Lezioni in http://www.fisgeo.unipg.it/~fiandrin/didattica_fisica/did_fis1718/

Lez 4 04/10/17

Fisica Sperimentale e Applicazioni Didattiche

Perche' usare vettori?

Assioma 1: le leggi della fisica sono le stesse per tutti gli osservatori (o sperimentatori) → devono essere espresse in forma matematica indipendente dal particolare osservatore.

Assioma 2: Un osservatore e' equivalente ad un sistema di coordinate (immaginate una terna di assi cartesiani associata a ciascun osservatore) ➔ le leggi della fisica devono essere indipendenti dal sistema di coordinate usato per descrivere il fenomeno

I vettori sono un enti geometrici (segmenti orientati) le cui relazioni sono indipendenti da chi "li osserva", cioe' se due vettori sono uguali per un osservatore , allora sono uguali per tutti gli osservatori ➔ possiamo esprimere le leggi fisiche in forma vettoriale

Perche' usare vettori?

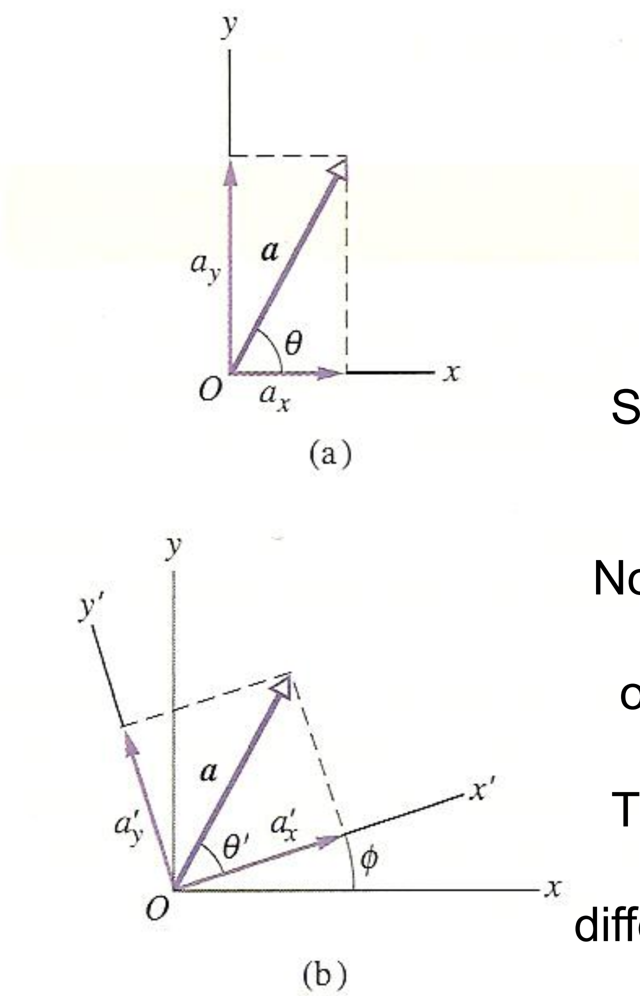


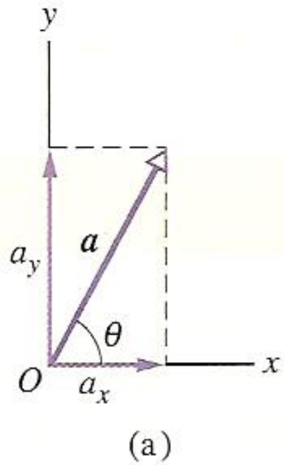
Figura 3.18 (a) Il vettore ***a*** e le sue componenti. (b) Lo stesso vettore, con gli assi del sistema di coordinate ruotato di un angolo ϕ.

L'uso di assi paralleli ai bordi della pagina non ha alcun significato profondo. E' solo piu' comodo per visualizzare la situazione

Se ruotiamo gli assi (ma non il vettore a) di un angolo Φ arbitrario (ovvero se cambiamo punto di vista), le componenti cambiano (il vettore no) in a'_x e a'_y.
Non esiste una coppia di componenti "piu' giusta" di altre, sono tutte equivalenti (cioe' rappresentano lo stesso oggetto rispetto a osservatori –ie sistemi di riferimento- diversi.
Tutte esprimono lo stesso modulo, la stessa direzione e verso per il medesimo vettore anche se con numeri differenti (in linguaggio piu' tecnico si dice che la lunghezza di un vettore e' un invariante per trasformazioni di coordinate)

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_x'^2 + a_y'^2}$$

Perche' usare vettori?



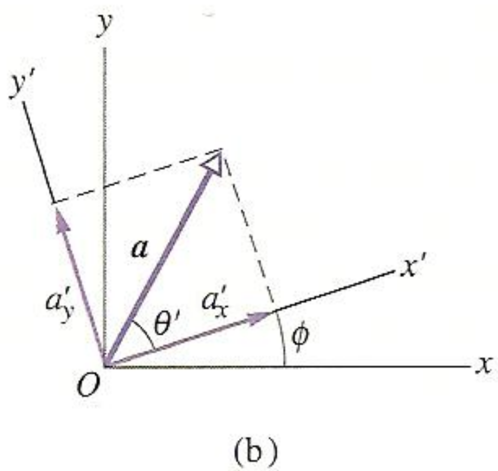


Figura 3.18 (a) Il vettore ***a*** e le sue componenti. (b) Lo stesso vettore, con gli assi del sistema di coordinate ruotato di un angolo ϕ.

Quindi abbiamo una grande liberta' di scelta per definire i sistemi di coordinate perche' le relazioni fra vettori non dipendono dalla collocazione dell'origine e dall'orientazione degli assi del sistema di riferimento.
Non esiste un criterio generale per la scelta del riferimento: l'unico criterio e' che la scelta deve essere fatta in modo tale che i calcoli siano i piu' semplici possibili ovvero tale che la descrizione dei fenomeni fisici sia la piu' semplice possibile dal punto di vista matematico

Esempio

Quanto valgono la somma e la differenza di due vettori di componenti a_x = -2, a_y = 1 e b_x = 5, b_y = 2 ? Calcolare il modulo dei vettori somma e differenza.

$$\vec{a} = -2\hat{i} + \hat{j}$$

$$\vec{b} = 5\hat{i} + 2\hat{j}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (-2+5)\hat{i} + (1+2)\hat{j} = 3\hat{i} + 3\hat{j}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 4.24$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (-2-5)\hat{i} + (1-2)\hat{j} = -7\hat{i} - \hat{j}$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 7.07$$

Il moto

Il moto di un oggetto e' la variazione nel tempo della sua posizione rispetto ad un osservatore➔ dato che l'osservatore e' arbitrario ne segue che il moto e' relativo (l'affermazione, come vedremo, e' verificabile sperimentalmente)

Noi siamo ora fermi rispetto alla Terra, ma siamo in rotazione (di periodo T=24 h) rispetto ad un astronauta che viaggia verso la Luna, perche' ci muoviamo solidalmente con essa.

La Terra ruota intorno al Sole su un'ellisse con un periodo T'=1 anno ad una distanza media di 1.5×10^8 km→ trascurando la rotazione giornaliera, noi ruotiamo intorno al Sole; il Sole orbita intorno al centro della Via Lattea a circa 8.5 kpc (1pc=3.26 anni-luce$\sim$ 9.5×10^{12} km con un periodo T''$\simeq$ 2.2×10^8 anni, l'intera galassia viaggia verso la costellazione della Vergine a $\sim$ 30 km/sec, il Gruppo Locale (l'ammasso di galassie di cui la Via Lattea fa parte) viaggia verso il Grande Attrattore...

Causa ed effetto

La meccanica studia il moto dei corpi e comprende:
- la cinematica che studia il moto dei corpi indipendentemente dalle cause
- la dinamica che studia le cause del moto e le relazioni con le variabili cinematiche, cioe' le forze

La nostra conoscenza del mondo e' basata sul principio di causa ed effetto:

L'effetto segue dalla causa, p. es. una lampadina si accende perche' l'interruttore e ' stato chiuso e cio' accade *dopo*. I due eventi non possono essere causalmente connessi se la luce si accende *prima* (o nello stesso istante) che l'interruttore sia stato chiuso.

Introduzione alla cinematica

- La cinematica si pone come obiettivo lo studio del moto, ovvero lo studio degli spostamenti di un corpo in funzione del tempo.

- A tale fine viene introdotto un concetto astratto: **il punto materiale**. Esso è un oggetto privo di dimensioni (ovvero puntiforme) ma che tuttavia possiede una massa. Più avanti nel corso identificheremo il punto materiale con il centro di massa di un corpo.

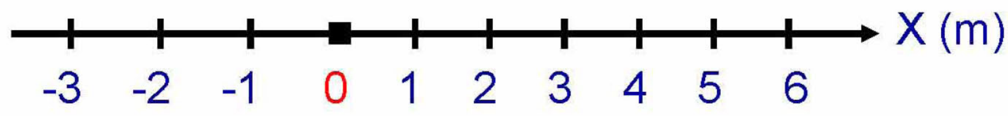
- Un punto materiale spostandosi nello spazio occupa successivamente una serie di punti geometrici. L'insieme di questi punti costituisce la **TRAIETTORIA** descritta dal punto.

- La traiettoria descrive una curva qualsiasi nello spazio. Per semplificare lo studio della cinematica in questo corso, considereremo soltanto delle traiettorie che descrivano delle figure geometriche semplici, quali linee rette, circonferenze, parabole, ellissi.

- Nei casi complessi, in genere, si cerca di ridursi a dei casi semplici con delle approssimazioni, oppure ad una somma di casi semplici.

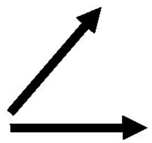
- Da notare che lo studio delle curve nello spazio ricade nell'ambito della **geometria**. La geometria ha origini antichissime, basti pensare ai principi di Euclide.

