Lez 3 5/10/2016

- Lezioni in http://www.fisgeo.unipg.it/~fiandrin/didattica_fisica/did_fis1617/

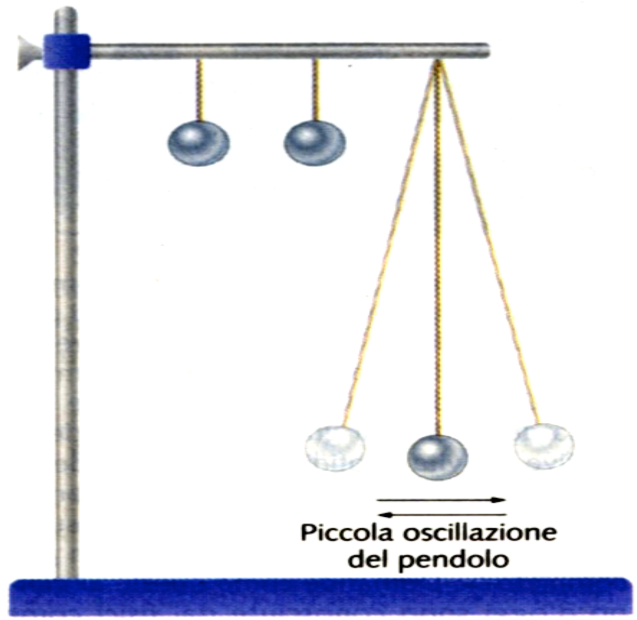
Per migliorare la qualità della nostra misura e affrontare il problema dell'errore si applica la strategia di ripetere più volte la misura.

Esperimento1: Misure ripetute del periodo di oscillazione di un pendolo.

Raccogliamo una serie di 10 misurazioni:

26,4s ; 23,9s ; 25,1s ; 24,6s ; 22,7s ; 23,8s ; 25,1s ; 23,9s ; 25,3s ; 25,4s .

I dati visti così non ci danno informazioni su quale sia il valore "corretto" dell'oscillazione.

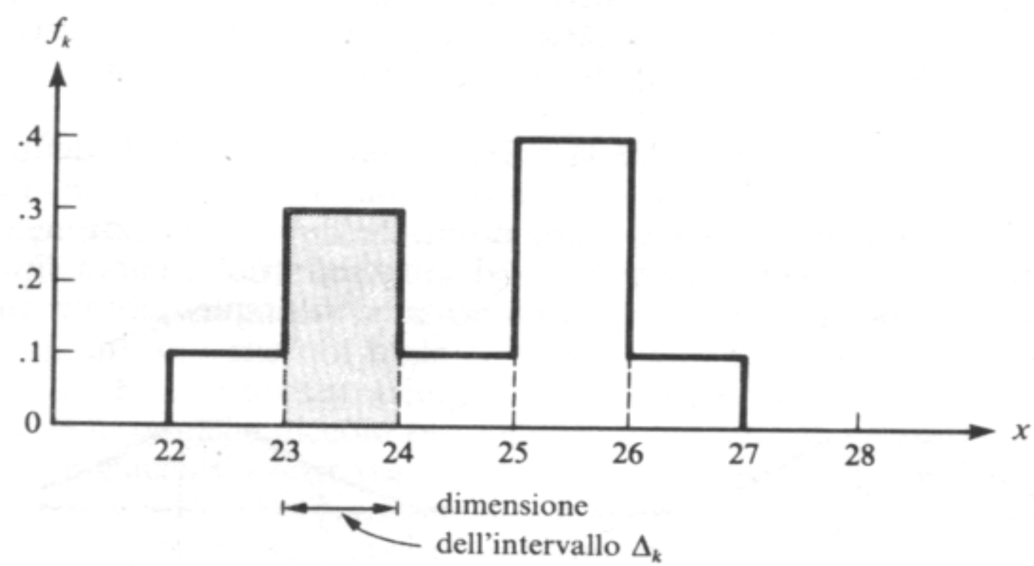


Errore nella misura: la gaussiana 1

Dividiamo la serie secondo intervalli e contiamo quante volte i valori delle misurazioni cadono in ciascun intervallo:

Intervallo 22-23 s	22,7s ;	1
Intervallo 23-24 s	23,9s ; 23,9s 23,8s ;	3
Intervallo 24-25 s	24,6s ;	1
Intervallo 25-26 s	25,1s ; 25,1s ; 25,3s ; 25,4s .	4
Intervallo 26-27 s	26,4s ;	1
Intervallo 27-28 s	-	0

Ora che i dati sono stati raccolti tracciamo un istogramma con una colonna rappresentativa di ogni intervallo. L'altezza della colonna è pari alla *frequenza, cioè al numero di volte che una misura si ripete.*



Con una decina di misure l'istogramma delle frequenze è simile a questo.

Errore nella misura: la gaussiana 2

Se andiamo avanti a ripetere le misure, l'istogramma si trasforma gradualmente:

Con 100 misure

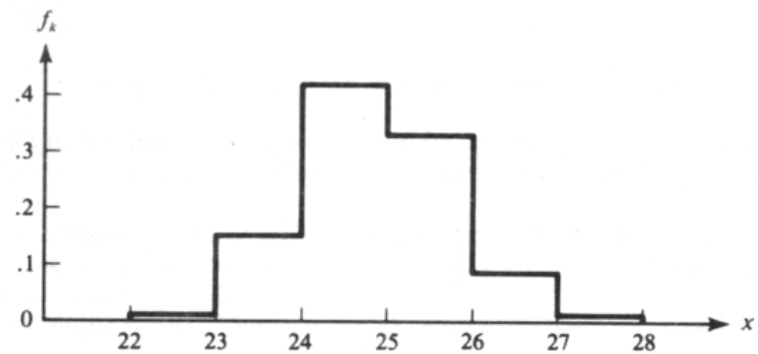


Figura 5.3. *Istogramma per 100 misure della stessa grandezza di Figura 5.2.*

Con 1000 misure

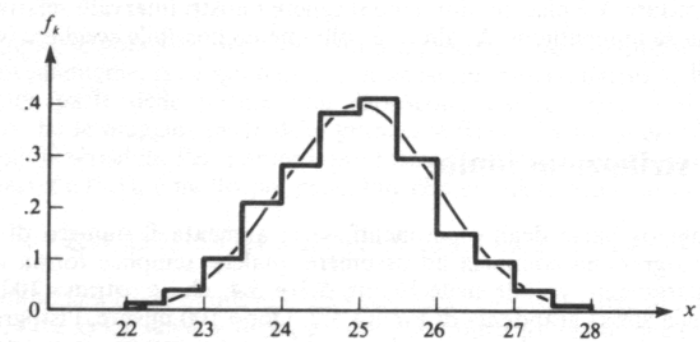
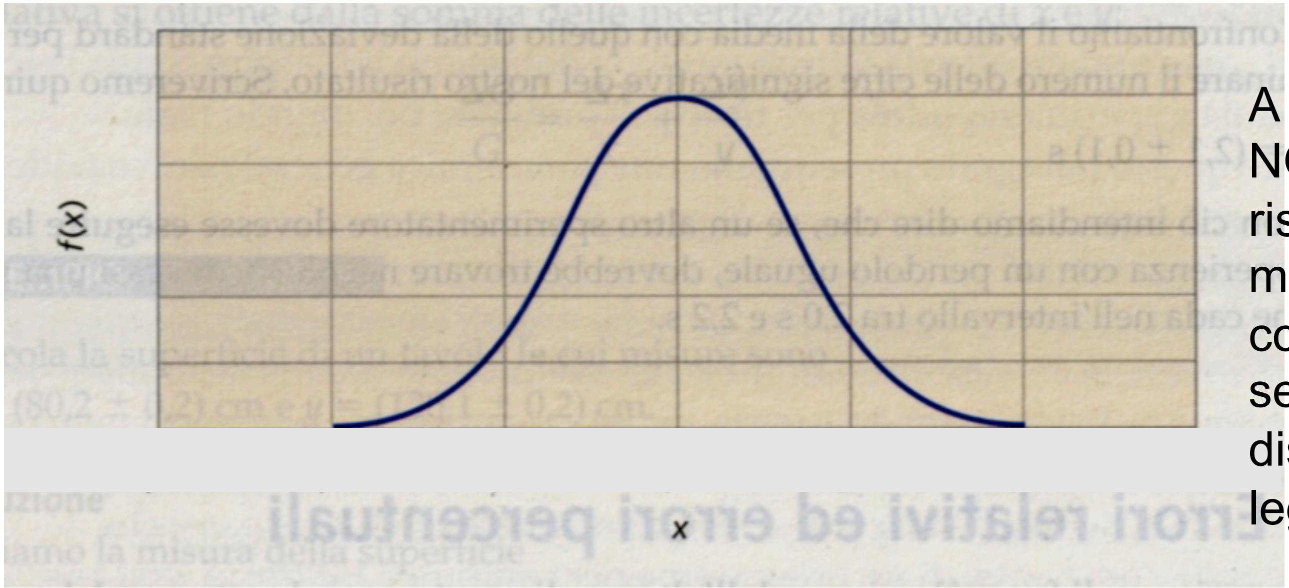


