

Lez 4 11/10/2016

- Lezioni in http://www.fisgeo.unipg.it/~fiandrin/didattica_fisica/did_fis1617/

Il moto

Il moto di un oggetto e' la variazione nel tempo della sua posizione rispetto ad un osservatore → dato che l'osservatore e' arbitrario ne segue che il moto e' **relativo** (l'affermazione, come vedremo, e' verificabile sperimentalmente)

Noi siamo ora fermi rispetto alla Terra, ma siamo in rotazione (di periodo $T=24$ h) rispetto ad un astronauta che viaggia verso la Luna, perche' ci muoviamo solidalmente con essa.

La Terra ruota intorno al Sole su un'ellisse con un periodo $T'=1$ anno ad una distanza media di 1.5×10^8 km → trascurando la rotazione giornaliera, noi ruotiamo intorno al Sole; il Sole orbita intorno al centro della Via Lattea a circa 8.5 kpc ($1 \text{ pc} = 3.26$ anni-luce $\sim 9.5 \times 10^{12}$ km con un periodo $T'' \simeq 2.2 \times 10^8$ anni, l'intera galassia viaggia verso la costellazione della Vergine a ~ 30 km/sec, il Gruppo Locale (l'ammasso di galassie di cui la Via Lattea fa parte) viaggia verso il Grande Attrattore...

Causa ed effetto

La meccanica studia il moto dei corpi e comprende:

- la **cinematica** che studia il moto dei corpi indipendentemente dalle cause
- la **dinamica** che studia le cause del moto e le relazioni con le variabili cinematiche, cioè le forze

La nostra conoscenza del mondo è basata sul **principio di causa ed effetto**:

L'effetto segue dalla causa, p. es. una lampadina si accende perché l'interruttore è stato chiuso e ciò accade **dopo**.
I due eventi non possono essere **causalmente connessi** se la luce si accende **prima** (o nello stesso istante) che l'interruttore sia stato chiuso.

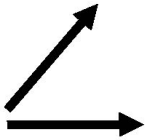
Introduzione alla cinematica

- La cinematica si pone come obiettivo lo studio del moto, ovvero lo studio degli spostamenti di un corpo in funzione del tempo.
- A tale fine viene introdotto un concetto astratto: **il punto materiale**. Esso è un oggetto privo di dimensioni (ovvero puntiforme) ma che tuttavia possiede una massa. Più avanti nel corso identificheremo il punto materiale con il centro di massa di un corpo.
- Un punto materiale spostandosi nello spazio occupa successivamente una serie di punti geometrici. L'insieme di questi punti costituisce la **TRAIETTORIA** descritta dal punto.
- La traiettoria descrive una curva qualsiasi nello spazio. Per semplificare lo studio della cinematica in questo corso, considereremo soltanto delle traiettorie che descrivano delle figure geometriche semplici, quali linee rette, circonferenze, parabole, ellissi.
- Nei casi complessi, in genere, si cerca di ridursi a dei casi semplici con delle approssimazioni, oppure ad una somma di casi semplici.
- Da notare che lo studio delle curve nello spazio ricade nell'ambito della **geometria**. La geometria ha origini antichissime, basti pensare ai principi di Euclide.

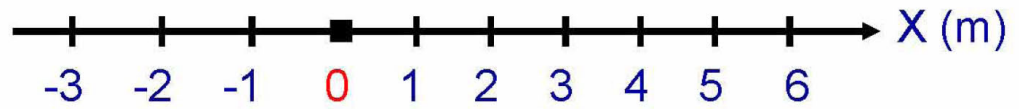
Moto unidimensionale

Il moto si dice unidimensionale quando avviene lungo una direzione costante, o più in generale lungo una traiettoria definita (es la ferrovia per il treno)

La direzione della retta è arbitraria, cioè non deve essere necessariamente "orizzontale"



Lo spostamento ha un segno. Può essere positivo o negativo, cioè non basta dire di "quanto" mi sono spostato, devo anche specificare in quale verso mi sono spostato → **per definire lo spostamento ho bisogno di sapere quanto grande è e in quale direzione è avvenuto**



I punti sulla retta sono identificati dalla loro distanza con il segno dall'origine.

Si definisce spostamento del punto materiale dalla posizione iniziale **X1** a quella finale **X2**, la quantità

$$\Delta X = X_2 - X_1$$

↑ ↑
Valore finale Valore iniziale

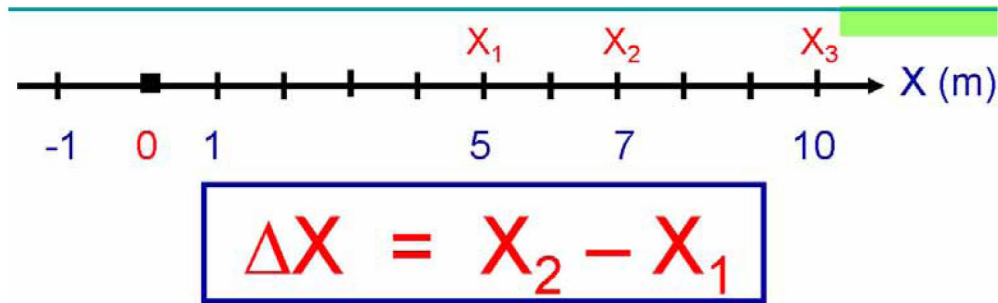


Lo spostamento è un vettore che parte da X1 e punta a X2

Il moto

Tutte le grandezze che per essere definite hanno bisogno di un verso (e della direzione associata), oltre che della loro intensita' (cioe' del valore numerico di una loro misura) si dicono vettoriali

Nel caso unidimensionale, la direzione e' fissa, quella della retta su cui giace il moto \rightarrow la direzione e' una, ma la grandezza vettoriale (p es lo spostamento, puo' avere verso concorde (detto positivo) od opposto (detto negativo) a quello fissato nel sistema di coordinate sulla retta



- Non sappiamo nulla su cosa abbia fatto il punto mentre andava da X_1 a X_2 e su quanto spazio abbia effettivamente percorso.

Spazio percorso $\neq \Delta X$

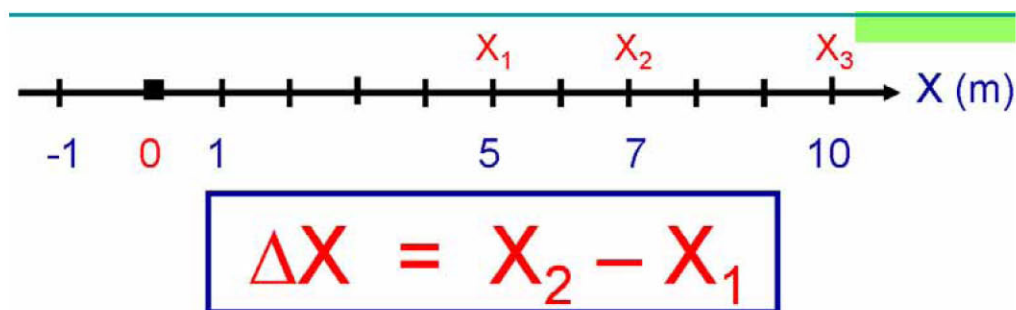
- Facciamo un esempio: $X_1 = 5 \text{ m}$; $X_2 = 7 \text{ m}$

Immaginiamo che il punto, partendo da X_1 , sia andato prima nel punto $X_3 = 10 \text{ m}$, e poi sia tornato indietro nel punto X_2 .

$$\Delta X = X_2 - X_1 = \underbrace{(X_2 - X_3)}_{\Delta X_2} + \underbrace{(X_3 - X_1)}_{\Delta X_1} =$$

$$2 = (7 - 10) + (10 - 5) = -3 + 5 = 2 \text{ m}$$

Spazio percorso (spost. "scalare")



- Per trovare lo spazio percorso dobbiamo considerare il valore assoluto dello spostamento.

$$\text{Esempio: spazio percorso} = |X_2 - X_3| + |X_3 - X_1| = \\ 3 + 5 = 8 \text{ m}$$

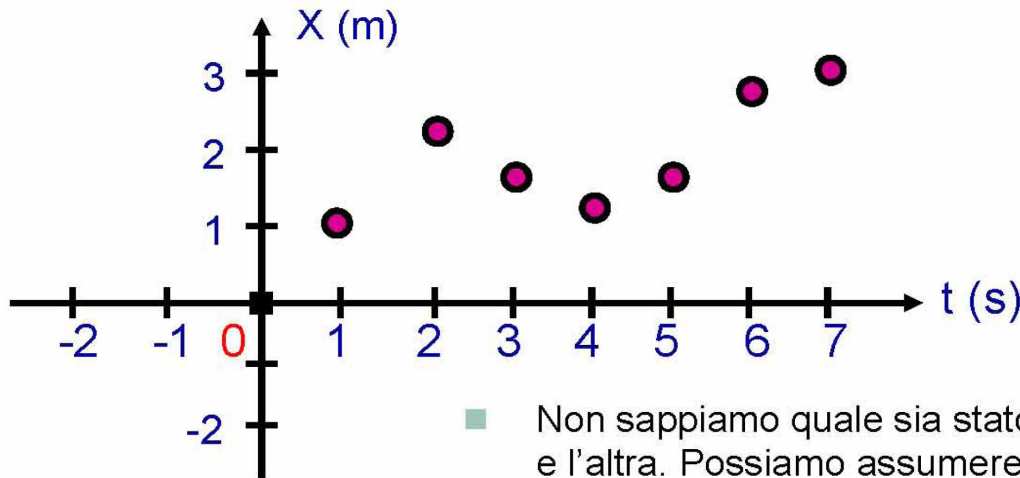
- Come si vede lo spazio percorso è diverso dallo spostamento.

Spostamento e spazio percorso

- NB: se $X_1 = X_2$ ie il punto torna alla posizione iniziale $\rightarrow \Delta X = 0$
! Che non implica che il punto non sia mosso fra t_1 e t_2
- Si definisce **spostamento "scalare"** la lunghezza totale della traiettoria: se andate da casa a lezione e tornate indietro, lo spostamento vettoriale e' nullo, ma indubbiamente vi siete spostati, cioe' quello scalare non lo e'!

- Supponiamo di scattare una fotografia ogni secondo al punto materiale che si sta spostando lungo la retta graduata.
- Costruiamo quindi il seguente grafico, dove in ascissa mettiamo il tempo e sulle ordinate mettiamo lo spazio. Anche per il tempo fissiamo un'origine, mentre per il verso non abbiamo scelta in quanto il tempo scorre in una direzione soltanto.

