

Lez 17 29/11/2016

- Lezioni in http://www.fisgeo.unipg.it/~fiandrini/didattica_fisica/did_fis1617/

Entropia

- L'entropia e l'irreversibilita' dei processi sono strettamente connessi: una volta che l'universo termodinamico ha subito una trasformazione irrev ($\Delta S_u > 0$) non e' possibile tornare spontaneamente ad uno stato entropico precedente.
- Dal momento che tutti i processi reali sono irrev si puo' dire che ogni processo naturale si svolge nel verso che comporta un aumento complessivo dell'entropia dell'universo termodinamico.
- L'evoluzione di un sistema cessa quando l'entropia non puo' piu' cambiare, ovvero quando raggiunge il max compatibile con i vincoli imposti al sistema → quando l'entropia e' max, il sistema TD e' in equilibrio
- NB: il fatto che $\Delta S_u > 0$ non implica che localmente l'entropia non possa diminuire; ma se si ha una diminuzione dell'entropia in una parte dell'universo termodinamico, ci deve essere altrove una variazione tale che complessivamente l'entropia aumenta
- Per esempio nel passaggio di calore da un corpo caldo a uno freddo, l'entropia del corpo caldo diminuisce perche' cede calore Q alla temp T_1 , $\Delta S_1 = -Q/T_1$, Quello freddo assorbe calore $+Q$ alla temp T_2 , quindi S aumenta, $\Delta S_2 = +Q/T_2$ Complessivamente $\Delta S_T = \Delta S_1 + \Delta S_2 = Q(-1/T_1 + 1/T_2) > 0$ perche' $T_2 < T_1$

Entropia

Il processo inverso non puo' avvenire spontaneamente perche' comporterebbe $\Delta S_u < 0$

Questo non significa che i due corpi non possano essere riportati alle temperature iniziali, ma per farlo occorre fornire energia, cioe' spendere lavoro per prelevare calore dalla sorgente 1 e trasferirlo alla sorgente 2.

Il sistema subirebbe una trasformazione ciclica per cui $\Delta S_s = 0$, ma l'ambiente esterno e' cambiato perche' ha dovuto fare lavoro per riportare le sorgenti alle condizioni iniziali e in tal caso $\Delta S_a > 0$ cosi' che complessivamente ancora e' $\Delta S_u > 0$

Il significato dell'entropia (1)

Dal punto di vista macroscopico entropia S e irreversibilita' dei processi sono collegate alla perdita di capacita' di compiere lavoro in trasformazioni irreversibili, cioe' al fatto che in una qualsiasi processo irrev, l'energia si degrada in calore senza poter essere utilizzata come lavoro utile.

Per esempio nel caso dell'espansione libera, avremmo potuto fare lavoro con un pistone mobile che si oppone all'espansione.

Nel caso dell'espansione libera, l'ambiente esterno non cambia per niente $L = Q = 0 \rightarrow \Delta S_a = 0$, mentre $\Delta S_s = nR\ln(V_f/V_i)$. quindi $\Delta S_u = \Delta S_s = nR\ln(V_f/V_i)$.

Se ci fosse un'espansione reversibile contro una pressione p , il lavoro sarebbe stato $L_{rev} = nRT\ln(V_f/V_1)$.

Nel caso dell'esp libera ha fatto $L_{esp} = 0 \rightarrow$ ho perso un lavoro utile $L_u = L_{rev} - L_{esp} = nRT\ln(V_f/V_i) - 0 = nRT\ln(V_f/V_i) = T\Delta S_u$.

Il significato dell'entropia (2)

Un altro esempio e' quello del caso di due sorgenti a temperature T_1 e T_2 poste in contatto termico: si ha, come noto, passaggio di calore dalla sorgente calda a quella fredda.

In tal caso $\Delta S_u = \Delta S_a + \Delta S_s = 0 + \Delta S_s$ perche' non c'e' scambio con l'ambiente esterno (il passaggio avviene solo fra le due sorgenti)

$\Delta S_s = -|Q_2|/T_2 + |Q_1|/T_1 = Q/T_2 - Q/T_1 > 0$ perche' $T_1 < T_2$ e $|Q_1| = |Q_2| = Q$ perche' isolato dall'esterno

Se avessimo posto una macchina termica reversibile ad operare ciclicamente tra le due sorgenti avremmo avuto $L_{rev} = \eta_{rev} Q_A$ dalla def di rendimento $\rightarrow L_{rev} = Q_2 (1 - T_1/T_2)$ dal teorema di Carnot

Nel caso di trasf irrev $L_{irr} = |Q_2| - |Q_1|$ (dato che $\Delta U = 0$ per trasformazioni cicliche)

$$\begin{aligned} \rightarrow L_{rev} - L_{irr} &= Q_2 (1 - T_1/T_2) - (Q_2 - Q_1) = Q_2 - Q_2(T_1/T_2) - Q_2 + Q_1 \\ &= -Q_2(T_1/T_2) + Q_1 (T_1/T_1) = T_1(-Q_2/T_2 + Q_1/T_1) = T_1 \Delta S_u \end{aligned}$$

Il significato dell'entropia (3)

Questi sono esempi di una proprietà generale: quando avviene una trasformazione irreversibile in cui l'entropia dell'universo (termodinamico) aumenta di ΔS_u , la grandezza $E_{in} = T\Delta S_u$ è pari alla differenza tra il lavoro che si sarebbe potuto ottenere nel caso in cui la trasf fosse stata reversibile e quello che si ottiene con una trasf irrev.

Tale quantità è detta appunto energia inutilizzabile E_{in} misura l'energia degradata dalla natura irrev del processo che appare come una conseguenza inevitabile dell'aumento di entropia, ed è una misura quantitativa della perdita di capacità di compiere lavoro da parte del sistema termodinamico e del suo ambiente quando $\Delta S_u > 0$

L'entropia: alcune considerazioni

Nel linguaggio corrente spesso vengono utilizzate frasi del tipo:

L'umanità 'consuma' energia, oppure:

Le risorse energetiche sulla Terra vanno 'esaurendosi' e simili.

Eppure noi sappiamo che l'energia di un sistema isolato (per il I Principio della Termodinamica) si conserva sempre. Come abbiamo già ricordato l'energia si trasforma da una forma ad un'altra, si trasferisce da un corpo ad un altro, può essere accumulata o liberata, ma si mantiene costante.

Quando si parla impropriamente di 'consumo di energia', di 'diminuzione di energia', in realtà si intende parlare di un altro fenomeno che accompagna tutti i fenomeni irreversibili: la **'degradazione'** dell'energia.