Moto unidimensionale



Il moto si dice unidimensionale quando avviene lungo una direzione costante, o piu' in generale lungo una traiettoria definita (es la ferrovia per il treno)

La direzione della retta e' arbiraria, cioe' non deve essere necessariamente "orizzontale"



I punti sulla retta sono identificati dalla loro distanza con il segno dall'origine.
Si definisce spostamento del punto materiale dalla posizione iniziale **X1** a quella finale **X2**, la quantita'

$$\boxed{\Delta X = X_2 - X_1}$$

Valore finale — Valore iniziale

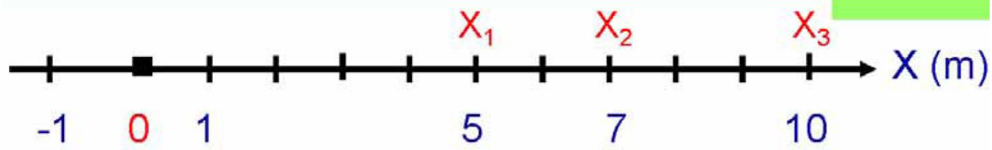
Lo spostamento ha un segno. Puo' essere positivo o negativo, cioe' non basta dire di "quanto" mi sono spostato, devo anche specificare in quale verso mi sono spostato→ **per definire lo spostamento ho bisogno di sapere quanto grande e' e in quale direzione e' avvenuto**

Lo spostamento e' un vettore che parte da X1 e punta a X2

Il moto

Tutte le grandezze che per essere definite hanno bisogno di un verso (e della direzione associata), oltre che della loro intensita' (cioe' del valore numerico di una loro misura) si dicono vettoriali

Nel caso unidimensionale, la direzione e' fissa, quella della retta su cui giace il moto → la direzione e' una, ma la grandezza vettoriale (p es lo spostamento, puo' avere verso concorde (detto positivo) od opposto (detto negativo) a quello fissato nel sistema di coordinate sulla retta



$$\boxed{\Delta X = X_2 - X_1}$$

- Non sappiamo nulla su cosa abbia fatto il punto mentre andava da X_1 a X_2 e su quanto spazio abbia effettivamente percorso.

Spazio percorso $\neq$ ΔX

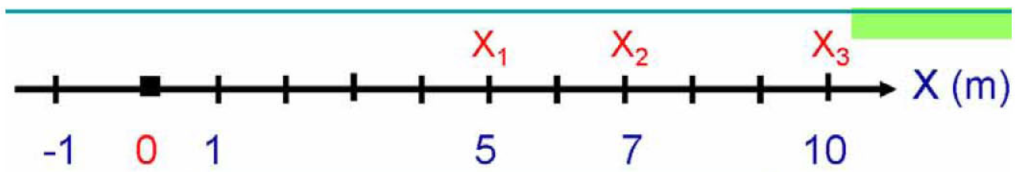
- Facciamo un esempio: $X_1 = 5$ m ; $X_2 = 7$ m

  Immaginiamo che il punto, partendo da X_1, sia andato prima nel punto $X_3 = 10$ m, e poi sia tornato indietro nel punto X_2.

$$\mathbf{\Delta X = X_2 - X_1 = \underbrace{(X_2 - X_3)}_{\Delta X_2} + \underbrace{(X_3 - X_1)}_{\Delta X_1} =}$$

$$\mathbf{2 \quad = \ (7 - 10) \ + (10 - 5) \ = - 3 + 5 \ = 2 \ m}$$

Spazio percorso (spost. "scalare")



$$\boxed{\Delta X = X_2 - X_1}$$

- Per trovare lo spazio percorso dobbiamo considerare il valore assoluto dello spostamento.

  Esempio: spazio percorso = $|X_2 - X_3| + |X_3 - X_1| =$

  $$3 \quad + \quad 5 \quad = \; 8\ \text{m}$$

- Come si vede lo spazio percorso è diverso dallo spostamento.

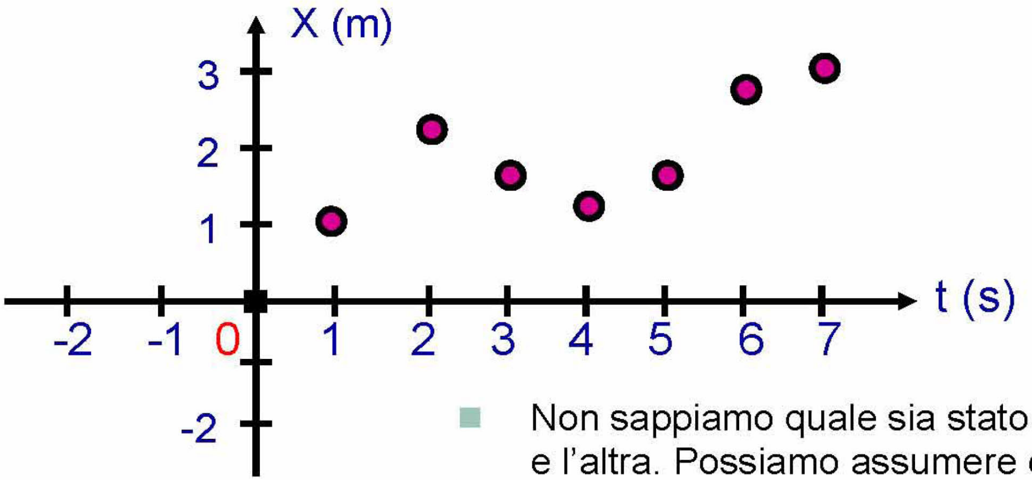
Spostamento e spazio percorso

- NB: se $X_1=X_2$ ie il punto torna alla posizione iniziale ➔ $\Delta X=0$! Che non implica che il punto non sia mosso fra t_1 e t_2

- Si definisce spostamento "scalare" la lunghezza totale della traiettoria: se andate da casa a lezione e tornate indietro, lo spostamento vettoriale e' nullo, ma indubbiamente vi siete spostati, cioe' quello scalare non lo e'!

Legge oraria del moto

- Supponiamo di scattare una fotografia ogni secondo al punto materiale che si sta spostando lungo la retta graduata.
- Costruiamo quindi il seguente grafico, dove in ascissa mettiamo il tempo e sulle ordinate mettiamo lo spazio. Anche per il tempo fissiamo un'origine, mentre per il verso non abbiamo scelta in quanto il tempo scorre in una direzione soltanto.



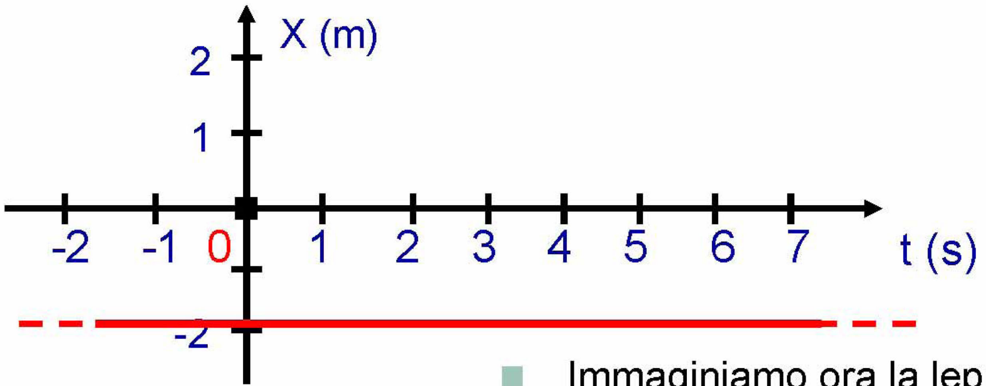
- Non sappiamo quale sia stato il tipo di moto del punto tra una fotografia e l'altra. Possiamo assumere che abbia fatto il moto più semplice (moto rettilineo uniforme).
- Se vogliamo più informazioni sul moto, dobbiamo diminuire l'intervallo tra una foto e l'altra, facciamo ad esempio una foto ogni decimo di secondo.
- Possiamo immaginare di ridurre sempre più il tempo intercorso tra una fotografia e l'altra, fino a quando questi diventa un infinitesimo.
- Abbiamo ottenuto così una funzione continua dello spazio in funzione del tempo:

$X = X(t)$ [si può anche scrivere $X = f(t)$]

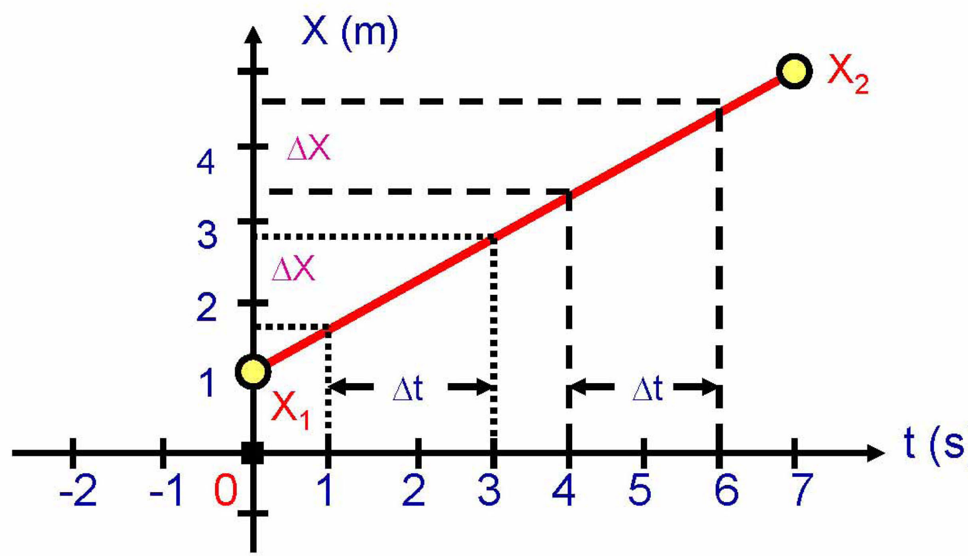
Questa funzione si chiama legge oraria del moto

Legge oraria: esempi

- Immaginiamo una lepre che stia ferma nel punto X = - 2 m



- Immaginiamo ora la lepre che si sta muovendo secondo la seguente legge oraria:



- Da notare in questo tipo di moto che se noi scegliamo un intervallo di tempo Δt, lo spostamento ΔX della lepre è sempre lo stesso, qualunque sia il punto in cui si trova la lepre. Come vedremo questa è la caratteristica del moto rettilineo uniforme.

Velocita' media

Prendiamo un punto materiale che si sposta dalla posizione X_1, occupata all'istante t_1, alla posizione X_2 che raggiunge all'istante $t_2 > t_1$

- La velocità media è il rapporto tra lo spostamento di un punto materiale e l'intervallo di tempo impiegato per realizzarlo.

$$v_{media} = \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{X_2 - X_1}{t_2 - t_1}$$

Da notare che la velocità ha sempre lo stesso segno dello spostamento, perché Δt è sempre positivo (il tempo, purtroppo, non scorre mai all'indietro!)