Figura 5.4. *Istogramma per 1000 misure della stessa grandezza di Figura 5.3. La curva tratteggiata è la distribuzione limite.*

Errore nella misura: la gaussiana

Per moltissime misure (per esempio 100.000) l'istogramma si avvicina molto ad una curva limite a forma di campana chiamata DISTRIBUZIONE NORMALE DI GAUSS O GAUSSIANA



A causa degli errori casuali NON possiamo prevedere il risultato di una singola misura ma possiamo sapere come si distribuisce una seria di N misure: la distribuzione segue una legge statistica ben precisa

Ovviamente se dovessimo decidere quale valore prendere come più rappresentativo, nel nostro gruppo di dati, sceglieremmo quello che si presenta più volte, cioè il più frequente.

Errore nella misura: il valor medio

Def. Chiamiamo MIGLIOR STIMA del valore vero di una grandezza il valore che meglio rappresenta il gruppo di dati. E' il valore più frequente cioè più probabile.

E' chiaro però che se abbiamo poche misure, 5 o 10, non possiamo affidarci al valore più frequente perché i valori sono pochi e il valore più probabile (più frequente) non ha alcun valore. I cinque o dieci valori potrebbero anche essere tutti diversi! Inoltre continuare a eseguire le misure ci mostrerebbe che la MIGLIOR STIMA (cioè il più frequente) su un piccolo numero di dati, continua a cambiare.

Come fare? Un noto teorema di statistica dice che:

TEOREMA: Per un qualunque gruppo di dati la MIGLIOR STIMA del valore vero coincide con il VALOR MEDIO che si calcola con:

$$\text{Valor Medio M} = \frac{\text{Somma di tutte le misure } (\mathrm{m_i})}{\text{numero di misure (N)}} = \frac{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_N}{N}$$

Errore nella misura: il valor medio

TEOREMA: Per un qualunque gruppo di dati la MIGLIOR STIMA coincide con il VALOR MEDIO che si calcola con:

$$\text{Valor Medio M} = \frac{\text{Somma di tutte le misure } (\mathrm{m_i})}{\text{numero di misure (N)}} = \frac{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_N}{N}$$

Esempio: Calcoliamo il valor medio dei dati raccolti sul periodo di oscillazione del pendolo:

$$\text{Tmedio} = \frac{26{,}4\mathrm{s} + 23{,}9\mathrm{s} + 25{,}1\mathrm{s} + 24{,}6\mathrm{s} + 22{,}7\mathrm{s} + 23{,}8\mathrm{s} + 25{,}1\mathrm{s} + 23{,}9\mathrm{s} + 25{,}3\mathrm{s} + 25{,}4\mathrm{s}}{10} = 24{,}6s$$

A questo punto dobbiamo stimare l'errore accidentale commesso in queste misure.

Errore nella misura: l'errore assoluto

Per quanto riguarda la stima dell'errore è chiaro che tanto è più larga la "campana", tanto più distanti sono i valori trovati dalla MIGLIOR STIMA, tanto più grande è l'errore commesso mediamente.

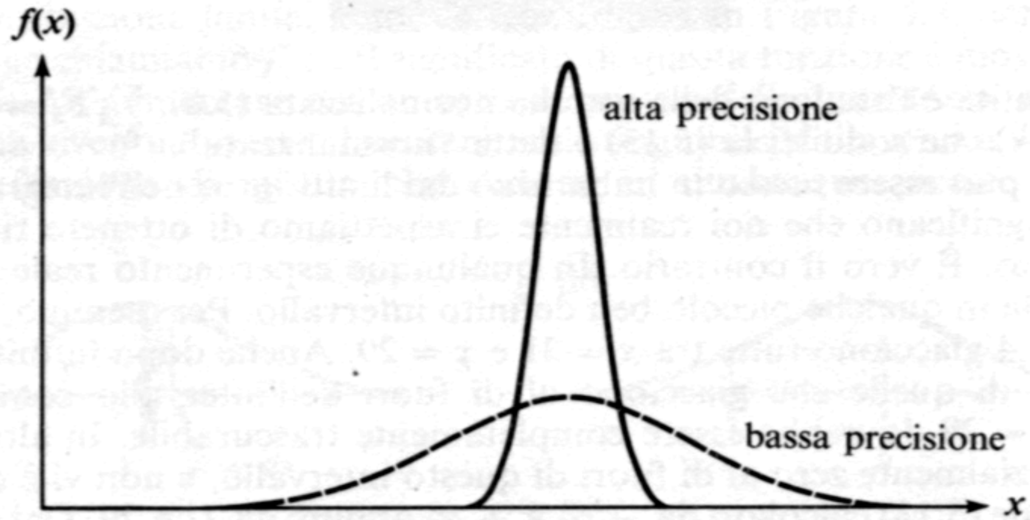


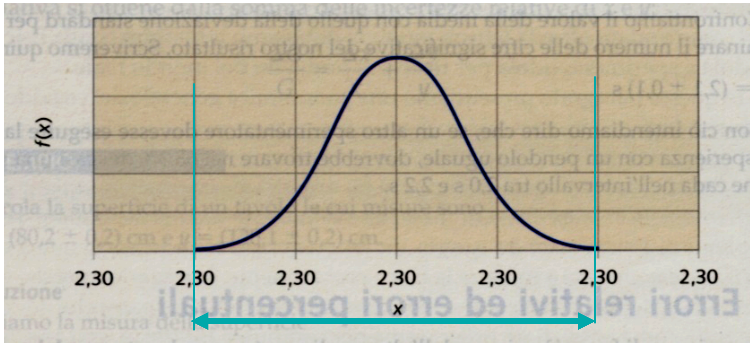
Figura 5.6. *Due distribuzioni limite, una per una misura ad alta precisione, l'altra per una misura a bassa precisione.*

Errore nella misura: l'errore assoluto

Possiamo prendere come indice dell'errore la larghezza della campana che chiamiamo DISPERSIONE.

La dispersione si calcola :

DISPERSIONE= m_{Max}-m_{min}



DISPERSIONE= m_{MAX}-m_{min}

Però è più logico prendere la metà della dispersione perché ci interessa sapere quanto AL MASSIMO dista un valore dalla miglior stima e non un valore (il più grande) da un altro (il più piccolo).