Immaginiamo ad esempio di bruciare una certa quantità di combustibile e di raccogliere tutti i prodotti della combustione (calore, fumo, ceneri, ecc...) : in base al I Principio possiamo affermare che essi contengono esattamente la stessa quantità di energia che era contenuta nel combustibile di partenza.

Eppure è indubbio che se la **quantità** di energia è la stessa, la **qualità** è cambiata.



Secondo principio della termodinamica

Può essere espresso in molti modi equivalenti:

Non è possibile realizzare una trasformazione il cui unico risultato sia la conversione integrale di calore assorbito in lavoro (enunciato di Kelvin).

Non è possibile realizzare una trasformazione il cui unico risultato sia il trasferimento di calore da una sorgente a temperatura più bassa ad una sorgente a temperatura più alta (enunciato di Clausius).

Non è possibile realizzare una macchina termica con rendimento $\eta = 100\%$.

Non è possibile realizzare una macchina frigorifera che non assorba lavoro.

Entropia

- In tutti i **processi irreversibili** la variazione di entropia è positiva...
- Nei **processi reversibili** (è un'astrazione) la variazione di entropia dell'universo (ambiente+sistema) è nulla
- La formulazione *matematica* del secondo principio della termodinamica è:

Ogni processo conduce ad una variazione positiva o nulla dell'entropia dell'universo. La variazione è nulla solo per processi reversibili
→ In ogni sistema isolato $dS>0$

Entropia

- L' **Entropia** puo' essere vista come una funzione che descrive il **numero di arrangiamenti possibili** (dell' energia e della materia) che sono disponibili
- La Natura procede **spontaneamente** verso gli stati che hanno **maggior probabilita'** di esistenza.
- Queste osservazioni sono le basi della Termodinamica Statistica

Secondo principio e dadi

- Supponiamo di gettare due dadi e di ottenere un totale di nove. Questo risultato può essere ottenuto in quattro modi diversi come mostrato nella tabella seguente

Primo dado	Secondo dado
6	3
3	6
5	4
4	5

- Ognuna di queste quattro possibilità viene chiamata *stato microscopico*, mentre il totale di 9 viene chiamato *stato macroscopico*. Il numero di stati microscopici che corrispondono ad ogni stato macroscopico viene indicato con il simbolo W . Nel nostro caso W_9 è uguale a 4

- Se con i dadi abbiamo un 12, ciò può accadere in un solo modo, con un 6 su ciascun dado, per cui avremo che W_{12} è uguale ad 1. Quindi ottenere un 9 è 4 volte più probabile che ottenere un dodici per il semplice fatto che allo stato macroscopico 9 corrispondono 4 stati microscopici, mentre allo stato macroscopico 12 ne corrisponde uno solo.
- Possiamo ora applicare queste idee al nostro modello di gas. Noi certamente considereremo la possibilità che tutte le particelle calde rimangano confinate nella parte sinistra della scatola come assai eccezionale, uno stato macroscopico molto improbabile per un gas. Ci apparirà invece più probabile lo stato con le particelle distribuite anche nella parte sinistra occupando tutto il volume a disposizione; infatti, come per i dadi, ad essa corrisponde un numero estremamente grande di stati microscopici. Si passa cioè sempre da uno stato con meno microstati cioè meno disordinato, ad uno stato con più microstati, cioè più disordinato, ma più probabile. Quindi.

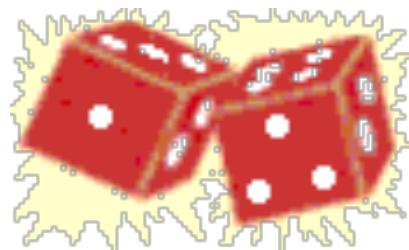
Microstati e Macrostati

- La Termodinamica Classica classifica gli stati in base alle caratteristiche macroscopiche
- La Termodinamica Statistica utilizza i microstati (stati microscopici)
 - Microstato: posizione e momento di ogni molecola
 - Macrostate: (p, V, T)
- Molteplicita': il numero di microstati corrispondenti ad un unico macrostato

Ipotesi fondamentale

Ogni microstato ha la stessa probabilità di esistere

Come nel lancio dei dadi



Ordine, Disordine e caso

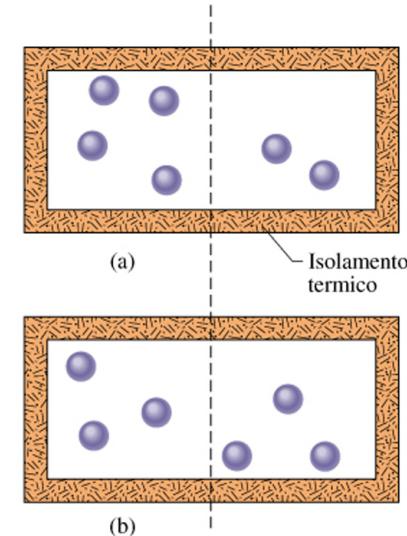


Analogia: lanciando I Dadi

- Lanciando un dado: 1/2/3/4/5/6 sono egualmente probabili
- Lanciando due dadi:
 - Per ognuno 1/2/3/4/5/6 egualmente probabili
 - La somma 7 e' piu' probabile rispetto a 6 o 8
- Perche'? 6 combinazioni (microstati) danno 7 (il macrostato): 1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1. Ci sono 5 combinazioni che danno 6 o 8, etc.

Entropia e Statistica

- Un sistema termodinamico è costituito da un numero molto grande di particelle.
- Analizziamo da un punto di vista statistico tale sistema
- Il numero di particelle non può essere un parametro fondamentale... scegliamo un sistema con 6 particelle indistinguibili contenute in una scatola...
- Ad ogni istante ogni molecola può trovarsi nella metà a sinistra o destra indifferentemente (la probabilità è la stessa)
- Quante sono le possibili combinazioni (microstati) che si possono formare?



Numero identificativo	Configurazione		Molteplicità W (numero dei microstati)	Calcolo di W (eq. 21.18)	Entropia 10^{-23} J/K (eq. 21.19)
	n_1	n_2			
I	6	0	1	$6!/(6! 0!) = 1$	0
II	5	1	6	$6!/(5! 1!) = 6$	2.47
III	4	2	15	$6!/(4! 2!) = 15$	3.74
IV	3	3	20	$6!/(3! 3!) = 20$	4.13
Numero totale dei microstati = 64					

Entropia e Statistica...

