

Lez 12 09/11/2016

- Lezioni in http://www.fisgeo.unipg.it/~fiandrin/didattica_fisica/did_fis1617/

Fluidi in moto

- Un fluido può essere messo in movimento (es. acqua che scorre, vento) da forze → può possedere energia cinetica
- Può possedere energia potenziale, per es. gravitazionale (acqua in una diga in quota)
- Le leggi della meccanica permettono di ricavare le relazioni che ci sono tra i tipi di energia che un fluido può possedere.

Principio di Continuità

- Se considero un tubo di sezione variabile è ovvio osservare che il liquido (fluido) che entra e il liquido che esce devono avere la stessa massa...
- Più in dettaglio deve valere il seguente principio per ovvi motivi di conservazione della materia:
- La massa di fluido che attraversa in un dato intervallo di tempo la sezione di un tubo di flusso deve essere uguale a quella che passa nel medesimo intervallo per ogni altra sezione del medesimo tubo di flusso
- Questo principio è valido se all'interno del tubo non esistono pozzi (fori) o altre sorgenti di liquido o se la configurazione del tubo non varia nel tempo, cioè il moto del flusso è stazionario

Equazione di Continuità

$$\left. \begin{aligned} \Delta V_1 &= A_1 \Delta x_1 = A_1 v_1 \Delta t \Rightarrow m_1 = \rho_1 \Delta V_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t \\ \Delta V_2 &= A_2 \Delta x_2 = A_2 v_2 \Delta t \Rightarrow m_2 = \rho_2 \Delta V_2 = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t \end{aligned} \right\} \text{ma } m_1 = m_2$$

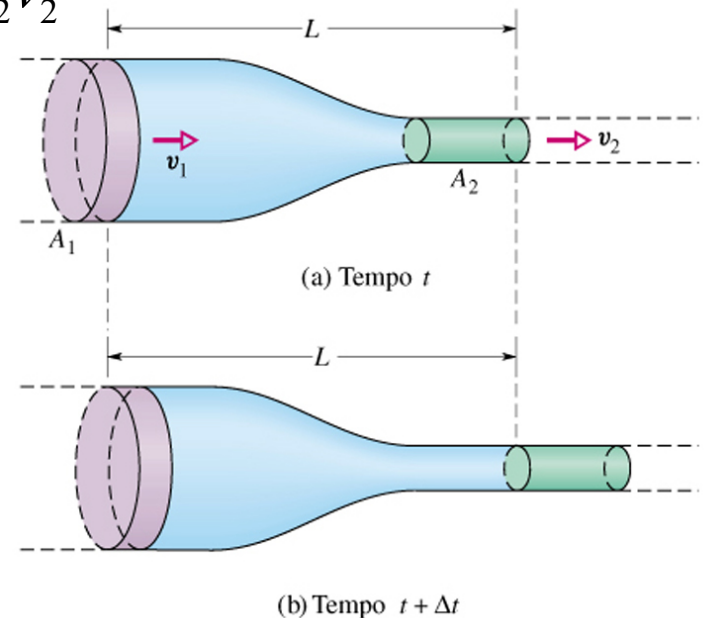
\Downarrow

$$\rho_1 A_1 v_1 \Delta t = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t \Rightarrow \rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

Se il liquido è incompressibile (cioè la densità è costante)

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Questa è l'equazione di continuità per il flusso di fluidi: dove A aumenta, v diminuisce e viceversa



La Portata

- Il prodotto ρSv rappresenta la massa che attraversa la superficie S nell'unità di tempo, cioè la **portata in massa** (kg/s).
- L'equazione di continuità è quindi detta legge della costanza della portata
- Se il liquido è incomprimibile, il prodotto $S \cdot v$ rappresenta la **portata in volume** (m^3/s , l/s). In questa ipotesi, la portata in volume è costante.

Esempio

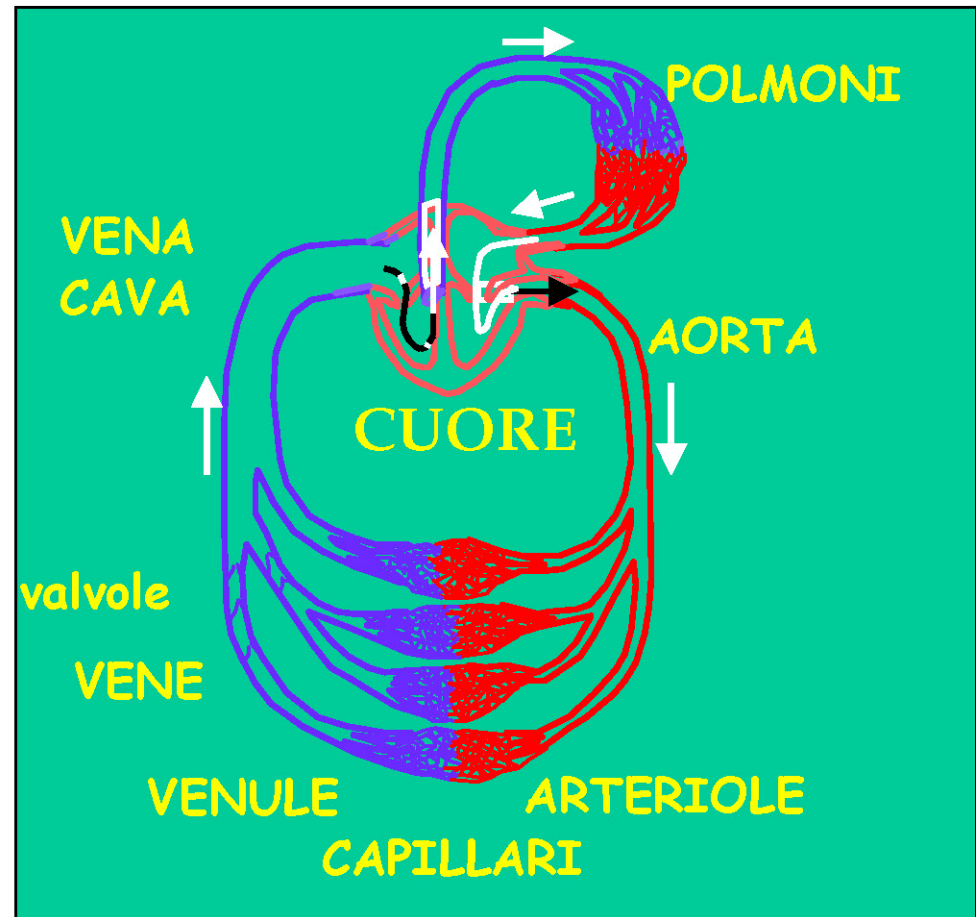
La circolazione sanguigna e' un esempio di moto di un fluido incompressibile. Il diametro e il numero dei condotti varia quanto più ci si avvicina alle parti periferiche del corpo

