O REPULSIVA

Unita' di misura della carica:il Coulomb



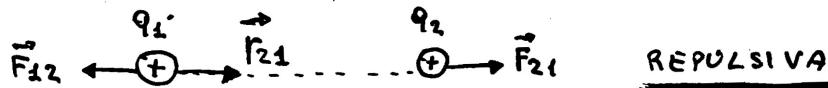
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \hat{r}$$

- NEL S.I. LA QUANTITA' DI CARICA SI MISURA IN COULOMB C
- DUE CARICHE DI 1C POSTE ALLA DISTANZA DI 1 m ESERCITANO UNA SULL'ALTRA UNA FORZA PARI A $9 \cdot 10^9 N$
- IL COULOMB È UNA QUANTITA' DI CARICA MOLTO GRANDE
- L'UNITA' DI MISURA FONDAMENTALE NEL S. I. NON È IL COULOMB MA L'AMPERE A, CHE È L'UNITA' DI MISURA DELLA CORRENTE ELETTRICA
- CARICA DI UN ELETTRONE

$$Q_e = -1.60 \cdot 10^{-19} C$$

$$\Rightarrow 1 C = \frac{1}{|Q_e|} = 6.25 \cdot 10^{18} \text{ elettroni}$$

Forza di Coulomb



$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21}$$

forza sulla carica 2 dovuta
alla carica 1

- IL RAGGIO VETTORE \vec{r} È DIRETTO DALLA CARICA CHE ESERCITA LA FORZA ALLA CARICA CHE LA SUBISCE
- VERSORE $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$
- PER IL PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE SI HA:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$



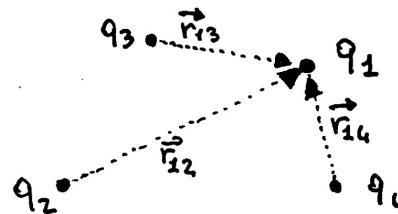
$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21}$$



$$\vec{F}_{21} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21}$$

Principio di sovrapposizione

- SUPPONIAMO DI AVERE 4 CARICHE, q_1, q_2, q_3, q_4
VALUTIAMO LA FORZA CHE LE TRE CARICHE q_2, q_3, q_4
ESERCITANO SULLA CARICA q_1



$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$
 forza esercitata sulla carica 1 dalla carica 2

$$\vec{F}_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_3}{r_{13}^2} \hat{r}_{13}$$
 forza esercitata sulla carica 1 dalla carica 3

$$\vec{F}_{14} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_4}{r_{14}^2} \hat{r}_{14}$$
 forza esercitata sulla carica 1 dalla carica 4

- CIASCUNA CARICA SEPARATAMENTE ESERCITA SULLA CARICA 1 LA FORZA \vec{F}_{1c} ($c=2,3,4$)

Principio di sovrapposizione

- LA FORZA CHE LE TRE CARICHE ESERCITANO CONTEMPORANEAMENTE SULLA CARICA 1 È DATA DALLA SOMMA VETTORIALE:

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} \hat{r}_{13} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_4}{r_{14}^2} \hat{r}_{14} = \\ &= q_1 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3}{r_{13}^2} \hat{r}_{13} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_4}{r_{14}^2} \hat{r}_{14} \right) = \\ &= q_1 \sum_2^4 \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}_{1i}}{r_{1i}^2}\end{aligned}$$

- LA PROPRIETÀ DI POTER SONNARE GLI EFFETTI DELLE SINGOLE CAUSE PER TROVARE L'EFFETTO GLOBALE SI CHIAMA PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI.

N.B. SE LASCIAMO INVARIATE LE POSIZIONI DELLE CARICHE È CAMBIATO SOLO IL VALORE DELLA CARICA q_1

$$q_1 \rightarrow q'_1$$

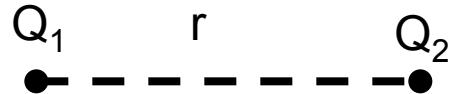
AVREMO CHE

$$\vec{F}'_1 = \frac{q'_1}{q_1} \cdot \vec{F}_1$$

Campo elettrico

- ❑ Prendiamo Q_1 come sorgente: su Q_2 agisce una forza dovuta alla presenza della carica Q_1
- ❑ Le due cariche non sono a contatto ma si trovano a una distanza r : com'e' possibile che vi sia una forza senza contatto?
- ❑ Faraday (»1830) ipotizzo' il concetto di campo elettrico
- ❑ La carica Q_1 modifica le proprieta' dello spazio circostante creando un "campo" di forze.
- ❑ Q_2 interagisce con il campo (creato da Q_1) presente nel punto in cui essa si trova

$$\vec{F} = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \hat{u}_r$$



1) UNA CARICA q POSTA NELLO SPAZIO PRODUCE UN CAMPO ELETTRICO

2) UN'ALTRA CARICA q_0 INTERAGISCE CON IL CAMPO ELETTRICO PRODOTTO DALLA PRIMA E SUBISCE QUINDI UNA FORZA

3) MISURANDO QUESTA FORZA SI RISALE AL CAMPO.
LA FORZA SI PUO' MISURARE IN MANIERA STATICIA (DINAMOMETRO)
OPPURE DINAMICA (ACCELERAZIONE, $F=ma$)

• Sperimentalmente si trova che la forza misurata è proporzionale alla carica q_0 usata per misurare il campo

$$F \propto q_0 \Rightarrow \vec{F} = q_0 \vec{E}$$

• QUINDI OPERATIVAMENTE SI HA:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

• SPOSTANDO LA CARICA q_0 SI DETERMINA \vec{E} IN TUTTI I PUNTI DELLO SPAZIO.

• U.B. PER EVITARE CHE LA CARICA DI PROVA DISTURBI LA DISTRIBUZIONE DELLE ALTRE CARICHE CHE GENERANO IL CAMPO,
SI SCEGLIE UNA CARICA MOLTO PICCOLA

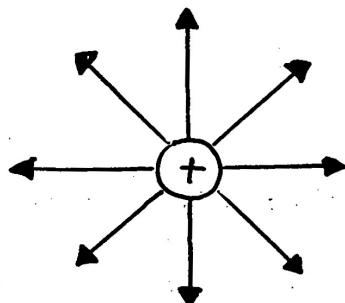
$$\vec{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q_0}$$

• SE SI HANNO PIU' CARICHE IL CAMPO ELETTRICO RISULTANTE È LA SOMMA DEI SINGOLI CAMPI ELETTRICI (PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE)

Definizione di E

- LE LINEE DI FORZA DANNO LA DIREZIONE E IL VERSO DEL CAMPO. IN OGNI PUNTO IL VETTORE È ETANGENTE ALLE LINEE DEL CAMPO.