- In effetti poiché le 6 particelle sono indistinguibili ci sono 7 macrostati che corrispondono ad un totale di $2^6=64$ microstati *diversi* (in realtà non sono diversi perché le particelle sono indistinguibili)
- Tutti i microstati sono ugualmente probabili (le particelle sono indistinguibili)
- Ma ad ogni macrostato corrisponde un numero diverso di microstati...
- Quindi la probabilità di avere un particolare macrostato è diversa da un altro (vedi tabella precedente) perché il numero di microstati (**molteplicità W**) è diverso per ciascuno macrostato

Entropia e Statistica...

- Esiste quindi un particolare macrostato che è il più probabile (nell'esempio precedente è lo stato con 3-3 e 20 microstati che ha una probabilità $p=20/64=0.3125=31.25\%$)
- Per un numero di particelle elevato il numero di microstati è enorme ma la quasi totalità di questi è comunque molto vicino allo stato con probabilità massima
- Lo stato di probabilità massima è lo stato verso cui il sistema tende...
- ...è lo stato di equilibrio!
- Boltzmann nel 1877 propose una relazione molto elegante tra la molteplicità di un macrostato e l'entropia:

$$S = k \ln W$$

- È naturale che S e W siano legati dalla funzione logaritmo: l'entropia totale di 2 sistemi è infatti data dalla somma delle singole entropie; mentre la probabilità di avere 2 sistemi indipendenti è data dal prodotto delle singole probabilità (ricordare che $\ln ab = \ln a + \ln b$)

9. Il terzo principio della termodinamica

- Negli ultimi due secoli si sono ottenute in laboratorio temperature sempre più basse:
 - nel 1834 Thilorier raggiunge **163 K** (CO_2 solida);
 - nel 1898 Dewar liquefà l'ossigeno a **23 K**;
 - nel 1908 Onnes liquefà l'elio a **5 K**;
 - nel 1960 si raggiungono i **10^{-6} K**;
 - nel 1995 il condensato di Bose-Einstein arriva a **$0,17 \times 10^{-6}$ K**;
 - nel 2003 si raggiungono sperimentalmente i **$4,5 \times 10^{-10}$ K**.

Il terzo principio della termodinamica

- Tuttavia, più la temperatura di un corpo si avvicina allo zero assoluto, più è difficile raffreddarlo ulteriormente,
- secondo il



- Terzo principio della termodinamica:
- è *impossibile raffreddare un corpo fino allo zero assoluto mediante un numero finito di trasformazioni. (Legge di Nernst)*

Il terzo principio della termodinamica

- Riepilogo di tutti i principi della termodinamica.

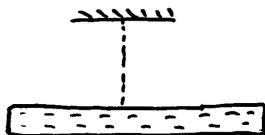
PRINCIPI DELLA TERMODINAMICA

Princípio	Enunciato
Zero	Se il corpo A è in equilibrio termico con un corpo C e anche un altro corpo B è in equilibrio termico con C , allora A e B risultano in equilibrio termico tra loro.
Primo	L'energia totale di un sistema si conserva ($\Delta U = Q - W$).
Secondo	Enunciato 1 (Lord Kelvin). È impossibile realizzare una trasformazione il cui <i>unico</i> risultato sia quello di assorbire una determinata quantità di calore da un' <i>unica</i> sorgente e trasformarla <i>integralmente</i> in lavoro. Enunciato 2 (Clausius). È impossibile realizzare una trasformazione il cui <i>unico</i> risultato sia quello di fare passare calore da un corpo più freddo a uno più caldo. Enunciato 3. È impossibile realizzare una macchina termica con rendimento uguale a 1. Enunciato 4. L'evoluzione spontanea di un sistema isolato lo porta a uno stato di equilibrio a cui corrisponde il massimo aumento dell'entropia (compatibile con il rispetto del primo principio della termodinamica).
Terzo	È impossibile raffreddare un corpo fino allo zero assoluto mediante una procedura che contiene un numero finito di trasformazioni.

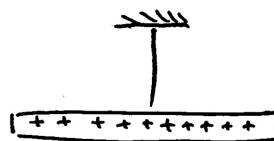
Elettrostatica

TALETE DI MILETO SCOPRI' CHE QUANDO UN PEZZO
DI AMBRA VENIVA STROFINATO ERA IN GRANDO DI
ATTRARRE PEZZETTI DI CARTA

AMBRA = ELEKTRON



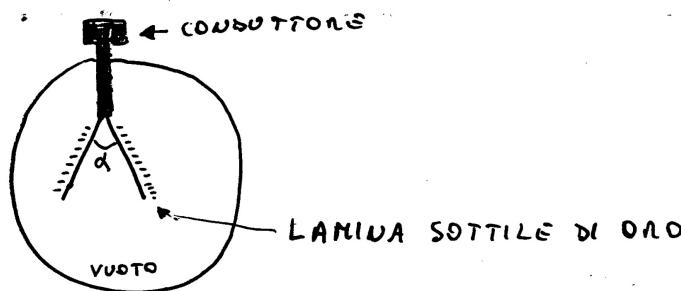
BACCHETTA DI PLASTICA STROFINATA CON
UNA PELLE



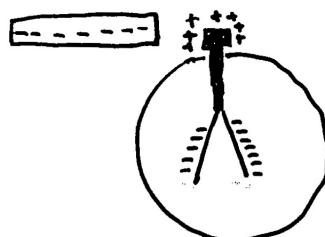
BACCHETTA DI VETRO STROFINATA CON
DELLA SETA

- DUE BACCHETTE DI VETRO SI RESPINGONO
- DUE BACCHETTE DI PLASTICA SI RESPINGONO
- UNA BACCHETTA DI VETRO ED UNA DI PLASTICA SI ATTACCONO
- SE UNA BACCHETTA "SCARICA" SI METTE A CONTATTO CON UNA "CARICA", SI CARICA ANC'ESSA.
- B. FRANKLIN (~1750) IPOTIZZO' CHE VI FOSSE UN FLUIDO ELETTRICO CHE SI TRASMETTEVA DA UN CORPO AD UN ALTRO E CHE SI CONSERVAVA

Fenomeni elettrici



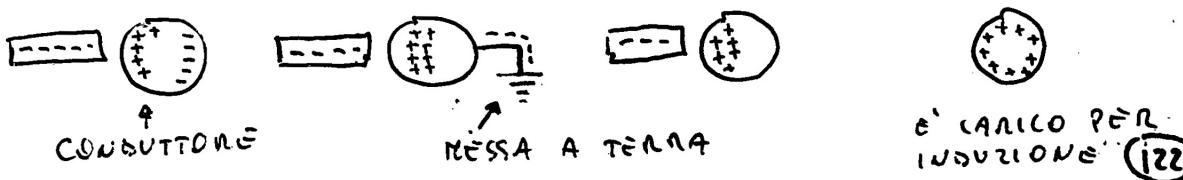
- ERA POSSIBILE MISURARE LA QUANTITA' DI CARICA POSSESSATA DA UN OGGETTO CON UNO STRUMENTO CHIARATO ELETROSCOPIO.