Il sangue viene distribuito capillarmente a tutte le parti del corpo e come conseguenza della riduzione del diametro del condotto la velocità periferica del sangue e' diminuita.

$$A_{\text{aorta}} v_{\text{aorta}} = A_{\text{capillare}} v_{\text{capillare}}$$

$$\begin{array}{ll} R_{\text{aorta}} = 0.8 \text{ cm} & R_{\text{capill}} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ cm} \\ v_s = 40 \text{ cm/s} & v_s = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m/s} \end{array}$$

La riduzione della velocità di scorrimento del sangue e' essenziale per permettere il verificarsi gli scambi chimici tra sangue e tessuti corporei



Calcolo approssimato del numero di capillari

$$v_{aorta} A_{aorta1} = v_{capillari} N A_{capillari}$$

$$N = \frac{v_{aorta} A_{aorta}}{v_{capillari} A_{capillari}} = \frac{v_2 (\pi R_A^2)}{v_1 (\pi R_C^2)} = \left(\frac{0.40 \text{ m/s}}{5 * 10^{-4} \text{ m/s}} \right) \left(\frac{1.2 \text{ cm}}{4 * 10^{-4} \text{ cm}} \right)^2$$

$$N \approx 7 * 10^9$$

Portata sanguigna $Q = 5 \text{ l/min} = (5000 \text{ cm}^3)/(60 \text{ s}) = 83.33 \text{ cm}^3/\text{s}$

Velocita' del sangue nei vari distretti:

AORTA ($r = 0.8 \text{ cm}$)	$S = \pi r^2 \approx 2 \text{ cm}^2$	$v = Q/S \approx 40 \text{ cm/s}$
ARTERIOLE	$S \approx 400 \text{ cm}^2$	$v = Q/S \approx 0.2 \text{ cm/s}$
CAPILLARI	$S \approx 4000 \text{ cm}^2$	$v = Q/S \approx 0.02 \text{ cm/s}$
VENA CAVA ($r=1.1 \text{ cm}$)	$S = \pi r^2 \approx 4 \text{ cm}^2$	$v = Q/S \approx 20 \text{ cm/s}$

La sezione effettiva dei condotti periferici e' fortemente aumentata per diminuire la velocita' di scorrimento periferico

Energia nei fluidi

Dato un fluido, note le forze e le condizioni iniziali del moto potremmo determinare il moto del fluido con le equazioni di Newton e la conservazione della massa.

Si puo' pero' considerare l'aspetto energetico dei fluidi in moto. Il caso generale e' estremamente complesso. Noi ci limiteremo a considerare fluidi ideali, cioe' incompressibili e senza viscosita' (attrito interno), quindi senza sforzi di taglio interni

Le forze che agiscono sono forze di volume – la gravita'- e forze di superficie – la pressione

Possiamo procedere usando il teorema del lavoro e dell'energia cinetica applicato ai fluidi: $\Delta E_K = \Delta L_T$

Equazione di Bernoulli

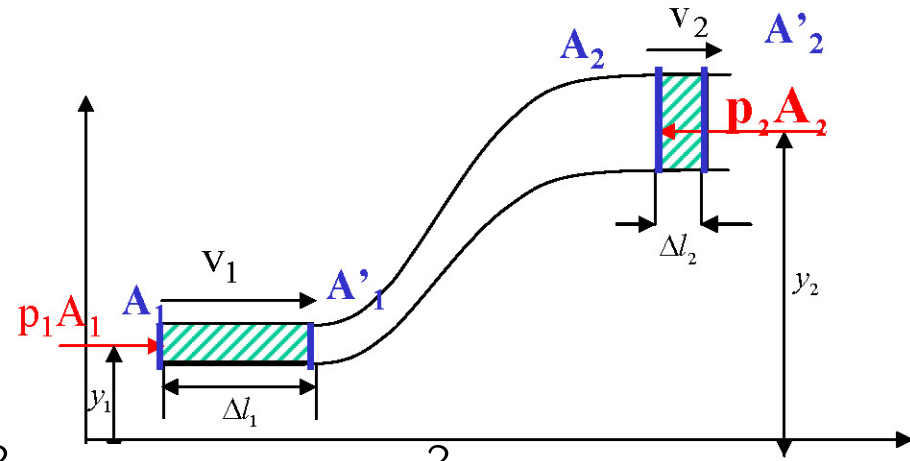
Dal teorema dell'energia: $\Delta E_c = W_p + W_g$



$$\frac{1}{2}\Delta m v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2 = (p_1 - p_2)\Delta V - \Delta m g(y_2 - y_1)$$

usando $\Delta m = \rho \Delta V$

otteniamo
$$p_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} + \rho g y_2 = p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} + \rho g y_1$$



Tutti i termini hanno le dimensioni di una pressione (o densità di energia, cioè E/L^3)

Forme equivalenti:

□ Se dividiamo tutto per Δm si ha

$$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = (p_1 - p_2)\Delta V / \Delta m - g(y_2 - y_1) = \frac{(p_1 - p_2)}{\rho} - g(y_2 - y_1)$$

$$\frac{1}{2}v_2^2 + \frac{p_2}{\rho} + g y_2 = \frac{1}{2}v_1^2 + \frac{p_1}{\rho} + g y_1$$

Tutti i termini hanno dim di una velocità²

□ Se dividiamo tutto per g si ha

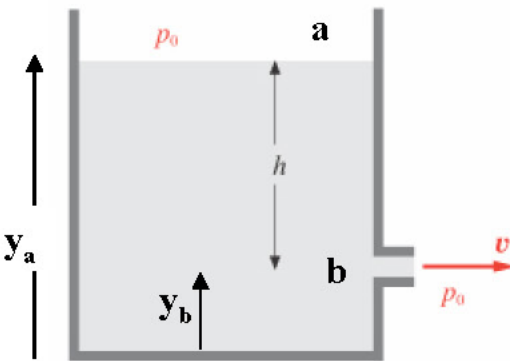
$$\frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + y_2 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + y_1$$