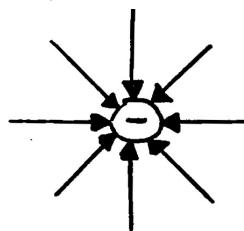
CARICA PUNTIFORME $+q$



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

LE LINEE DI FORZA DEL CAMPO ELETTRICO SONO DELLE RETTE USCENTI DALLA CARICA



$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

Linee di forza

LE LINEE DI FORZA DEL CAMPO ELETTRICO SONO DELLE RETTE ENTRANTI NELLA CARICA

CRITERIO DI FARADAY

DOVE L'INTENSITÀ DEL CAMPO È PIÙ FORTE, LE LINEE DI FORZA SONO PIÙ DENSE

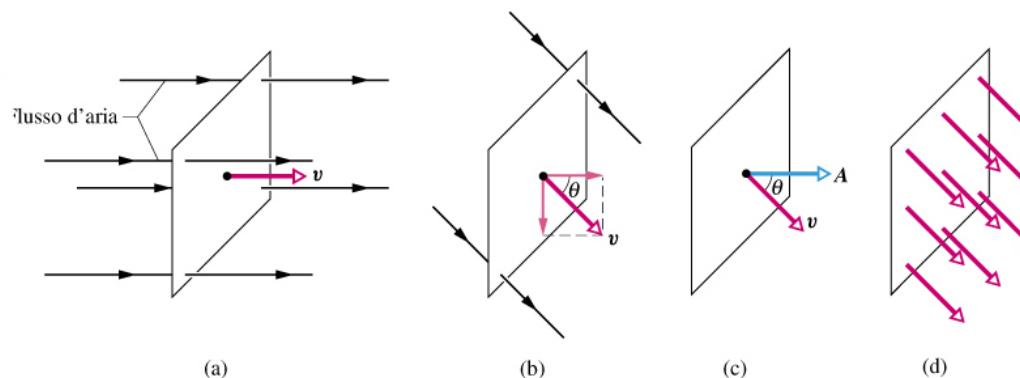
N.B. LE LINEE DEL CAMPO NON POSSONO MAI INCROCIANSI
NEI PUNTI DELLO SPAZIO DOVE NON CI SONO CARICHE

Flusso di un Campo Vettoriale

- Il flusso infinitesimo di un campo vettoriale è definito da:

$$d\phi(\vec{v}) = \vec{v} \cdot \hat{n} dS = v \cos \theta dS$$

- In origine il flusso è stato definito per correnti di fluidi (aria, acqua) per caratterizzare ad esempio la quantità di volume di un fluido che passa attraverso una superficie nell'unità di tempo
- Successivamente il concetto di flusso è stato esteso ad un generico campo vettoriale (come estensione della corrente, cioè del flusso del campo definito dalle velocità vettoriali)

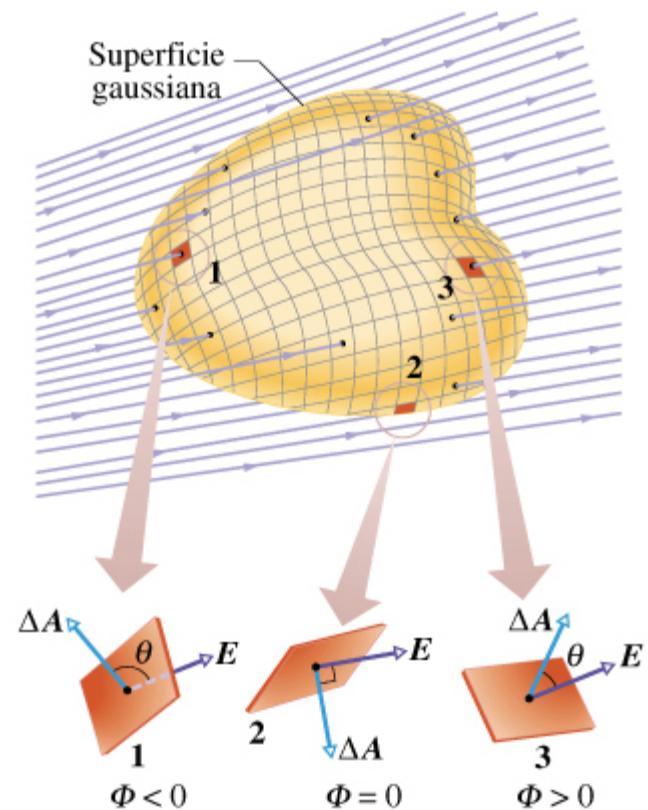


Flusso di un Campo Vettoriale 2

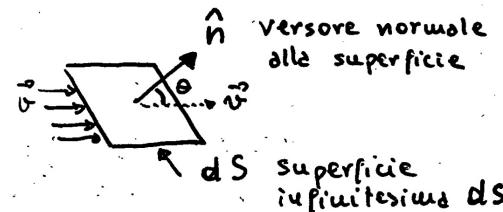
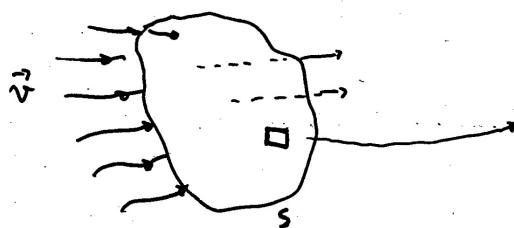
- Il differenziale del flusso può essere usato per calcolare il flusso attraverso una superficie generica...
- Il flusso totale attraverso tutta la superficie S è l'integrale, esteso la superficie S , di tutti i contributi $d\phi(\mathbf{v})$:

$$\phi(\vec{v}) = \int_S \vec{v} \cdot \hat{n} dS = \oint_S \vec{v} \cdot \hat{n} dS$$

- Se la superficie S è una superficie chiusa (per ex. una sfera), il versore normale \hat{n} si definisce sempre rivolto verso l'esterno e il flusso si dice uscente da S .



- IL FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE È UNA GRANDEZZA PROPORTZIONALE AL NUMERO DI LINEE DI FORZA DEL CAMPO CHE ATTRAVERSANO UNA DATA SUPERFICIE



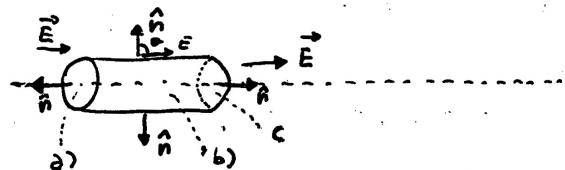
- $d\Phi = \vec{v} \cdot \hat{n} dS = |\vec{v}| dS \cos \theta$
- θ È L'ANGOLI FORMATO DALLA NORMALE ALLA SUPERFICIE CON IL VETTORE \vec{v} . SE L'ANGOLI È 90° ALLORA IL FLUSSO È NULLO.
- IL FLUSSO ATTRAVERSO L'INTERA SUPERFICIE S È DATO DALLA SOMMA DEI FLUSSI ELEMENTARI $d\Phi$

$$\Phi_s(\vec{v}) = \int_S d\Phi = \int_S \vec{v} \cdot \hat{n} dS = \int_S |\vec{v}| dS \cos \theta$$

- CASO PARTICOLARE: LA SUPERFICIE È PIANA ED IL VETTORE \vec{v} È LO STESSO IN TUTTI I PUNTI DELLA SUPERFICIE



LA FIGURA MOSTRA UNA SUPERFICIE GAUSSIANA DI FORMA CILINDRICA CON RAGGIO R IMMERSA IN UN CAMPO ELETTRICO UNIFORME \vec{E} . L'ASSE DEL CILINDRO SIA PARALLELO AL CAMPO. QUANTO VALE IL FLUSSO Φ DEL CAMPO ELETTRICO PER QUESTA SUPERFICIE CHIUSA?