- METTENDO A CONTATTO UN CORPO CARICO CON L'ELETROSCOPIO, PARTE DELLA CARICA SI TRASFERIVA SULLE LAMINE D'ORO CHE SI RESPINGEVANO.
L'ANGOL0 α E' PROPORTIONALE ALLA CARICA Q .

- INDUZIONE ELETROSTATICA

SE SI AVVICINA UN CORPO CARICO ALL'ELETROSCOPIO
SI OSSERVA CHE LE LAMINE REGISTRANO UNA PRESENZA
DI CARICA

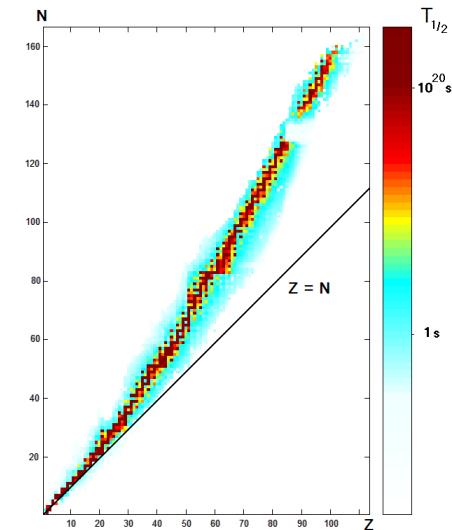
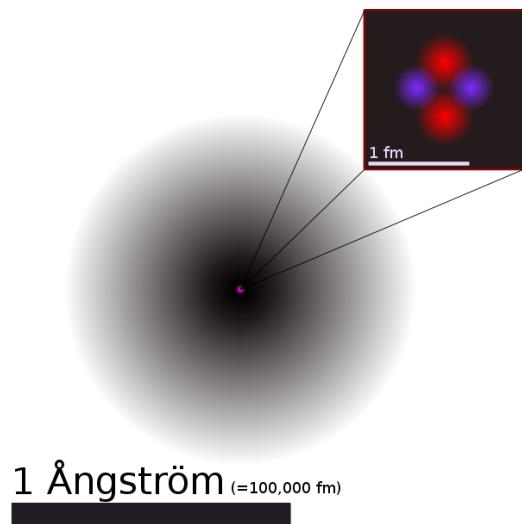
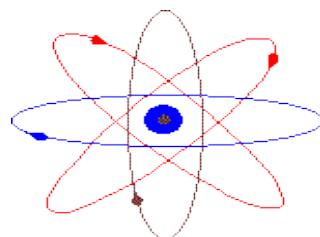


Carica elettrica

- John Dalton (1776-1844) avvalendosi delle della legge della conservazione della massa e legge delle proporzioni definite formulò la sua teoria atomica:
 - gli atomi di uno stesso elemento sono tutti uguali tra loro
 - la materia è formata da particelle chiamate atomi
 - gli atomi non sono ulteriormente scomponibili
- Geiger e Marsden (1909) studiando la deviazione di particelle alfa (nuclei di elio) emesse da sostanze radioattive (e sparate contro un foglio sottile di oro), hanno stabilito il cosiddetto “modello planetario” dell’atomo:
 - La massa è concentrata nel nucleo dell’atomo (protoni e neutroni)
 - particelle “leggere” (elettroni) “ruotano” attorno al nucleo come fanno i pianeti attorno al sole.
- La forza che trattiene gli elettroni attorno al nucleo è la forza di Coulomb tra elettroni e nucleo

Carica elettrica 2

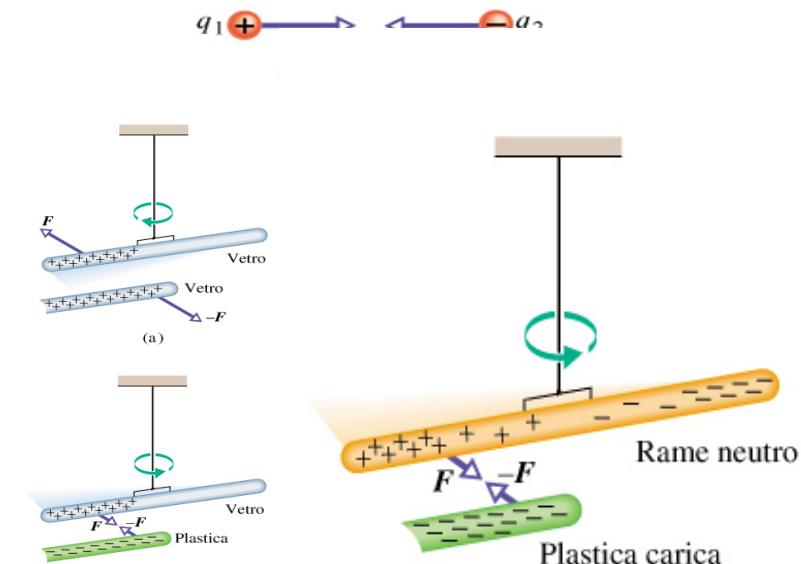
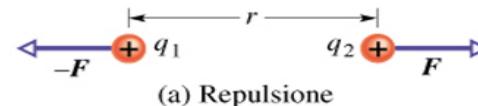
Modello atomico:



- Il nucleo è costituito da protoni e neutroni (massa $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg)
- Il numero di elettroni (massa $1/1836$ della massa del protone) è pari al numero di protoni (l'atomo è elettricamente neutro)
- Protoni ed elettroni hanno una caratteristica (analogia alla massa) detta carica elettrica. Mentre esiste un solo tipo di massa esistono due tipi di cariche elettriche (per convenzione positiva quella dei protoni, negativa quella degli elettroni).
- Cariche di segno opposto si attraggono, dello stesso segno si respingono.