Legge oraria del moto



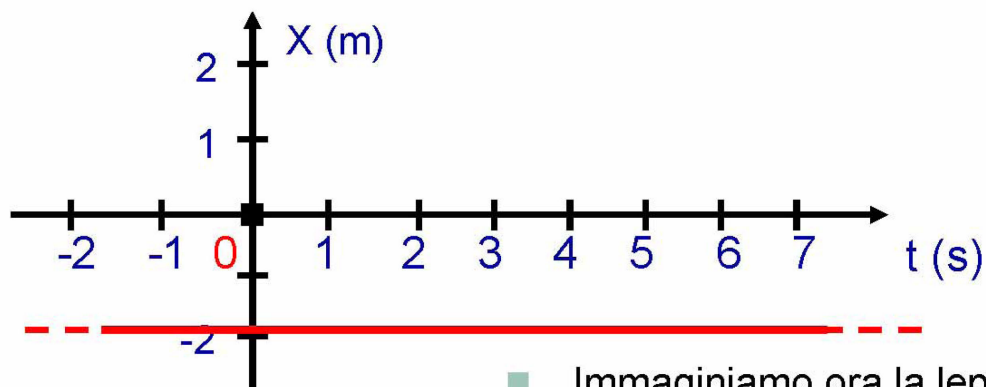
- Non sappiamo quale sia stato il tipo di moto del punto tra una fotografia e l'altra. Possiamo assumere che abbia fatto il moto più semplice (moto rettilineo uniforme).
- Se vogliamo più informazioni sul moto, dobbiamo diminuire l'intervallo tra una foto e l'altra, facciamo ad esempio una foto ogni decimo di secondo.
- Possiamo immaginare di ridurre sempre più il tempo intercorso tra una fotografia e l'altra, fino a quando questi diventa un infinitesimo.
- Abbiamo ottenuto così una funzione continua dello spazio in funzione del tempo:

Questa funzione si chiama legge oraria del moto

Fis. Ser e
Did. 1217

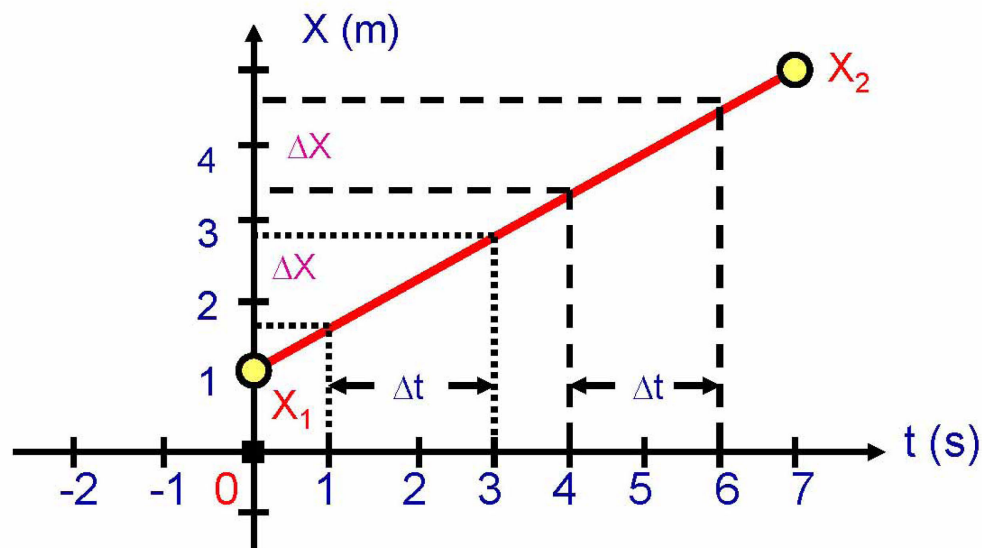
$$X = X(t) \quad [\text{si può anche scrivere } X = f(t)]$$

- Immaginiamo una lepre che stia ferma nel punto $X = -2$ m



Legge oraria: esempi

- Immaginiamo ora la lepre che si sta muovendo secondo la seguente legge oraria:



- Da notare in questo tipo di moto che se noi scegliamo un intervallo di tempo Δt , lo spostamento ΔX della lepre è sempre lo stesso, qualunque sia il punto in cui si trova la lepre. Come vedremo questa è la caratteristica del moto rettilineo uniforme.

Velocita' media

Prendiamo un punto materiale che si sposta dalla posizione X_1 , occupata all'istante t_1 , alla posizione X_2 che raggiunge all'istante $t_2 > t_1$

- La velocità media è il rapporto tra lo spostamento di un punto materiale e l'intervallo di tempo impiegato per realizzarlo.

$$v_{\text{media}} = \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{X_2 - X_1}{t_2 - t_1}$$

Da notare che la velocità ha sempre lo stesso segno dello spostamento, perché Δt è sempre positivo (il tempo, purtroppo, non scorre mai all'indietro!)

Velocita' scalare

La velocita' scalare media e' un modo diverso di calcolare la rapidita' del moto:

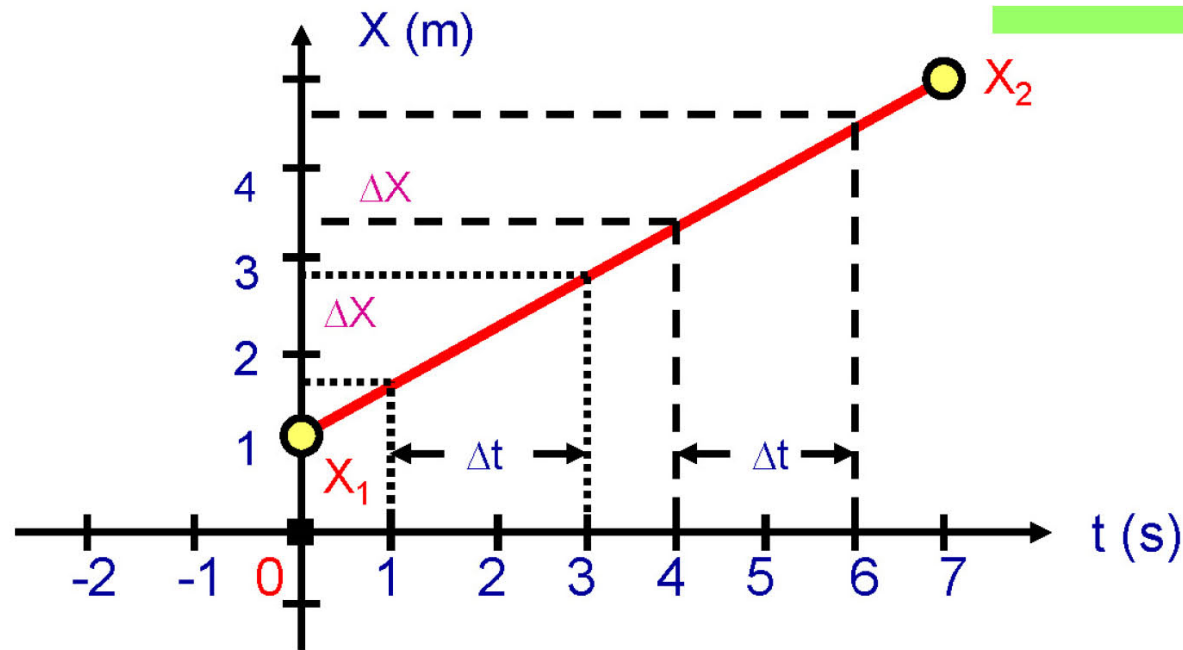
❖ La velocita' vettoriale e' definita dallo spostamento ΔX .

La **velocita' scalare media** e' invece definita dalla **lunghezza totale ΔS del percorso**, cioe' dallo spazio effettivamente percorso indipendentemente dalla direzione

$$U = \Delta S / \Delta t$$

❖ Non ha segno algebrico (come la velocita' vettoriale) perche' non include il verso

Moto rettilineo uniforme

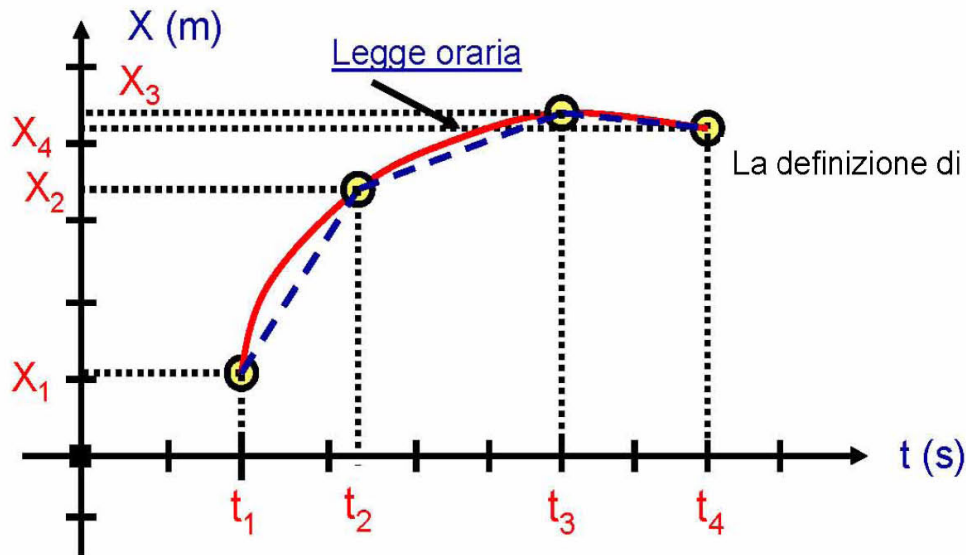


- Il moto avviene lungo una retta
- La velocità media è la stessa per qualsiasi Δt da noi scelto

$$v_{\text{media}} = \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{X_2 - X_1}{t_2 - t_1} = \text{costante}$$

Velocità istantanea

- La conoscenza della velocità media corrispondente allo spostamento ΔX non ci dà informazioni sulla velocità della particella durante l'intervallo di tempo in cui è avvenuto lo spostamento.
- Per ovviare a questo problema si può pensare di ridurre l'intervallo Δt in tanti intervalli Δt più piccoli, in modo che l'approssimazione del moto qualsiasi con un moto rettilineo uniforme migliori (ovvero si approssima il moto qualsiasi con una somma di moti rettilinei uniformi).



La definizione di velocità istantanea del punto al tempo t_1 è la seguente:

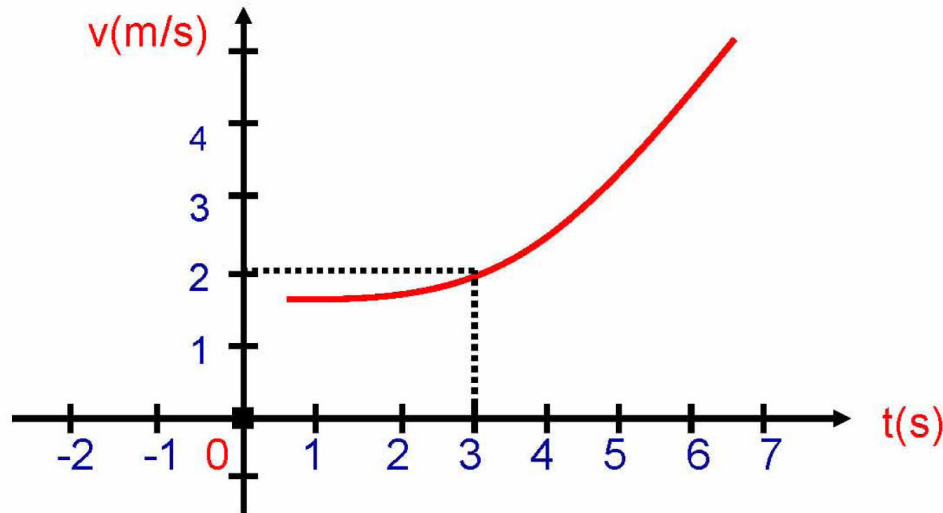
$$v(t_1) = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{X_2 - X_1}{t_2 - t_1}$$

L'operazione di limite su questo rapporto porta alla derivata della funzione $x(t)$

- In questo caso particolare la velocità media dei tre intervalli Δt è diversa nei tre intervalli (in particolare nel terzo intervallo è negativa perché il corpo torna indietro) ed è diversa dalla velocità media nell'intervallo $\Delta t = t_4 - t_1$
- Per conoscere la velocità media nell'intorno di un punto qualsiasi della traiettoria occorre ridurre sempre più l'intervallo, fino a farlo diventare un intervallo infinitesimo.

- La velocità istantanea è definita per ogni istante di tempo t ; abbiamo cioè una funzione $v(t)$.