$$\Phi_s(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \int_a \vec{E} \cdot \hat{n} dS + \int_b \vec{E} \cdot \hat{n} dS + \int_c \vec{E} \cdot \hat{n} dS$$

- SULLA SUPERFICIE a L'ANGOLI TRA \hat{n} E IL CAMPO \vec{E} VALE 180°

$$\int_a \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \vec{E} \cdot \hat{n} \int_a dS = |\vec{E}| \cdot S_a \cos 180^\circ = -|\vec{E}| \cdot S_a$$

- SULLA SUPERFICIE CILINDRICA L'ANGOLI E' 90°

$$\int_b \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \vec{E} \cdot \hat{n} \int_b dS = |\vec{E}| \cdot S_b \cos 90^\circ = |\vec{E}| \cdot S_b \cdot \cos 90^\circ = 0$$

- SULLA SUPERFICIE c L'ANGOLI E' ZERO

$$\int_c \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \vec{E} \cdot \hat{n} \int_c dS = |\vec{E}| \cdot S_c \cos 0^\circ = |\vec{E}| \cdot S_c$$

- NEL CILINDRO $S_a = S_c = S$

- SONMIAMO I TRE INTEGRALI

$$\Phi_s(\vec{E}) = -|\vec{E}| \cdot S + 0 + |\vec{E}| \cdot S = 0$$

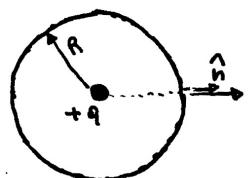
\Rightarrow IL FLUSSO DI UN CAMPO UNIFORME ATTRAVERSANO UNA SUPERFICIE CHIUSA E' ZERO.

Did 1718

Esempio

TEOREMA DI GAUSS

- CALCOLIAMO IL FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO GENERATO DA UNA CARICA PUNTIFORME POSITIVA, ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE SFERICA CHE HA NEL SUO CENTRO LA CARICA.



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

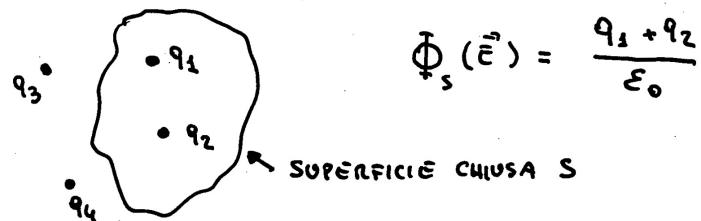
- SUPERFICIE DI UNA SFERA: $S = 4\pi R^2$
PRENDIAMO UNA SUPERFICIE INFINITESIMA dS SULLA SFERA
 $dS = R^2 d\Omega$
- $d\Omega$ E' L'ANGolo SOLIDO INFINITESIMO [$d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$]
[Circoufereuze = $2\pi R$; infinitesimo di circoufereuze $d\ell = R d\phi$]
- LA NORMALE \hat{n} E' DIRETTA COME IL RAGGIO VETTORE \vec{r}
- IL FLUSSO INFINITESIMO NON DIPENDE DAL RAGGIO DELLA SFERA

$$\Phi_s(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \hat{n} dS = |\vec{E}| \cdot dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \cdot R^2 d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

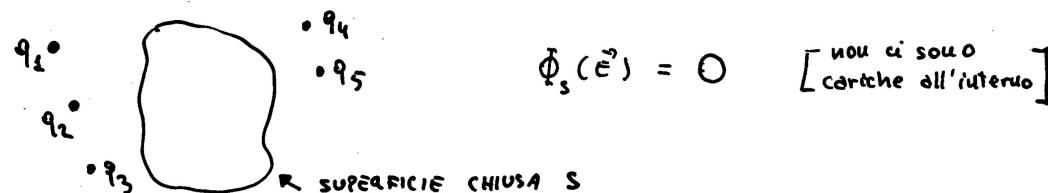
Did • q E' LA CARICA CONTENUTA ALL'INTERNO DELLA SFERA

TEOREMA DI GAUSS

- IL FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE CHIUSA QUALSIASI È PARI ALLA SOMMA ALGEBRICA DELLE CARICHE CONTENUTE ALL'INTERNO DIVISO ϵ_0



- LE CARICHE AL DI FUORI DELLA SUPERFICIE NON CONTANO, SEBBENÉ CONTRIBUISCONO AL VALORE DEL CAMPO \vec{E}



- IL TEOREMA DI GAUSS È UTILE OGNI QUALVOLTA, PER RAGIONI DI SIMMETRIA, È POSSIBILE SCEGLIERE UNA SUPERFICIE SULLA QUALE IL MODULO DEL CAMPO ELETTRICO È COSTANTE

$$\Phi_s(\vec{E}) = \int_{S_{\text{chiusa}}} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \vec{E} \cdot \hat{n} \int_{S_{\text{chiusa}}} dS = |\vec{E}| \int_{S_{\text{chiusa}}} dS = |\vec{E}| \cdot S$$

PER IL TEOREMA DI GAUSS $\Phi_s(\vec{E}) = \frac{q_{\text{interne}}}{\epsilon_0}$, ALLORA:

$$|\vec{E}| \cdot S = \frac{q_{\text{interne}}}{\epsilon_0} \Rightarrow |\vec{E}| = \frac{1}{S} \cdot \frac{q_{\text{interne}}}{\epsilon_0}$$

Flusso Elettrico e Teorema di Gauss

- Tale teorema mette in relazione la carica elettrica (che produce il campo elettrico) presente all'interno di una superficie chiusa e il flusso del campo elettrico attraverso tale superficie
- Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa dipende solo dalla carica elettrica **all'interno** di tale superficie. Le cariche elettriche presenti all'esterno della superficie in esame non contribuiscono al flusso.
- L'enunciato del teorema può essere riassunto da tale equazione:

$$\phi(\vec{E}) = \oint_{S_{chiusa}} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}$$

- dove la sommatoria è estesa a tutte le cariche all'interno della superficie S e la relazione vale per cariche nel vuoto (se siamo in presenza di un mezzo è sufficiente effettuare la sostituzione $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$)
 - Nel caso di somma **positiva** di cariche racchiuse da S , si parla di flusso **uscente** da S ; se la somma delle cariche è **negativa** parliamo di flusso **entrante**.

Teorema di Gauss per il campo elettrico E

Il grande matematico tedesco K. F. Gauss (1777-1855) formulò la legge di Gauss per il campo elettrico (Legge di Maxwell per il flusso del campo elettrico)

Teorema di Gauss per il campo elettrico:

Il flusso elettrico attraverso una superficie gaussiana è direttamente proporzionale alla somma algebrica di tutte le cariche elettriche presenti all'interno della superficie.