Chiamiamo ERRORE ASSOLUTO la metà della dispersione e lo calcoliamo:

$$\text{errore assoluto } \varepsilon_a = \frac{m_{Max} - m_{min}}{2}$$

Errore nella misura: l'errore assoluto

Calcoliamo la dispersione e l'errore assoluto:

DISPERSIONE= m_{Max}-m_{min}

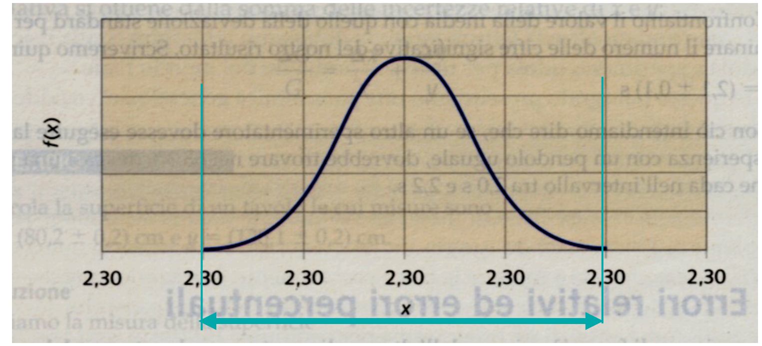
Esempio:

Dispersione= 26,4s-22,7s=3,7s

$$\text{errore assoluto } \varepsilon_a = \frac{m_{Max} - m_{min}}{2}$$

Esempio:

$$\varepsilon_a = \frac{m_{Max} - m_{min}}{2} = \frac{26{,}4s - 22{,}7s}{2} = 1{,}85s \cong 1{,}9s$$



DISPERSIONE

Intervallo 22-23 s	22,7s ;	1
Intervallo 23-24 s	23,9s ; 23,9s 23,8s ;	3
Intervallo 24-25 s	24,6s ;	1
Intervallo 25-26 s	25,1s ; 25,1s ; 25,3s ; 25,4s .	4
Intervallo 26-27 s	26,4s ;	1
Intervallo 27-28 s	-	0

La misura: il valore vero

A questo punto ci possiamo domandare: come possiamo rappresentare le nostre misure con una scrittura chiara e breve?

Chiamiamo valor vero il valore che meglio rappresenta il gruppo di misure effettuate della grandezza da determinare

valor vero (v.v.) = valor medio ± errore assoluto = M ± ε_a

Esempio: Scriviamo il valor vero per la misura del pendolo:

sarà T= 24,6s ± 1,9s

Errore nella misura: l'errore relativo

L'errore assoluto è una importante informazione sulle misure. Però non ci consente di stabilire la qualità della misura.

Esempio: 1,9s è un errore grande o piccolo sull'oscillazione di un pendolo?

Non possiamo nemmeno confrontare gruppi di misure diversi:

Esempio: Supponiamo di aver trovato:

- un errore assoluto di 1m nella misura del lato di un edificio lungo 10m.

- un errore assoluto di 1m nella misura di un tratto di strada lunga 1km

Si vede subito che pesa di più l'errore nella prima misura che non nella seconda: infatti si capisce che commettere un errore di 1m su 10m è "più grave" che non commettere un errore di 1m su 1km!!

Dobbiamo trovare una quantità che fotografi la situazione.

Errore nella misura: l' errore relativo

Poiché non amiamo lavorare con numeri decimali a tanti zeri, moltiplichiamo per cento l' errore relativo e troviamo l' errore relativo percentuale

$$\text{errore relativo percentuale } \varepsilon_R\% = \frac{\varepsilon_a}{M}\cdot 100 = \frac{\text{errore assoluto}}{\text{Valor Medio}}\cdot 100$$

Esempio: Per i due esempi riportati l' errore relativo percentuale vale:

$$\varepsilon_{R1}\% = \varepsilon_{R1}\cdot 100 = 0{,}1\cdot 100 = 10\%$$

$$\varepsilon_{R2}\% = \varepsilon_{R2}\cdot 100 = 0{,}001\cdot 100 = 0{,}1\%$$

Si impone come valore massimo (indicativo) dell' errore relativo percentuale accettabile negli esperimenti didattici il 10% (il 5% negli esperimenti di ricerca)

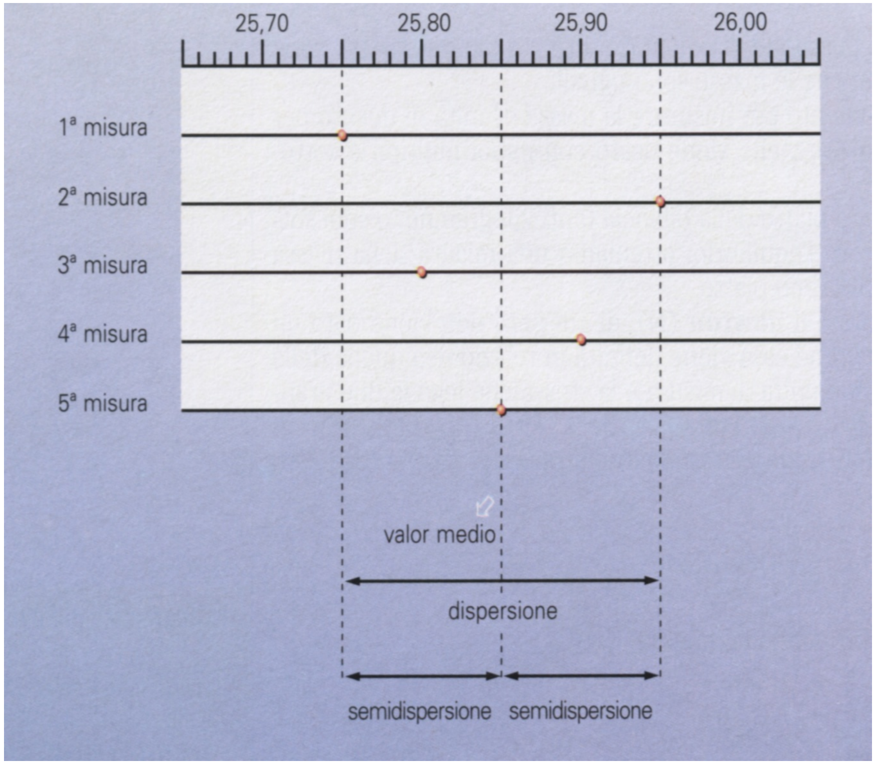
Riassumendo:

$$\text{Valor Medio M} = \frac{\text{Somma di tutte le misure } (\mathrm{m_i})}{\text{numero di misure (N)}} = \frac{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_N}{N}$$

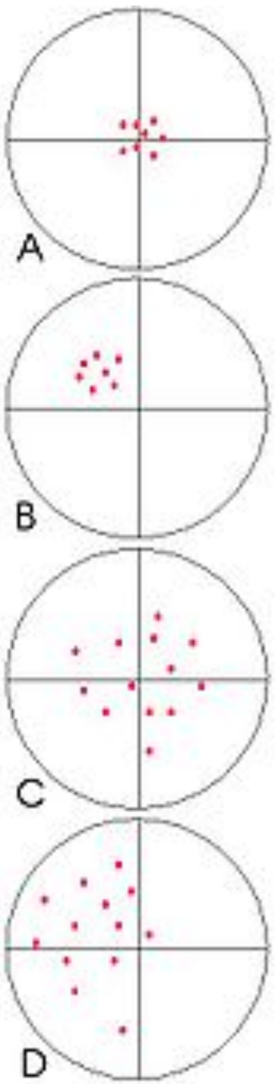
$$\text{errore assoluto } \varepsilon_a = \frac{\mathrm{m_{Max}} - \mathrm{m_{min}}}{2}$$

$$\text{errore relativo } \varepsilon_R = \frac{\varepsilon_a}{\mathrm{M}} = \frac{\text{errore assoluto}}{\text{Valor Medio}}$$

$$\text{errore relativo percentuale } \varepsilon\% = \varepsilon_R \cdot 100$$



Accuratezza e precisione



Accuratezza: rappresenta la vicinanza della misura (o della media di misure, per misure ripetute) al valore vero → dipende dagli errori sistematici

Precisione: rappresenta l'ampiezza della distribuzione di valori in un gruppo di misure ripetute. Maggiore la precisione, minore l'ampiezza della distribuzione.→ dipende dagli errori casuali

A: Preciso e accurato; **B**: Preciso, poco accurato; **C:** Accurato, poco preciso; **D:** Poco accurato, poco preciso

L'accuratezza non può essere appurata dall'applicazione di misure ripetute, poiché non si possono stimare in tal modo gli errori sistematici

La precisione viene invece stimata sulla base di misure ripetute. Maggiore la precisione, migliore la riproducibilità del dato.