Cariche elettriche – Isolanti e Conduttori

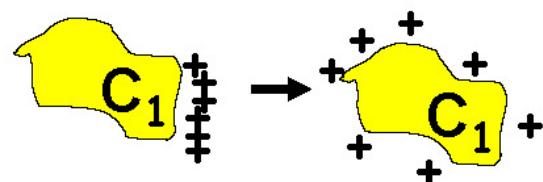
- La struttura dell'atomo fornisce l'interpretazione dei fenomeni elettrici noti già ai greci.
- Strofinando tra loro (anche mettendo in contatto sostanze diverse) un certo numero di elettroni passa da una sostanza all'altra, una sostanza avrà cariche elettriche in eccesso, l'altra in difetto. Se gli elettroni in eccesso non sono liberi di muoversi (sostanze isolanti) i due corpi si attraggono.
- In alcune sostanze (conduttori come l'acqua con sali disiolti, metalli, il corpo umano – altissima percentuale di acqua) gli elettroni si muovono quasi liberamente e tendono ad allontanarsi disperdendosi.
- Con questo processo i corpi isolanti si caricano elettricamente.



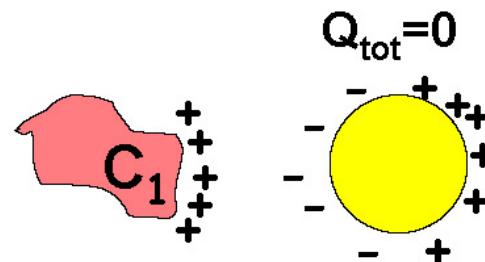
Il comportamento di un materiale è legato alla sua struttura atomica:

→ **isolanti**: gli elettroni sono ben vincolati al nucleo. Se aggiungiamo della carica in una zona non si muove verso altre parti del corpo (vetro, plastica)

→ **conduttori**: gli elettroni esterni sono debolemente legati e quindi si muovono " facilmente " sotto l'azione di una forza esterna. Se aggiungiamo della carica in una zona tende a disperdersi. (metalli)



Se avviciniamo un corpo isolante carico ad un conduttore isolato la carica sul conduttore si ridistribuisce: abbiamo il fenomeno dell'**induzione elettrostatica**.



Carica elettrica

La carica non e' continua, come non lo e' nessun materiale:

Essi sono costituiti da entita' discrete, atomi o molecole.

Allo stesso modo si 'e trovato che la carica elettrica puo' assumere solo valori discreti, multipli interi della carica elettrica fondamentale $e = 1.6021 \times 10^{-19}$ C, cioe' la carica elettrica e quantizzata, $q = ne$ dove $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

La carica e e' una delle costanti fondamentali della natura

NB: la carica elettrica non e' una "sostanza": le particelle materiale sono sostanza, la carica elettrica e' una propriet'a delle particelle, come la massa

La carica elettrica totale di un sistema isolato e' conservata in tutti i processi fisici: $Q_{\text{prima}} = Q_{\text{dopo}}$

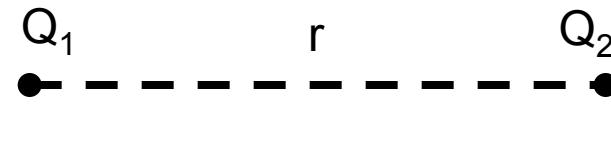
E' una delle leggi di conservazione fondamentali (come quelle di quantita' di moto, energia e momento angolare)

Particolarmente evidente e importante in fisica delle particelle elementari

Legge di Coulomb

La forza che si esercita fra due cariche puntiformi in quiete vale

$$\vec{F} = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \hat{u}_r$$



- NEL VUOTO, NEL S. I., SI HA:

$$k = 8.9876 \cdot 10^9 \text{ N} \frac{\text{m}^2}{\text{C}^2} \approx 9.0 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$$

- PER SEMPLIFICARE LE LEGGI DELL'ELETTRORAGNETISMO SI PONE:

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

- $\epsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$ [costante dielettrica del vuoto (permittività)]

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \frac{1}{r}$$

- LA FORZA È DIRETTA LUNGO LA RETTA CONGIUNGENTE LE DUE CARICHE
- PUO' ESSERE ATTRATTIVA O REPULSIVA

Unita' di misura della carica: il Coulomb



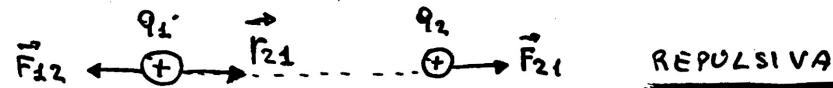
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \hat{r}$$

- NEL S.I. LA QUANTITA' DI CARICA SI MISURA IN COULOMB C
- DUE CARICHE DI 1 C POSTE ALLA DISTANZA DI 1 m ESERCITANO UNA SULL'ALTRA UNA FORZA PARI A $9 \cdot 10^9 N$
- IL COULOMB È UNA QUANTITA' DI CARICA MOLTO GRANDE
- L'UNITA' DI MISURA FONDAMENTALE NEL S. I. NON È IL COULOMB MA L'AMPERE A, CHE È L'UNITA' DI MISURA DELLA CORRENTE ELETTRICA
- CARICA DI UN ELETTRONE

$$Q_e = -1.60 \cdot 10^{-19} C$$

$$\Rightarrow 1 C = \frac{1}{|Q_e|} = 6.25 \cdot 10^{18} \text{ elettroni}$$

Forza di Coulomb

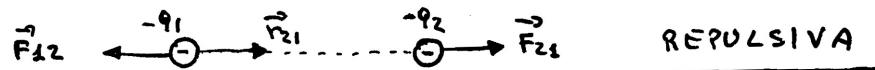


$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21}$$

forza sulla carica 2 dovuta
alla carica 1

- IL RAGGIO VETTORE \vec{r} È DIRETTO DALLA CARICA CHE ESERCITA LA FORZA ALLA CARICA CHE LA SUBISCE
- VERSORE $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$
- PER IL PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE SI HA:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$



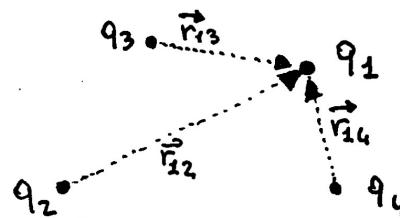
$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21}$$



$$\vec{F}_{21} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21}$$

Principio di sovrapposizione

- SUPPONIAMO DI AVERE 4 CARICHE, q_1, q_2, q_3, q_4
VALUTIAMO LA FORZA CHE LE TRE CARICHE q_2, q_3, q_4
ESERCITANO SULLA CARICA q_1