Velocita' scalare

La velocita' scalare media e' un modo diverso di calcolare la rapidita' del moto:

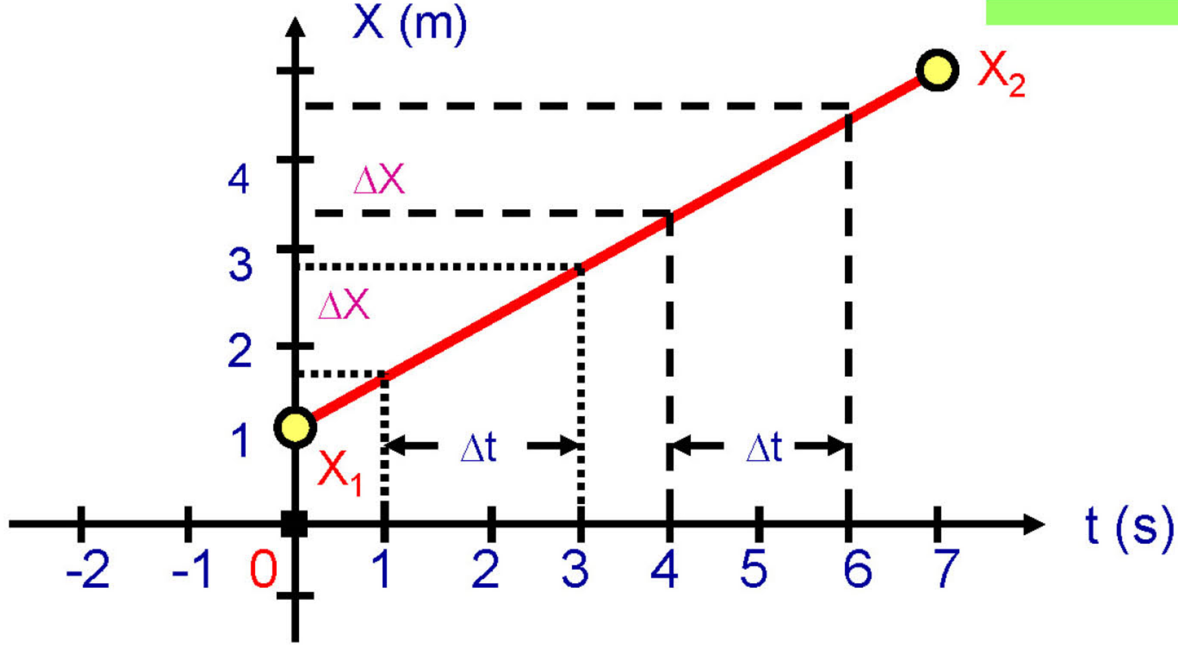
❖ La velocita' vettoriale e' definita dallo spostamento ΔX.

La velocita' scalare media e' invece definita dalla lunghezza totale ΔS del percorso, cioe' dallo spazio effettivamente percorso indipendentemente dalla direzione

$$U = \Delta S/\Delta t$$

❖ Non ha segno algebrico (come la velocita' vettoriale) perche' non include il verso

Moto rettilineo uniforme



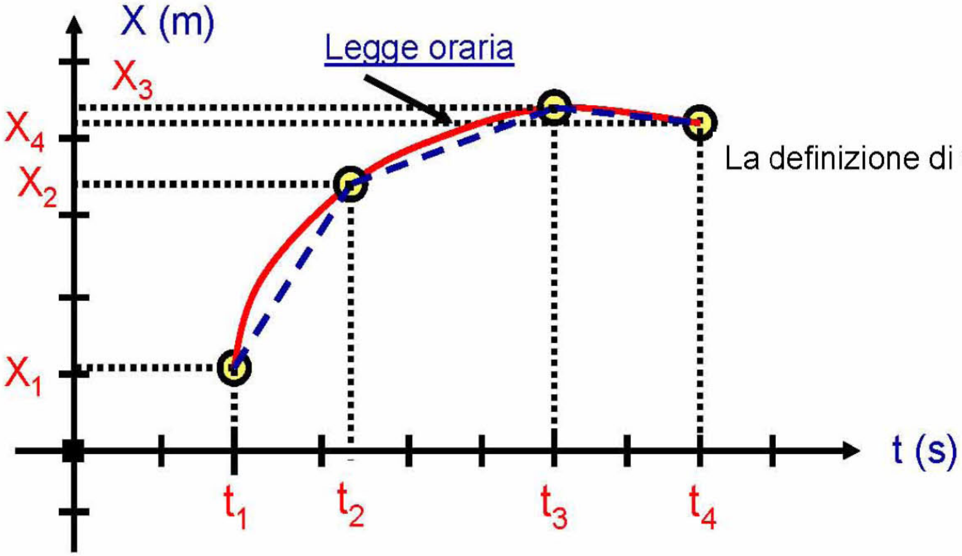
- Il moto avviene lungo una retta
- La velocità media è la stessa per qualsiasi Δt da noi scelto

$$v_{media} = \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{X_2 - X_1}{t_2 - t_1} = \text{costante}$$

Velocita' istantanea

- La conoscenza della velocità media corrispondente allo spostamento ΔX non ci dà informazioni sulla velocità della particella durante l'intervallo di tempo in cui è avvenuto lo spostamento.

- Per ovviare a questo problema si può pensare di ridurre l'intervallo Δt in tanti intervalli Δt più piccoli, in modo che l'approssimazione del moto qualsiasi con un moto rettilineo uniforme migliori (ovvero si approssima il moto qualsiasi con una somma di moti rettilinei uniformi).



La definizione di velocità istantanea del punto al tempo t_1 è la seguente:

$$\boxed{v(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{X_2 - X_1}{t_2 - t_1}}$$

L'operazione di limite su questo rapporto porta alla derivata della funzione x(t)

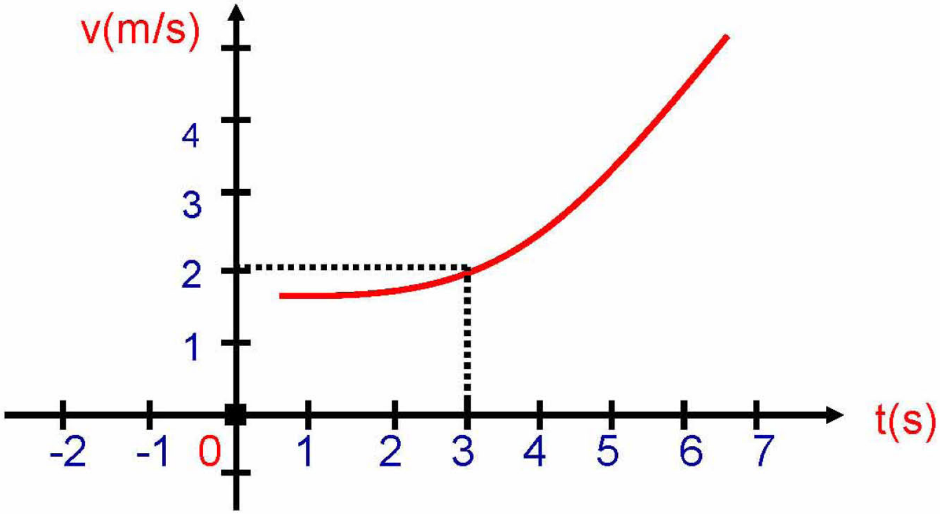
- In questo caso particolare la velocità media dei tre intervalli Δt è diversa nei tre intervalli (in particolare nel terzo intervallo è negativa perché il corpo torna indietro) ed è diversa dalla velocità media nell'intervallo $\Delta t = t_4 - t_1$

- Per conoscere la velocità media nell'intorno di un punto qualsiasi della traiettoria occorre ridurre sempre più l'intervallo, fino a farlo diventare un intervallo infinitesimo.

Accelerazione

- La velocità istantanea è definita per ogni istante di tempo t; abbiamo cioè una funzione v(t).

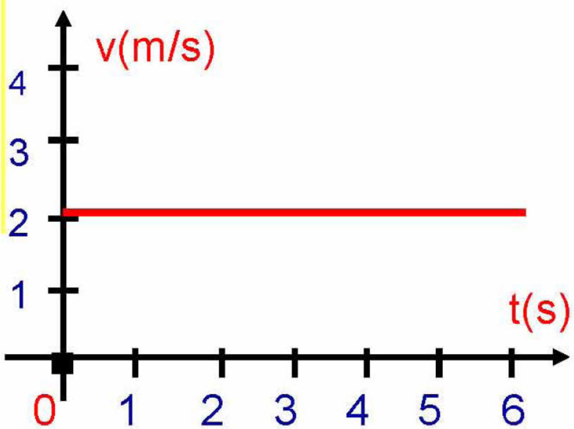
- Possiamo costruire il grafico seguente:



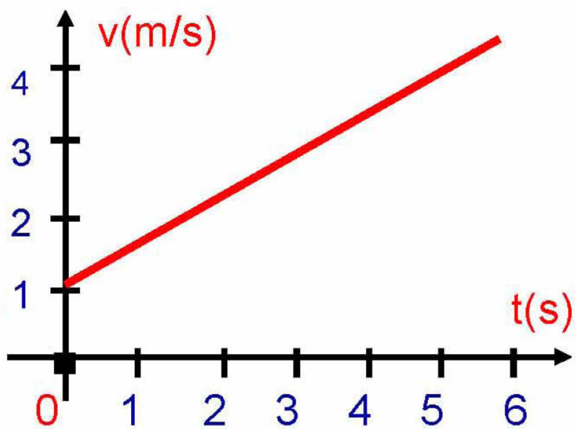
Esistono moti in cui la velocita' varia nel tempo: basta pensare a quando

un'auto si ferma e riparte, decelera in entrata in curva, accelera in uscita

- Due casi particolari:



Moto rettilineo uniforme

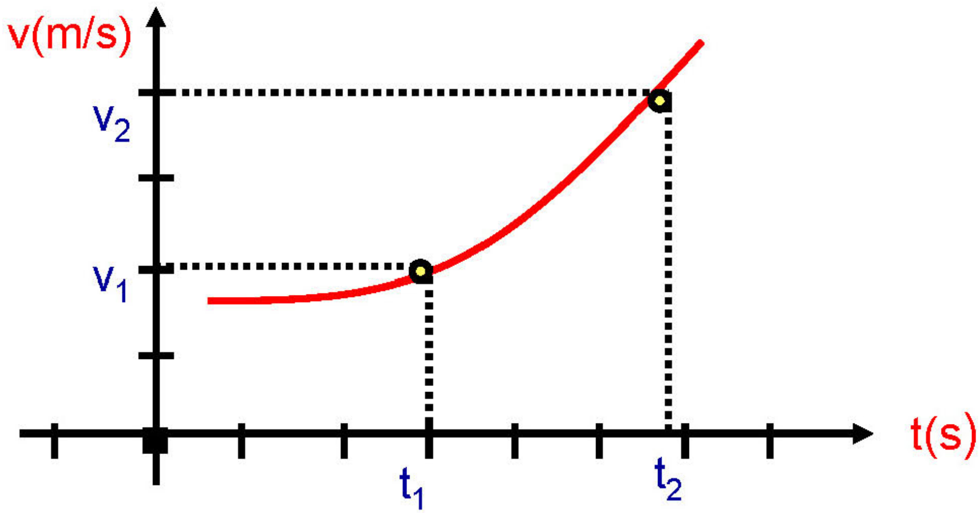


Moto uniformemente accelerato

Accelerazione

- Per definire l'accelerazione si può applicare di nuovo quanto detto a proposito della velocità