Per valutare l'accuratezza è importante disporre di metodi differenti e indipendenti di misura della stessa grandezza fisica!

Propagazione degli errori

Quando si eseguono misure indirette, cioè quando si fanno calcoli con le misure di grandezze (per esempio calcoli di aree o volumi), gli errori si propagano nei calcoli. Vediamo come risultano l'errore assoluto e relativo a seguito di operazioni matematiche.

Somma e differenza

Se X è una misura indiretta, ottenuta dalla somma o dalla differenza di due misure omogenee a e b, allora

$$e_a(X) = e_a(a) + e_a(b).$$

Gli errori assoluti di a e b si sommano sempre, indipendentemente dal fatto che la misura X sia ottenuta come somma o come differenza tra a e b.

Il tutto vale anche se le misure sono più di due.

Prodotto e quoziente

Se X è una misura indiretta, ottenuta dal prodotto o dal quoziente di due misure a e b, allora

$$e_r(X) = e_r(a) + e_r(b).$$

Gli errori relativi e percentuali di a e b si sommano sempre, indipendentemente dal fatto che la misura X sia ottenuta come prodotto o come quoziente tra a e b.

Il tutto vale anche se le misure sono più di due.

Vettori e scalari

GRANDEZZE FISICHE

Scalari: sono completamente definite quando se ne conosce la sola misura (es. tempo, massa, temperatura, volume…)

Vettoriali: richiedono un maggior contenuto informativo (es. velocità, accelerazione, forza…)

*Domenica sono andato in bicicletta per **due ore**…*

L'informazione sul tempo è completa?

Il **tempo** è un esempio di quantità **scalare**: sono sufficienti un numero e la rispettiva unità di misura per caratterizzarlo completamente. Quindi informazione sul tempo è completa

Vettori e scalari

•*Domenica ho fatto venti chilometri in bicicletta…*

L'informazione sullo spostamento è completa? No, ne conosco solo l'entità.

•*Domenica ho fatto venti chilometri in bicicletta lungo il Tevere …* $\Rightarrow$ **ho aggiunto informazione sulla mia direzione.**

•*Domenica ho fatto venti chilometri in bicicletta lungo il Tevere verso Perugia* **questo dato completa l'informazione sul verso del mio spostamento.**

Una grandezza fisica è un vettore quando per definirla completamente è necessario fornire un modulo (= l'entità), una direzione e un verso.

$$\textbf{VETTORE}\begin{cases}\text{modulo}\\ \text{direzione}\\ \text{verso}\end{cases}$$

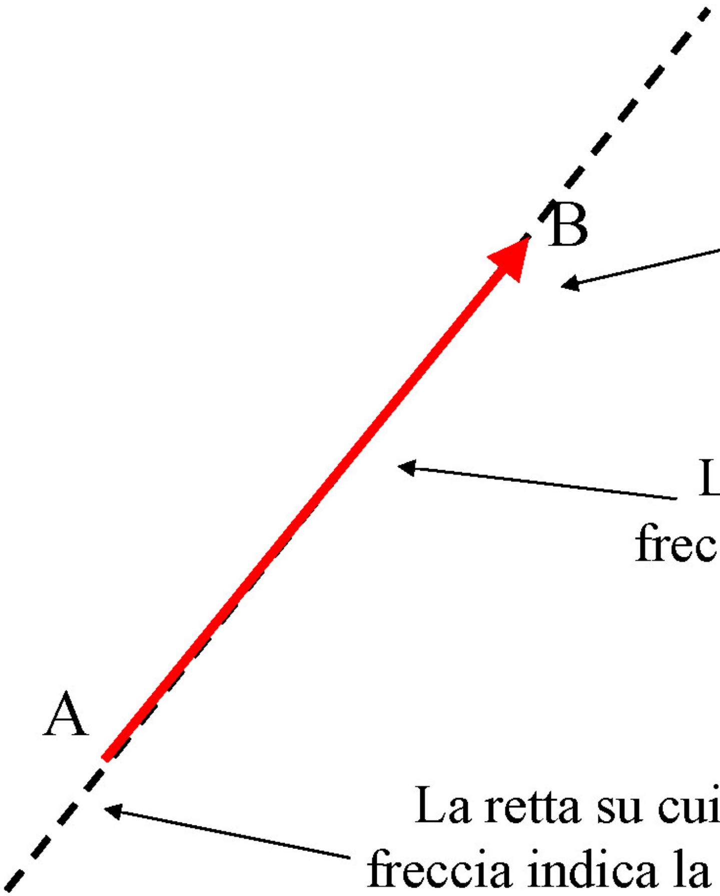
Il concetto di vettore e' **FONDAMENTALE** propedeutico a **moltissima** parte della fisica che faremo

Rappresentazione grafica

Un **vettore** può essere rappresentato graficamente da un **segmento orientato**.

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$$

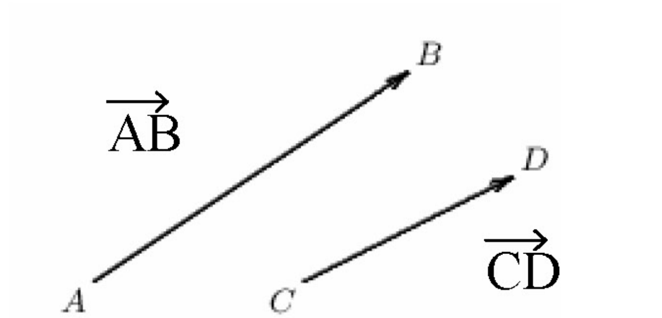
$$|\,\mathbf{a}\,| = |\,\overrightarrow{AB}\,|$$ si chiama modulo



La punta della freccia indica il **verso**.

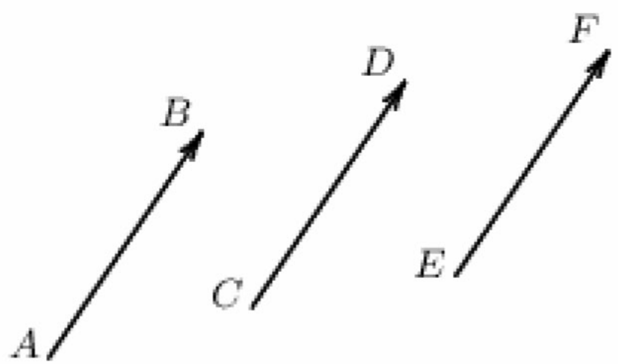
La lunghezza della freccia indica il **modulo**.

La retta su cui giace la freccia indica la **direzione**.

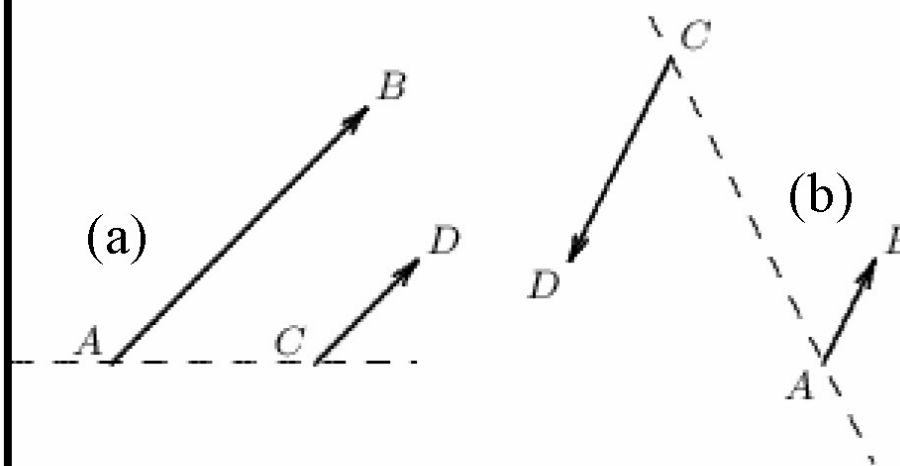


Rappresentazione grafica

Definizione: Un **vettore** nel piano o nello spazio è definito come **l'insieme di tutti i segmenti orientati aventi uguali direzione, verso e modulo**.