Tutti i termini hanno di di una lunghezza

Conseguenze del teorema di Bernoulli

3) Teorema di Torricelli

Da un foro posto ad una altezza h dalla superficie superiore di un fluido contenuto in un serbatoio, *il fluido esce con una velocità pari a quella che avrebbe se scendesse in caduta libera per un tratto h .*



applicando l'equazione di Bernoulli ai punti (a) e (b) della figura, considerando v_a (circa) nulla, data la grande massa di fluido nel recipiente

$$p_a + g\rho y_a = p_b + g\rho y_b + \frac{1}{2}\rho v_b^2$$

Essendo sia (a) che (b) in comunicazione con l'atmosfera, p_a e p_b saranno uguali e pari alla pressione atmosferica, quindi risolvendo rispetto v_b :

$$v_b^2 = 2g(y_a - y_b) = 2gh \quad \Rightarrow \quad v_b = \sqrt{2gh}$$

La velocità di efflusso dell'acqua è pari a quella che avrebbe un grave che cade dalla stessa altezza

Sollevamento fluidodinamico - Fisica del volo

L'equazione di Bernoulli applicata al moto orizzontale di un corpo in un fluido e' alla base del fenomeno del volo nell' atmosfera terrestre.

Le ali degli aerei sono sagomate in modo che la velocità dell' aria sulla superficie superiore dell' ala sia superiore a quella sulla superficie inferiore

In base all' equazione

$$p_1 - p_2 = 1/2 \rho (v_2^2 - v_1^2)$$

l' ala sarà soggetta ad una forza verticale (portanza) opposta alla gravità

$$F = A (p_1 - p_2) = 1/2 A \rho (v_2^2 - v_1^2) = 1/2 A \rho C v^2$$

C = coefficiente di portanza.

La portanza dipende dal dettaglio della geometria dell'ala, in particolare dall' angolo di attacco e da fattori di turbolenza, che tendono a diminuire la velocità sulla superficie superiore dell' ala e diminuire la portanza.

Nelle auto veloci si sfrutta una geometria inversa per aumentare il peso dell'auto, l' attrito col suolo e la sua capacità di frenata

Visualizzazione di elaborate teorie matematiche

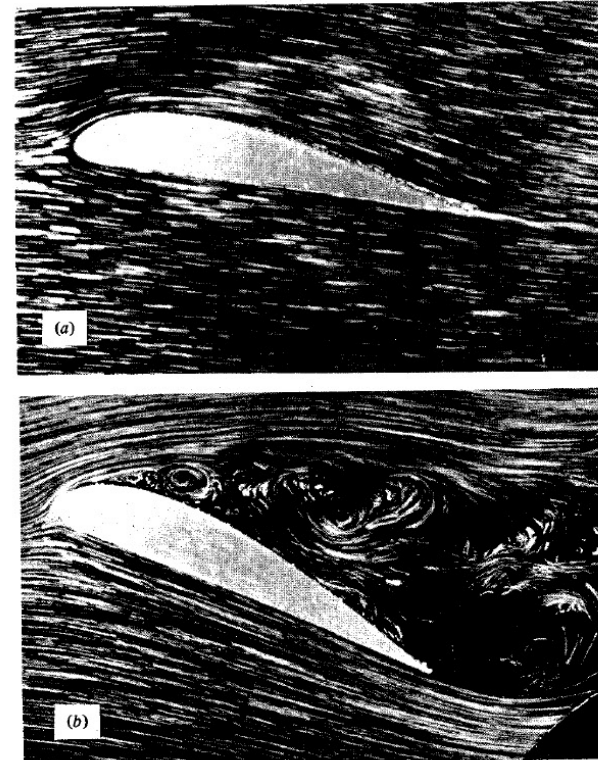


Figura 14.15. (a) Flusso laminare lungo un'ala. (b) Per un angolo di attacco più grande si osservano: turbolenze, perdite di portanza e situazioni di stallo. (Da F. Hoffman, *Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens*, 1936, per concessione della VDI Verlag).

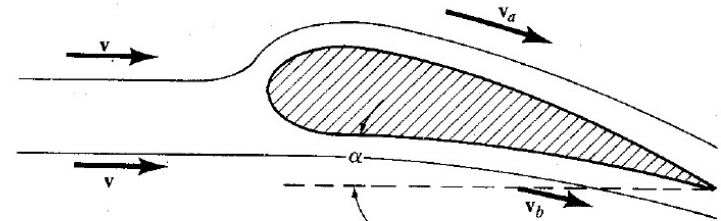
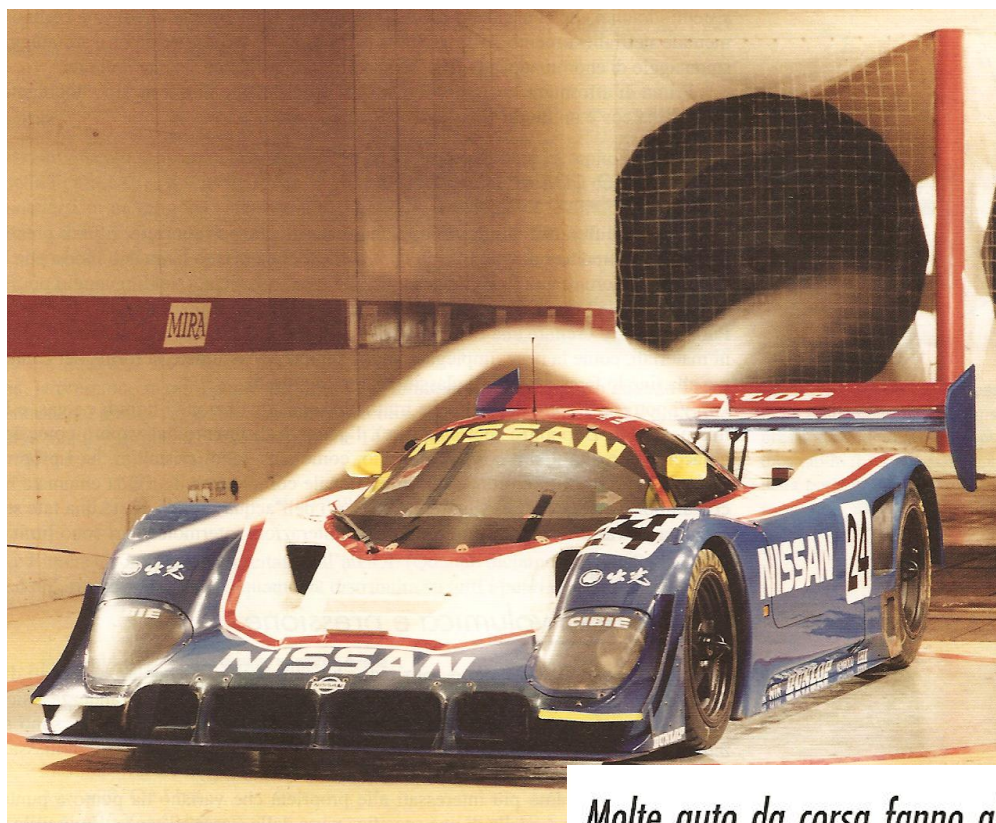


Figura 14.16. L'aria al di sopra dell'ala ha la velocità v_a , maggiore di v_b , che è la velocità dell'aria al di sotto dell'ala. Sia v_a che v_b sono proporzionali a v .