- Possiamo costruire il grafico seguente:

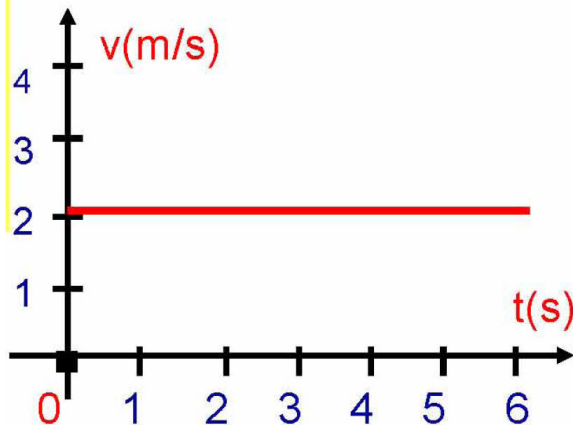


Accelerazione

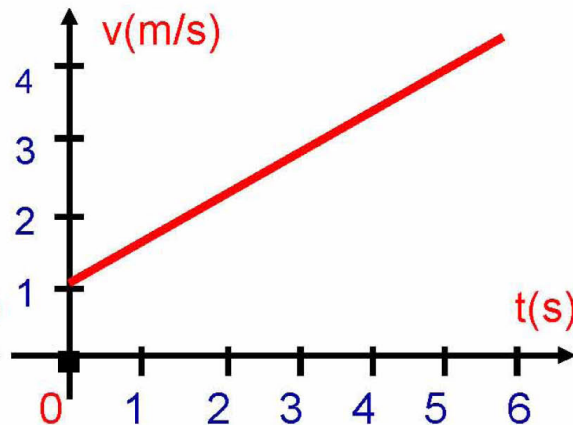
Esistono moti in cui la velocità varia nel tempo: basta pensare a quando

un'auto si ferma e riparte,
decelera in entrata in curva,
accelera in uscita

- Due casi particolari:



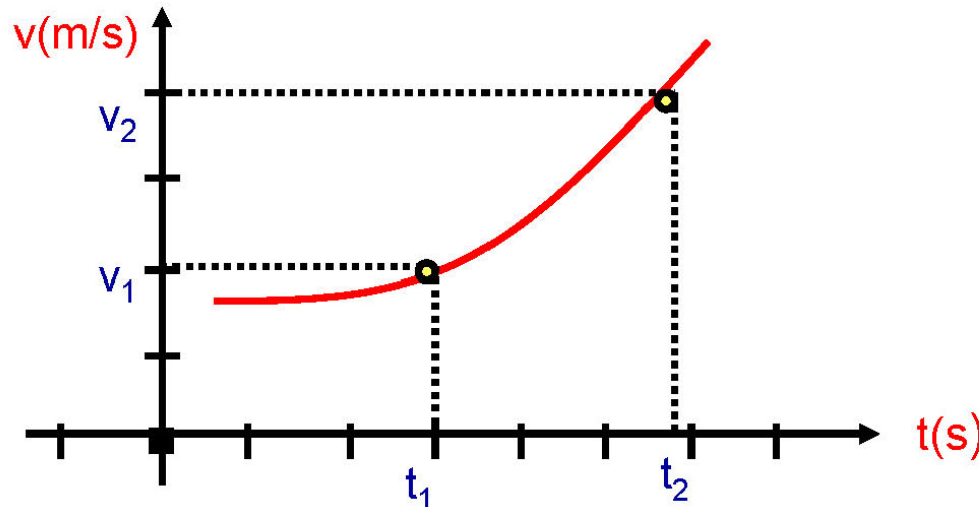
Moto rettilineo uniforme



Moto uniformemente
accelerato

Accelerazione

- Per definire l'accelerazione si può applicare di nuovo quanto detto a proposito della velocità
- L'accelerazione è una misura della variazione della velocità rispetto al tempo:



- Accelerazione media:

$$a_{\text{media}} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

Si misura in m/s^2

- L'accelerazione ha un segno che può essere diverso rispetto al segno della velocità
 - Se voi siete in automobile e frenate, l'auto continua ad andare avanti ma l'accelerazione è diretta all'indietro

Accelerazione

- Accelerazione istantanea:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

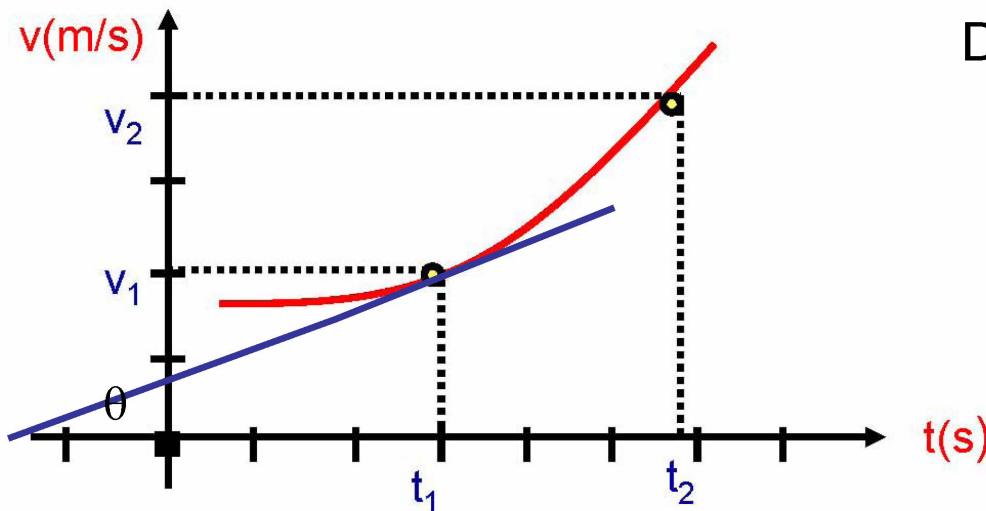
- L'accelerazione è la derivata rispetto al tempo della velocità ovvero è la derivata seconda dello spazio rispetto al tempo.

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Dato che $v = dx/dt$, segue che

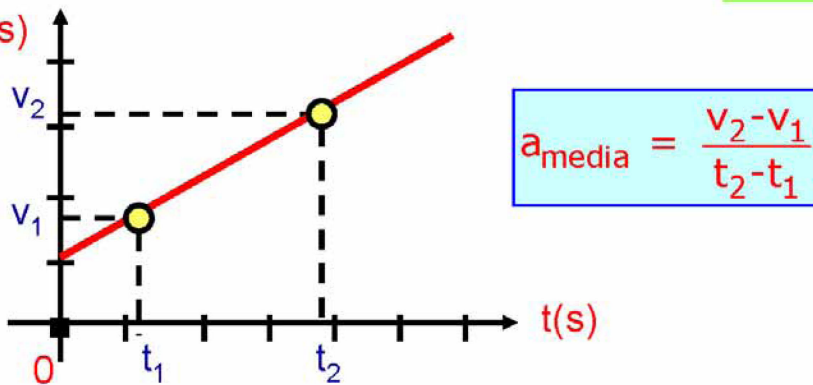
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

L'accelerazione istantanea e' la derivata seconda dell'equazione oraria del moto

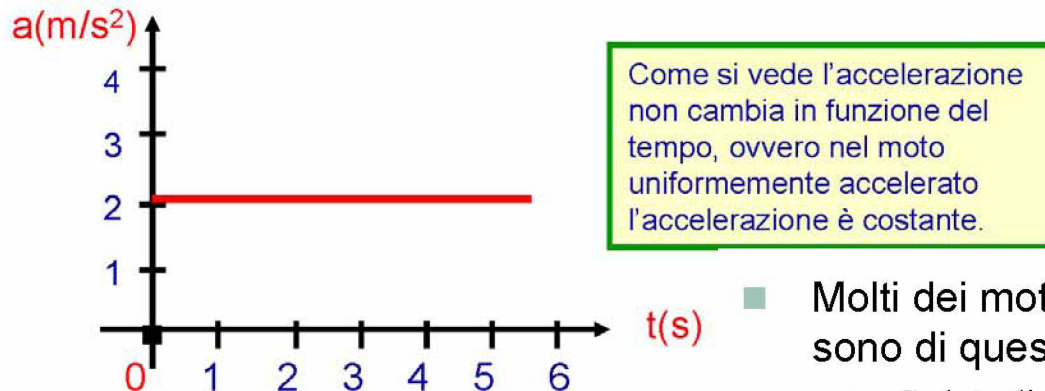


Geometricamente e' la pendenza dell'equazione oraria della velocita' $a = \tan\theta$

Moto unif. accelerato



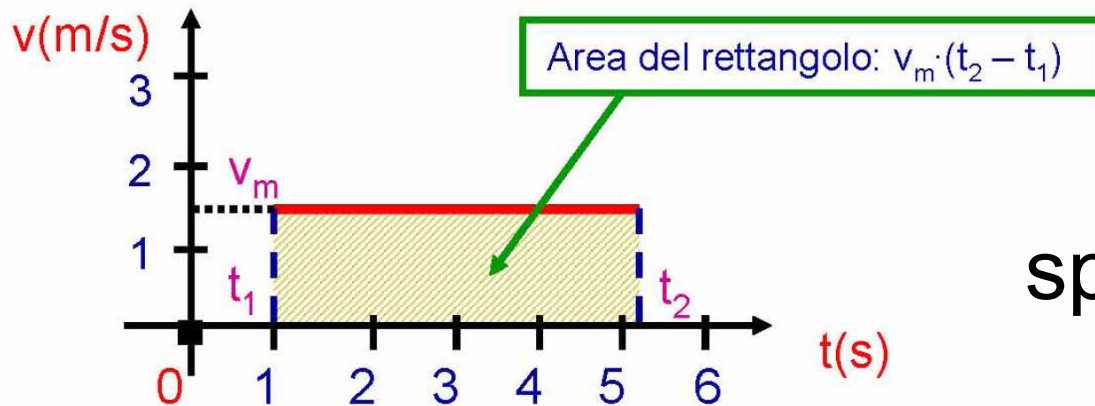
- Nel moto uniformemente accelerato l'accelerazione media è la stessa qualunque sia l'intervallo di tempo $t_2 - t_1$ scelto.
- Facciamo il grafico dell'accelerazione istantanea in funzione del tempo nel caso del moto uniformemente accelerato:



- Molti dei moti che studieremo, e che avvengono in natura, sono di questo tipo:
 - Caduta di un grave in prossimità della superficie della terra
 - Moto di un elettrone in un tubo a raggi catodici
 - Etc...

N.B. Non ha nessuna importanza la derivata dell'accelerazione

- Caso semplice: moto rettilineo uniforme.



Trovare lo
spostamento nota
 v media

- Supponiamo che tra gli istanti t_1 e t_2 il punto si sia mosso con velocità costante v_m , allora abbiamo:

$$v_m = \frac{X_2 - X_1}{t_2 - t_1} \quad \Rightarrow \quad X_2 - X_1 = v_m \cdot (t_2 - t_1)$$

- Lo spostamento ($X_2 - X_1$) è uguale all'area compresa tra il grafico della velocità e l'asse dei tempi.
- Per conoscere il punto finale X_2 occorre conoscere il punto iniziale X_1 .

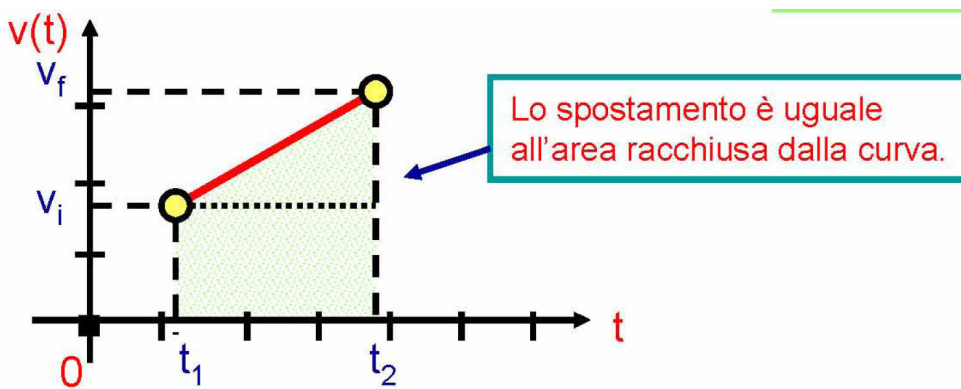
$$X_2 = X_1 + v_m \cdot (t_2 - t_1)$$

Problema: trovare lo spostamento nota v media

$$X_2 = X_1 + v_m \cdot (t_2 - t_1)$$

- Riassumendo: per trovare il punto di arrivo di un corpo che si sta muovendo con velocità costante, occorre conoscere:
 - La velocità del corpo
 - L'intervallo di tempo $(t_2 - t_1)$ nel quale è avvenuto il moto
 - Il punto di partenza (condizione al contorno)

Di solito, conosciamo due quantità e occorre trovare la terza (incognita)