- L'accelerazione è una misura della variazione della velocità rispetto al tempo:



- Accelerazione media:

$$a_{media} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

Si misura in m/s^2

- L'accelerazione ha un segno che può essere diverso rispetto al segno della velocità
  - Se voi siete in automobile e frenate, l'auto continua ad andare avanti ma l'accelerazione è diretta all'indietro

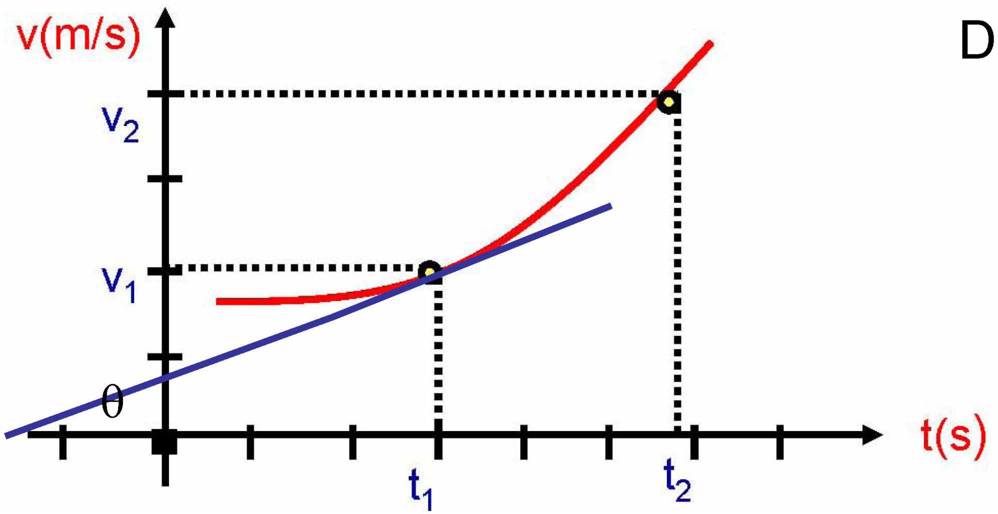
Accelerazione

- Accelerazione istantanea:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$$

- L'accelerazione è la derivata rispetto al tempo della velocità ovvero è la derivata seconda dello spazio rispetto al tempo.

$$a = \frac{dv}{dt}$$



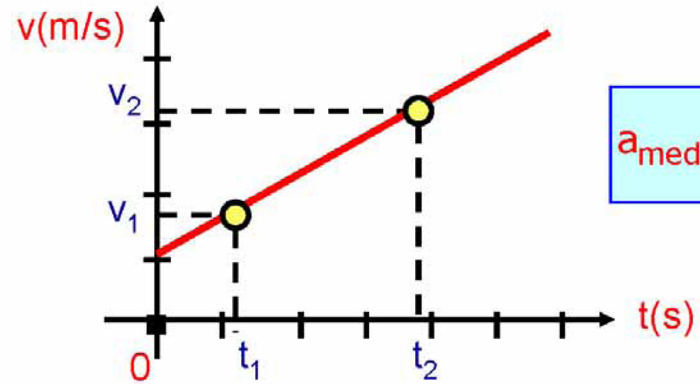
Dato che v = dx/dt, segue che

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

L'accelerazione istantanea e' la derivata seconda dell'equazione oraria del moto

Geometricamente e' la pendenza dell'equazione oraria della velocita' $a = \tan\theta$

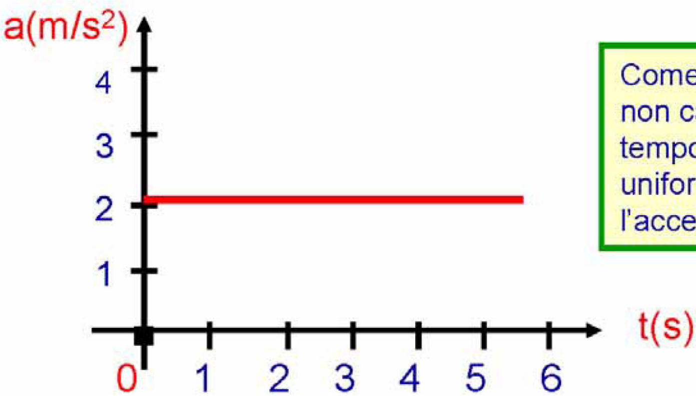
Moto unif. accelerato



$$a_{media} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

- Nel moto uniformemente accelerato l'accelerazione media è la stessa qualunque sia l'intervallo di tempo $t_2 - t_1$ scelto.

- Facciamo il grafico dell'accelerazione istantanea in funzione del tempo nel caso del moto uniformemente accelerato:

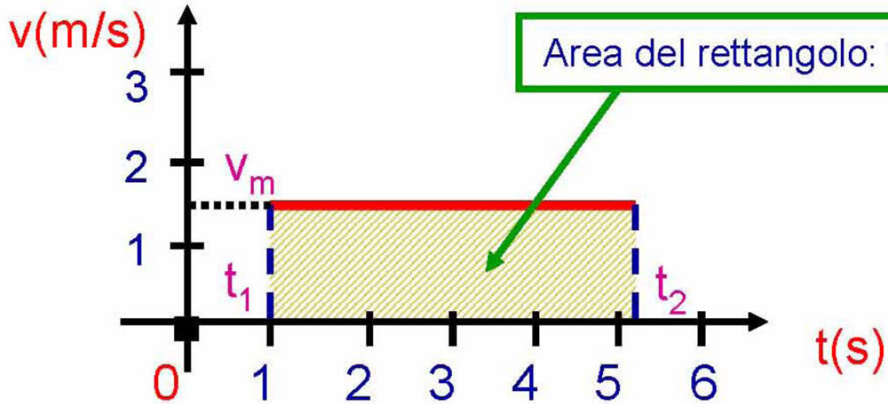


Come si vede l'accelerazione non cambia in funzione del tempo, ovvero nel moto uniformemente accelerato l'accelerazione è costante.

- Molti dei moti che studieremo, e che avvengono in natura, sono di questo tipo:
  - Caduta di un grave in prossimità della superficie della terra
  - Moto di un elettrone in un tubo a raggi catodici
  - Etc…

N.B. Non ha nessuna importanza la derivata dell'accelerazione

- Caso semplice: moto rettilineo uniforme.



Trovare lo sp ostamento nota v media

- Supponiamo che tra gli istanti t_1 e t_2 il punto si sia mosso con velocità costante v_m, allora abbiamo:

$$v_m = \frac{X_2 - X_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow \boxed{X_2 - X_1 = v_m \cdot (t_2 - t_1)}$$

- <u>Lo spostamento</u> ($X_2 - X_1$) <u>è uguale all'area compresa tra il grafico della velocità e l'asse dei tempi.</u>

- Per conoscere il punto finale X_2 occorre conoscere il punto iniziale X_1.

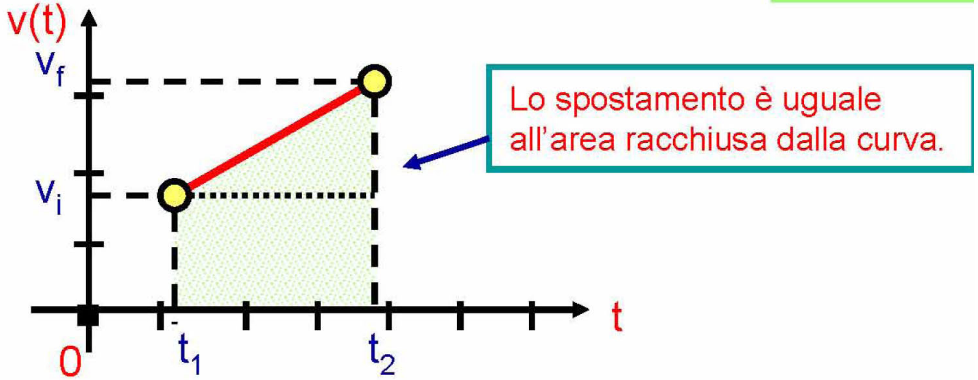
$$\boxed{X_2 = X_1 + v_m \cdot (t_2 - t_1)}$$

Problema: trovare lo spostamento nota v media

$$\boxed{X_2 = X_1 + v_m \cdot (t_2 - t_1)}$$

- Riassumendo: per trovare il punto di arrivo di un corpo che si sta muovendo con velocità costante, occorre conoscere:
  - La velocità del corpo
  - L'intervallo di tempo $(t_2 - t_1)$ nel quale è avvenuto il moto
  - Il punto di partenza (condizione al contorno)

Di solito, conosciamo due quantita' e occorre trovare la terza (incognita)



Moto uniformemente accelerato

- Esempio: un corpo si muove di moto uniformemente accelerato tra gli istanti di tempo t_1 e t_2. All'istante iniziale il corpo ha velocità pari a v_i.
- Lo spostamento è pari all'area racchiusa dalla curva. In questo caso semplice possiamo calcolare l'area anche senza risolvere l'integrale definito.
- La curva corrisponde ad un rettangolo con sovrapposto un triangolo:
  - Rettangolo: base = $t_2 - t_1$; altezza = v_i $\rightarrow$ area = $(t_2 - t_1) \cdot v_i$
  - Triangolo: base = $t_2 - t_1$; altezza = $v_f - v_i$ $\rightarrow$ area = $\frac{1}{2}(t_2 - t_1) \cdot (v_f - v_i)$
  - Area totale = area_rettangolo + area_triangolo =

$$= (t_2 - t_1) \cdot v_i + \frac{1}{2}(t_2 - t_1)(v_f - v_i) = (t_2 - t_1)\frac{v_f + v_i}{2} = \Delta t \cdot v_m$$

Vm va calcolata

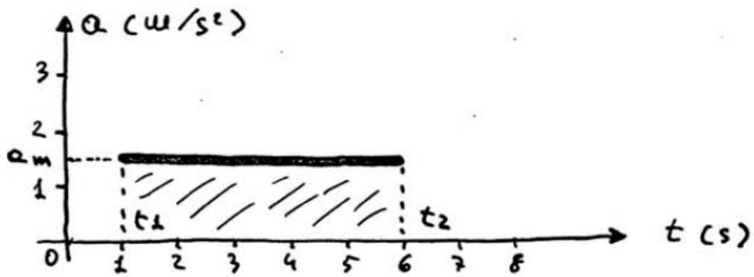
$$\Rightarrow \quad X_2 = X_1 + \Delta t \cdot v_m$$