Effetto suolo

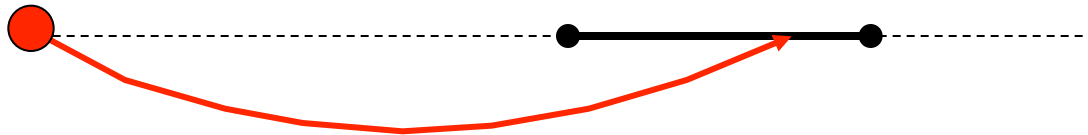
Gli alettoni sono "ali al contrario": sagomate in modo da dare una portanza negativa, cioè una spinta verso il basso



Molte auto da corsa fanno affidamento sulla portanza negativa che le schiaccia a terra per affrontare le curve a gran velocità senza essere proiettate fuori pista. La portanza negativa si ottiene in gran parte mediante alette e alettoni di cui queste auto sono ampiamente dotate. Nella galleria del vento di questa fotografia si vede il percorso seguito dal fumo che, immesso davanti all'auto, la lambisce passandole sopra e investendo l'alettone posteriore. La porzione rimanente di portanza negativa è conseguenza del passaggio dell'aria sotto la macchina e prende il nome di effetto suolo. L'effetto suolo è rilevante quando un'auto si trova da sola in pista, come nelle prove di velocità, ad affrontare una curva. I piloti esperti lo sanno e non si fanno sorprendere se, in una corsa affollata, l'effetto suolo dovesse venir meno.

Effetto Magnus: la palla a effetto

12-15. Nel gioco del calcio è possibile segnare una rete con tiro diretto dalla bandierina del calcio d'angolo. Per far questo occorre imprimere al pallone nel momento in cui viene calciato, una velocità angolare ω attorno ad un asse verticale. Indicata con v_0 la velocità iniziale, che si supporrà costante durante il moto, con R il raggio del pallone e con m la sua massa, con ρ la densità dell'aria, 1) trovare la forza deflettente,



Collochiamoci in un sistema di riferimento con origine nel baricentro del pallone e animato di moto traslatorio rispetto al campo.

Il pallone è allora investito da un getto d'aria con velocità v_0 (la stessa del pallone rispetto al terreno di gioco). Poiché il pallone ruota attorno ad un asse verticale, la velocità dell'aria rispetto al pallone è diversa nei due punti A e B (vedi fig. 12-15 dove il pallone è visto dall'alto)

$$v_A > v_B \quad (1)$$

La velocità di un generico punto P del pallone dipende dal

la posizione dello stesso. Indicato con θ l'angolo formato da OP con un piano orizzontale che passa per il centro O del pallone (vedi fig. 12-16)

Nei fluidi, quello che conta è la velocità relativa del corpo rispetto al fluido: la velocità relativa al fluido di A è maggiore di quella di B a causa della rotazione in senso antiorario

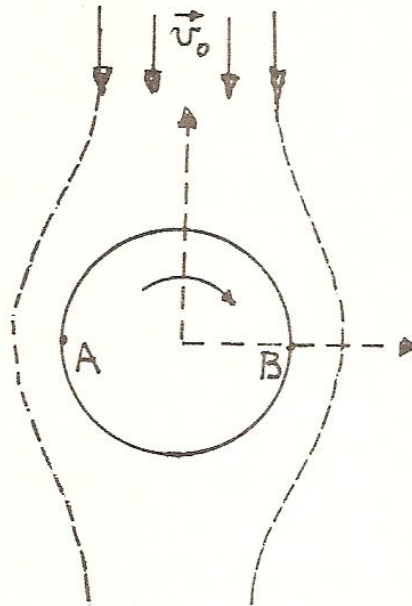


Fig. 12-15

Effetto Magnus: la palla a effetto

$$PH = R \cos \theta \quad (2)$$

e quindi

$$v_P = \omega R \cos \theta \quad (3)$$

P percorre circonferenze di raggio $R \cos \theta$ con vel $v_P = \omega R \cos \theta$