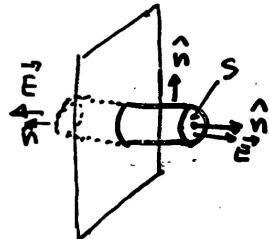
$$\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q}{\epsilon}$$

Significato fisico:

Il teorema di Gauss per il campo elettrico descrive una caratteristica importante del campo elettrostatico:

1. Le cariche elettriche sono le sorgenti del campo elettrico.
2. Le linee di campo nascono o muoiono sulle cariche elettriche.

TROVIANO IL CAMPO ELETTRICO CREATO DA UNA CARICA
DIISTRIBUITA UNIFORMEMENTE CON DENSITÀ SUPERFICIALE
 σ SU UN PIANO INFINITO ISOLANTE.



$$\sigma = \frac{dQ}{dS} \Rightarrow dQ = \sigma \cdot dS$$

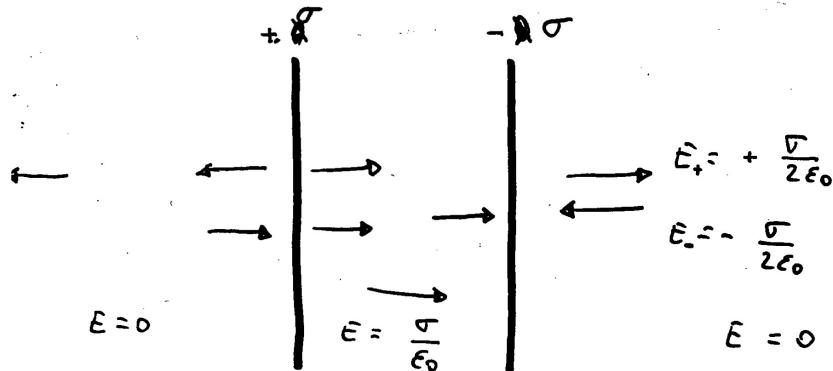
Lamina isolante carica

- PER RAGIONI DI SIMMETRIA IL CAMPO È DEVE ESSERE ORTOGONALE ALLA LAMINA
- SCEGLIAMO COME SUPERFICIE UN CILINDRO CON L'ASSE PERPENDICOLARE AL PIANO
- IL FLUSSO DALLA FACCIA LATERALE DEL CILINDRO È NULLO PERCHÉ $\vec{E} \cdot \hat{n} = 0$ [l'altezza del cilindro può essere qualsiasi]
- IL FLUSSO DA UNA BASE DEL CILINDRO VALÈ:

$$\Phi_e(\vec{E}) = |\vec{E}| \cdot S$$
- IL FLUSSO USCENTE DA TUTTO IL CILINDRO VALÈ:

$$\Phi_e(\vec{E}) = |\vec{E}| \cdot S + |\vec{E}| \cdot S + 0 = 2|\vec{E}| \cdot S$$
- PER IL TEOREMA DI GAUSS $\Phi_e(\vec{E}) = \frac{Q_{\text{interna}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \cdot S}{\epsilon_0}$
- $$\Rightarrow 2|\vec{E}| \cdot S = \frac{\sigma \cdot S}{\epsilon_0} \Rightarrow |\vec{E}| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$
- N.B. IL MODULO DEL CAMPO ELETTRICO NON DIPENDE DALLA DISTANZA DALLA LAMINA

Doppio strato



- PRENDIAMO DUE LAMINE PIANE INFINITE,
UNA CON DENSITÀ $+\lambda$ È L'ALTRA $-\lambda$
- ALL'INTERNO DEL DOPPIO STRATO IL CAMPO
VALE $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$
- FUORI DAL DOPPIO STRATO IL CAMPO VALE 0

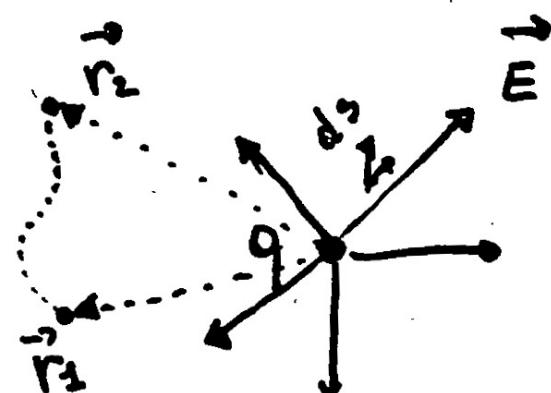
Lavoro del campo E

Mettiamo una carica q_0 di prova nel campo \vec{E} generato da una carica puntiforme $E = q_0 \vec{E}$

Spostiamo q_0 da r_1 a r_2 ; il lavoro fatto dalla forza del campo e'

$$L = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{q \cdot q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot d\vec{s} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} =$$

$$\therefore \frac{q_0 \cdot q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = \frac{q_0 \cdot q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$



IL LAVORO NON DIPENDE DAL PERCORSO, MA SOLO
DALLO STATO FINALE E DA QUELLO INIZIALE

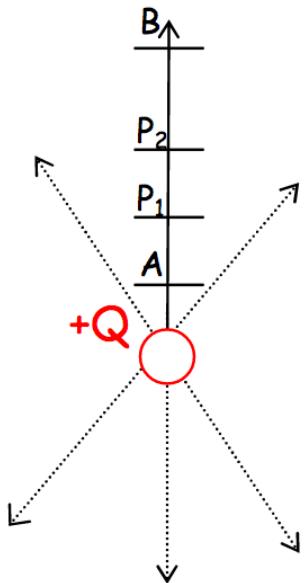
=> LA FORZA ELETTROSTATICA E' CONSERVATIVA

=> SI PUO' DEFINIRE L'ENERGIA POTENZIALE ELETTROSTATICA

JB. DATO IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE, LE CONCLUSIONI

E. Fianumiri Spiegherebbe
SONO VALIDE QUALUNQUE SIA IL NUMERO DI CARICHE

a) Consideriamo inizialmente il moto della carica q lungo una linea di forza.



Il campo elettrico, e quindi la forza, varia in funzione della distanza r .

Il campo elettrico non uniforme risulta: $E = 1/4\pi\epsilon_0 \cdot Q/r^2$ e la formula $F=E\cdot q$ ha validità puntuale.

Il calcolo del lavoro, compiuto dalle forze del campo, per portare la carica di prova q dalla posizione iniziale A alla posizione finale B non può essere effettuato applicando in modo sintetico la relazione $L=F\cdot d$, con $d=AB$. Occorre suddividere lo spostamento AB in tanti piccoli spostamenti elementari Δs . Il lavoro totale risulta essere la sommatoria: $L=L_1+L_2+L_3+\dots+L_n$, con L_i il lavoro compiuto nell' i -esimo spostamento $\Delta s_i=r_{i+1} - r_i$.

Calcoliamo L_1 , lavoro compiuto dal campo elettrico per lo spostamento elementare $\Delta s_1 = \overline{AP_1}$ in cui la distanza r varia da r_A ad r_1 .

Si ha una piccola variazione del campo elettrico ($1/4\pi\epsilon_0 \cdot Q/r^2_1 \leq E \leq 1/4\pi\epsilon_0 \cdot Q/r^2_A$)
 Il vettore campo elettrico \vec{E} nell'intervallo AP_1 può, in prima approssimazione, essere considerato costante esprimendo r^2 mediante la media geometrica: $r^2 = r_A \cdot r_1$.