Moto uniformemente accelerato

TROVARE LA VELOCITA' CONOSCENDO L'ACCELERAZIONE

- QUESTO E' IL CASO CHE AVVIENE PIU' FREQUENTEMENTE COME VEDREMO TRA QUALCHE LEZIONE, DI SOLITO SI RIESCE A CONOSCERE L'ACCELERAZIONE DI UN CORPO, E DA QUI OCCORRE RISALIRE ALLA LEGGE ORARIA X(t)

- CASO SEMPLICE: MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO



- SUPPONIAMO CHE TRA GLI ISTANTI t_1 e t_2 IL CORPO SI MUOVA CON ACCELERAZIONE COSTANTE a_m

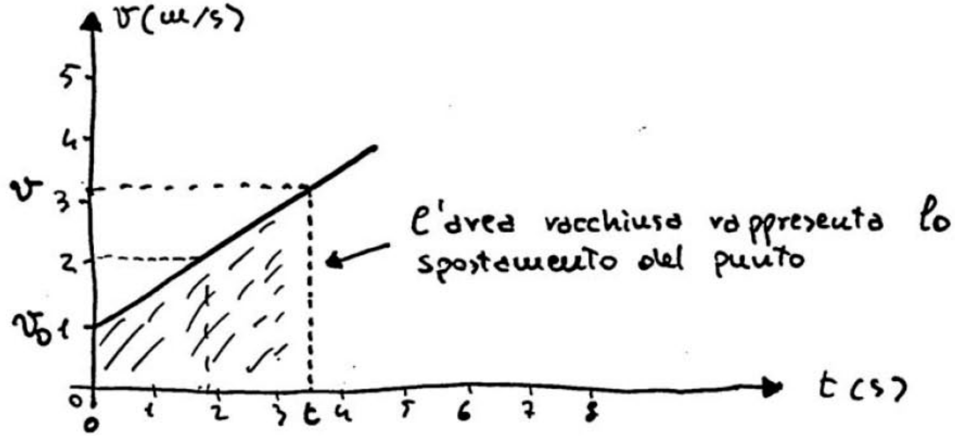
$$\Rightarrow \quad a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \quad \Rightarrow \quad v_2 - v_1 = a_m \cdot (t_2 - t_1)$$

- LA VARIAZIONE DI VELOCITA' $(v_2 - v_1)$ E' UGUALE ALL'AREA COMPRESA TRA IL GRAFICO DELL'ACCELERAZIONE E L'ASSE DEI TEMPI

- PER CONOSCERE LA VELOCITA' FINALE v_2 OCCORRE CONOSCERE LA VELOCITA' INIZIALE v_1

$$v_2 = v_1 + a_m \cdot (t_2 - t_1)$$

Moto uniformemente accelerato



$$\Rightarrow \quad x = x_0 + \bar{v}\, t \qquad \bullet \; \bar{v} = \frac{1}{2}(v_0 + v)$$

• CONOSCENDO L'ACCELERAZIONE SI HA:

$$v = v_0 + a t$$

$$\Rightarrow \quad \bar{v} = \frac{1}{2}(v_0 + v_0 + a t) = V_0 + \frac{1}{2} a t$$

moto uniformem. accelerato

$$\bullet \; x = x_0 + \left[V_0 + \frac{1}{2} a t\right] \cdot t = x_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$\boxed{x = x_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2} \qquad x = f(t)$$

Legge oraria del moto uniformemente accelerato

Combinazioni di variabili

Le equazioni $v = v_0 + at$ $\boxed{x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2}$

Sono le equazioni base per il caso di moto uniformemente accelerato, da usare ogni volta che il moto e' ad a=costante

Si noti che le grandezze implicate sono 5: x-x_o (oppure x_o), v, t, a e v_o

Di solito, una di queste grandezze non e' rilevante per il problema in questione, ne' come dato ne' come incognita, mentre 3 delle restanti grandezze sono dichiarate come dati del problema e viene chiesto di trovare la quarta. Le grandezze "inutili" possono essere eliminatedalle equazioni, ovvero si possono ottenere equazioni "aggiuntive" (da quelle base) in cui la variabile "inutile" non compare

Eq. moto con a=cost.

- AVETE $\underline{a}$ e $\underline{V_0}$:
  QUANTO VALE v DOPO UN TEMPO t ?

$$v = v_0 + at$$

- CONOSCETE $\underline{a}$, $\underline{x_0}$, $\underline{v_0}$:
  QUANTO VALE X DOPO UN TEMPO t ?

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

- CONOSCETE a, v_0, x_0 :
  QUANTO VALE v DOPO UNO SPOSTAMENTO X ?

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

- CONOSCETE x_0, V_0 :
  QUANTO VALE X SE DOPO UN TEMPO t LA VELOCITA' VALE v ?

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(V_0 + v)t$$

- CONOSCETE x_0, a :
  QUANTO VALE X SE DOPO UN TEMPO t LA VELOCITA' VALE v ?

$$x = x_0 + vt - \frac{1}{2} a t^2$$

TRASCURANDO L'ATTRITO DELL'ARIA
(GALILEO GALILEI)
SI TRATTA DI UN MOTO UNIFORMEMENTE
ACCELERATO (ACCELERAZIONE COSTANTE)

Acc. per corpi in caduta libera

SCIEGLIETE UN ASSE VERTICALE PER IDENTIFICARE
LA DIREZIONE DEL MOTO

SCIEGLIETE UN VERSO DI PERCORRENZA:

- POSITIVO VERSO L'ALTO ➡ $g = -9.80\ m/s^2$

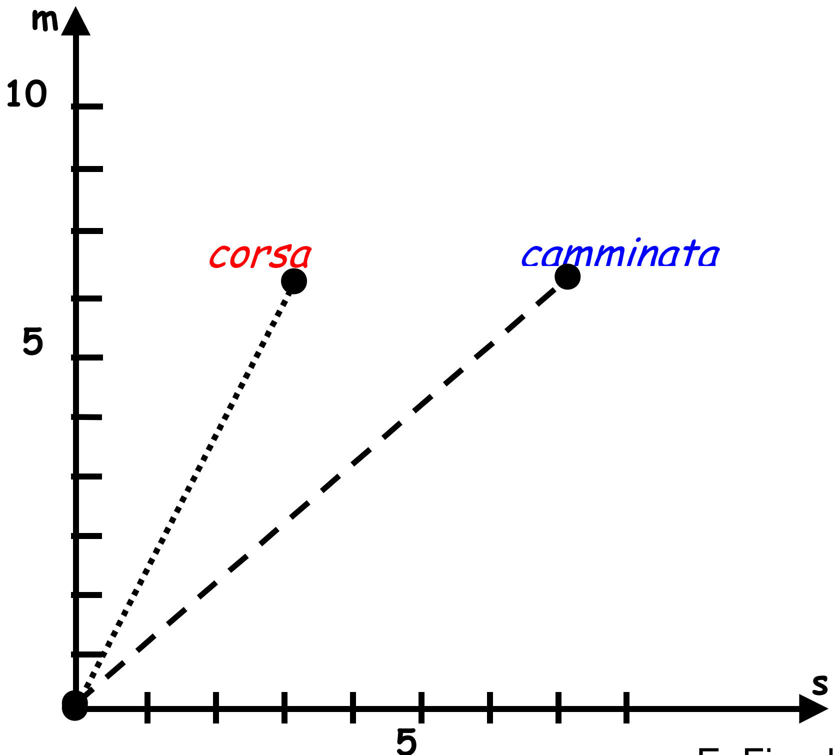
- POSITIVO VERSO IL BASSO ➡ $g = +9.80\ m/s^2$

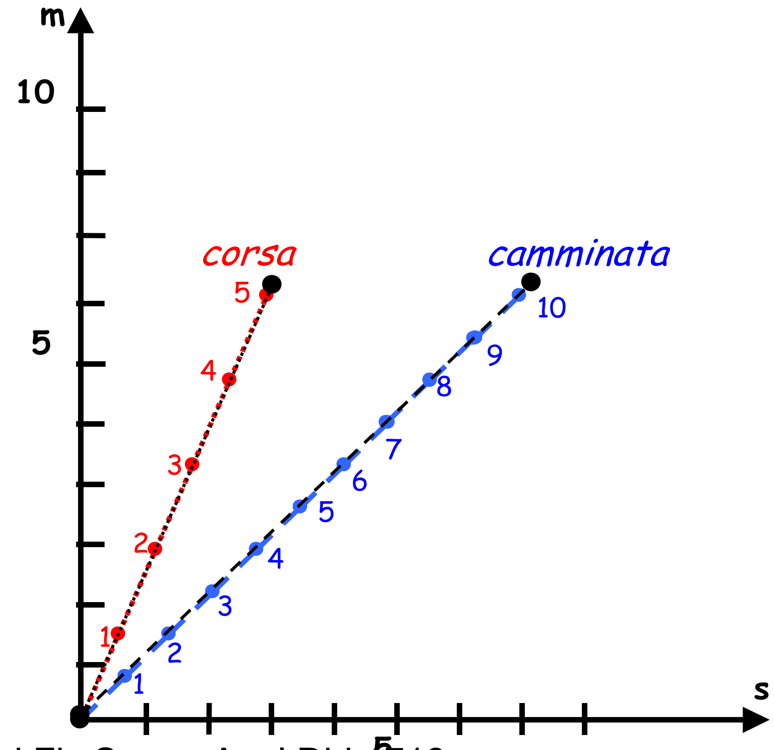
QUALUNQUE SIA LA SCÈLTA CHE VOI FATE,
L'ACCELERAZIONE DI GRAVITA' E' SEMPRE DIRETTA
VERSO IL CENTRO DELLA TERRA