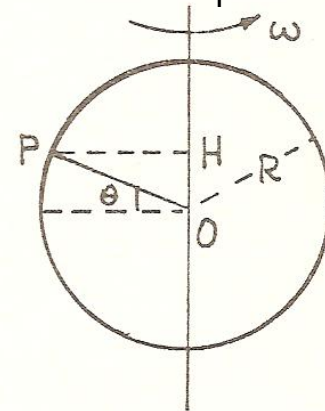


Fig. 12-16

Effetto Magnus: la palla a effetto

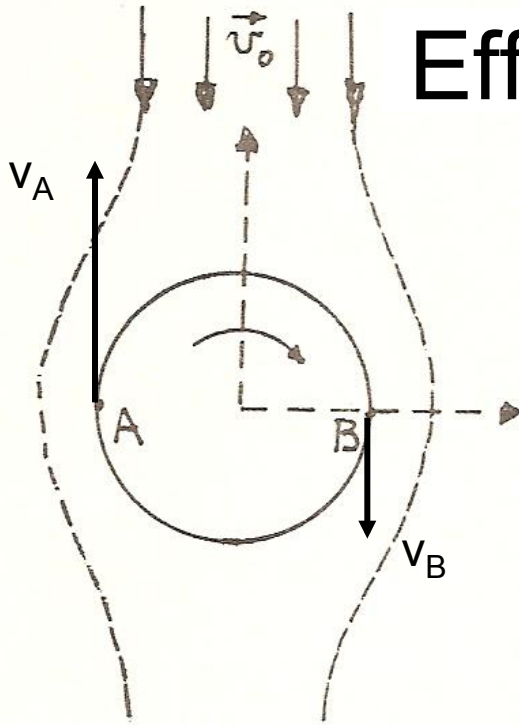


Fig. 12-15

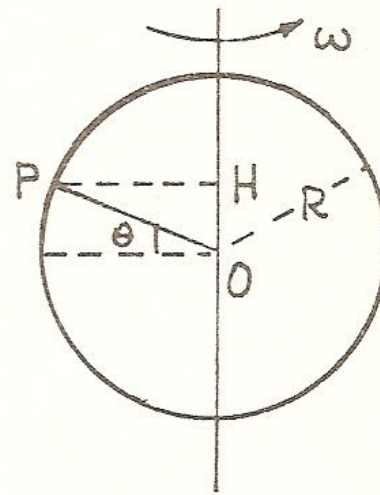


Fig. 12-16

E' possibile quindi scrivere

$$v_A = -v_0 + \omega R \cos \theta \quad (4)$$

$$v_B = -v_0 - \omega R \cos \theta .$$

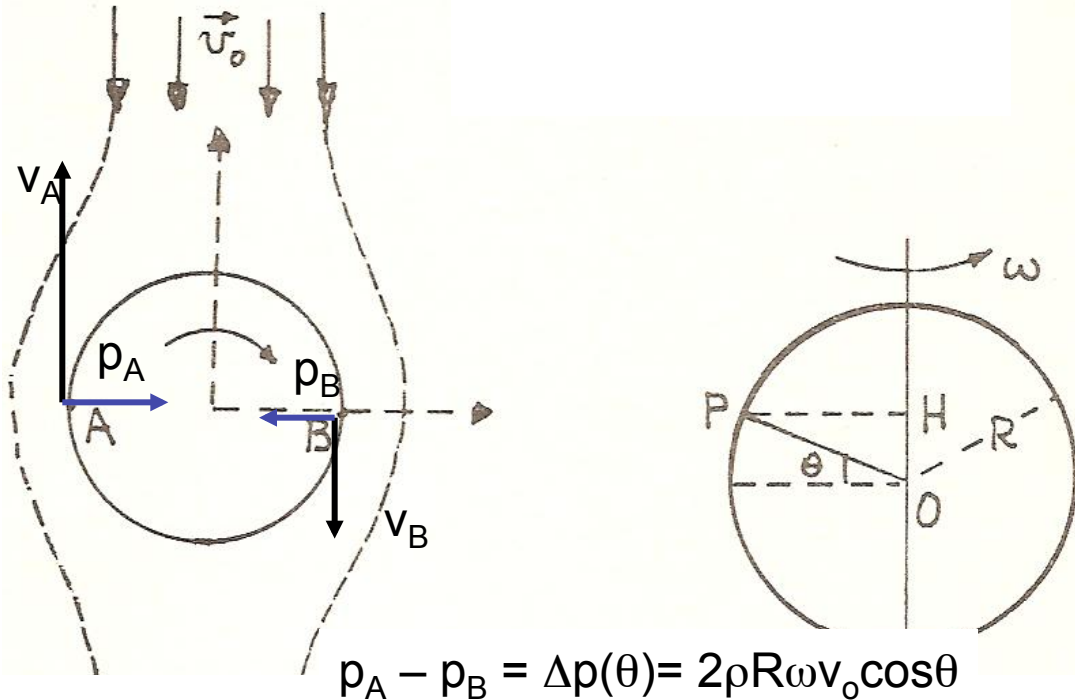
Facciamo uso del teorema di Bernoulli

$$p_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 \quad (5)$$

che permette di calcolare la differenza di pressioni

$$p_A - p_B = \frac{1}{2} \rho (v_B^2 - v_A^2) = 2 \rho R \omega v_0 \cos \theta . \quad (6)$$

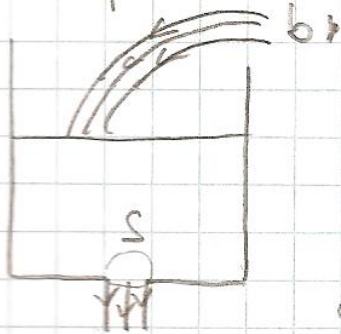
Effetto Magnus: la palla a effetto



- ❑ La diff di pressione e' max nel piano perpendicolare all'asse di rotazione ($\theta = 0$) dove vale $\Delta p(0) = 2\rho R\omega v_0$ ed e' nulla sull'asse di rotazione
- ❑ E' sempre diretta da A verso B, cioe' perpendicolare a v_0 (perche' $0 < \theta < \pi/2 \rightarrow \cos\theta > 0$ sempre)
- ❑ La forza complessiva puo' essere stimata come $\Delta p(0) \times S$, dove S e' la superficie laterale della palla, cioe' πR^2
- ❑ Quindi la forza complessiva e' **$F \propto \Delta p \times \pi R^2 = 2\pi\rho R^3\omega v_0$**
- ❑ Il calcolo esatto (eseguendo un'integrazione in θ) da' **$F = (16/3)\rho R^3\omega v_0$**
- ❑ la palla devia verso destra durante il moto a causa della differenza di pressione tra i due emisferi A e B...la cosiddetta palla arrotata

Problema

Acqua fluisce in una vasca di superficie molto larga ad un ritmo di $b \text{ m}^3/\text{s}$ e fuoriesce da un foro di sezione S sul fondo. Quale altezza raggiunge l'acqua nella vasca?



- Si raggiunge $h = \text{cost.}$ quando p sul fondo è suff. grande da produrre un flusso uscente = a quello entrante: $Q_{\text{in}} = Q_{\text{out}}$

- $Q_{\text{in}} = b$ e $Q = v_{\text{out}} S$. Ci serve v_{out} -

- Teorema di Torricelli: $v_0 = \sqrt{2gh} \Rightarrow b = \sqrt{2gh} \cdot S$ e quindi
 $b^2 = (2gh) S^2 \Rightarrow h = \frac{b^2}{2gS^2}$

Energia di un fluido

$$p_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} + \rho g y_2 = p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} + \rho g y_1$$

Tutti i termini hanno le unita' di misura di una densita' di energia, cioe' E/L³.