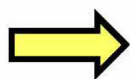


Moto uniformemente accelerato

- Esempio: un corpo si muove di moto uniformemente accelerato tra gli istanti di tempo t_1 e t_2 . All'istante iniziale il corpo ha velocità pari a v_i .
- Lo spostamento è pari all'area racchiusa dalla curva. In questo caso semplice possiamo calcolare l'area anche senza risolvere l'integrale definito.
- La curva corrisponde ad un rettangolo con sovrapposto un triangolo:
 - Rettangolo: base = $t_2 - t_1$; altezza = $v_i \rightarrow \text{area} = (t_2 - t_1) \cdot v_i$
 - Triangolo: base = $t_2 - t_1$; altezza = $v_f - v_i \rightarrow \text{area} = \frac{1}{2}(t_2 - t_1) \cdot (v_f - v_i)$
 - Area totale = area_rettangolo + area_triangolo =

$$= (t_2 - t_1) \cdot v_i + \frac{1}{2}(t_2 - t_1)(v_f - v_i) = (t_2 - t_1) \frac{v_f + v_i}{2} = \Delta t \cdot v_m$$

v_m va calcolata

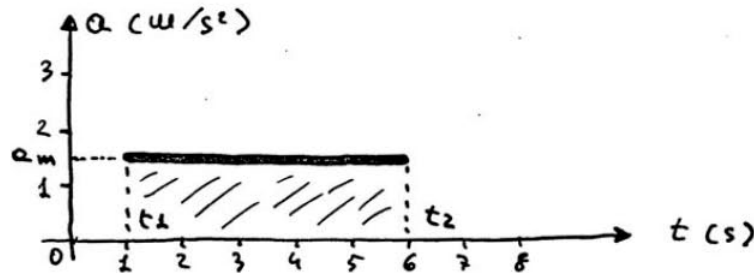


$$X_2 = X_1 + \Delta t \cdot v_m$$

TROVARE LA VELOCITA' CONOSCENDO
L'ACCELERAZIONE

- QUESTO E' IL CASO CHE AVVIENE PIU' FREQUENTEMENTE
COME VEDREMO TRA QUALCHE LEZIONE, DI SOLITO SI
RIESCE A CONOSCERE L'ACCELERAZIONE DI UN CORPO,
E DA QUI OCCORRE RISALIRE ALLA LEGGE ORARIA $x(t)$

- CASO SEMPLICE: MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO



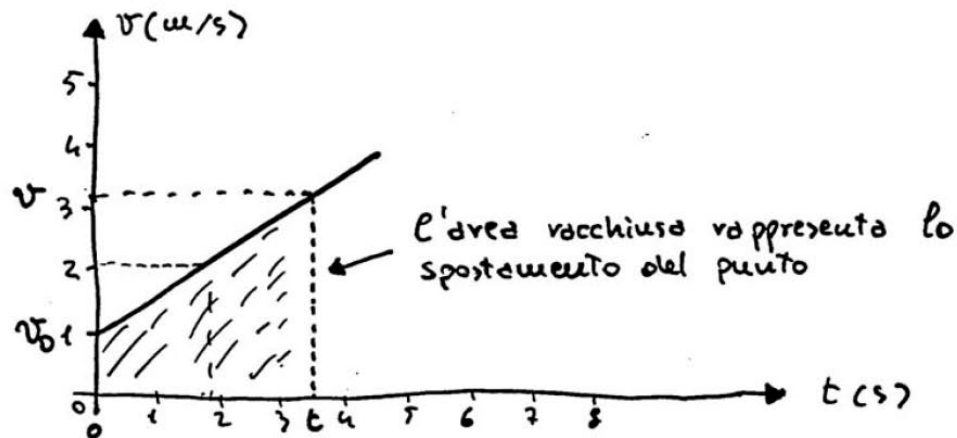
- SUPPONIAMO CHE TRA GLI ISTANTI t_1 E t_2 IL CORPO SI
MUOVA CON ACCELERAZIONE COSTANTE a_m

$$\Rightarrow a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow v_2 - v_1 = a_m \cdot (t_2 - t_1)$$

- LA VARIAZIONE DI VELOCITA' ($v_2 - v_1$) E' UGUALE
ALL'AREA COMPRESA TRA IL GRAFICO DELL'ACCELERAZIONE
E L'ASSE DEI TEMPI
- PER CONOSCERE LA VELOCITA' FINALE v_2 OCCORRE
CONOSCERE LA VELOCITA' INIZIALE v_1

$$v_2 = v_1 + a_m \cdot (t_2 - t_1)$$

Moto uniformemente accelerato



Moto uniformemente accelerato

$$\Rightarrow X = X_0 + \bar{v} t \quad \bullet \quad \bar{v} = \frac{1}{2} (v_0 + v)$$

- CONOSCENDO L'ACCELERAZIONE SI HA:

$$v = v_0 + a t$$

$$\Rightarrow \bar{v} = \frac{1}{2} (v_0 + v_0 + a t) = v_0 + \frac{1}{2} a t \quad \text{moto uniformemente accelerato}$$

$$\bullet X = X_0 + [v_0 + \frac{1}{2} a t] \cdot t = X_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Legge oraria del moto
uniformemente accelerato

$$X = X_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$X = f(t)$$

Combinazioni di variabili

Le equazioni $v = v_0 + at$ $x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$

Sono le equazioni base per il caso di moto uniformemente accelerato, da usare ogni volta che il moto e' ad $a=\text{costante}$

Si noti che le grandezze implicate sono 5: $x-x_0$ (oppure x_0), v , t , a e v_0

Di solito, una di queste grandezze non e' rilevante per il problema in questione, ne' come dato ne' come incognita, mentre 3 delle restanti grandezze sono dichiarate come dati del problema e viene chiesto di trovare la quarta. Le grandezze "inutili" possono essere eliminate dalle equazioni, ovvero si possono ottenere equazioni "aggiuntive" (da quelle base) in cui la variabile "inutile" non compare

Eq. moto con $a = \text{cost.}$

- AVETE \underline{a} e $\underline{V_0}$:
QUANTO VALE v DOPO UN TEMPO t ?

$$v = v_0 + a t$$

- CONOSCETE \underline{a} , $\underline{x_0}$, $\underline{v_0}$:
QUANTO VALE x DOPO UN TEMPO t ?

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

- CONOSCETE a , v_0 , x_0 :
QUANTO VALE v DOPO UNO SPOSTAMENTO x ?

$$v^2 = v_0^2 + 2 a (x - x_0)$$

- CONOSCETE x_0 , v_0 :
QUANTO VALE x SE DOPO UN TEMPO t LA
VELOCITA' VALE v ?

$$x = x_0 + \frac{1}{2} (v_0 + v) t$$

- CONOSCETE x_0 , a :
QUANTO VALE x SE DOPO UN TEMPO t LA
VELOCITA' VALE v ?

$$x = x_0 + v t - \frac{1}{2} a t^2$$

TRASCURANDO L'ATTRITO DELL'ARIA

(GALILEO GALILEI)

SI TRATTA DI UN MOTO UNIFORMEMENTE
ACCELERATO (ACCELERAZIONE COSTANTE)

Acc. per corpi
in caduta
libera

SCEGLIETE UN ASSE VERTICALE PER IDENTIFICARE
LA DIREZIONE DEL MOTO

SCEGLIETE UN VERSO DI PERCORRENZA:

- POSITIVO VERSO L'ALTO $\Rightarrow g = - 9.80 \text{ m/s}^2$

- POSITIVO VERSO IL BASSO $\Rightarrow g = + 9.80 \text{ m/s}^2$

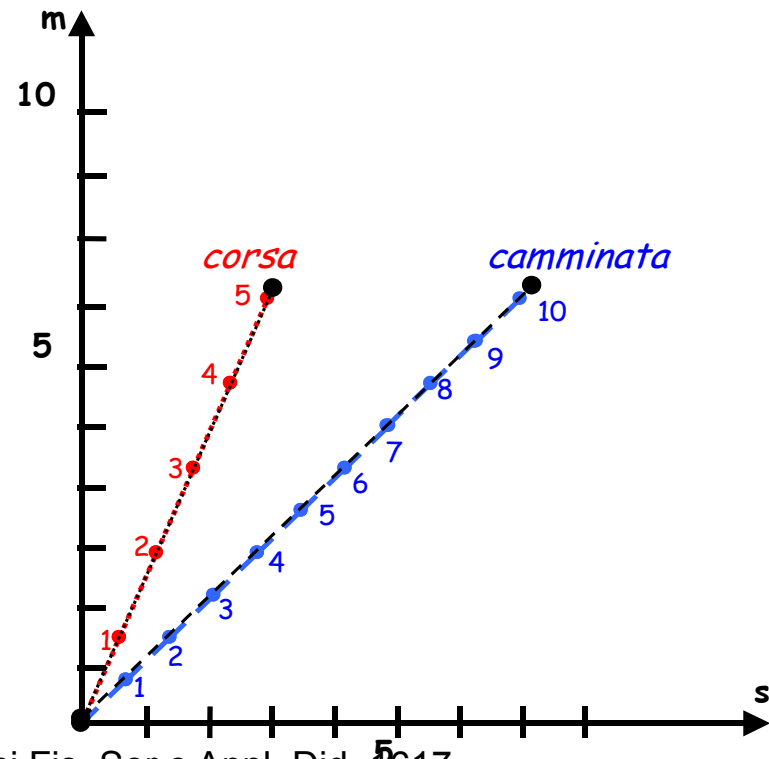
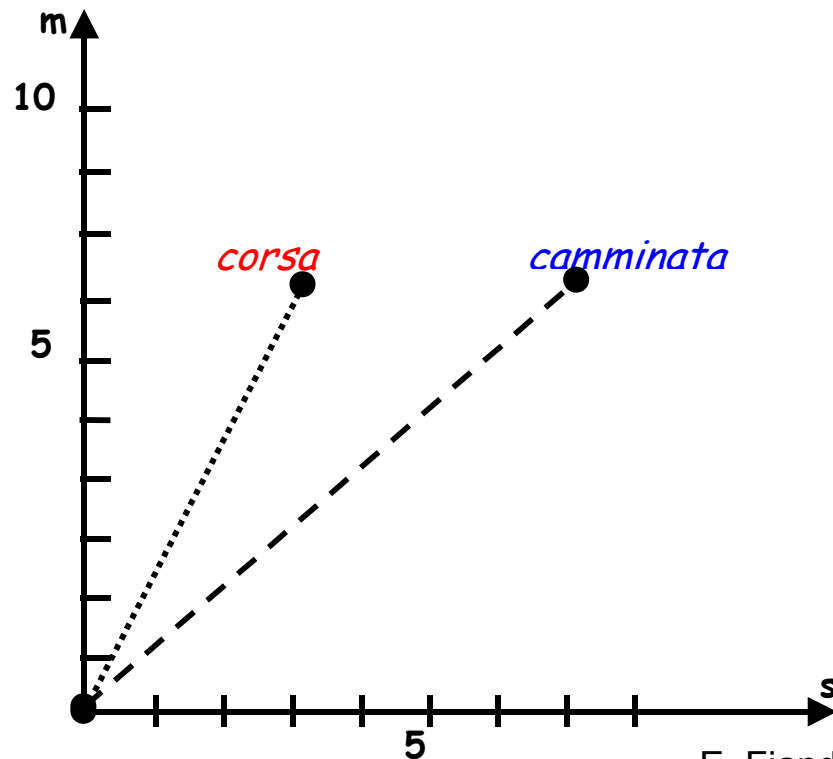
QUALUNQUE SIA LA SCELTA CHE VOI FATE ,
L'ACCELERAZIONE DI GRAVITA' E' SEMPRE DIRETTA
VERSO IL CENTRO DELLA TERRA