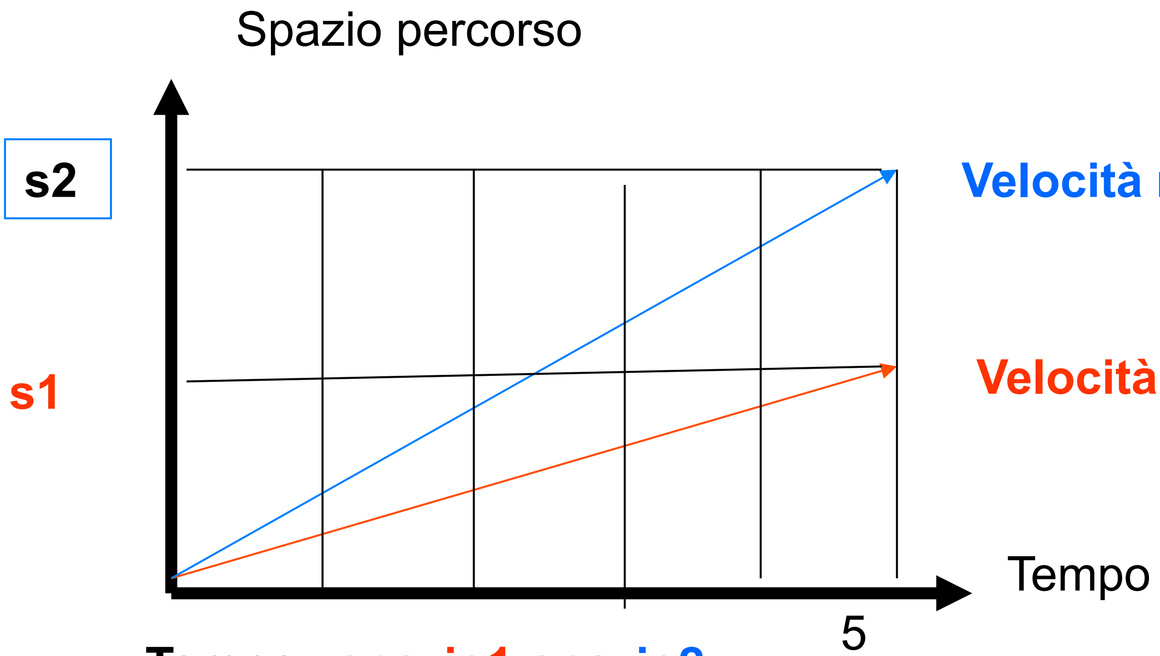
PICCOLO CAMBIO DI NOTAZIONE:
GLI SPOSTAMENTI CHE AVVENGONO NELLA DIREZIONE
VERTICALE LI INDICHIAMO CON Y INVECE DI X

Tabelle e Diagrammi

	Passi	Distanza percorsa	tempo impiegato
camminata	10 passi	6,25 m	7 s
corsa	5 passi-corsa	6,25 m	3 s







Tempo	**spazio1**	**spazio2**
1	**1**	**2**
2	**2**	**4**
3	**3**	**6**
4	**4**	**8**
5	**5**	**10**

v1=spazio1/t = 1

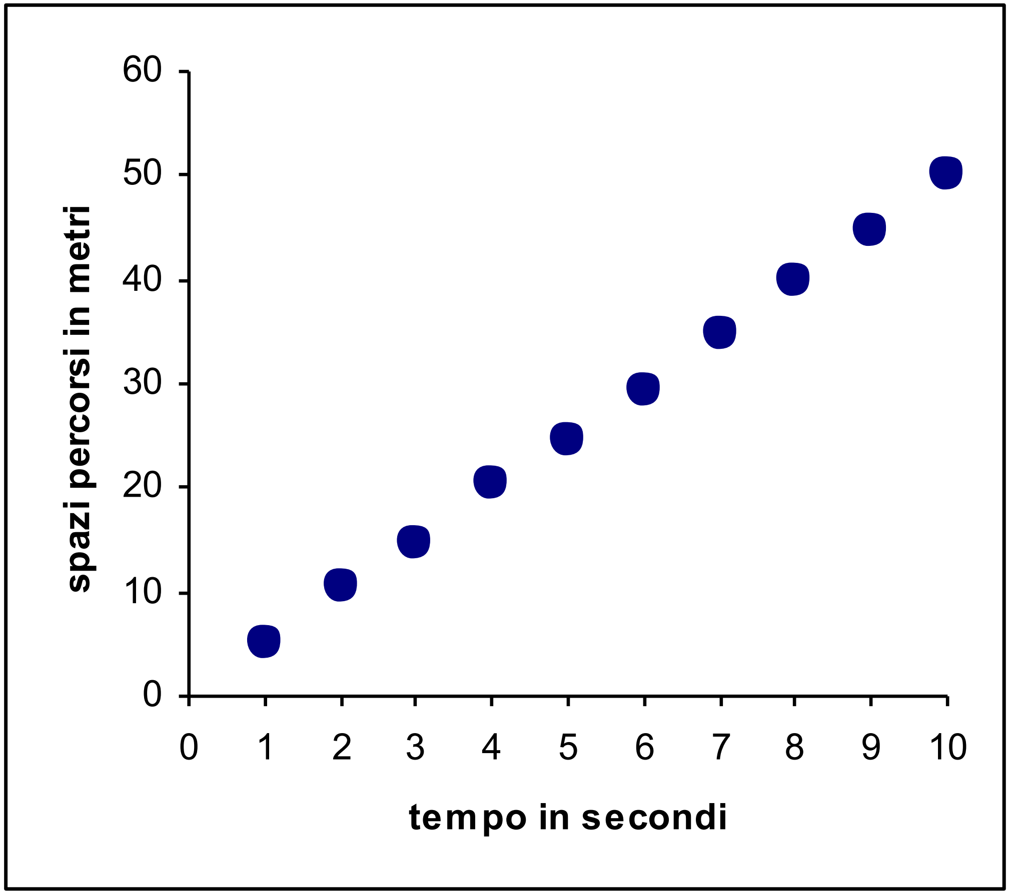
v2=spazio2/t = 2

Nel diagramma si pone il tempo in ascissa e lo spazio percorso in ordinata le diverse velocità sono rappresentate da linee con diversa pendenza

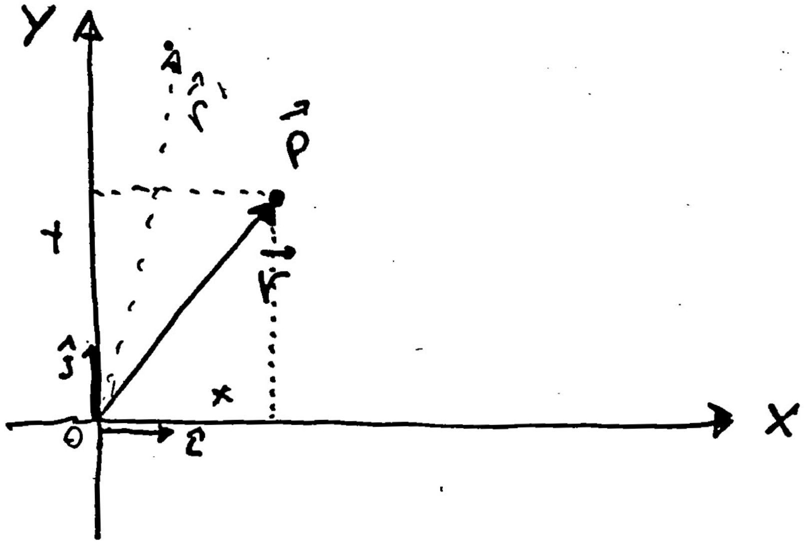
Tabelle e Diagrammi

Tempi (s)	Spazi percorsi (m)
1	5,20
2	10,50
3	14,80
4	20,50
5	24,70
6	29,30
7	34,80
8	39,80
9	44,60
10	50,00

Moto uniforme: s(t)=v*t



Spostamento in 2 o 3 dimensioni

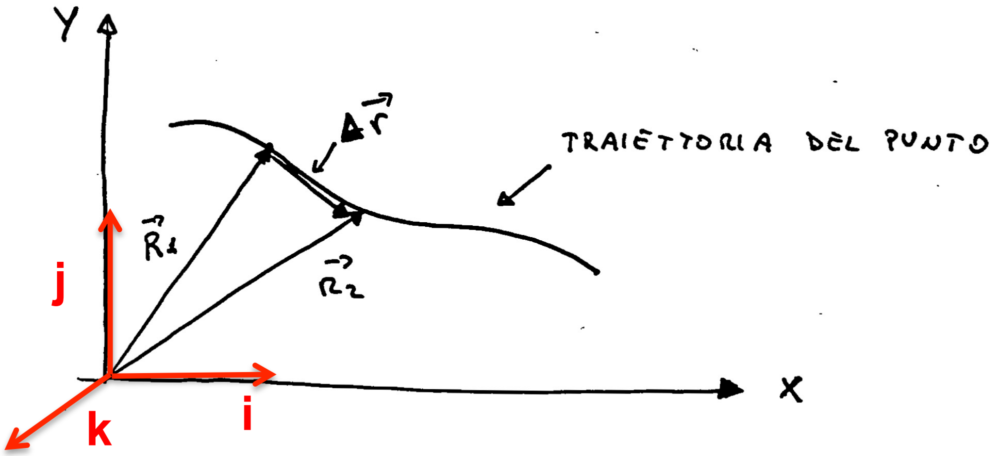


- SCEGLIAMO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO ORTOGONALE, CIOE' CON TRE ASSI FORMANTI UN ANGOLO DI 90° TRA CIASCUNO DI ESSI
- LA POSIZIONE DI UN PUNTO NELLO SPAZIO E' INDIVIDUATA DANDO IL VETTORE POSIZIONE $\vec{r}$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

- I COEFFICIENTI x, y, z RAPPRESENTANO LE POSIZIONI DEL PUNTO LUNGO I TRE ASSI COORDINATI

Ancora sullo spostamento



- QUANDO IL CORPO SI MUOVE, DISEGNANDO NELLO SPAZIO UNA TRAIETTORIA, IL VETTORE POSIZIONE $\vec{r}$ CAMBIA ANCH'ESSO.

- LO SPOSTAMENTO DEL CORPO DA UN PUNTO 1 (OCCUPATO AL TEMPO t) AD UN PUNTO 2 (OCCUPATO AL TEMPO $t+\Delta t$) E' DATO DA:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 =$$

$$= (x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})$$

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k} =$$

$$= \Delta x\,\hat{i} + \Delta y\,\hat{j} + \Delta z\,\hat{k}$$

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

NB: i, j, k sono vettori che servono a indicare la direzione e il verso dell'asse riferimento corrispondente. Hanno lunghezza unitaria fissa, cioe' modulo = 1

Ancora sullo spostamento

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 =$$

$$= (x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})$$

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k} =$$

Lo spostamento in due o tre dimensioni si studia scomponendo il vettore posizione nelle sue componenti rispetto agli assi cartesiani del sistema di riferimento.
Infatti

$\boldsymbol{v} = \Delta\mathbf{r}/\Delta t = (\Delta x/\Delta t)\,\mathbf{i} + (\Delta y/\Delta t)\,\mathbf{j} + (\Delta z/\Delta t)\,\mathbf{k}$

$\boldsymbol{a} = \Delta\mathbf{v}/\Delta t = (\Delta Vx/\Delta t)\,\mathbf{i} + (\Delta Vy/\Delta t)\,\mathbf{j} + (\Delta Vz/\Delta t)\,\mathbf{k}$

cioe' si scompone un moto in piu' dimensioni in moti unidimensionali lungo gli assi coordinati