Se moltiplico tutti i termini per il volume V del corpo ottengo

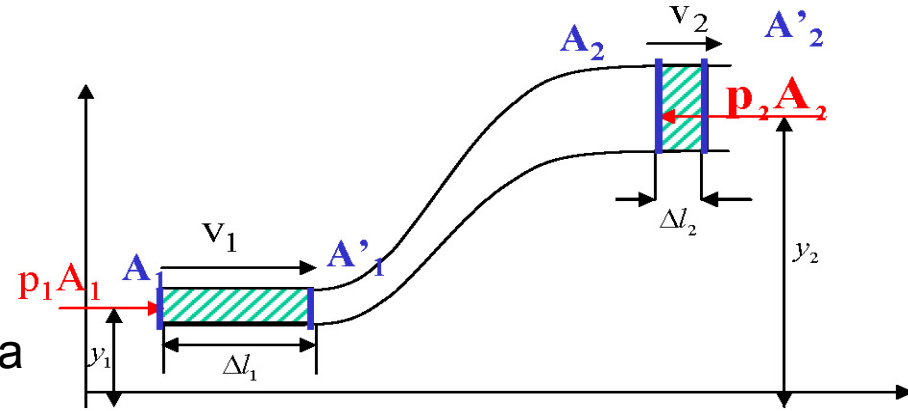
$$pV + \frac{1}{2}\rho V v^2 + \rho V g h = \text{costante}$$

ma $\rho V = m \rightarrow$ l'equ. diventa

$$pV + \frac{1}{2}mv^2 + mgh = \text{costante}$$

Il I e II termine sono l'energia cinetica e potenziale gravitazionale del corpo. Il I termine rappresenta energia, cioe' capacita' di compiere lavoro, associata alla pressione nel fluido.

NON e' ne' cinetica ne' potenziale, ma costituisce energia immagazzinata nel sistema in virtu' della pressione che c'e' in esso ed e' detta **energia interna**. Per capire bene cosa sia, occorre sviluppare i concetti della termodinamica



Moto di un corpo solido in un fluido

L'espressione generale della **resistenza del mezzo** è dato da

$$F_{\text{res}} = \frac{1}{4} c S \rho v^2 \quad (9.18)$$

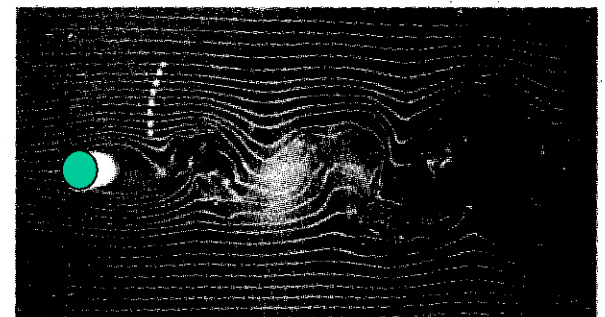
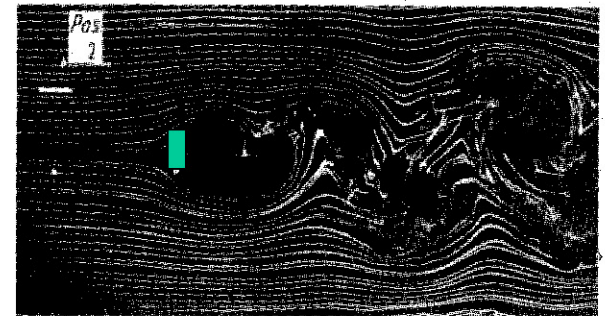
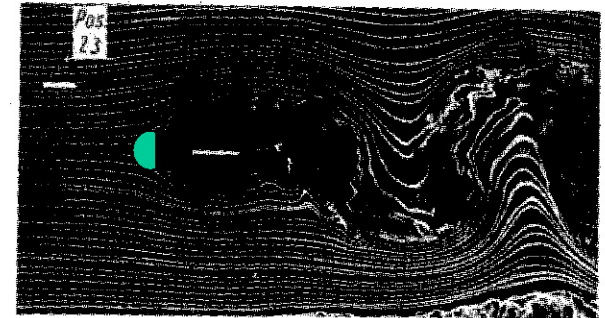
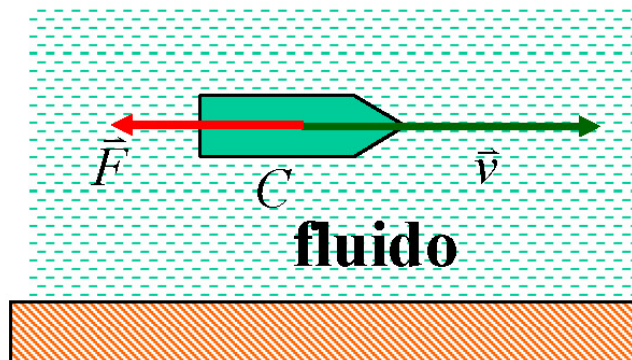
con :S : sezione, ρ : densità del fluido, v : velocità relativa,
 c = **coefficiente di resistenza** del mezzo dipende dalla forma del corpo.

- in regime vorticoso c è costante e F_{res} è proporzionale a v^2 ,
- in regime laminare c è funzione dell'inverso della velocità e pertanto F_{res} e' proporzionale alla velocità (forza di attrito viscoso).

In particolare per sfere di raggio R con piccola velocità vale la **legge di Stokes**:

$$F_{\text{res}} = -6 \pi \eta R v$$

(9.19)



Configurazione delle linee di corrente ottenute con una semisfera, con un disco e con una sfera.

Esempio: Calcolo della forza resistente

Dedurre l'espressione

$$F_{\text{res}} = \frac{1}{2} c S \rho v^2 \quad (9.18)$$

della forza resistente resistenza dall'aria sull'automobile che si muove con una velocità v .

Soluzione L'aria si muove rispetto all'automobile con velocità $-v$, per cui detta S la sezione dell'automobile perpendicolare alla velocità, la massa d'aria che investe l'automobile nel tempo Δt è quella contenuta in un cilindro di base S e altezza pari alla distanza percorsa dall'automobile (dall'aria) nel tempo Δt , $\Delta h = v \Delta t$, ossia $\Delta m = \rho_a S v \Delta t$, con ρ_a = densità dell'aria.