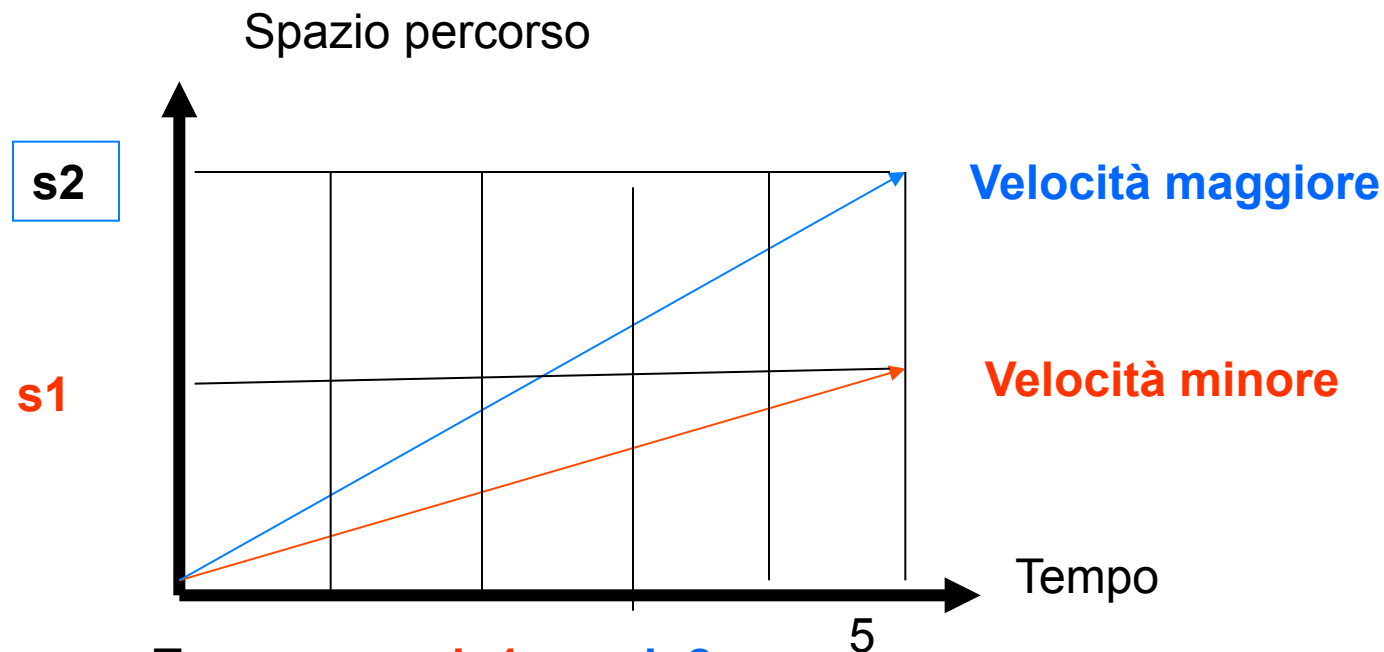
PICCOLO CAMBIO DI NOTAZIONE:

GLI SPOSTAMENTI CHE AVVENGONO NELLA DIREZIONE
VERTICALE LI INDICHIAMO CON Y INVECE DI X

Tabelle e Diagrammi

	Passi	Distanza percorsa	tempo impiegato
camminata	10 passi	6,25 m	7 s
corsa	5 passi-corsa	6,25 m	3 s





Tempo	spazio1	spazio2
1	1	2
2	2	4
3	3	6
4	4	8
5	5	10

$$v1 = \text{spazio1} / t = 1$$

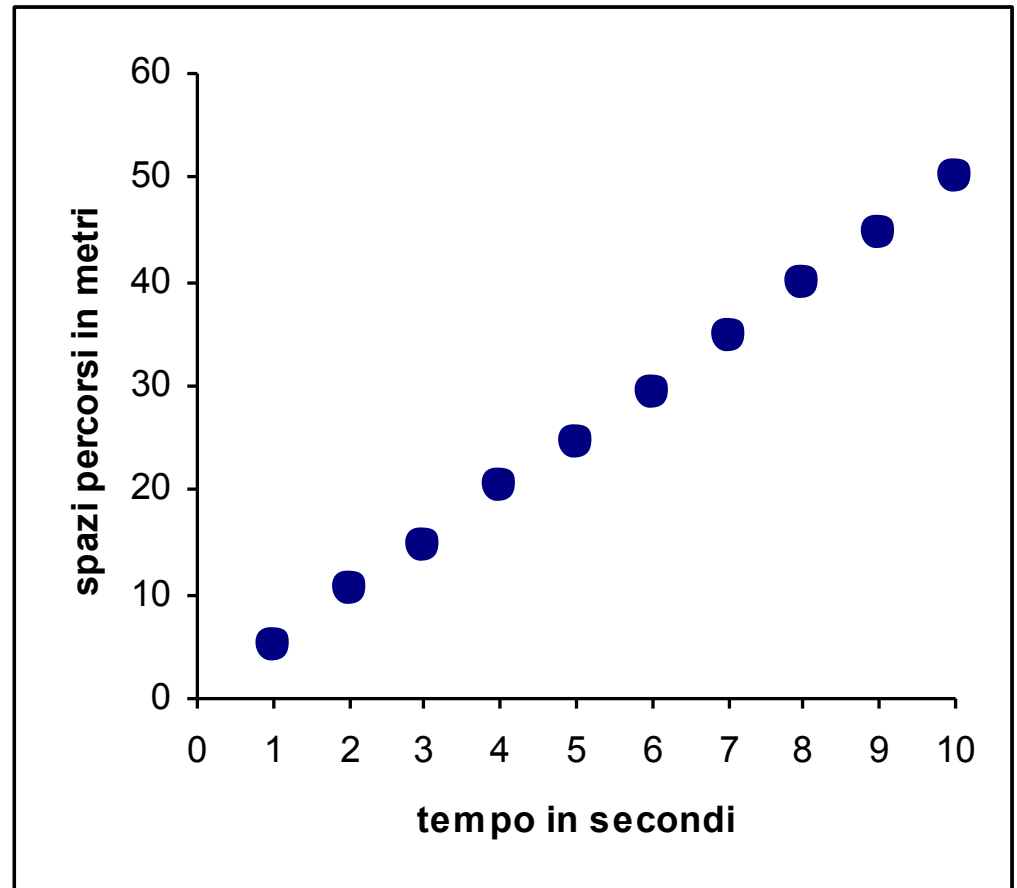
$$v2 = \text{spazio2} / t = 2$$

Nel diagramma si pone il tempo in ascissa e lo spazio percorso in ordinata
le diverse velocità sono rappresentate da linee con diversa pendenza

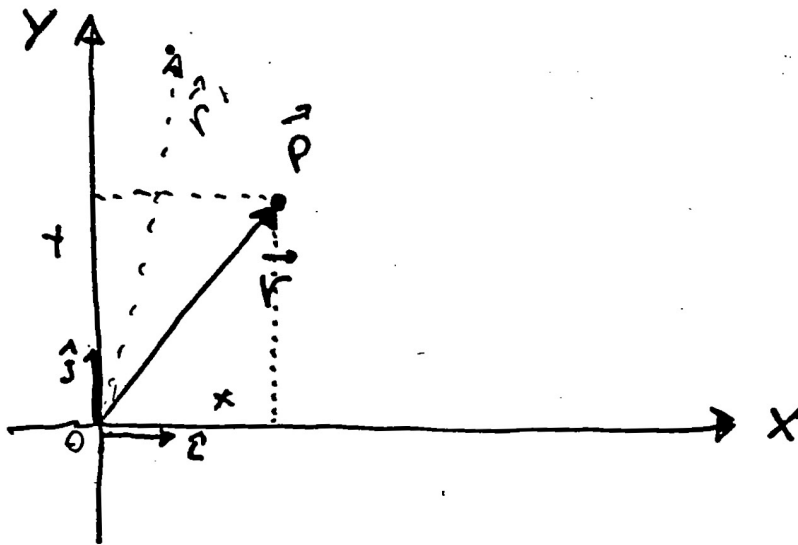
Tabelle e Diagrammi

Tempi (s)	Spazi percorsi (m)
1	5,20
2	10,50
3	14,80
4	20,50
5	24,70
6	29,30
7	34,80
8	39,80
9	44,60
10	50,00

Moto uniforme: $s(t)=v \cdot t$



Spostamento in 2 o 3 dimensioni

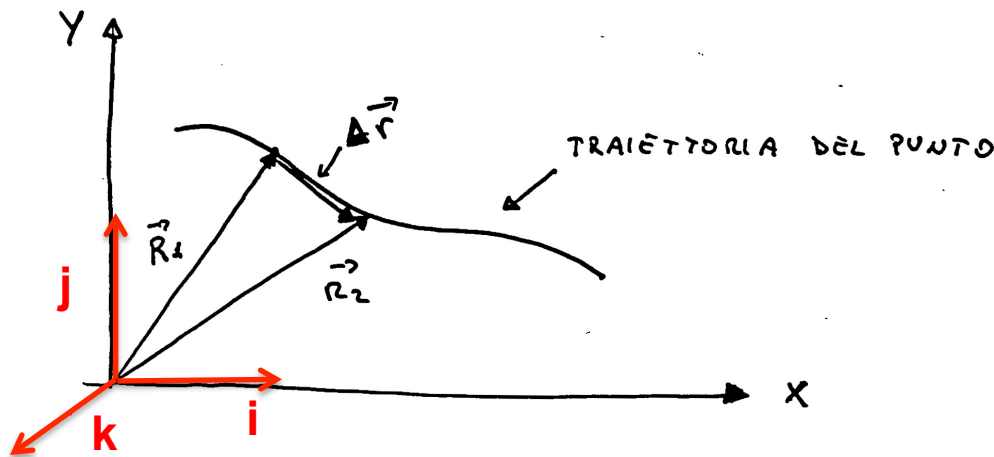


- SEGUENDO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO ORTOGONALE, CIOE' CON TRE ASSI FORMANTI UN ANGOLO DI 90° TRA CIASCUNO DI ESSI
- LA POSIZIONE DI UN PUNTO NELLO SPAZIO E' INDIVIDUATA DANDO IL VETTORE POSIZIONE \vec{r}

$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$$

- I COEFFICIENTI x, y, z RAPPRESENTANO LE POSIZIONI DEL PUNTO LUNGO I TRE ASSI COORDINATI

Ancora sullo spostamento



- QUANDO IL CORPO SI MUOVE, DISEGNANDO NELLO SPAZIO UNA TRAIETTORIA, IL VETTORE POSIZIONE \vec{r} CAMBIA ANCH'ESSO.

- LO SPOSTAMENTO DEL CORPO DA UN PUNTO 1 (OCCUPATO AL TEMPO t) AD UN PUNTO 2 (OCCUPATO AL TEMPO $t + \Delta t$) E' DATO DA :

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 \hat{i} + y_2 \hat{j} + z_2 \hat{k}) - (x_1 \hat{i} + y_1 \hat{j} + z_1 \hat{k})$$

$$\Delta \vec{r} = (x_2 - x_1) \hat{i} + (y_2 - y_1) \hat{j} + (z_2 - z_1) \hat{k} = \Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j} + \Delta z \hat{k}$$

$$|\Delta \vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

NB: \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} sono vettori che servono a indicare la direzione e il verso dell'asse riferimento corrispondente. Hanno lunghezza unitaria fissa, cioè modulo = 1

Ancora sullo spostamento

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 =$$
$$= (x_2 \hat{i} + y_2 \hat{j} + z_2 \hat{k}) - (x_1 \hat{i} + y_1 \hat{j} + z_1 \hat{k})$$

$$\Delta \vec{r} = (x_2 - x_1) \hat{i} + (y_2 - y_1) \hat{j} + (z_2 - z_1) \hat{k} =$$

Lo spostamento in due o tre dimensioni si studia scomponendo il vettore posizione nelle sue componenti rispetto agli assi cartesiani del sistema di riferimento.

Infatti

$$\mathbf{v} = \Delta \mathbf{r} / \Delta t = (\Delta x / \Delta t) \mathbf{i} + (\Delta y / \Delta t) \mathbf{j} + (\Delta z / \Delta t) \mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = \Delta \mathbf{v} / \Delta t = (\Delta v_x / \Delta t) \mathbf{i} + (\Delta v_y / \Delta t) \mathbf{j} + (\Delta v_z / \Delta t) \mathbf{k}$$

cioe' si scompone un moto in piu' dimensioni in moti unidimensionali lungo gli assi coordinati

Nel 1922 uno degli Zacchini, una celebre famiglia di virtuosi del circo, fu il primo uomo cannone a essere sparato in una rete all'altro capo dell'arena. Per aumentare il brivido della folla, l'altezza e la lunghezza della traiettoria furono gradualmente aumentate, finché nel 1939 o 1940 Emanuele Zacchini sorvolò tre altissime ruote panoramiche superando una distanza orizzontale di 69 metri.