$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$
 forza esercitata sulla carica 1 dalla carica 2

$$\vec{F}_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_3}{r_{13}^2} \hat{r}_{13}$$
 forza esercitata sulla carica 1 dalla carica 3

$$\vec{F}_{14} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_4}{r_{14}^2} \hat{r}_{14}$$
 forza esercitata sulla carica 1 dalla carica 4

- CIASCUNA CARICA SEPARATAMENTE ESERCITA SULLA CARICA 1 LA FORZA \vec{F}_{1c} ($c=2,3,4$)

Principio di sovrapposizione

- LA FORZA CHE LE TRE CARICHE ESERCITANO CONTEMPORANEAMENTE SULLA CARICA 1 È DATA DALLA SOMMA VETTORIALE:

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} \hat{r}_{13} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_4}{r_{14}^2} \hat{r}_{14} = \\ &= q_1 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3}{r_{13}^2} \hat{r}_{13} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_4}{r_{14}^2} \hat{r}_{14} \right) = \\ &= q_1 \sum_2^4 \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}_{1i}}{r_{1i}^2}\end{aligned}$$

- LA PROPRIETÀ DI POTER SONNARE GLI EFFETTI DELLE SINGOLE CAUSE PER TROVARE L'EFFETTO GLOBALE SI CHIAMA PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI.

N.B. SE LASCIAMO INVARIATE LE POSIZIONI DELLE CARICHE È CAMBIANO SOLO IL VALORE DELLA CARICA q_1

$$q_1 \rightarrow q'_1$$

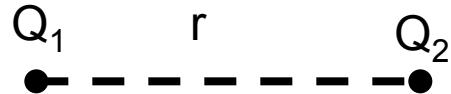
AVREMO CHE

$$\vec{F}'_1 = \frac{q'_1}{q_1} \cdot \vec{F}_1$$

Campo elettrico

- ❑ Prendiamo Q_1 come sorgente: su Q_2 agisce una forza dovuta alla presenza della carica Q_1
- ❑ Le due cariche non sono a contatto ma si trovano a una distanza r : com'e' possibile che vi sia una forza senza contatto?
- ❑ Faraday (»1830) ipotizzo' il concetto di campo elettrico
- ❑ La carica Q_1 modifica le proprieta' dello spazio circostante creando un "campo" di forze.
- ❑ Q_2 interagisce con il campo (creato da Q_1) presente nel punto in cui essa si trova

$$\vec{F} = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \hat{u}_r$$



1) UNA CARICA q POSTA NELLO SPAZIO PRODUCE UN CAMPO ELETTRICO

2) UN'ALTRA CARICA q_0 INTERAGISCE CON IL CAMPO ELETTRICO PRODOTTO DALLA PRIMA E SUBISCE QUINDI UNA FORZA

3) MISURANDO QUESTA FORZA SI RISALE AL CAMPO.
LA FORZA SI PUO' MISURARE IN MANIERA STATICIA (DINAMOMETRO)
OPPURE DINAMICA (ACCELERAZIONE, $F=ma$)

• Sperimentalmente si trova che la forza misurata è proporzionale alla carica q_0 usata per misurare il campo

$$F \propto q_0 \Rightarrow \vec{F} = q_0 \vec{E}$$

• QUINDI OPERATIVAMENTE SI HA:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

• SPOSTANDO LA CARICA q_0 SI DETERMINA \vec{E} IN TUTTI I PUNTI DELLO SPAZIO.

• N.B. PER EVITARE CHE LA CARICA DI PROVA DISTURBI LA DISTRIBUZIONE DELLE ALTRE CARICHE CHE GENERANO IL CAMPO, SI SCEGLIE UNA CARICA MOLTO PICCOLA

$$\vec{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q_0}$$

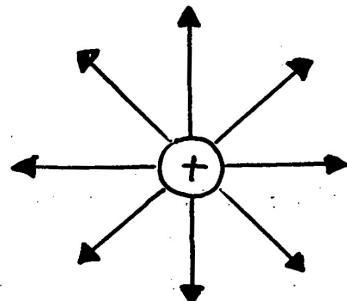
• SE SI HANNO PIU' CARICHE IL CAMPO ELETTRICO RISULTANTE E' LA SOMMA DEI SINGOLI CAMPI ELETTRICI (PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE)

Definizione di E

- LE LINEE DI FORZA DANNO LA DIREZIONE E IL VERSO DEL CAMPO. IN OGNI PUNTO IL VETTORE È ETANGENTE ALLE LINEE DEL CAMPO.

CARICA PUNTIFORME $+q$

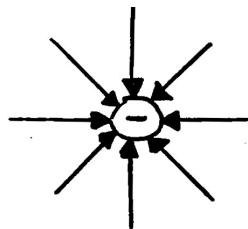
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$



$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

LE LINEE DI FORZA DEL CAMPO ELETTRICO SONO DELLE RETTE USCENTI DALLA CARICA

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$



LE LINEE DI FORZA DEL CAMPO ELETTRICO SONO DELLE RETTE ENTRANTI NELLA CARICA

CRITERIO DI FARADAY

DOVE L'INTENSITÀ DEL CAMPO È PIÙ FORTE, LE LINEE DI FORZA SONO PIÙ DENSE

N.B. LE LINEE DEL CAMPO NON POSSONO MAI INCROCIANSI NEI PUNTI DELLO SPAZIO DOVE NON CI SONO CARICHE

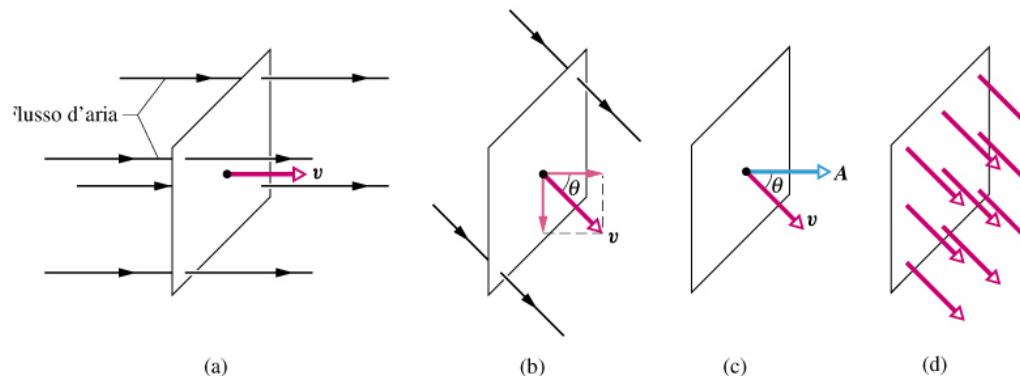
Linee di forza

Flusso di un Campo Vettoriale

- Il flusso infinitesimo di un campo vettoriale è definito da:

$$d\phi(\vec{v}) = \vec{v} \cdot \hat{n} dS = v \cos \theta dS$$

- In origine il flusso è stato definito per correnti di fluidi (aria, acqua) per caratterizzare ad esempio la quantità di volume di un fluido che passa attraverso una superficie nell'unità di tempo
- Successivamente il concetto di flusso è stato esteso ad un generico campo vettoriale (come estensione della corrente, cioè del flusso del campo definito dalle velocità vettoriali)