In condizioni stazionarie, il lavoro fatto dalla forza resistente nel tempo Δt è

$$\Delta L = F_{\text{res}} \Delta h = F_{\text{res}} v \Delta t$$

Dal teorema del lavoro e dell'energia cinetica applicato AL FLUIDO spostato si ha che

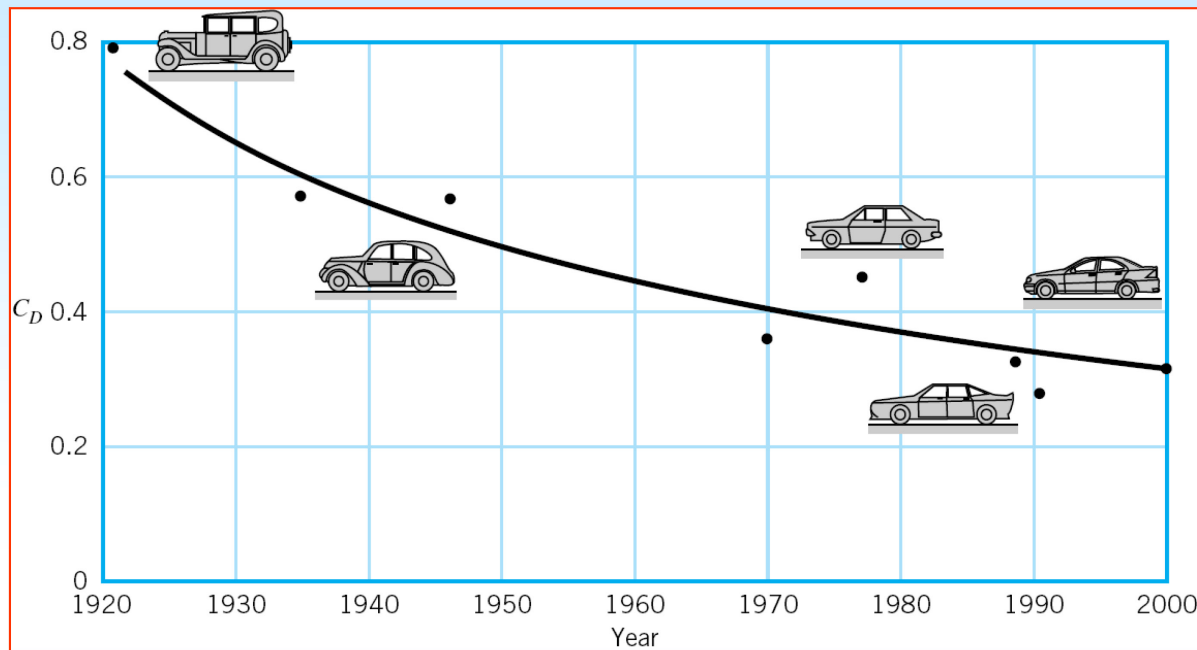
$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \Delta m v^2 = \frac{1}{2} \rho_a S v \Delta t v^2$$

Eguagliando le due equazioni si ottiene:

$$F_{\text{res}} = \frac{1}{2} \rho_a S v^2$$

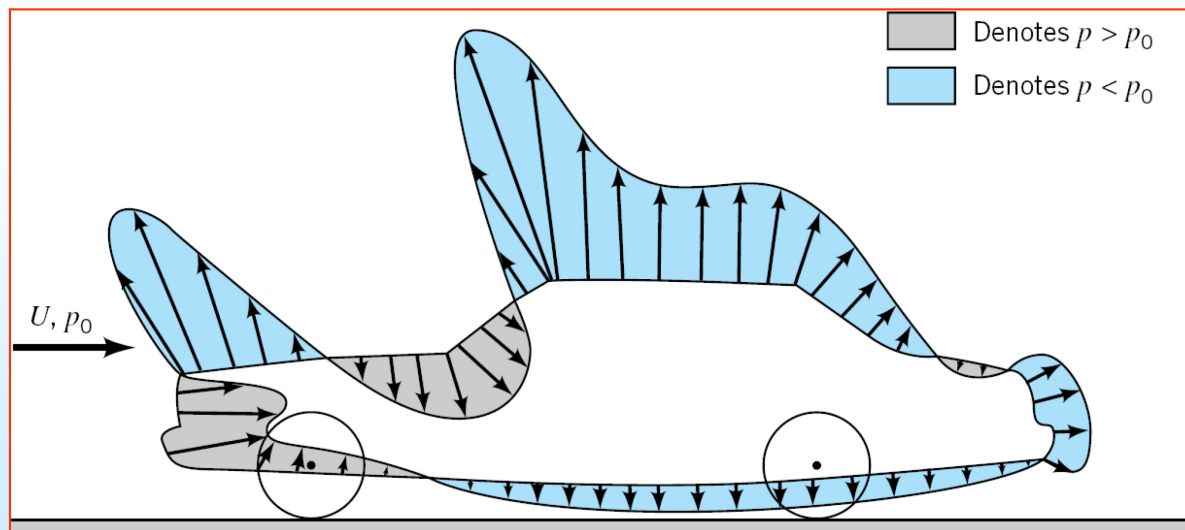
che coincide con la (9.18) a meno del coefficiente c che viene determinato sperimentalmente e dipende dal profilo di tutto il veicolo ed è funzione della velocità, dato che dipende dal regime del moto dell'aria rispetto al veicolo stesso.

LA RESISTENZA DI FORMA (5)






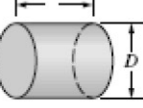
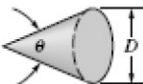

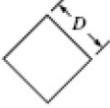
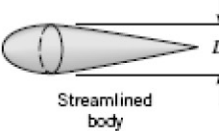
Valori di C_D per gli autoveicoli negli anni.


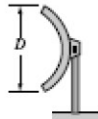









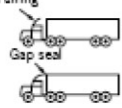





In mancanza di dati, l'area frontale si può calcolare come $A = 0.8 bh$.



Andamento della pressione locale su un autoveicolo

LA RESISTENZA DI FORMA (6)