Si ha la seguente relazione per il campo elettrico: $E = 1/4\pi\epsilon_0 \cdot Q/r_1 \cdot r_A$ che possiamo considerare costante in tutti i punti dello spostamento $\Delta s_1 = r_1 - r_A$.

Sostituendo Δs_1 ed E nella relazione del lavoro $L_1 = qE \cdot \Delta s_1$, si ha:

$$L_1 = 1/4\pi\epsilon_0 \cdot Q/r_1 \cdot r_A \cdot (r_1 - r_A) = 1/4\pi\epsilon_0 \cdot qQ (1/r_A - 1/r_1)$$

Analogamente, per l'intervallino Δs_2 , si ha il lavoro:

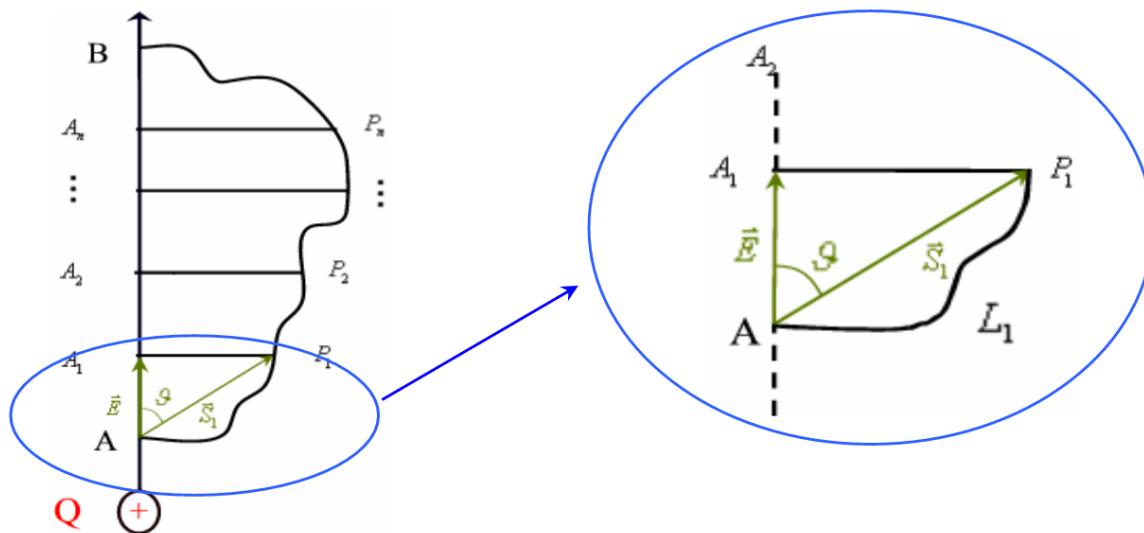
$$L_2 = 1/4\pi\epsilon_0 \cdot qQ (1/r_1 - 1/r_2)$$

Sommando i lavori elementari si ha:

$$L = L_1 + L_2 + \dots + L_n = Qq/4\pi\epsilon_0 (1/r_A - 1/r_1 + 1/r_1 - 1/r_2 + \dots + 1/r_n - 1/r_B)$$

Quindi il lavoro totale risulta: $L = Qq/4\pi\epsilon_0 (1/r_A - 1/r_B)$

b) Consideriamo il moto della carica q lungo una traiettoria qualsiasi.



Anche in questo caso il lavoro complessivo deve essere calcolato come somma dei lavori elementari negli n spostamenti Δs : $L = L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n$

Calcoliamo inizialmente il lavoro L_1 compiuto dal campo sulla carica q , che esegue lo spostamento elementare $\Delta s_1 = \overrightarrow{AP}_1$.

Analogamente al caso precedente si ha che il campo elettrico, nell'intervallo AP_1 , può in prima approssimazione essere considerato costante e risulta: $E_1 = 1/4\pi\epsilon_0 \cdot Q/r_1 \cdot r_A$

Il lavoro elementare L_1 risulta: $L_1 = q \cdot \vec{E}_1 \times \vec{\Delta s}_1 = q \cdot E_1 \cdot \overrightarrow{AP}_1 \cos \theta = q \cdot E_1 \cdot \overline{AA_1}$

Sostituendo la formula del campo elettrico e essendo $\overline{AA_1} = r_1 - r_A$, si ha:

$$L_1 = 1/4\pi\epsilon_0 \cdot q \cdot Q/r_1 \cdot r_A \quad (r_1 - r_A) = Qq/4\pi\epsilon_0 \left(1/r_A - 1/r_1\right)$$

Analogamente, per l'intervallino Δs_2 , si ha il lavoro: $L_2 = Qq/4\pi\epsilon_0 \left(1/r_1 - 1/r_2\right)$

Sommendo i lavori elementari si ha: $L = Qq/4\pi\epsilon_0 \left(1/r_A - 1/r_B\right)$

Il risultato ottenuto, per una traiettoria qualsiasi, è uguale a quello verificato quando la traiettoria coincidente con una linea di forza.

Si ha quindi che il lavoro dipende solo dalla posizione iniziale e da quella finale della carica q e non dalla traiettoria; ciò ci consente di affermare che il campo elettrostatico è conservativo.

Energia potenziale eletrostatica

- DEFINIAMO ENERGIA POTENZIALE DEL CAMPO ELETTRICO \vec{E}
IN UN PUNTO \vec{r} DELLO SPAZIO IL LAVORO FATTO DA
UNA FORZA ESTERNA PER SPOSTARE LA CARICA q_0
DALL' INFINTO AL PUNTO \vec{r}

$$U(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} q_0 \cdot \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

- CALCOLIAMO IL LAVORO FATTO DA \vec{E} PER FAR MUOVERE
UNA CARICA DA \vec{A} A \vec{B}

$$\begin{aligned} L_{AB} &= \int_A^B q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_A^{\infty} q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{\infty}^B q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} = \\ &= - \int_{\infty}^A q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} - \left(- \int_{\infty}^B q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} \right) = U(A) - U(B) \end{aligned}$$

- $L_{AB} = U(A) - U(B)$
- SE $U(B) < U(A) \Rightarrow$ IL LAVORO FATTO DAL CAMPO È
POSITIVO

Potenziale elettrico

- $U(\vec{r}) = -q_0 \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{s}$
- CONSIDERANO L'ENERGIA POTENZIALE PER UNITÀ DI CARICA

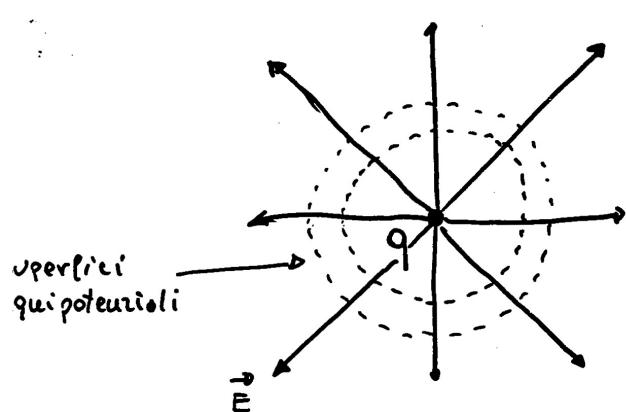
$$V(\vec{r}) = \frac{U(\vec{r})}{q_0} = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad [\text{potenziale elettrico}]$$