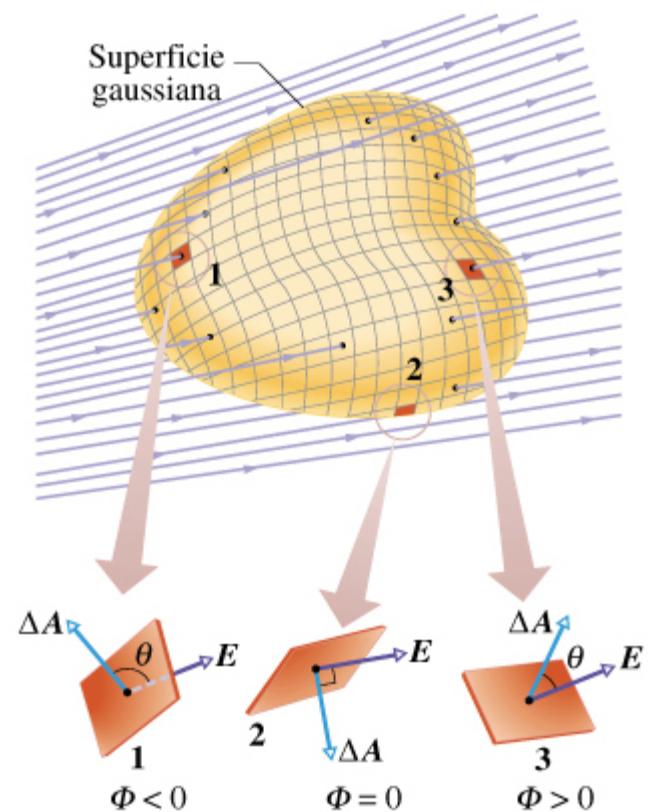


Flusso di un Campo Vettoriale 2

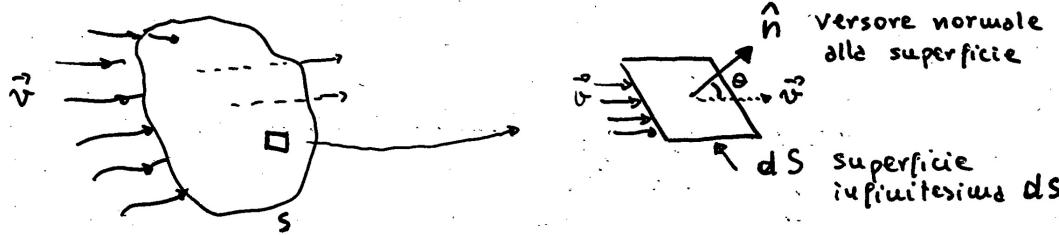
- Il differenziale del flusso può essere usato per calcolare il flusso attraverso una superficie generica...
- Il flusso totale attraverso tutta la superficie S è l'integrale, esteso la superficie S , di tutti i contributi $d\phi(\mathbf{v})$:

$$\phi(\vec{v}) = \int_S \vec{v} \cdot \hat{n} dS = \oint_S \vec{v} \cdot \hat{n} dS$$

- Se la superficie S è una superficie chiusa (per ex. una sfera), il versore normale \hat{n} si definisce sempre rivolto verso l'esterno e il flusso si dice uscente da S .



- IL FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE È UNA GRANDEZZA PROPORTZIONALE AL NUMERO DI LINEE DI FORZA DEL CAMPO CHE ATTRAVERSANO UNA DATA SUPERFICIE



- $d\Phi = \vec{v} \cdot \hat{n} dS = |\vec{v}| dS \cos \theta$
- θ È L'ANGOLO FORMATO DALLA NORMALE ALLA SUPERFICIE CON IL VETTORE \vec{v} . SE L'ANGOLO È 90° ALLORA IL FLUSSO È NULLO.
- IL FLUSSO ATTRAVERSO L'INTERA SUPERFICIE S È DATO DALLA SOMMA DEI FLUSSI ELEMENTARI $d\Phi$

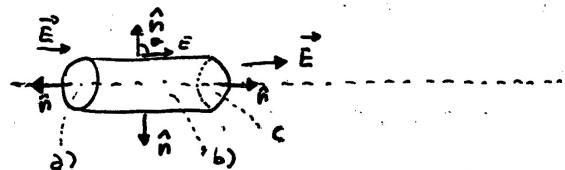
$$\Phi_S(\vec{v}) = \int_S d\Phi = \int_S \vec{v} \cdot \hat{n} dS = \int_S |\vec{v}| dS \cos \theta$$

- CASO PARTICOLARE: LA SUPERFICIE È PIANA ED IL VETTORE \vec{v} È LO STESSO IN TUTTI I PUNTI DELLA SUPERFICIE



E. Fiandrini Fis. did 11
$$\Phi_S(\vec{v}) = \int_S \vec{v} \cdot \hat{n} dS = \vec{v} \cdot \hat{n} \int_S dS = \vec{v} \cdot \hat{n} S = |\vec{v}| \cdot S \cdot \cos \theta$$

LA FIGURA MOSTRA UNA SUPERFICIE GAUSSIANA DI FORMA CILINDRICA CON RAGGIO R IMMERSA IN UN CAMPO ELETTRICO UNIFORME \vec{E} . L'ASSE DEL CILINDRO SIA PARALLELO AL CAMPO. QUANTO VALE IL FLUSSO Φ DEL CAMPO ELETTRICO PER QUESTA SUPERFICIE CHIUSA?



$$\Phi_s(\vec{E}) = \int_s \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS = \int_a \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS + \int_b \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS + \int_c \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS$$

- SULLA SUPERFICIE a L'ANGOLO TRA \hat{n} E IL CAMPO \vec{E} VALE 180°

$$\int_a \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS = \vec{E} \cdot \hat{n} \int_a dS = |\vec{E}| \cdot S_a \cos 180^\circ = -|\vec{E}| \cdot S_a$$