Come fece Zacchini a decidere dove collocare la rete d'atterraggio? E come poté esser certo di riuscire a non urtare le ruote panoramiche?

Troverete la risposta in questo capitolo.



Moto dei proiettili

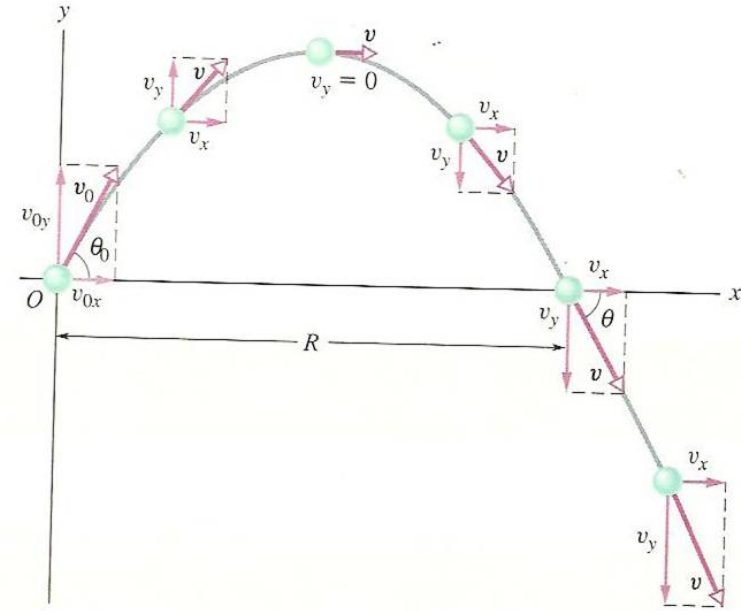
- Si chiama **proiettile** una particella (ie punto materiale) che si muove in **caduta libera** in due dimensioni con velocità iniziale v_0 e accelerazione g costante diretta verso il basso
- Es: palla da golf, proiettile di cannone ma non un aereo o un uccello o una sfera che ruota (eg palla ad effetto)

- IL PROIETTILE È LANCIATO CON VELOCITÀ \vec{v}_0

$$\vec{v}_0 = v_{0x} \hat{i} + v_{0y} \hat{j}$$

$$v_{0x} = |\vec{v}_0| \cos \theta_0 \quad ; \quad v_{0y} = |\vec{v}_0| \sin \theta_0$$

- LA COMPONENTE ORIZZONTALE DELLA VELOCITÀ SI CONSERVA
- LUNGO LA DIREZIONE VERTICALE IL PROIETTILE DESCRIVE UN MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO CON ACCELERAZIONE g DIRETTA VERSO IL SUOLO
- LA GITTATA R È LA DISTANZA ORIZZONTALE CHE IL PROIETTILE HA COPERTO QUANDO RIPASSA ALLA QUOTA DI LANCIO



- Lungo la direzione orizzontale il moto è uniforme dato che non c'è accelerazione

$$v_x(t) = v_0 \cos \theta_0$$

$$v_y(t) = v_0 \sin \theta_0 + gt$$

Moto dei proiettili

UNA PALLA È LASCIATA CADERE DA FERMA NELLO
STESSO ISTANTE IN CUI UN'ALTRA È SPARATA
ORIZZONTALMENTE VERSO DESTRA.

I LORO MOTI VERTICALI SONO IDENTICI

- LE DUE PALLE RAGGIUNGONO TERRA NELLO STESSO ISTANTE.
- IL MOTTO LUNGO L'ASSE VERTICALE È INDIPENDENTE DAL MOTTO LUNGO L'ASSE ORIZZONTALE.

Possiamo quindi dividere il moto bidimensionale in due moti unidimensionali indipendenti fra loro (ie abbiamo ridotto un problema "complicato" in due problemi piu' semplici)

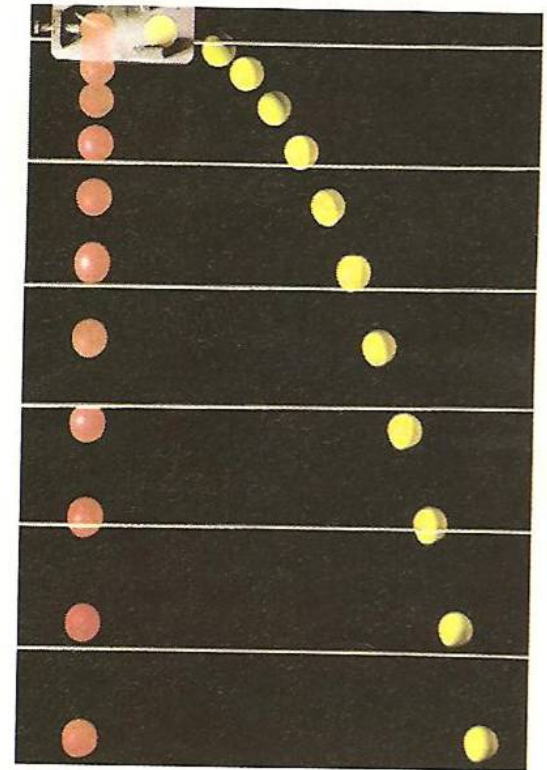


Figura 4.11 Una palla è lasciata cadere da ferma nello stesso istante in cui un'altra è sparata orizzontalmente verso destra. I loro moti verticali sono identici.



Figura 4.13 La componente verticale della velocità di questo appassionato dello *skate-board* varia, ma non la componente orizzontale, che coincide con la velocità dell'attrezzo, il quale rimane quindi sempre verticalmente sotto di lui, consentendogli di ritrovarlo nell'atterraggio.

Analisi del moto

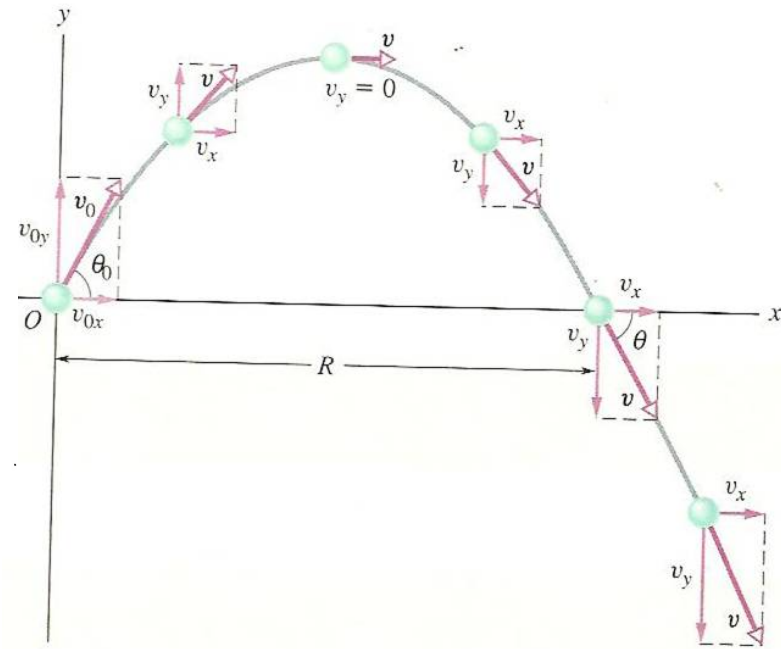
- MOTO ORIZZONTALE

$$X = X_0 + V_{0x} \cdot t = V_0 \cos \theta_0 \cdot t$$

- MOTO VERTICALE

$$\begin{aligned} Y - Y_0 &= V_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 = \\ &= V_0 \sin \theta_0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}$$

ie $v_x = v_0 \cos \theta_0$ e $v_y = v_0 \sin \theta_0$



Analisi del moto

- Il moto verticale è quello di una particella in caduta libera con $g = -9.8 \text{ m/s}^2$

$$(i) \quad y - y_0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$(ii) \quad v_y = v_0 \sin \theta_0 - gt$$

Eliminando il tempo usando la (ii) $t = \frac{v_y - v_0 \sin \theta_0}{-g}$
 e sostituendo in (i)

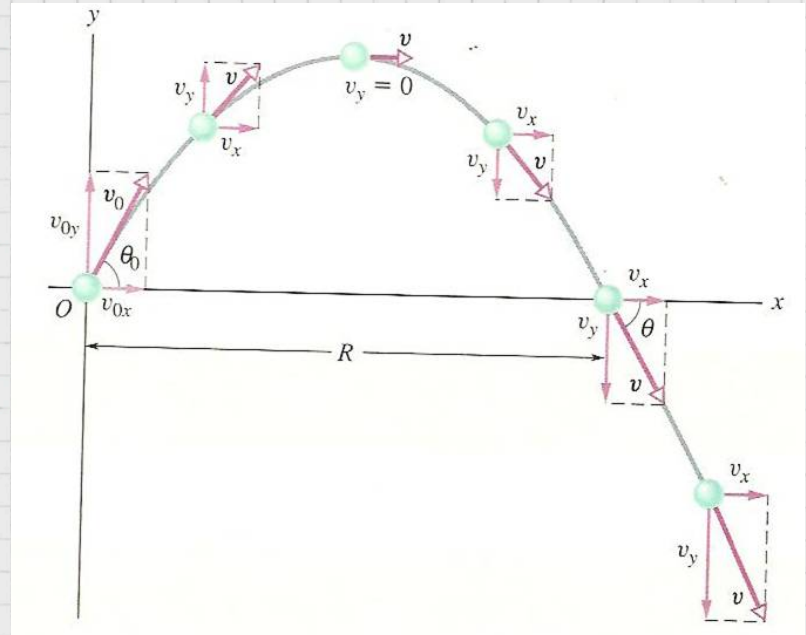
$$\begin{aligned} y - y_0 &= (v_0 \sin \theta_0) \left(\frac{v_y - v_0 \sin \theta_0}{-g} \right) - \frac{1}{2}g \left(\frac{v_y - v_0 \sin \theta_0}{-g} \right)^2 = \\ &= \frac{v_0 v_y \sin \theta_0}{-g} - \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{-g} - \frac{v_y^2}{2g} + \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g} + \frac{v_y v_0 \sin \theta_0}{g} \\ &= \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} - \frac{v_y^2}{2g} \Rightarrow y - y_0 = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta - v_y^2}{2g} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v_y^2 = v_0^2 \sin^2 \theta - 2g(y - y_0), \text{ cioè}$$

$$v_y = \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2 \theta - 2g(y - y_0)}$$

Quando il proiettile raggiunge l'altezza max $v_y = 0$ (da ii si vede che accade a $t = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g}$)

$v_0^2 \sin^2 \theta - 2g(y - y_0)_{\text{Max}} = 0 \Rightarrow (y - y_0)_{\text{Max}} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} = H_{\text{Max}}$ - Prima che raggiunga H_{Max} , v_y è verso l'alto $\Rightarrow v_y > 0$, dopo è diretto verso il basso $\Rightarrow v_y < 0$.



• MOTO ORIZZONTALE

$$x = x_0 = v_{0x} \cdot t = v_0 \cos \theta_0 \cdot t$$

• La GITTATA R è la distanza orizzontale coperta dal proiettile all'istante in cui ripasse alla quota di lancio.