- IL POTENZIALE ELETTRICO DI UN PUNTO ARBITRARIO È UGUALE AL LAVORO PER UNITÀ DI CARICA NECESSARIO PER PORTARE UNA CARICA DI PROVA POSITIVA DALL'INFINITO AL PUNTO
- LA QUANTITÀ DI INTERESSE FISICO NON È IL POTENZIALE BENSÌ LA DIFFERENZA DI POTENZIALE

$$\Delta V = V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Il pot elettrico si misura in J/C = Volt
Il campo elettrico si misura in V/m = N/C

Potenziale di una carica puntiforme



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

$$V(r) = - \int_{\infty}^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{s} = - \int_{\infty}^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

- IL POTENZIALE È UNA GRANDEZZA SCALARÉ
- $q > 0 \Rightarrow V > 0$; $q < 0 \Rightarrow V < 0$
- I PUNTI CHE HANNO LA STESSA DISTANZA r DALLA CARICA q HANNO LO STESSO POTENZIALE (SUPERFICIE EQUIPOTENZIALE)
- I PUNTI DI UNA SUPERFICIE ORTOGONALE AL CAMPO ELETTRICO HANNO LO STESSO POTENZIALE
- MUOVENDOSI LUNGO UNA SUPERFICIE EQUIPOTENZIALE NON SI COMPIE LAVORO (NON VARIA L'ENERGIA POTENZIALE)

Pot di n cariche puntiformi

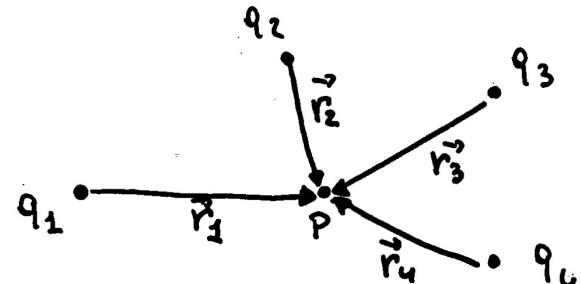
- VALE IL PRINCIPIO DI SOVRAPPPOSIZIONE

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1} \quad [r_1 = \text{distanza della carica } q_1 \text{ dal punto } \vec{P}]$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2}; \quad V_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3}{r_3}; \quad V_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_4}{r_4}$$

$$V(P) = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \frac{q_4}{r_4} \right)$$

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^4 \frac{q_i}{r_i}$$



- L'ENERGIA POTENZIALE DI UNA CARICA q_0 POSTA IN \vec{P} VALLA

$$U(P) = q_0 \cdot V(P) = q_0 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^4 \frac{q_i}{r_i}$$

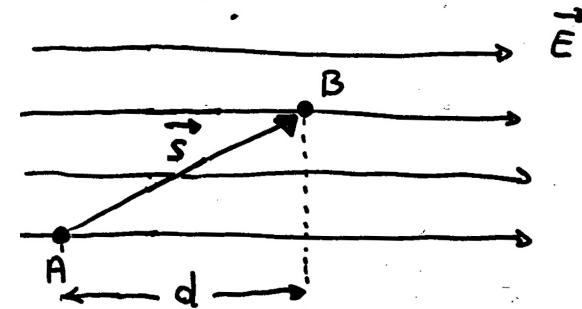
N.B. IL CALCOLO DEL POTENZIALE È PIÙ SEMPLICE DEL
CALCOLO DEL CAMPO ELETTRICO

\Rightarrow SI RICAVA $V \Rightarrow$ DA QUESTI SI RICAVA \vec{E}

D.d.p. In un campo E uniforme

- CALCOLIAMO LA DIFFERENZA DI POTENZIALE TRA DUE PUNTI \vec{A} E \vec{B} CHE SI TROVANO IN UN CAMPO \vec{E} UNIFORME

$$\Delta V = V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = \\ = \vec{E} \cdot \int_A^B d\vec{s} = \vec{E} \cdot \vec{s} = \vec{E} \cdot d$$



- SE CI MUOVIAMO IN VERSO CONCORDE CON IL CAMPO ELETTRICO, IL POTENZIALE DIMINUISCE.
- SE METTIAMO UNA CARICA q_0 POSITIVA, DI MASSA m , IN UN CAMPO \vec{E} , LA CARICA SEGUINA' LE LINEE DEL CAMPO DIMINUENDO LA SUA ENERGIA POTENZIALE E AUMENTANDO LA SUA ENERGIA CINETICA.

N.B.

$$\Delta V = V(f) - V(i) = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s} = -Ed$$

$$\Rightarrow \Delta V = V(i) - V(f) = + \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Ricavare E conoscendo V

- IN UN CAMPO UNIFORME ABBIANO VISTO CHE:

$$V(f) - V(i) = \Delta V = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = -E d$$

- IN QUESTO CASO:

$$E = - \frac{\Delta V}{d}$$

- NEL CASO DI UNA VARIAZIONE INFINITESIMA

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$$

- SE IL CAMPO HA UNA SOLA COMPONENTE (E_x)
ALLORA SI HA:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = -E_x dx$$

$$\Rightarrow \boxed{E_x = -\frac{dV}{dx}} \quad (\text{derivate di } V \text{ rispetto a } x)$$

- NEL CASO GENERALE SI HA:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz)$$

$$\Rightarrow E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad [\text{derivate parziali}]$$

- N.B. IN CASO DI SIMMETRIA SFERICA

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = -E dr$$

$$\Rightarrow E = -\frac{dV}{dr}$$

IN UN CONDUTTORE LE CARICHE ELETTRICHE POSSONO MUOVÈNSI LIBERAMENTE AL SUO INTERNO.