- SULLA SUPERFICIE CILINDRICA L'ANGOLO E' 90°

$$\int_b \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS = \vec{E} \cdot \hat{n} \int_b dS = |\vec{E}| \cdot S_b \cos 90^\circ = |\vec{E}| \cdot S_b \cdot \cos 90^\circ = 0$$

- SULLA SUPERFICIE c L'ANGOLO E' ZERO

$$\int_c \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS = \vec{E} \cdot \hat{n} \int_c dS = |\vec{E}| \cdot S_c \cos 0^\circ = |\vec{E}| \cdot S_c$$

- NEL CILINDRO $S_a = S_c = S$

- SONMIAMO I TRE INTEGRALI

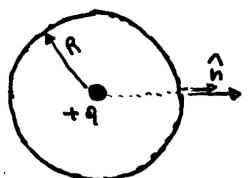
$$\Phi_s(\vec{E}) = -|\vec{E}| \cdot S + 0 + |\vec{E}| \cdot S = 0$$

E. \Rightarrow IL FLUSSO DI UN CAMPO UNIFORME ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE CHIUSA E' ZERO.
did 1617

Esempio

TEOREMA DI GAUSS

- CALCOLIAMO IL FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO GENERATO DA UNA CARICA PUNTIFORME POSITIVA, ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE SFERICA CHE HA NEL SUO CENTRO LA CARICA.



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

- SUPERFICIE DI UNA SFERA: $S = 4\pi R^2$
PRENDIAMO UNA SUPERFICIE INFINITESIMA dS SULLA SFERA
 $dS = R^2 d\Omega$
- $d\Omega$ E' L'ANGOLO SOLIDO INFINITESIMO [$d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$]
 [Circumference = $2\pi R$; infinitesimo di circconference $d\ell = R d\phi$]
- LA NORMALE \hat{n} E' DIRETTA COME IL RAGGIO VETTORE \vec{r}
- IL FLUSSO INFINITESIMO NON DIPENDE DAL RAGGIO DELLA SFERA

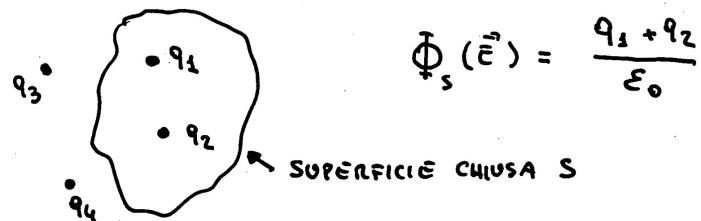
$$\Phi_s(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \hat{n} dS = |\vec{E}| \cdot dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \cdot R^2 d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

E. Fiandrini |

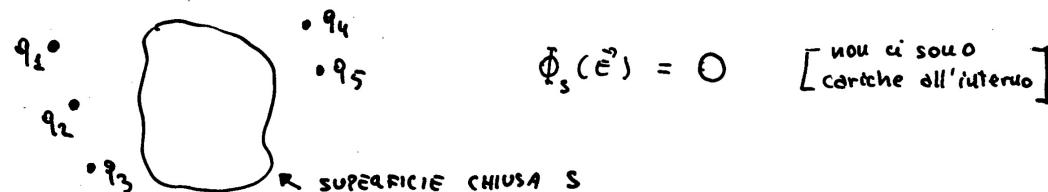
did • q E' LA CARICA CONTENUTA ALL'INTERNO DELLA SFERA

TEOREMA DI GAUSS

- IL FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE CHIUSA QUALSIASI È PARI ALLA SOMMA ALGEBRICA DELLE CARICHE CONTENUTE ALL'INTERNO DIVISO ϵ_0



- LE CARICHE AL DI FUORI DELLA SUPERFICIE NON CONTANO, SEBBENÉ CONTRIBUISCONO AL VALORE DEL CAMPO \vec{E}



- IL TEOREMA DI GAUSS È UTILE OGNI QUALVOLTA, PER RAGIONI DI SIMMETRIA, È POSSIBILE SCEGLIERE UNA SUPERFICIE SULLA QUALE IL MODULO DEL CAMPO ELETTRICO È COSTANTE

$$\Phi_s(\vec{E}) = \iint_{S_{\text{chiusa}}} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \vec{E} \cdot \hat{n} \iint_{S_{\text{chiusa}}} dS = |\vec{E}| \iint_{S_{\text{chiusa}}} dS = |\vec{E}| \cdot S$$

PER IL TEOREMA DI GAUSS $\Phi_s(\vec{E}) = \frac{q_{\text{interno}}}{\epsilon_0}$, ALLORA:

$$|\vec{E}| \cdot S = \frac{q_{\text{interno}}}{\epsilon_0} \Rightarrow |\vec{E}| = \frac{1}{S} \cdot \frac{q_{\text{interno}}}{\epsilon_0}$$

Flusso Elettrico e Teorema di Gauss

- Tale teorema mette in relazione la carica elettrica (che produce il campo elettrico) presente all'interno di una superficie chiusa e il flusso del campo elettrico attraverso tale superficie
- Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa dipende solo dalla carica elettrica **all'interno** di tale superficie. Le cariche elettriche presenti all'esterno della superficie in esame non contribuiscono al flusso.
- L'enunciato del teorema può essere riassunto da tale equazione:

$$\phi(\vec{E}) = \oint_{S_{chiusa}} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}$$

- dove la sommatoria è estesa a tutte le cariche all'interno della superficie S e la relazione vale per cariche nel vuoto (se siamo in presenza di un mezzo è sufficiente effettuare la sostituzione $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$)
 - Nel caso di somma **positiva** di cariche racchiuse da S , si parla di flusso **uscente** da S ; se la somma delle cariche è **negativa** parliamo di flusso **entrante**.

Teorema di Gauss per il campo elettrico \mathbf{E}

Il grande matematico tedesco K. F. Gauss (1777-1855) formulò la legge di Gauss per il campo elettrico (Legge di Maxwell per il flusso del campo elettrico)

Teorema di Gauss per il campo elettrico:

Il flusso elettrico attraverso una superficie gaussiana è direttamente proporzionale alla somma algebrica di tutte le cariche elettriche presenti all'interno della superficie.

$$\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q}{\epsilon}$$

Significato fisico:

Il teorema di Gauss per il campo elettrico descrive una caratteristica importante del campo elettrostatico:

1. Le cariche elettriche sono le sorgenti del campo elettrico.
2. Le linee di campo nascono o muoiono sulle cariche elettriche.