Poniamo $R = x - x_0$ e $y - y_0 = 0$ nelle equazioni

$$(i) R = (v_0 \cos \theta_0) t$$

$$(ii) 0 = (v_0 \sin \theta_0) t - \frac{1}{2} g t^2$$

Elimino t da (i), sostituendolo in (ii)

$$t = \frac{R}{v_0 \cos \theta_0}$$

$$0 = \cancel{v_0} \sin \theta_0 \cdot \frac{R}{\cancel{v_0} \cos \theta_0} - \frac{1}{2} g \frac{R^2}{v_0^2 \cos^2 \theta_0} \Rightarrow$$

$$0 = \left(\tan \theta_0 - \frac{1}{2} \frac{g R}{v_0^2 \cos^2 \theta_0} \right) R \quad \text{Due soluzioni}$$

$$R = 0 \quad R = \frac{2 v_0^2 \tan \theta_0 \cos^2 \theta_0}{g} = \frac{2 v_0^2 \cdot \sin \theta_0 \cos \theta_0}{g}$$

Dall'identità trigonometrica $\sin(2\theta_0) = 2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 \Rightarrow$

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta_0)$$

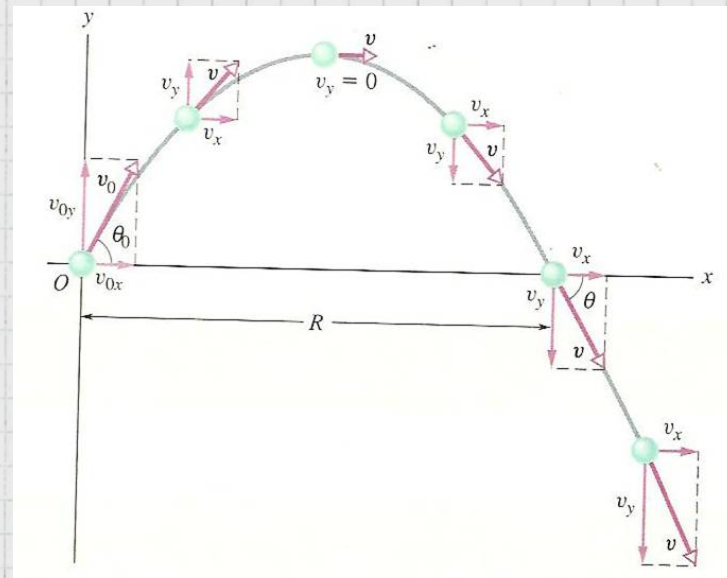
È max quando $\sin(2\theta_0) = 1 \Rightarrow 2\theta_0 = 90^\circ \Rightarrow \theta_0 = 45^\circ$

N.B.: La formula è valida solo quando quota di partenza e di arrivo sono uguali.

• MOTO VERTICALE

$$y - y_0 = v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 =$$

$$= v_0 \sin \theta_0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$



Traiettoria

• L'equazione della traiettoria si ottiene dalle equazioni (parametriche) in funzione del tempo

$$(i) \quad x = x_0 + (v_0 \cos \theta_0) t \quad \Rightarrow \quad t = (x - x_0) / v_0 \cos \theta_0$$

$$(ii) \quad y = y_0 + (v_0 \sin \theta_0) t - \frac{1}{2} g t^2$$

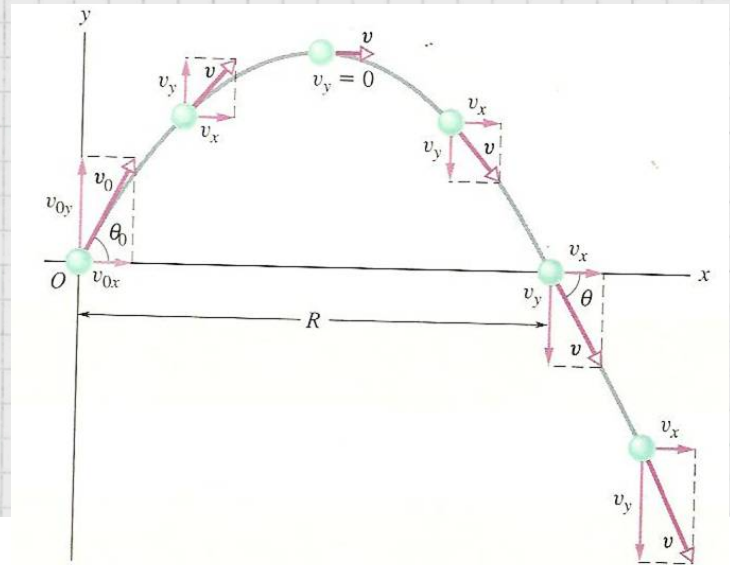
Sostituisco in (ii)

$$y = y_0 + \cancel{v_0 \sin \theta_0} \cdot \frac{(x - x_0)}{\cancel{v_0 \cos \theta_0}} - \frac{1}{2} g \frac{(x - x_0)^2}{v_0^2 \cos^2 \theta_0}$$

$$= y_0 + \tan \theta_0 (x - x_0) - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \theta_0} (x - x_0)^2$$

Se si sceglie l'origine in modo tale che $x_0 = y_0 = 0$

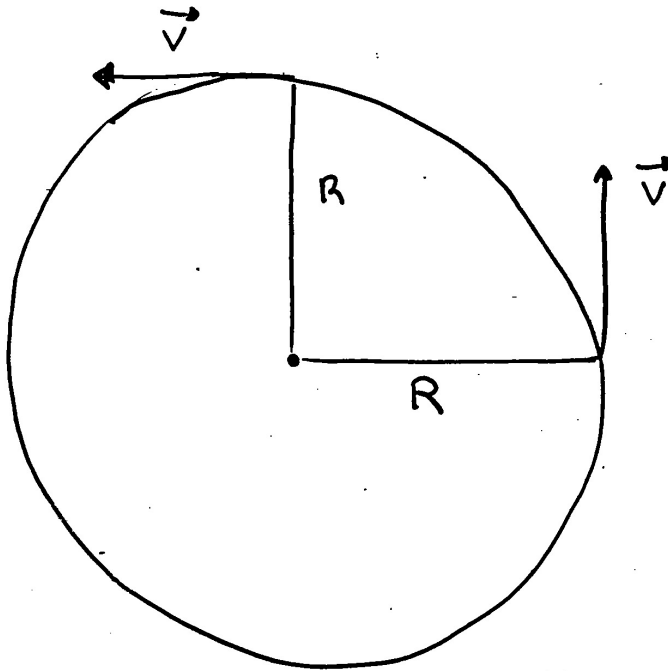
$$y = x \tan \theta_0 - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \theta_0} x^2$$



E' l'equazione di una parabola con la concavita' verso il basso

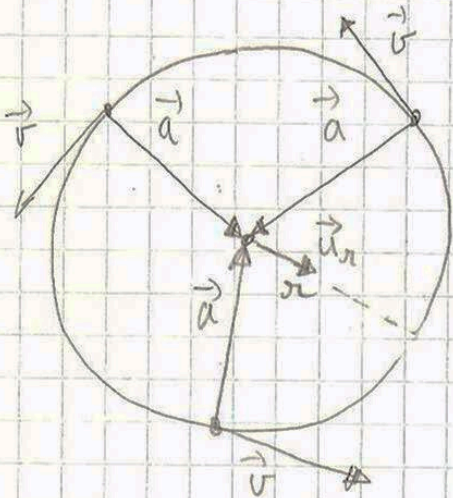
- UNA PARTICELLA SI DEFINISCE IN MOTO CIRCOLARE UNIFORME SE SI SPOSTA SU UN CERCHIO O SU UN ARCO DI CERCHIO CON VELOCITA' DI MODULO COSTANTE.
- BENCHÉ IL MODULO DELLA VELOCITA' SIA COSTANTE, LA PARTICELLA ACCELERA PERCHÉ CAMBIA LA SUA DIREZIONE.

Moto circolare uniforme



- LA DIREZIONE DI \vec{V} È SEMPRE ORTOGONALE AL RAGGIO
- IL VERSO DI ROTAZIONE ANTICLOCKWISE È POSITIVO

- Poiché il vettore velocità \vec{v} cambia continuamente direzione, c'è un'accelerazione, anche se $|\vec{v}| = \text{cost.}$



- \vec{v} è sempre tangente alla traiettoria nel punto
- \vec{a} è diretta RADIALMENTE VERSO IL CENTRO ed è detta CENTRIPETA (quindi anche \vec{a} NON è costante perché cambia direzione)
- Si dimostra che $a = \frac{v^2}{r}$ o in notazione vettoriale $\vec{a} = -\frac{v^2}{r} \hat{u}_n$

- UNA PARTICELLA CHE SI MUOVE LUNGO UNA CIRCONFERENZA (O ARCO DI CERCHIO) CON VELOCITA' SCALARE COSTANTE SUBISCE UN'ACCELERAZIONE DIRETTA VERSO IL CENTRO CHIAMATA ACCELERAZIONE CENTRIPETA

$$a = -\frac{v^2}{R}$$

M.C.U: velocità angolare

NB: questo paragrafo nel libro non c'è

- TEMPO DI PERCORRENZA DELLA CIRCONFERENZA (PERIODO)

$$T = \frac{2\pi R}{v} \quad [\text{UNITA' DI MISURA} = \text{SECONDI}]$$

- GIRI EFFETTUATI PER UNITA' DI TEMPO (FREQUENZA)

$$f \equiv \nu = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi R} \quad [s^{-1} = \text{Hz}]$$

- VELOCITA' ANGOLARE ω ; ANGOLO SPAZZATO DAL RAGGIO VETTORE NELL'UNITA' DI TEMPO

- 1 giro corrisponde a 2π radianti (360°)

$$\Rightarrow \omega = \frac{1 \text{ giro}}{1 \text{ periodo}} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \nu = 2\pi \frac{v}{2\pi R} = \frac{v}{R} \quad [\text{rad s}^{-1}]$$

- L'ACCELERAZIONE CENTRIPETA SI PUO' RISCRIVERE COME:

$$a = -\frac{v^2}{R} = -\frac{v^2}{R} \cdot \frac{R}{R} = -\omega^2 R$$

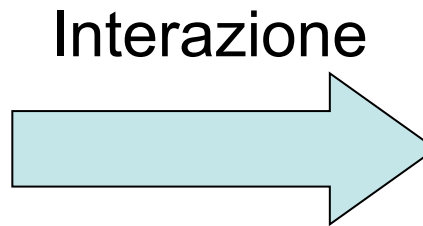
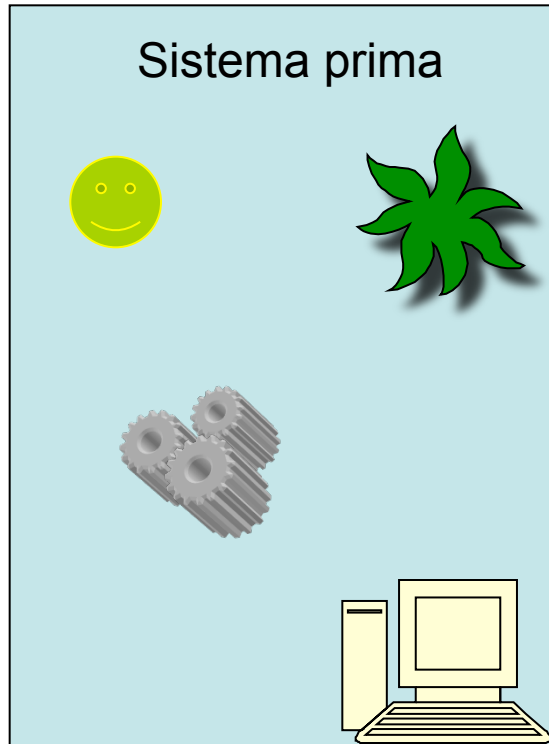
$$\boxed{v = \omega R}$$

Dinamica

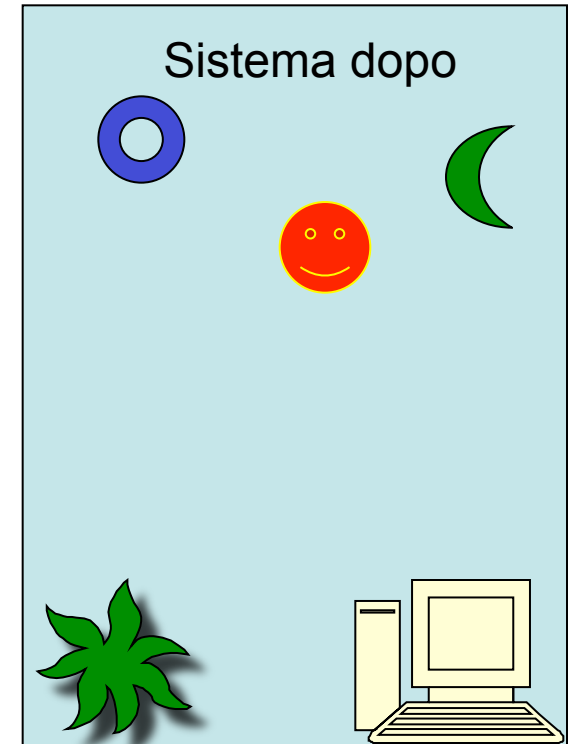
- ❑ La cinematica studia le caratteristiche del moto senza indagare le cause del moto
- ❑ La dinamica studia le cause delle variazioni moto e le sue relazioni con le variabili cinematiche, ovvero le **interazioni del punto materiale con l'ambiente circostante** che ne variano lo stato di moto
- ❑ L'accelerazione e' la variabile che caratterizza i cambiamenti nel moto
- ❑ Si chiama **forza** ogni agente fisico che imprime accelerazione a un corpo, cioe' la **forza e' la grandezza che esprime e misura l'interazione fra sistemi fisici**

Cos'è un'interazione?