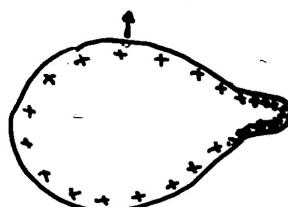
Conduttori

IN UN CONDUTTORE IN EQUILIBRIO ELETROSTATICO

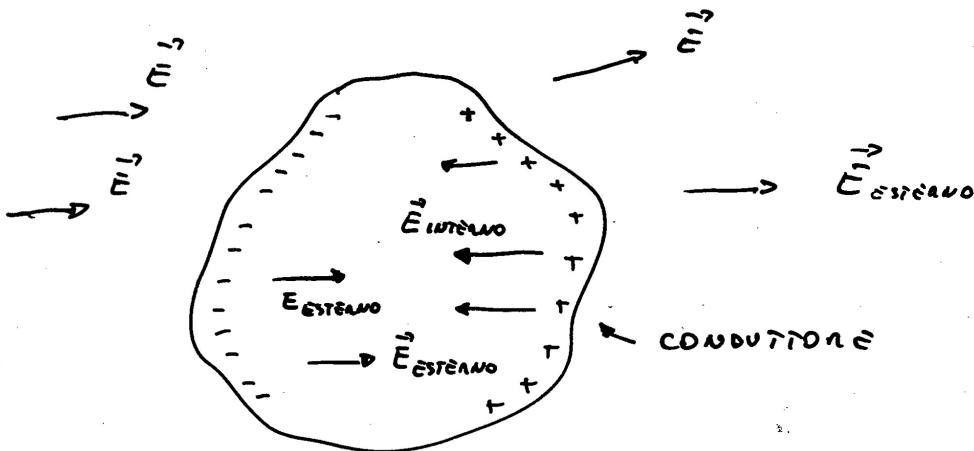
NON C'E' NESSUN MOVIMENTO DI CARICA

TALE CONDUTTORE POSSIEDE LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

- IL CAMPO ELETTRICO ALL'INTERNO DI ESSO È NULLO OVUNQUE
- UN QUALUNQUE ECCESSO DI CARICA SU UN CONDUTTORE ISOLATO DÈVE RISIEDERE UNICAMENTE SULLA SUA SUPERFICIE ESTERNA
- IL CAMPO ELETTRICO IN UN PUNTO APPENA AL DI FUORI DI UN CONDUTTORE CARICO È PERPENDICOLARE ALLA SUPERFICIE E HA MODULO σ/ϵ_0 . (teorema di Coulomb)
- SU UN CONDUTTORE DI FORMA IRREGOLARE, LA CARICA TENDÈ AD ACCUMULARSI IN PUNTI IN CUI LA CURVATURA È MAGGIORÈ (effetto delle punte)



E nullo all'interno



- PONIAMO UN CONDUTTORE IN UN CAMPO \vec{E} ESTERNO
- GLI ELETTRONI ALL'INTERNO SENTIRANNO LA FORZA

$$\vec{F} = -q_e \cdot \vec{E}$$

E QUINDI SI SPOSTERANNO

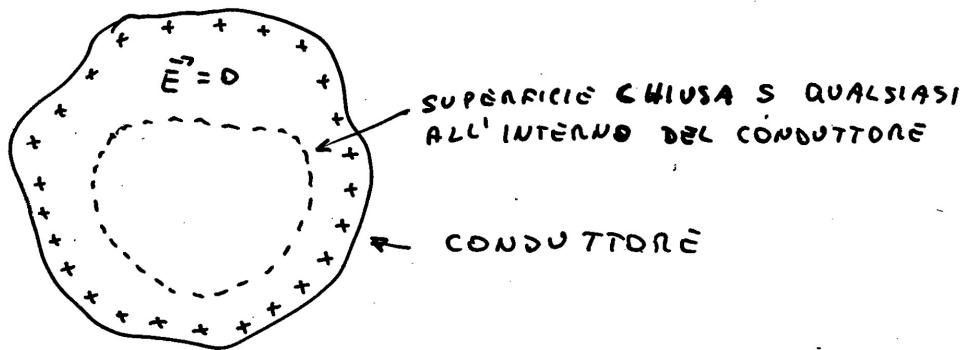
COSÌ FACENDO SI CREA UN'ASIMMETRIA DI CARICA
ALL'INTERNO DEL CONDUTTORE CHE GENERA A SUA VOLTA
UN CAMPO \vec{E} "INTERNO"

GLI ELETTRONI SI "RIARRANGIANO" FINO A QUANDO
SU DIESSI NON VI SARÀ PIÙ NESSUNA FORZA CHE LI
FA MUOVERE (EQUILIBRIO ELETTROSTATICO)

$$\vec{F} = -q_e \cdot \vec{E} = -q_e (\vec{E}_{\text{ESTERNO}} + \vec{E}_{\text{INTERNO}}) = 0$$

$$\text{QUINDI } \vec{E} = \vec{E}_{\text{ESTERNO}} + \vec{E}_{\text{INTERNO}} = 0$$

E. N.B. LA CONDIZIONE $\vec{E} = 0$ SI OTTIENE QUASI ISTITANTANEAMENTE
Did 1718



- METTIAMO UNA CARICA q SU UN CONDUTTORE ISOLATO.
- LA CARICA SI RIDISTRIBUISCE IN MODO DA AVERE
 $\vec{E} = 0$ ALL'INTERNO
- SCEGLIAMO UNA SUPERFICIE CHIUSA QUAISIASI ALL'INTERNO
 DEL CONDUTTORE SULLA QUALE APPLICARE IL TEOREMA DI GAUSS!

$$\Phi_s(\vec{E}) = \frac{q_{\text{interno}}}{\epsilon_0}$$

$$\Phi_s(\vec{E}) = \int_{\text{Schiusa}} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = 0 \quad [\text{dato che } \vec{E} = 0]$$

- NE CONSEGUO CHE ANCHE

$$q_{\text{interno}} = 0$$

QUINDI LA CARICA NON PUO' CHE DISPOSERI SULLA

E. SUPERFICIE ESTERNA

Did 1718

Carica sulla superficie esterna

Teorema di Coulomb

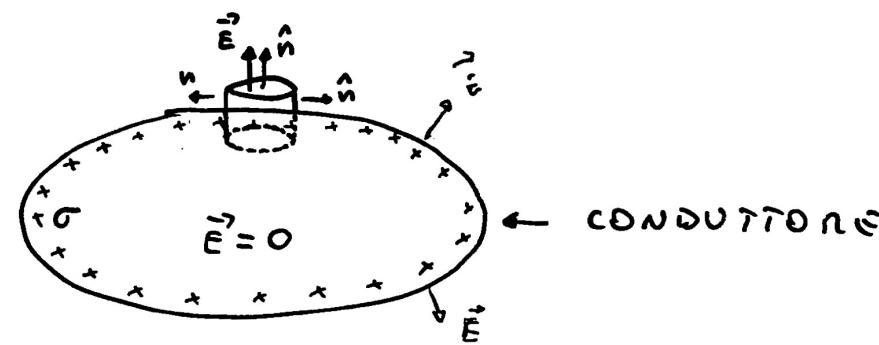
- PRENDIAMO UN CONDUTTORE CHE ABbia UNA DENSITÀ SUPERFICIALE DI CARICA σ
- SE IL CAMPO \vec{E} SULLA SUPERFICIE DEL CONDUTTORE AVESSE UNA COMPONENTE PARALLELA ALLA SUPERFICIE, ALLORA CI SARÈBBE SULLE CARICHE UNA FORZA $\vec{F}_\parallel = q \cdot \vec{E}_\parallel$ CHE LE FAREBBE MUOVERE. DATO CHE IL CONDUTTORE È IN EQUILIBRIO ELETTROSTATICO ALLORA È DEVE ESSERE PERPENDICOLARE

APPLICHIAMO IL TEOREMA DI GAUSS AD UN CILINDRETTO AVERE SUPERFICIE DI BASE S

$$\hat{\Phi}_s(\vec{E}) = \underset{\substack{\text{base} \\ \text{interna}}}{\circ} + \underset{\substack{\text{superficie} \\ \text{laterale}}}{\circ} + \underset{\substack{\text{base esterna}}}{|E| \cdot S}$$

$$\hat{\Phi}_s(\vec{E}) = \frac{Q_{\text{interna}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \cdot S}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow |E| \cdot S = \frac{\sigma \cdot S}{\epsilon_0} \Rightarrow |E| = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



Sfera cava (induz. Elettrostat.)