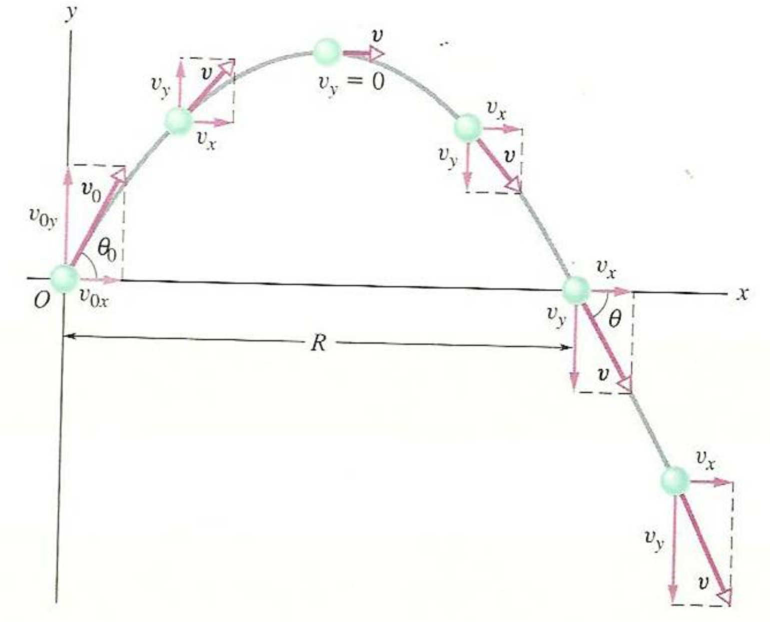
Nel 1922 uno degli Zacchini, una celebre famiglia di virtuosi del circo, fu il primo uomo cannone a essere sparato in una rete all'altro capo dell'arena. Per aumentare il brivido della folla, l'altezza e la lunghezza della traiettoria furono gradualmente aumentate, finché nel 1939 o 1940 Emanuele Zacchini sorvolò tre altissime ruote panoramiche superando una distanza orizzontale di 69 metri.

Come fece Zacchini a decidere dove collocare la rete d'atterraggio? E come poté esser certo di riuscire a non urtare le ruote panoramiche?

Troverete la risposta in questo capitolo.

Moto dei proiettili

- Si chiama proiettile una particella (ie punto materiale) che si muove in caduta libera in due dimensioni con velocita' iniziale v_o e accelerazione g costante diretta verso il basso
- Es: palla da golf, proiettile di cannone ma non un aereo o un uccello o una sfera che ruota (eg palla ad effetto)



- IL PROIETTILE È LANCIATO CON VELOCITÀ $\vec{v}_0$

$$\vec{V}_0 = V_{0x}\,\hat{i} + V_{0y}\,\hat{j}$$

$$V_{0x} = |\vec{V}_0| \cos\theta_0 \quad ; \quad V_{0y} = |\vec{V}_0| \sin\theta_0$$

- LA COMPONENTE ORIZZONTALE DELLA VELOCITÀ SI CONSERVA

- LUNGO LA DIREZIONE VERTICALE IL PROIETTILE DESCRIVE UN MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO CON ACCELERAZIONE g DIRETTA VERSO IL SUOLO

- LA GITTATA R È LA DISTANZA ORIZZONTALE CHE IL PROIETTILE HA COPERTO QUANDO RIPASSA ALLA QUOTA DI LANCIO

- Lungo la direzione orizzontale il moto e' uniforme dato che non c'e' accelerazione

$$V_x(t) = V_o\cos\theta_o$$
$$V_y(t) = V_0\sin\theta_o + gt$$

Moto dei proiettili

UNA PALLA E' LASCIATA CADERE DA FERMA NELLO STESSO ISTANTE IN CUI UN'ALTRA E' SPARATA <u>ORIZZONTALMENTE</u> VERSO DESTRA.
I LORO MOTI VERTICALI SONO IDENTICI

- LE DUE PALLE RAGGIUNGONO TERRA NELLO STESSO ISTANTE.
- IL MOTO LUNGO L'ASSE VERTICALE E' INDIPENDENTE DAL MOTO LUNGO L'ASSE ORIZZONTALE.

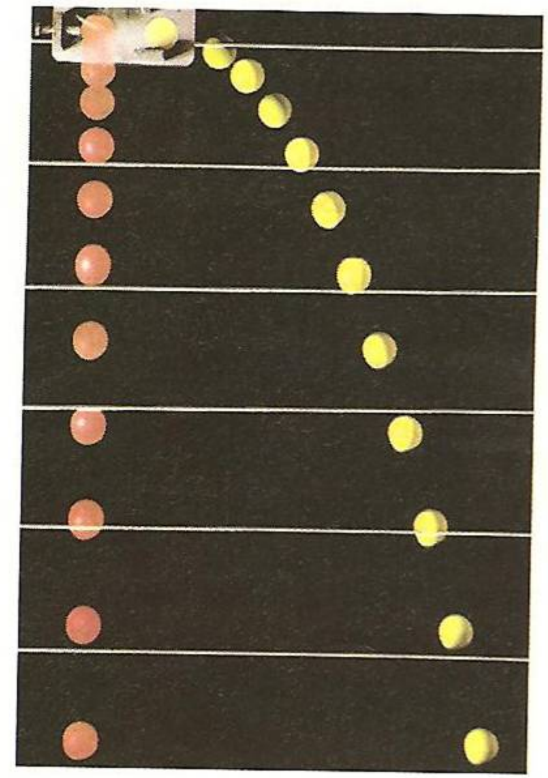


Figura 4.11 Una palla è lasciata cadere da ferma nello stesso istante in cui un'altra è sparata orizzontalmente verso destra. I loro moti verticali sono identici.

Possiamo quindi dividere il moto bidimensionale in due moti unidimensionali indipendenti fra loro (ie abbiamo ridotto un problema "complicato" in due problemi piu' semplici)

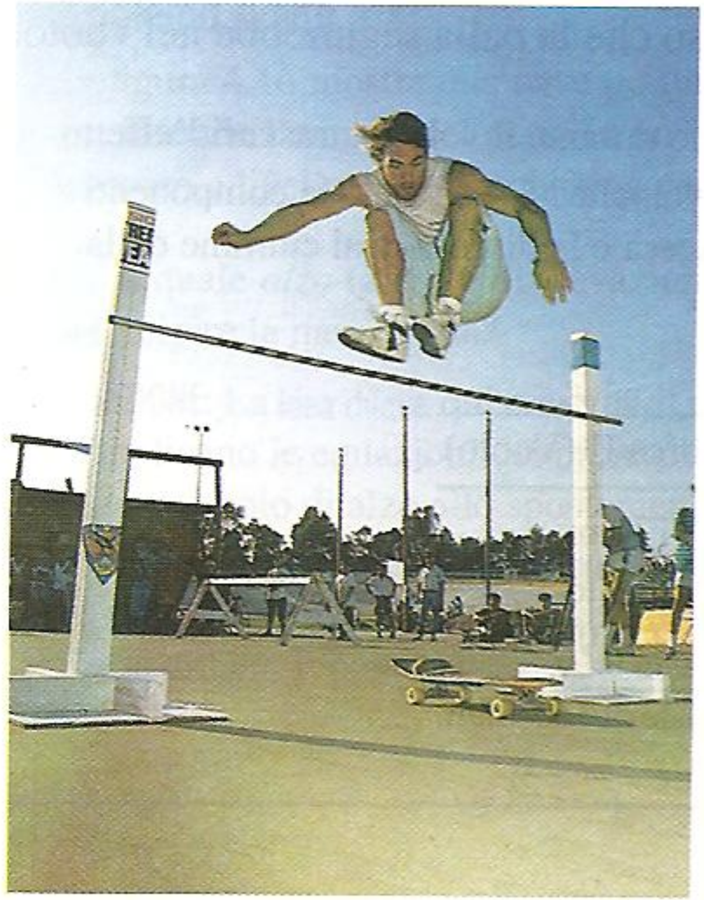


Figura 4.13 La componente verticale della velocità di questo appassionato dello *skate-board* varia, ma non la componente orizzontale, che coincide con la velocità dell'attrezzo, il quale rimane quindi sempre verticalmente sotto di lui, consentendogli di ritrovarlo nell'atterraggio.

Analisi del moto

- MOTO ORIZZONTALE

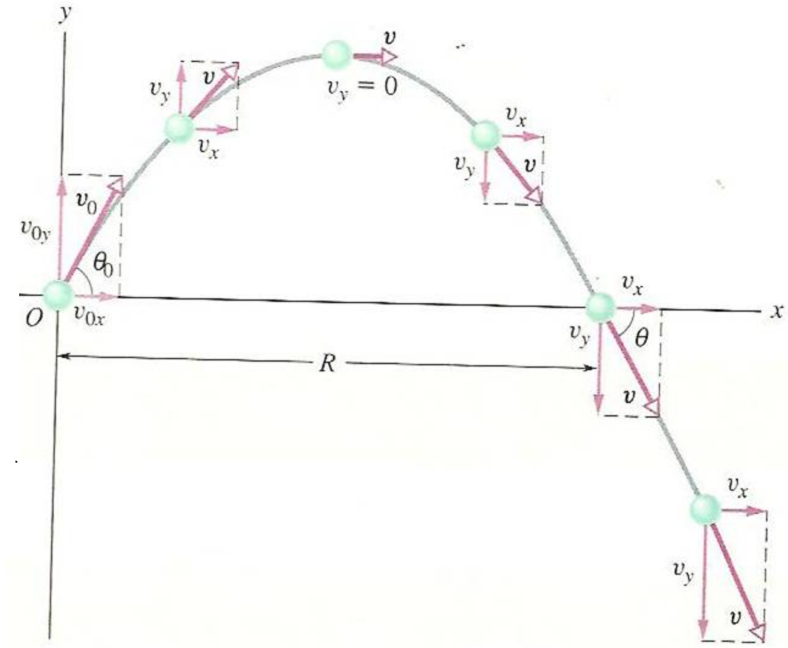
$$x = x_0 + V_{0x} \cdot t = V_0 \cos\theta_0 \cdot t$$

- MOTO VERTICALE

$$y - y_0 = V_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 =$$

$$= V_0 \sin\theta_0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

ie $v_x = v_o \cos\theta_o$ e $v_y = v_o \sin\theta_o$



Analisi del moto

• Il moto verticale è quello di una particella in caduta libera con $g = -9.8\ m s^{-2}$

(i) $y - y_0 = v_{0y} - \frac{1}{2} g t^2 = (v_0 \sin\theta_0) t - \frac{1}{2} g t^2$

(ii) $v_y = v_0 \sin\theta_0 - g t$

Eliminando il tempo usando la (ii) $t = \frac{v_y - v_0 \sin\theta_0}{-g}$

e sostituendo in (i)