È “qualcosa” che cambia lo stato o configurazione del sistema, p. es. la velocità, la temperatura, il colore, ...



Nella visione classica, le interazioni sono descritte dalla grandezza fisica che chiamiamo “forza”.



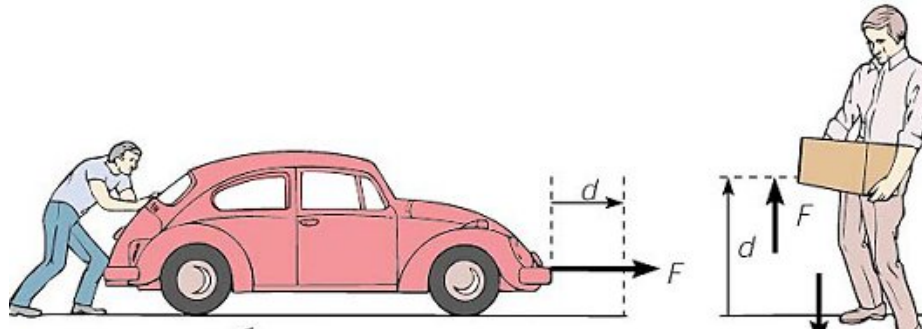
Leggi fondamentali della dinamica

[I. Newton, ~ 300 anni fa]

- Dal punto di vista della logica formale, sono postulati da cui è possibile derivare altre leggi come teoremi.
- Sono state scelte in modo che esse, e le loro conseguenze, siano in accordo, entro le precisioni di misura, con le osservazioni sperimentali effettuate.
- Nel tempo, nuovi fenomeni (o migliori precisioni) → miglioramenti successivi; le vecchie leggi sono prime approssimazioni delle nuove (ex. relatività speciale, meccanica quantistica).

Dinamica

- PRIMA DI GALILEO SI PENSAVA CHE LO STATO NATURALE DI UN CORPO FOSSE LA QUIETE. UN CORPO LASCIATO A SE STESSO RIMANEVA FERMO.
- UN CORPO SI METTEVA IN MOTO SOLTANTO SE VI ERA UN AGENTE CHE AGIVA SU DI ESSO. IMMAGINATE UN CARRO TRAINATO DA UN CAVALLO. SE STACCATE IL CAVALLO DAL CARRO QUESTO SI FERMA.
- SE SIETE VOI A SPINGERE UN CARRO DOVETE FARE UNO SFORZO. IL CONCETTO DI FORZA E' UN CONCETTO INNATO.



- MA ... VI SONO ALCUNE COSE CHE NON VANNO
 - LO STATO DI QUIETE DI UN CORPO DIPENDE DAL SISTEMA DI RIFERIMENTO CHE SCEGLIAMO.
NON C'E' UN SISTEMA DI RIFERIMENTO PRIVILEGIATO AL QUALE RIFERIRE LA "QUIETE NATURALE".
 - E' VERO CHE UN CORPO LASCIATO A SE' STESSO TENDE A TORNARE NEL SUO STATO DI QUIETE NATURALE ?

● LA RISPOSTA VIENE
DALL' ESPERIMENTO

ESPERIMENTO SUL MOTO

- IMMAGINATE DI PRENDERE UN CORPO (ES. UN LIBRO)
E METTERELO SU UN PIANO (ES. UN TAVOLO)
- SPINGETE IL CORPO; SMETTETE DI SPINGERE
ED IL CORPO SI FERMA.
- DATE UNA SPINTA PIU' FORTE AL CORPO; IL CORPO SI
MUOVE E DOPO AVER PERCORSO UN CERTO SPAZIO
SI FERMA.
IL CORPO SI E' MOSSO ANCHE QUANDO NON SPINGEVO PIU'!

- IMMAGINIAMO DI LEVIGARE PER BENE IL TAVOLO, MAGARI METTIAMOCI DELL'OLIO. SPINGO DI NUOVO IL CORPO E QUESTO PERCORRE UNA DISTANZA MAGGIORE PRIMA DI FERMARSI.
- CAMBIAMO PIANO, ANDIAMO SU UN LAGO GHIACCIATO. DIAMO SEMPRE LA STESSA SPINTA AL CORPO E VEDIAMO CHE QUESTO PERCORRE UNO SPAZIO ANCORA MAGGIORE.



LO SPAZIO PERCORSO NON DIPENDE DAL CORPO STESSO
E NON DIPENDE NEKKENO DALLA SPINTA DATA,
MA DIPENDE SOLO DA QUANTO BENE E' LEVIGATO IL TAVOLO

- IL TAVOLO ESERCITA UNA FORZA SUL CORPO, TANTO PIU' PICCOLI
quanto meglio E' LEVIGATO IL TAVOLO.

Principio di inerzia

Il risultato degli esperimenti e' che man mano che si riducono le cause perturbatrici (le imperfezioni delle superfici, attrito aria,...), le accelerazioni negative che si riscontrano nel punto materiale vanno gradatamente attenuandosi, riducendosi fino quasi ad annullarsi

Appare logico quindi ammettere che la presenza di piccole accelerazioni residue sia dovuta all'impossibilita' di eliminare nell'esperimento tutte le perturbazioni.

Si puo' quindi indurre che se riuscissimo ad eliminare completamente le perturbazioni sia pure come limite di situazioni reali (p es levigando in maniera perfetta il tavolo o andando nello spazio profondo) si avrebbe che:

ogni corpo non sottoposto ad azioni esterne persiste nel suo stato di moto (o in quiete o in moto rettilineo uniforme)

Principio di inerzia

- IN QUALE RIFERIMENTO E' CALCOLATA LA VELOCITA'?
- ⇒ ASSUMIAMO CHE L'OSSERVATORE SIA EGLI STESSO UN CORPO LIBERO NON SOGGETTO AD AZIONI ESTERNE
- *TALE OSSERVATORE (SIST. RIF.) SI DICE INERZIALE, CIOE' UN SIST. DI RIF. IN CUI VALE (SPERIMENTALMENTE) IL PRINCIPIO DI INERZIA SI DICE INERZIALE
- LE DUE DEFINIZIONI SONO EQUIVALENTI
- TROVATO UN RIFERIMENTO INERZIALE, TUTTI QUELLI IN MOTO RELATIVO UNIFORME SONO ANCH'ESSI INERZIALI
- PERCHE' I RIF. INERZIALI SONO "SPECIALI"?
- PERCHE' $\vec{a} = \vec{a}' \Rightarrow$ LE CAUSE (FORZE) SONO LE STESS E SOLO QUELLE DOVUTE ALL'INTERAZIONE CON UN'ALTRO SIST.

Moti relativi

Non tutti i sistemi di riferimento sono inerziali.

Esistono situazioni in cui ci sono accelerazioni senza che vi sia una causa apparente, cioè in cui un osservatore misura un'accelerazione SENZA che vi sia interazione. P. es. pensate a quando siete in macchina e frenate o accelerate: avvertite “qualcosa” che vi spinge in avanti se frenate (le cinture di sicurezza vi impediscono di cozzare contro il vetro) o vi schiaccia contro il sedile se accelerate.

Per capirlo è necessario studiare la relazione che c'è fra le grandezze cinematiche, relative al moto dello stesso oggetto, misurate da osservatori diversi in moto relativo l'uno rispetto all'altro.

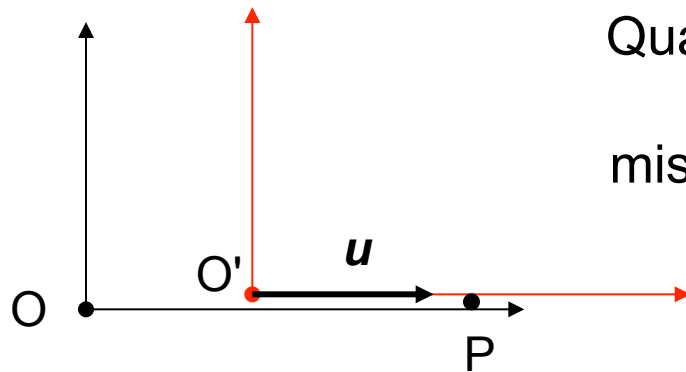
Moto relativo: 1 dimensione

Il moto assoluto non esiste, esso e' sempre relativo ad un sistema di riferimento (ricordate: osservatore = sistema di riferimento)

Un riferimento e' l'oggetto fisico a cui e' ancorato il sistema di coordinate usato per misurare le coordinate

Quando diciamo che la nostra auto va a 90 km/h sottintendiamo rispetto ad un sistema di riferimento rigidamente collegato al terreno.

La macchina che guidiamo e il passeggero accanto a noi sono invece fermi (cioe' la loro posizione rispetto alla nostra non varia nel tempo), sottintendendo rispetto ad un riferimento rigidamente ancorato alla macchina



Quale relazione c'e' fra variabili cinematiche ($\underline{r}, \underline{v}, \underline{a}$) del movimento di un punto P misurate da due osservatori O ed O' in moto relativo con velocita' \underline{u} ?

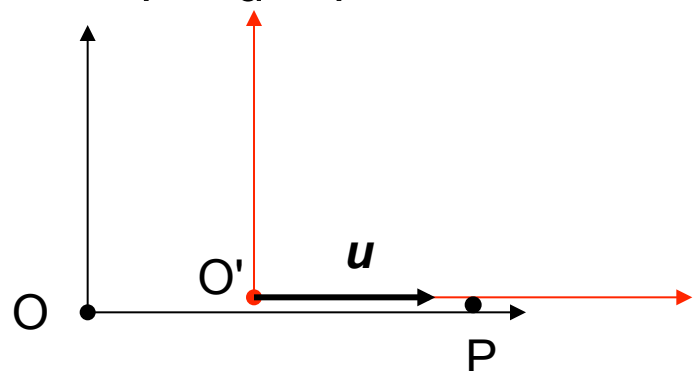
Moto relativo: 1 dimensione

O e' fermo e osserva la posizione di un punto P, la stessa cosa fa O' in moto rispetto ad O con velocita' u

Che relazione esiste fra le coordinate misurate nei dei riferimenti?

$$OP = OO' + O'P \Rightarrow x = x_{O'} + x'$$

$$x = x_{O'} + x' \Rightarrow \text{la velocita' media e' } \Delta x / \Delta t = \Delta x_{O'} / \Delta t + \Delta x' / \Delta t \Rightarrow$$
$$v = u + v'$$



Possiamo ripetere per la velocita':
 $\Delta v / \Delta t = \Delta u / \Delta t + \Delta v' / \Delta t \Rightarrow a = a_{O'} + a'$

Se O' si muove con **velocita' u costante** rispetto ad O $\rightarrow a_{O'} = 0$ e quindi
 $a = a'$

Due osservatori in moto relativo uniforme misurano la stessa accelerazione del punto P