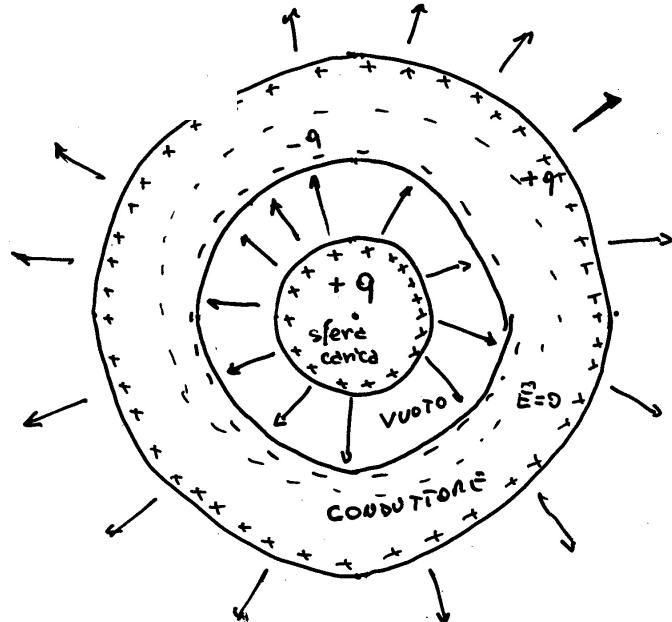
- PRENDIAMO UNA SFERA CONDUTTRICE SCARICA CON ALL'INTERNO UNA CAVITÀ.
- METTIAMO ALL'INTERNO DELLA CAVITÀ UNA SFERA CONDUTTRICE CARICA CON CARICA $+q$.
- SULLA SFERA CAVA LE CARICHE SI RIDISTRIBUISCONO IN MODO DA AVERE $\vec{E} = 0$ AL SUO INTERNO.
- SULLA FACCIA INTERNA COMPARÈ UNA CARICA $-q$

$$0 = \Phi_s(\vec{E}) = \frac{q_{\text{interne}}}{\epsilon_0} = \frac{+q - q}{\epsilon_0} = 0$$

- SULLA FACCIA ESTERNA COMPARÈ LA CARICA $+q$

NB: il campo E è nullo

DENTRO i conduttori, ma NON
è nullo nello spazio vuoto fra i
due conduttori



- IL CAMPO È ALL'INTERNO DI UN CONDUTTORE È NULLO
- IL CAMPO È ESTERNO È ORTOGONALE ALLA SUPERFICIE
- CALCOLIAMO LA d.d.p. TRA DUE PUNTI SULLA SUPERFICIE

$$\Delta V = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad [\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0]$$

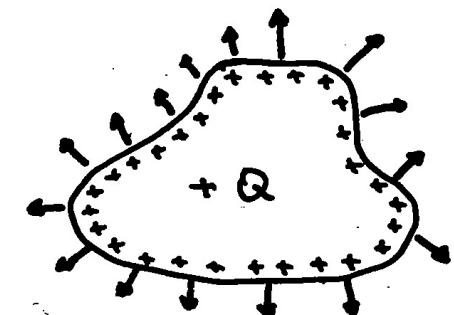
\Rightarrow I PUNTI SULLA SUPERFICIE DEL CONDUTTORE HANNO TUTTI LO STESSO POTENZIALE

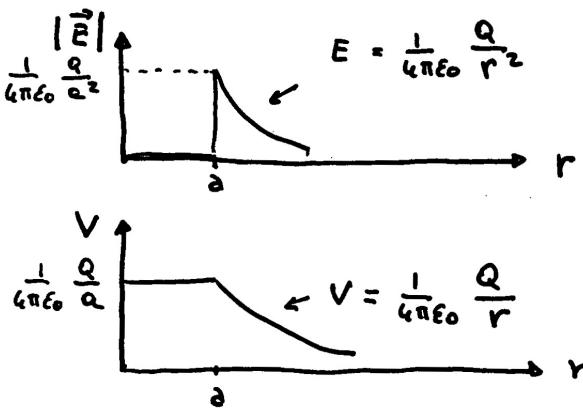
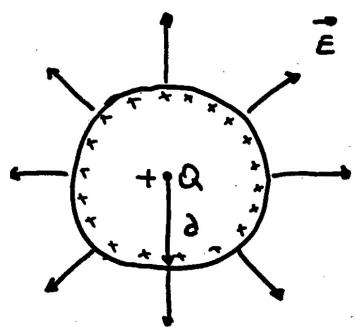
- DATO CHE $E=0$ PER OGNI PUNTO ALL'INTERNO DEL CONDUTTORE, ALLORA TUTTI QUESTI PUNTI HANNO LO STESSO POTENZIALE DELLA SUPERFICIE

QUALUNQUE SIA LA FORMA DEL CONDUTTORE,
TUTTI I PUNTI DELLO STESSO HANNO LO STESSO POTENZIALE

- IL RISULTATO È VALIDO ANCHE PER UNA CAVITÀ CONTENUTA ALL'INTERNO DEL CONDUTTORE (GABBIA DI FARADAY)

Pot di un cond carico





Pot di una sfera cond carica

- POTENZIALE DELLA SFERA

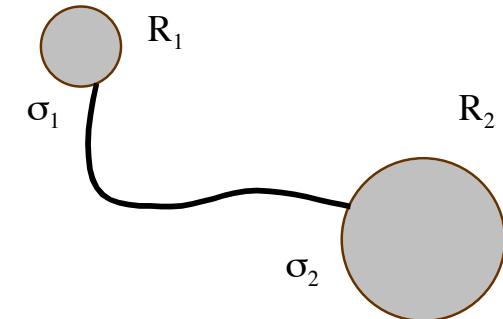
$$V(r=a) = - \int_{\infty}^a \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_{\infty}^a \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left. \frac{1}{r} \right|_{\infty}^a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a}$$

- $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \cdot a} \cdot Q$ IL POTENZIALE DELLA SFERA È PROPORTIONALE ALLA CARICA POSSESSUA.

Effetto “punta”

- la densità di carica sulla superficie esterna di un conduttore è inversamente proporzionale al raggio di curvatura della superficie
- Consideriamo due conduttori sferici
 - Di raggio diverso
 - Sufficientemente lontani in maniera che non si influenzano l'un l'altro
 - Connessi elettricamente in maniera da risultare allo stesso potenziale



$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{R_1} & V_1 = V_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2} & q_1 = 4\pi R_1^2 \sigma_1 & \frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{4\pi R_1^2 \sigma_1}{R_1} = \frac{4\pi R_2^2 \sigma_2}{R_2} \\ V_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{R_2} \end{aligned}$$

$$R_1 \sigma_1 = R_2 \sigma_2$$

- Poiché R₁ è più piccolo, σ₁ sarà più grande