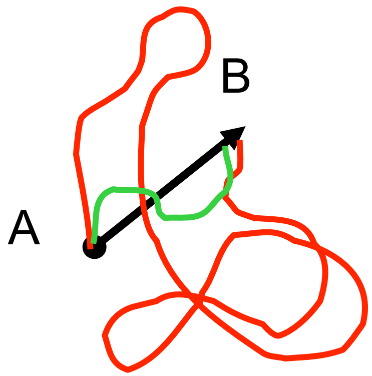
Segmenti orientati **rappresentativi di uno stesso vettore**.



Segmenti orientati paralleli concordi (a) ed opposti (b).

Vettori

La piu' semplice grandezza vettoriale e' lo spostamento, cioe' un cambiamento di posizione da una iniziale A ad una finale B



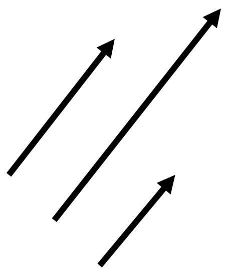
Se una particella cambia posizione spostandosi da A a B, diciamo che essa subisce uno spostamento da A a B, rappresentato da una freccia che parte da (applicata in) A e termina in (punta a) B

Vettori

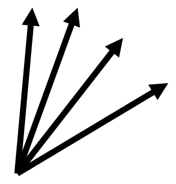
Norma o Modulo: distanza tra l'origine A e l'estremo B. Si indica con $|\boldsymbol{v}|=\overline{AB}$

Direzione: orientamento nello spazio (o nel piano) della retta su cui il segmento orientato AB

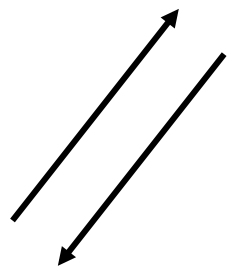
Verso: senso di percorrenza sulla retta



Stessa direzione,
stesso verso,
diversi moduli



Stesso modulo,
direzioni diverse



Stesso modulo, stessa
direzione, versi opposti

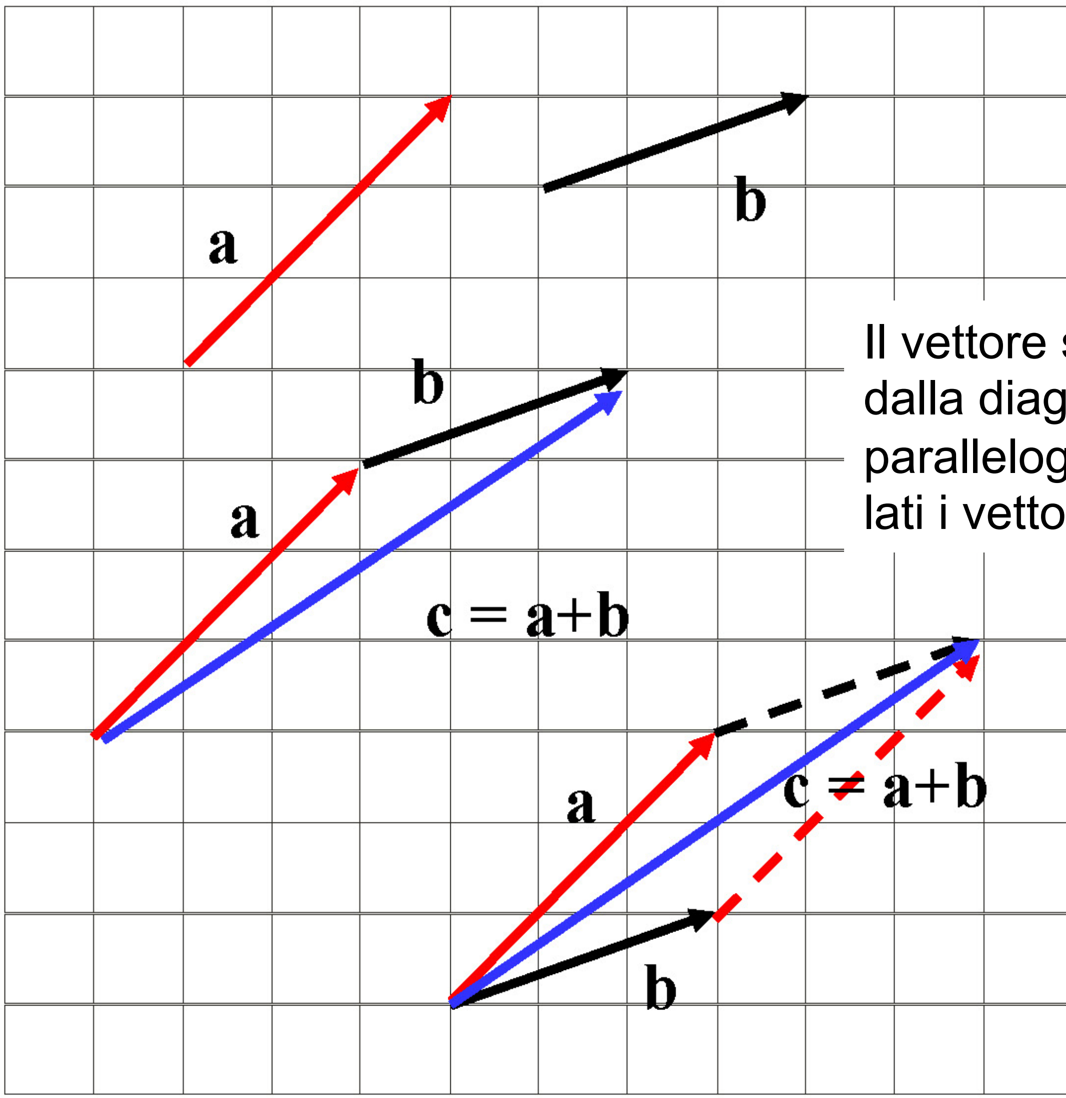
Uguaglianza di vettori

✓ Due vettori si dicono uguali se e solo se hanno:

❑ Il medesimo modulo
❑ La stessa direzione
❑ Lo stesso verso

✓ Se due vettori non sono uguali, si dicono disuguali, ma non si puo' trovare una relazione di ordine in quanto non si puo' trovare un criterio per stabilire se uno e' maggiore o minore dell'altro