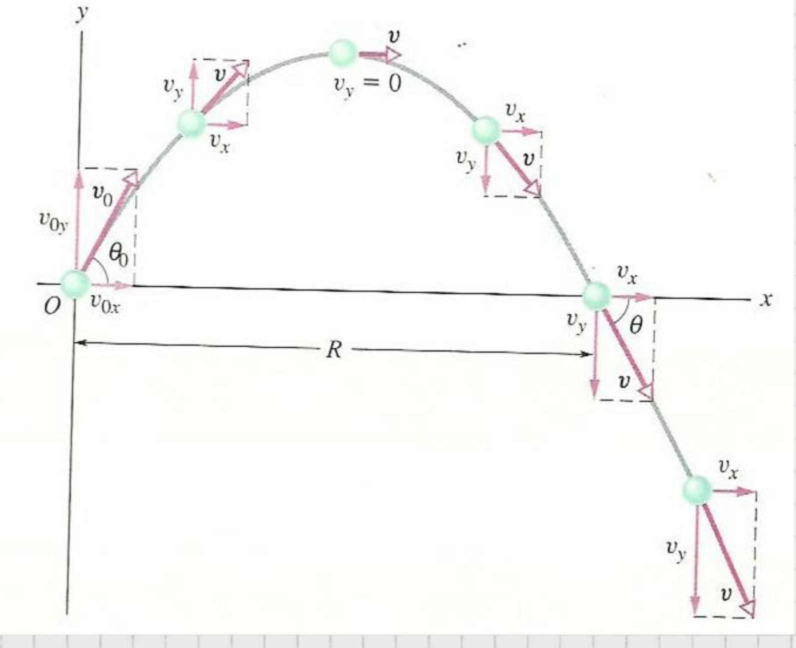
$$y - y_0 = (v_0 \sin\theta_0)\frac{(v_y - v_0\sin\theta_0)}{g} - \frac{1}{2}\cancel{g}\frac{(v_y - v_0\sin\theta_0)^2}{g^{\cancel{2}}} =$$

$$= \cancel{\frac{v_y v_0 \sin\theta_0}{-g}} - \frac{v_0^2 \sin^2\theta_0}{-g} - \frac{v_y^2}{2g} - \frac{v_0^2 \sin^2\theta_0}{2g} + \cancel{\frac{v_y v_0 \sin\theta_0}{g}}$$

$$= \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} - \frac{v_y^2}{2g} \Rightarrow y - y_0 = \frac{v_0^2 \sin^2\theta - v_y^2}{2g}$$

$\Rightarrow v_y^2 = v_0^2 \sin^2\theta - 2g(y - y_0)$, cioè

$$v_y = \pm\sqrt{v_0^2 \sin^2\theta - 2g(y - y_0)}$$



Quando il proiettile raggiunge l'altezza max $v_y = 0$ (da ii si vede che accade a $t = \frac{v_0 \sin\theta_0}{g}$)

$\Rightarrow v_0^2 \sin^2\theta - 2g(y - y_0)_{Max} = 0 \Rightarrow \underbrace{(y - y_0)_{Max}}_{H_{Max}} = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$ – Prima che raggiunga H_{max}, v_y è verso l'alto $\Rightarrow v_y > 0$, dopo è diretta verso il basso $\Rightarrow v_y < 0$ –

• MOTO ORIZZONTALE

$$x - x_0 = V_{0x} \cdot t = V_0 \cos\theta_0 \cdot t$$

• MOTO VERTICALE

$$y - y_0 = V_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 =$$

$$= V_0 \sin\theta_0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

• La GITTATA R è la distanza orizzontale coperta dal proiettile all'istante in cui ripassa alla quota di lancio.

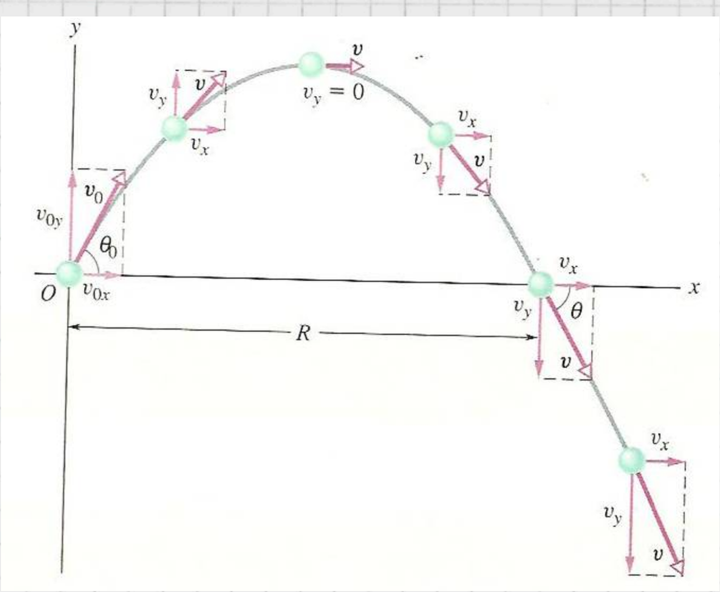
Poniamo $R = x - x_0$ e $y - y_0 = 0$ nelle equazioni

(i) $R = (v_0 \cos\theta_0) t$

(ii) $0 = (v_0 \sin\theta_0) t - \frac{1}{2} g t^2$

Elimino t da (i), sostituendolo in (ii)

$$t = \frac{R}{v_0 \cos\theta_0}$$



$$0 = \cancel{v_0} \sin\theta_0 \cdot \frac{R}{\cancel{v_0} \cos\theta_0} - \frac{1}{2} g \frac{R^2}{v_0^2 \cos^2\theta_0} \Rightarrow$$

$$0 = \left(tg\,\theta_0 - \frac{1}{2} \frac{g R}{v_0^2 \cos^2\theta} \right) R \quad \text{- Due soluzioni}$$

$$R = 0 \qquad R = \frac{2 v_0^2 \, tg\,\theta_0 \cos^2\theta_0}{g} = \frac{2 v_0^2}{g} \cdot \sin\theta_0 \cos\theta_0$$

Dall'identità trigonometrica $\sin(2\theta_0) = 2 \sin\theta_0 \cos\theta_0 \Rightarrow$

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta_0) \text{ -}$$

E' max quando $\sin(2\theta_0) = 1 \Rightarrow 2\theta_0 = 90° \Rightarrow \theta_0 = 45°$

N.B: La formula è valida solo quando quota di partenza e di arrivo sono uguali.

Traiettoria

• L'equazione della traiettoria si ottiene dalle equazioni (parametriche) in funzione del tempo

(i) $x = x_0 + (v_0 \cos\theta_0)\, t \implies t = (x - x_0)/v_0 \cos\theta_0$

(ii) $y = y_0 + (v_0 \sin\theta_0)\, t - \frac{1}{2} g t^2$

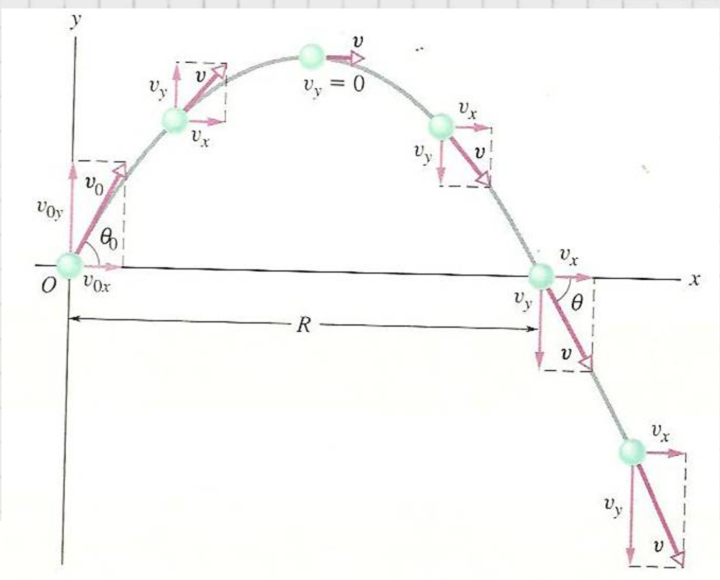
Sostituisco in (ii)

$$y = y_0 + \cancel{v_0} \sin\theta_0 \cdot \frac{(x - x_0)}{\cancel{v_0} \cos\theta_0} - \frac{1}{2} g \frac{(x - x_0)^2}{v_0^2 \cos^2\theta_0}$$

$$= y_0 + \operatorname{tg}\theta_0 \,(x - x_0) - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta_0} (x - x_0)^2$$

Se si sceglie l'origine in modo tale che $x_0 = y_0 = 0$

$$y = x \operatorname{tg}\theta_0 - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta_0} x^2$$

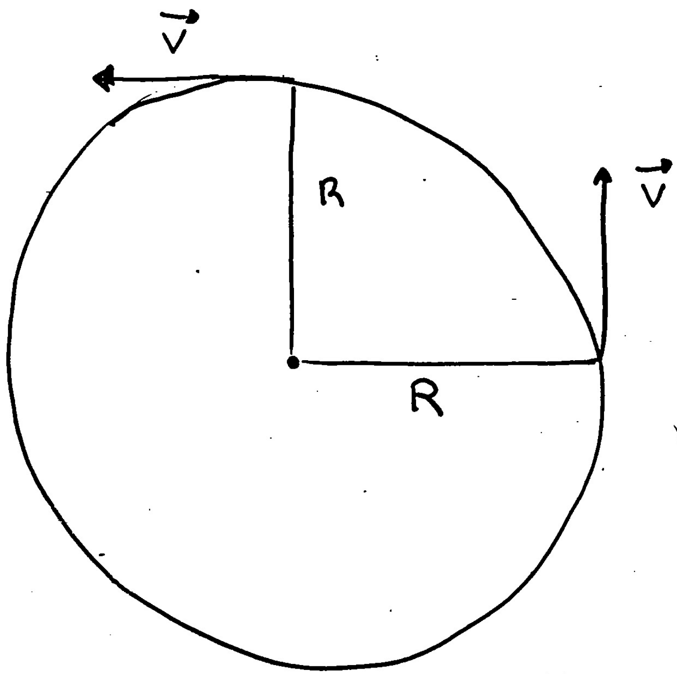


E' l'equazione di una parabola con la concavita' verso il basso

Moto circolare uniforme

- UNA PARTICELLA SI DEFINISCE IN MOTO CIRCOLARE UNIFORME SE SI SPOSTA SU UN CERCHIO O SU UN ARCO DI CERCHIO CON VELOCITA' DI MODULO COSTANTE.

- BENCHE' IL MODULO DELLA VELOCITA' SIA COSTANTE, LA PARTICELLA ACCELERA PERCHE' CAMBIA LA SUA DIREZIONE.



- LA DIREZIONE DI $\vec{V}$ E' SEMPRE ORTOGONALE AL RAGGIO
- IL VERSO DI ROTAZIONE ANTIORARIO E' POSITIVO