Shape	Reference area A	Drag coefficient C_D	Reynolds number $Re = \rho U D / \mu$										
 Solid hemisphere	$A = \frac{\pi}{4} D^2$	\Rightarrow 1.17 \Leftarrow 0.42	$Re > 10^4$										
 Hollow hemisphere	$A = \frac{\pi}{4} D^2$	\Rightarrow 1.42 \Leftarrow 0.38	$Re > 10^4$										
 Thin disk	$A = \frac{\pi}{4} D^2$	1.1	$Re > 10^3$										
 Circular rod parallel to flow	$A = \frac{\pi}{4} D^2$	<table><tr><th>l/D</th><th>C_D</th></tr><tr><td>0.5</td><td>1.1</td></tr><tr><td>1.0</td><td>0.93</td></tr><tr><td>2.0</td><td>0.83</td></tr><tr><td>4.0</td><td>0.85</td></tr></table>	l/D	C_D	0.5	1.1	1.0	0.93	2.0	0.83	4.0	0.85	$Re > 10^5$
l/D	C_D												
0.5	1.1												
1.0	0.93												
2.0	0.83												
4.0	0.85												
 Cone	$A = \frac{\pi}{4} D^2$	<table><tr><th>θ, degrees</th><th>C_D</th></tr><tr><td>10</td><td>0.30</td></tr><tr><td>30</td><td>0.55</td></tr><tr><td>60</td><td>0.80</td></tr><tr><td>90</td><td>1.15</td></tr></table>	θ , degrees	C_D	10	0.30	30	0.55	60	0.80	90	1.15	$Re > 10^4$
θ , degrees	C_D												
10	0.30												
30	0.55												
60	0.80												
90	1.15												
 Cube	$A = D^2$	1.05	$Re > 10^4$										
 Cube	$A = D^2$	0.80	$Re > 10^4$										
 Streamlined body	$A = \frac{\pi}{4} D^2$	0.04	$Re > 10^5$										

Shape	Reference area	Drag coefficient C_D												
 Parachute	Frontal area $A = \frac{\pi}{4} D^2$	1.4												
 Porous parabolic dish	Frontal area $A = \frac{\pi}{4} D^2$	<table><tr><th>Porosity</th><th>0</th><th>0.2</th><th>0.5</th></tr><tr><td>\rightarrow</td><td>1.42</td><td>1.20</td><td>0.80</td></tr><tr><td>\leftarrow</td><td>0.95</td><td>0.90</td><td>0.80</td></tr></table> Porosity = open area/total area	Porosity	0	0.2	0.5	\rightarrow	1.42	1.20	0.80	\leftarrow	0.95	0.90	0.80
Porosity	0	0.2	0.5											
\rightarrow	1.42	1.20	0.80											
\leftarrow	0.95	0.90	0.80											
 Average person	Standing Sitting Crouching	$C_D A = 9 \text{ ft}^2$ $C_D A = 6 \text{ ft}^2$ $C_D A = 2.5 \text{ ft}^2$												
 Fluttering flag	$A = D$	<table><tr><th>l/D</th><th>C_D</th></tr><tr><td>1</td><td>0.07</td></tr><tr><td>2</td><td>0.12</td></tr><tr><td>3</td><td>0.15</td></tr></table>	l/D	C_D	1	0.07	2	0.12	3	0.15				
l/D	C_D													
1	0.07													
2	0.12													
3	0.15													
 Empire State Building	Frontal area	1.4												
 Six-car passenger train	Frontal area	1.8												
 Bikes	$A = 5.5 \text{ ft}^2$	1.1												
 Upright commuter	$A = 3.9 \text{ ft}^2$	0.88												
 Racing	$A = 3.9 \text{ ft}^2$	0.50												
 Drafting	$A = 5.0 \text{ ft}^2$	0.12												
 Streamlined														
 Tractor-trailer trucks	Standard	Frontal area	0.96											
 Fairing	With fairing	Frontal area	0.76											
 Gap seal	With fairing and gap seal	Frontal area	0.70											
 Tree	$U = 10 \text{ m/s}$ $U = 20 \text{ m/s}$ $U = 30 \text{ m/s}$	Frontal area	0.43 0.26 0.20											
 Dolphin	Wetted area	$0.0036 \text{ at } Re = 6 \times 10^6$ (flat plate has $C_{Df} = 0.0031$)												
 Large birds	Frontal area	0.40												

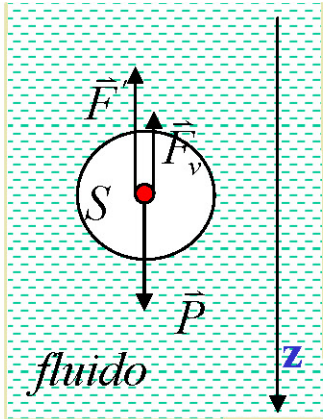
Valori di C_D per corpi tozzi sono generalmente intorno ad 1.

Questo vuol dire che la pressione è dell'ordine di grandezza della pressione dinamica

$$p \sim \frac{1}{2} \rho U^2$$

Esempio

Consideriamo una sferetta S di raggio R e densità ρ che si muove verticalmente in un fluido di densità $\rho' < \rho$ cosicchè S scende verso il basso. La sferetta è sottoposta alle seguenti forze:



$$\bar{P} = m\bar{g} = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 \bar{g} \rightarrow \text{forza peso}$$

$$\bar{F}' = m'\bar{g} = -\rho' \frac{4}{3} \pi R^3 \bar{g} \rightarrow \text{spinta idrostatica (Archimede)}$$

$$\bar{F}_v = -6\pi R \eta \bar{v} \rightarrow \text{legge di Stokes}$$

$$\bar{P} + \bar{F}' + \bar{F}_v = m \frac{d\bar{v}}{dt}$$

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{4\pi}{3} R^3 (\rho - \rho') \bar{g} - 6\pi R \eta \bar{v}$$

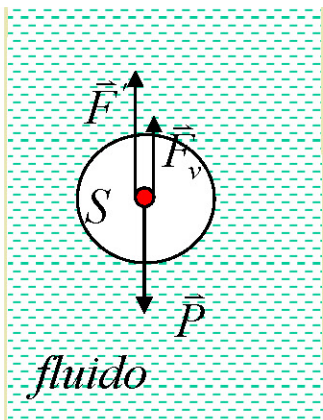
A destra abbiamo una forza costante $\parallel g$ e una opposta il cui modulo cresce al crescere di v (cioè la resistenza diventa più alta via via che il corpo aumenta v).

A un certo punto può accadere che $F_v = P + F_{\text{archimede}} \rightarrow dv/dt = 0$

Questo accade alla **velocità terminale** v_t data da

$$\frac{4\pi}{3} R^3 (\rho - \rho') - 6\pi R \eta v_t = 0 \quad \Rightarrow \quad v_t = \frac{2\pi}{9} \frac{R^2 (\rho - \rho')}{\eta}$$

Esempio -continuazione



Soluzione dell'equazione: $v(t) = A + Be^{\alpha t}$

con: $\alpha = -\frac{6\pi R\eta}{m} = -\alpha_0$

A, B: dai valori di v per $t=0$ e $t=\infty$

$$v(t) = v(\infty)(1 - e^{-\alpha_0 t})$$

$$v(\infty) = \frac{2(\rho - \rho')R^2 g}{9\eta}$$