Somma di vettori



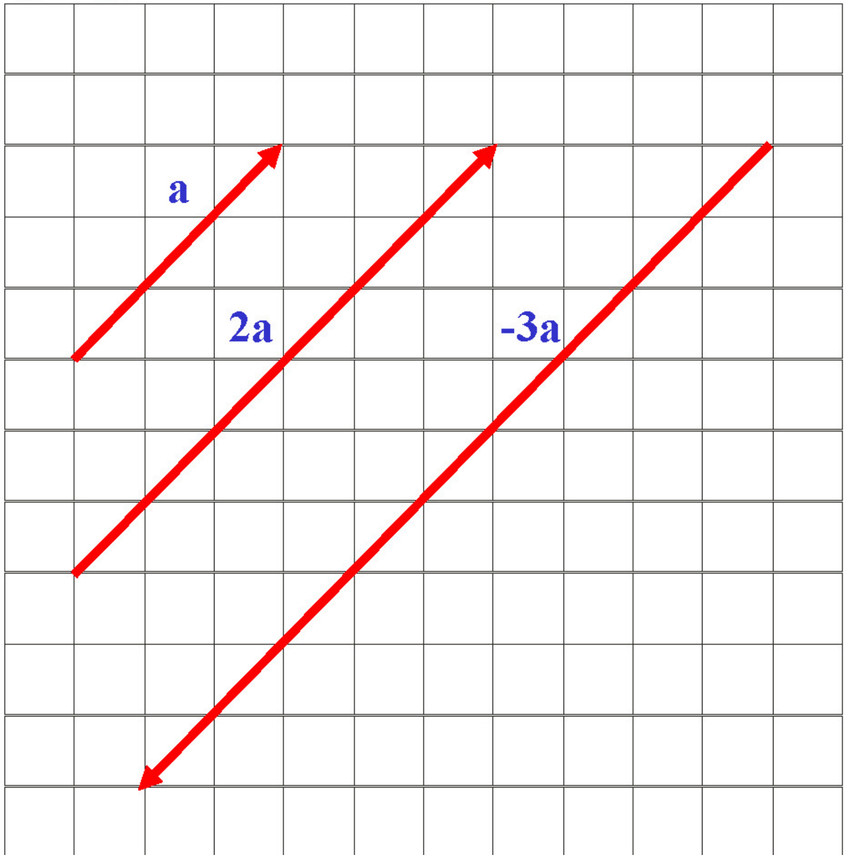
Il vettore somma **c** e' costituito dalla diagonale maggiore del parallelogramma avente come lati i vettori dati **a** e **b**

Moltiplicazione scalare-vettore

<u>Definizione</u>: La moltiplicazione αa (o aα) di un vettore a con il numero reale α è un vettore b = aα, collineare ad a, di modulo | α | · | a | e verso coincidente con quello di a se $\alpha > 0$, opposto a quello di a se $\alpha < 0$.
Nel caso che sia $\alpha = 0$ o a = 0, il vettore b = 0.

<u>**Proprietà**</u>:

1. $\alpha(\beta \mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}$
2. $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{a}$
3. $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha \mathbf{a} + \alpha \mathbf{b}$

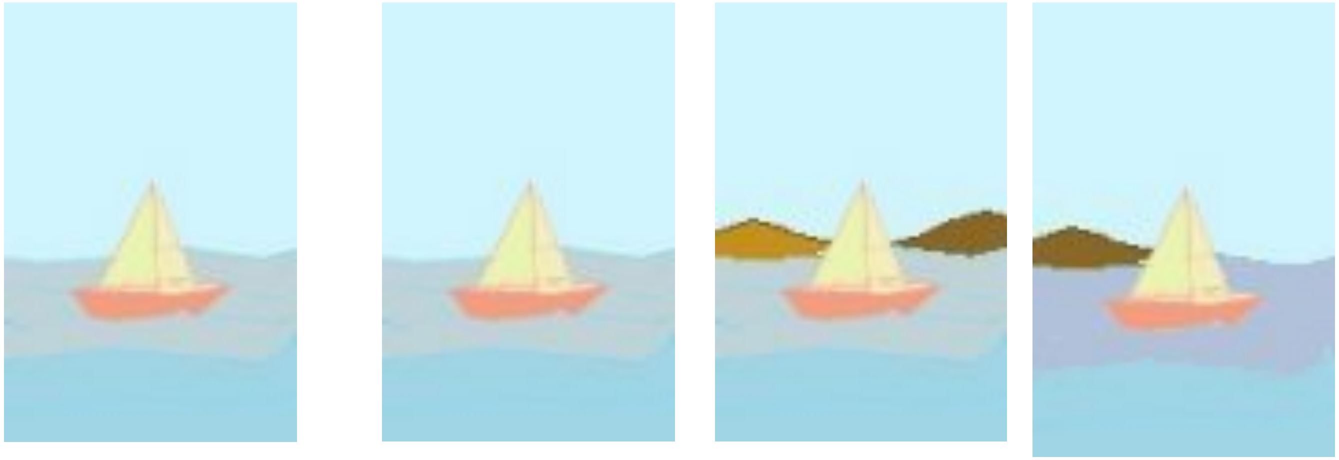


Dalla geometria ai numeri

- Le operazioni sui vettori appena definite sono di tipo “geometrico”
- Non sono molto pratiche
- Occorre trasformare le relazioni geometriche in relazioni tra numeri: e’ piu’ facile manipolare numeri invece che segmenti orientati

- Per farlo abbiamo bisogno di:
  - Sistema di riferimento: oggetto rispetto a cui si misurano le posizioni di altri oggetti
  - Coordinate: insieme ordinato di numeri, ma non solo, che identifica la posizione rispetto all'oggetto di riferimento

Essere fermi o essere in movimento?



Osserviamo le figure

In quali casi le barche sono ferme?

Quando sono in movimento?

Perché ci accorgiamo di questo?

Riflettiamo sulla discussione e poniamoci questa domanda: siamo sicuri al 100% che nei primi due casi le barche sono ferme?

Dopo la discussione precedente possiamo dire chi si è mosso?

La risposta sembra ovvia: il cane
ma siamo sicuri al 100%?

Non posso dire nulla se non do prima delle definizioni

Definizione di moto

Siete in grado di dare una definizione di moto?

Quali grandezze debbono entrare in gioco per avere una chiara definizione di moto?

Vi ricordo che definiamo **grandezza fisica qualsiasi caratteristica che può essere misurata**

Pensate a cosa ha fatto il cane

Appare chiaro che le grandezze che dobbiamo utilizzare sono quelle di spazio e tempo

Un corpo si dice in moto se la sua posizione cambia nel tempo

E quando è in quiete?

Un corpo si dice in quiete se la sua posizione non cambia col passare del tempo

È tutto a posto? Basta così?

Ritorniamo alle nostre barchette

Sono in quiete o sono in moto?

Fra queste due coppie di immagini esiste una differenza fondamentale riuscite a vederla?

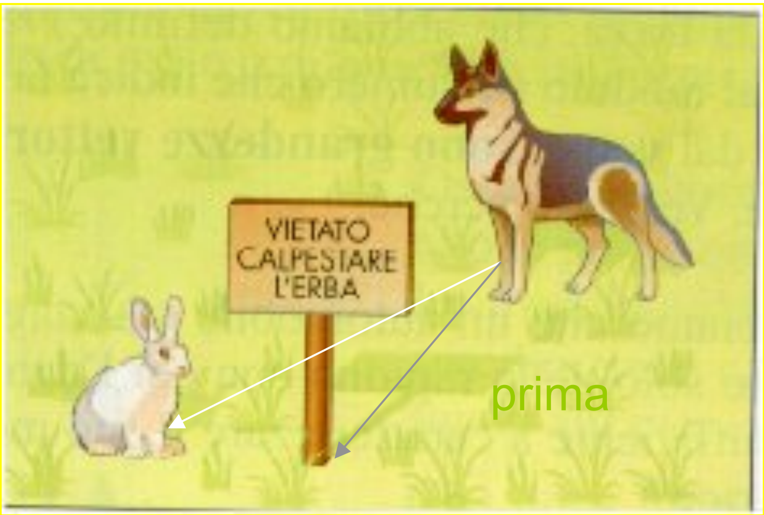
Perché il cane è in moto?

Esiste qualcosa di simile nella prima coppia?

Perché il coniglio è in quiete?

Quali conclusioni debbo trarre da queste osservazioni?

Quello che mi serve per stabilire se un corpo è in quiete o è in movimento è qualcosa che io considero fermo



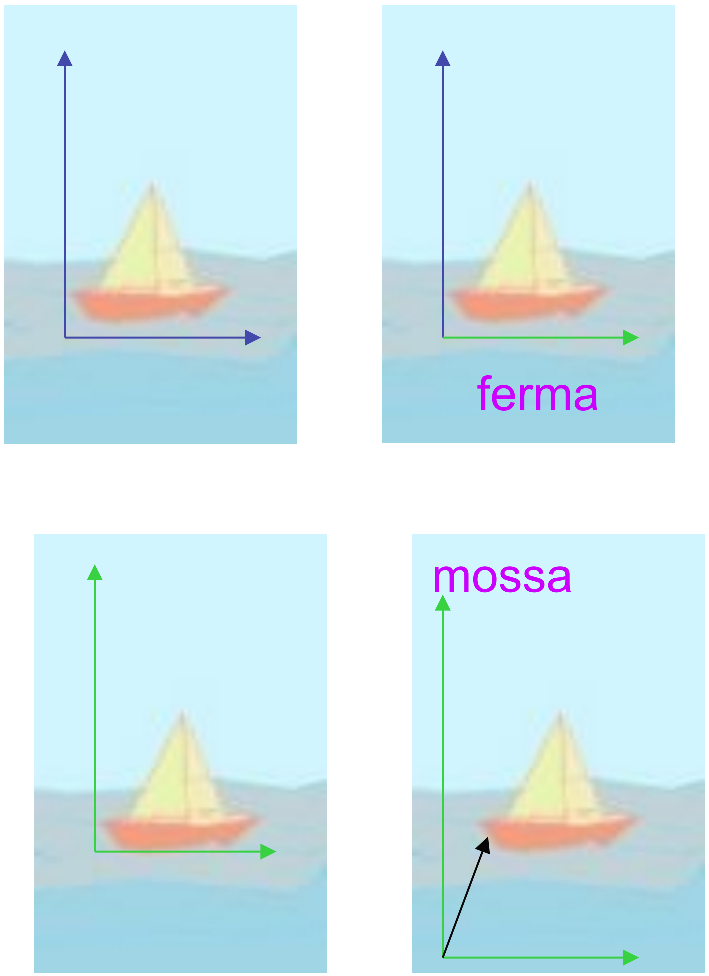
Consideriamo fermo il cane

Come dobbiamo considerare il coniglio e il cartello?

La loro posizione rispetto al cane è cambiata si o no?

Se tutto ciò che è stato detto prima è vero debbo concludere che si sono spostati rispetto alla posizione del cane

Il sistema di riferimento



Cosa manca qui?

Manca il sistema di riferimento per stabilire se le barche sono ferme o si sono mosse

È fondamentale, nel moto, stabilire un sistema di riferimento che io considero come fisso

Sistema di riferimento

- Quando studiamo il moto di un corpo dobbiamo dire rispetto a che cosa andiamo a studiare il moto.
- Infatti un corpo può essere fermo rispetto ad un osservatore ma in movimento rispetto ad un altro osservatore.

Sistemi di riferimento

Dal "De Rerum Natura" di Lucrezio:

La nave da cui siamo trasportati, si muove, mentre sembra star ferma;
quella che rimane immobile all'ormeggio, si crede che proceda oltre.
E sembra che a poppa fuggano colline e pianure
oltre le quali conduciamo la nave e con le vele voliamo.
Gli astri sembrano tutti restare immobili, fissi
alle eteree cavità, e tuttavia son tutti in assiduo movimento,
giacché, dopo esser sorti, rivedono i lontani tramonti,
quando hanno percorso il cielo col loro corpo lucente.
E il sole e la luna parimenti sembra che rimangano
immobili, essi che il fatto stesso mostra in movimento.

La descrizione del moto dipende dal sistema di riferimento scelto !!!

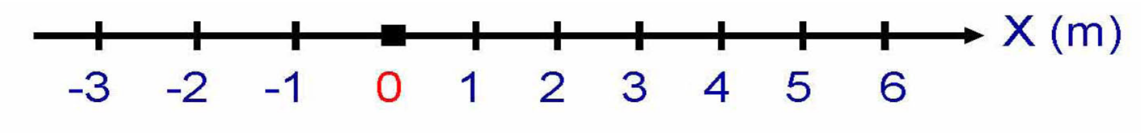
Un sistema di riferimento è costituito da un insieme di corpi posti a distanze relative fisse

Una descrizione matematica del sistema di riferimento si ottiene introducendo un sistema di coordinate che permettono di esprimere la posizione dei punti dello spazio rispetto agli oggetti di riferimento

Sistema di riferimento

- Per descrivere il moto di un punto materiale bisogna sempre assegnare un **sistema di riferimento** cioè indicare l'insieme degli oggetti rispetto ai quali si osserva il movimento.
- Il sistema di riferimento viene rappresentato con un sistema di **assi cartesiani ortogonali** sui quali è fissato l'unità di misura delle lunghezze e al quale è collegato un orologio per misurare gli intervalli di tempo.
- Il numero degli assi cartesiani necessari per descrivere il moto dipende dal particolare problema in esame: per il moto di un treno sule rotaie serve un asse, per il moto di una barca sulla superficie dell'acqua ne servono due, per quellodi un aereo in aria tre

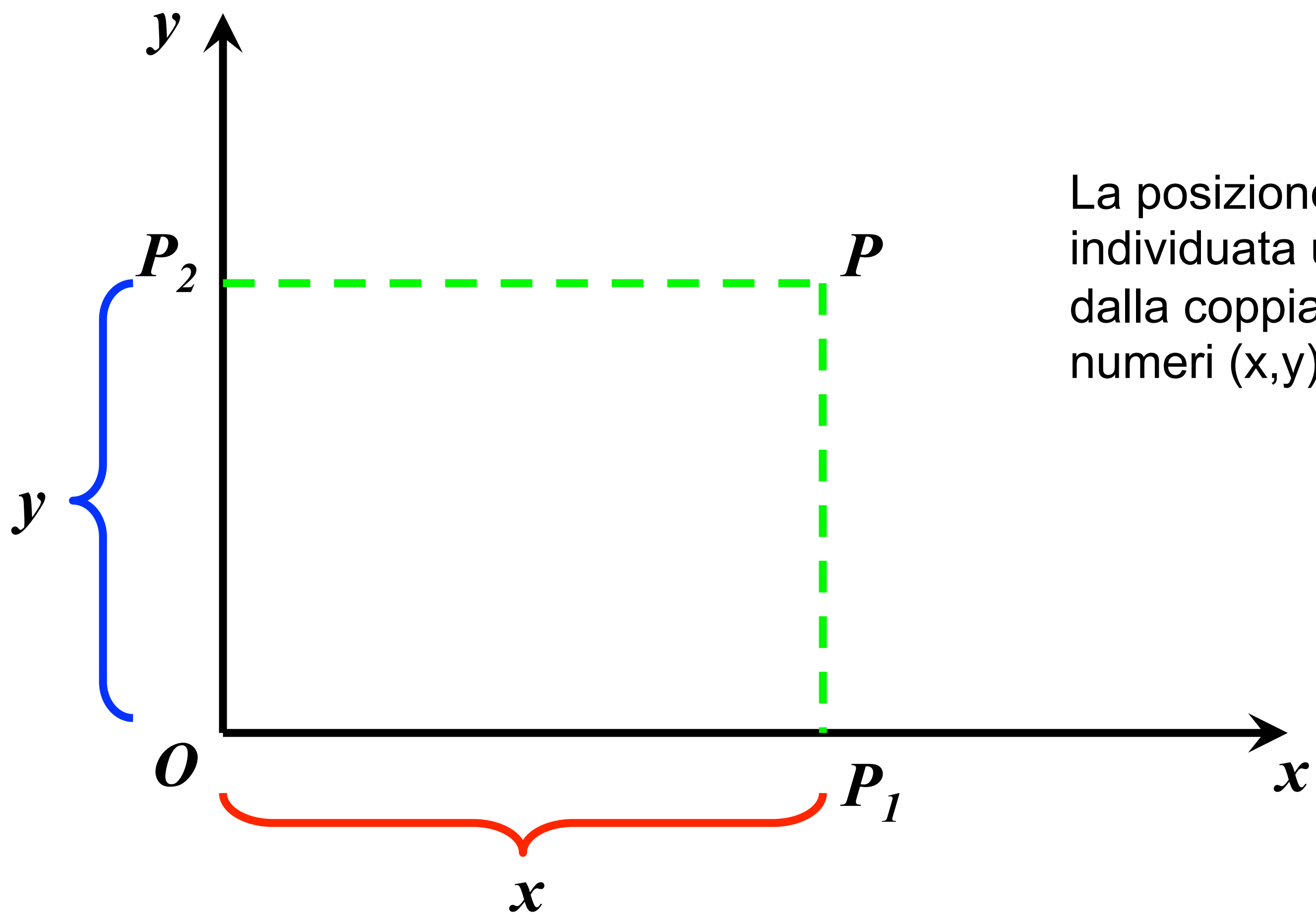
Asse cartesiano di riferimento



Serve a identificare i punti su una retta.
La procedura e':

- fissiamo un punto O che prendiamo come origine (l'oggetto di riferimento sulla retta)
- Definiamo una unita' di misura delle lunghezze, p.es. il metro
- Definiamo un verso di percorrenza "positivo" sulla retta, p. es. verso destra e assegnamo valori positivi ai punti a dx e negativi a quelli a sx di O.
- In questo modo possiamo assegnare a ciascun punto un numero = alla distanza del punto dall'origine O, presa con il segno: la coordinata

Coordinate cartesiane nel piano

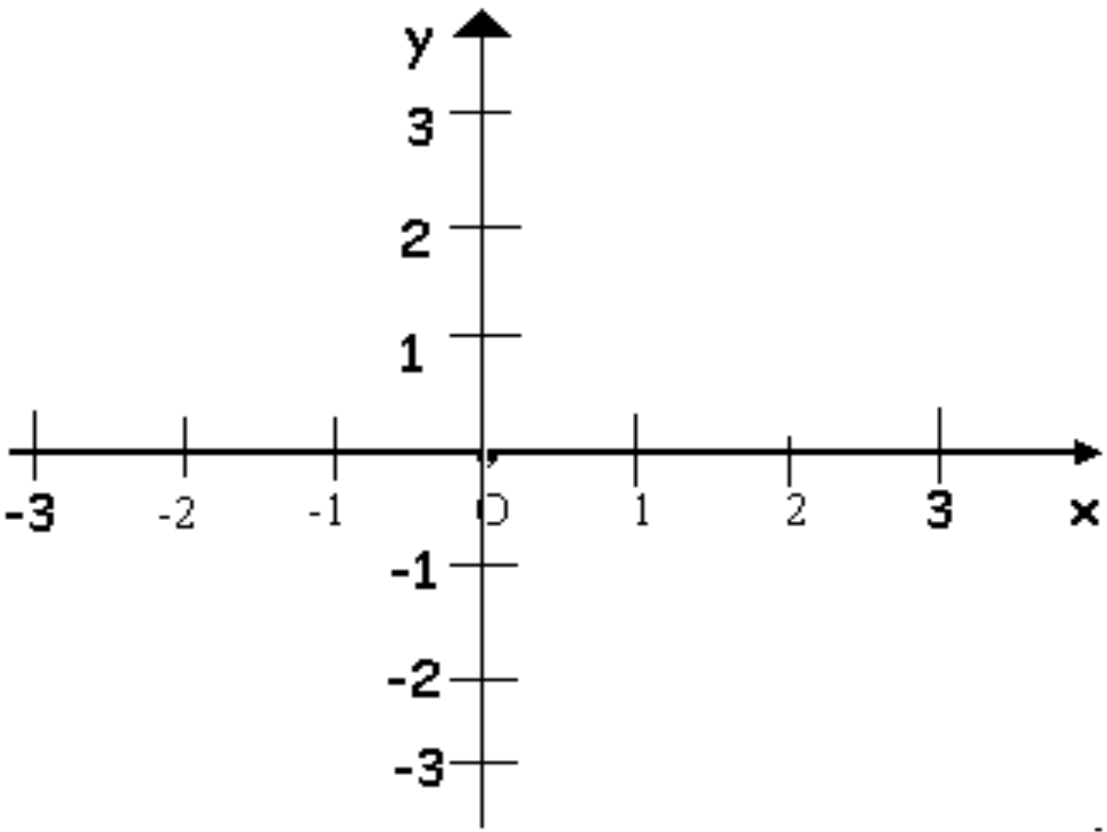


La posizione del punto P e' individuata univocamente dalla coppia ordinata di numeri (x,y)

- ***Si fissa un' origine e si introduce una coppia di assi cartesiani ortogonali x e y***
- ***Le coordinate (x,y) del punto P sono date dai segmenti OP_1 e OP_2***

Sistema di riferimento

Per studiare il moto, o in generale i fenomeni fisici, un sistema di riferimento e' “dotato” di un orologio o cronometro con cui misurare il tempo



Scomposizione di vettori

❑ Fare operazioni sui vettori con il metodo grafico non e' il modo migliore, una tecnica migliore coinvolge l'algebra ma richiede l'uso di sistemi di coordinate cartesiane ortogonali

❑ Di solito gli assi x e y sono tracciati nel piano del foglio, l'asse z fuoriesce dalla pagina e per il momento lo ignoriamo (ie trattiamo solo casi bidimensionali)

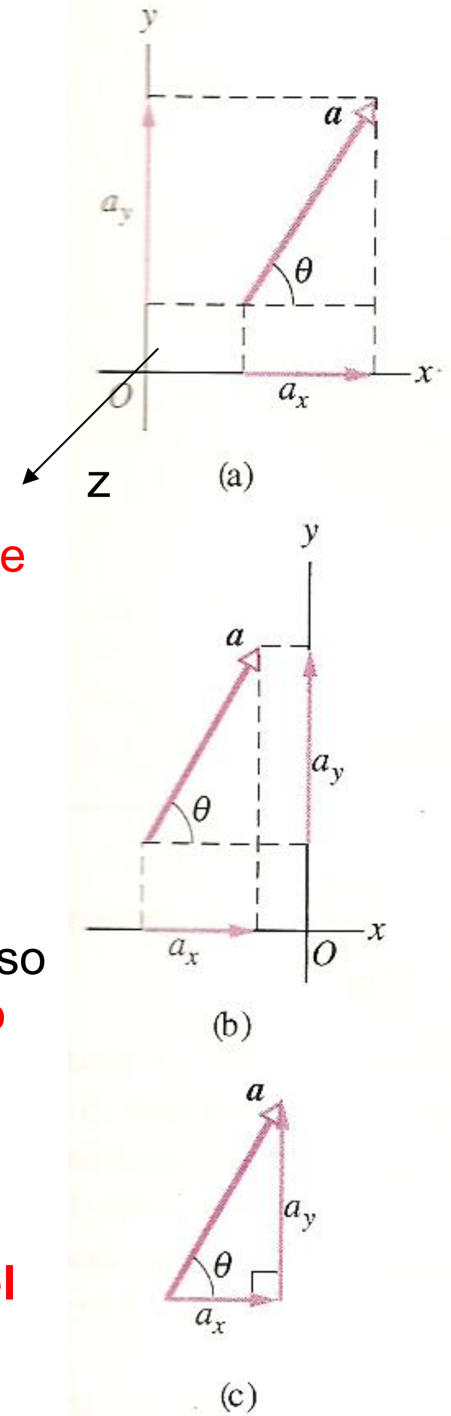
❑ La componente di un vettore e' la sua proiezione ortogonale su un asse (o piu' generale su una retta).

❑ Per trovare la componente lungo un asse si traccia la perpendicolare a uno degli assi dai due estremi del vettore: si ottiene un segmento orientato sull'asse (dalla proiezione del piede a quella della punta), come p es in (a) a_x e' la componente di a sull'asse x (o lungo l'asse x)

❑ la componente ha verso concorde a quello del vettore stesso e puo' essere positiva o negativa, a seconda se e' concorde o discorde al verso dell'asse

❑ NB: la componente e' un NUMERO (dotato di segno algebrico che indica il verso rispetto all'asse)

Il procedimento prende il nome di scomposizione del vettore in componenti



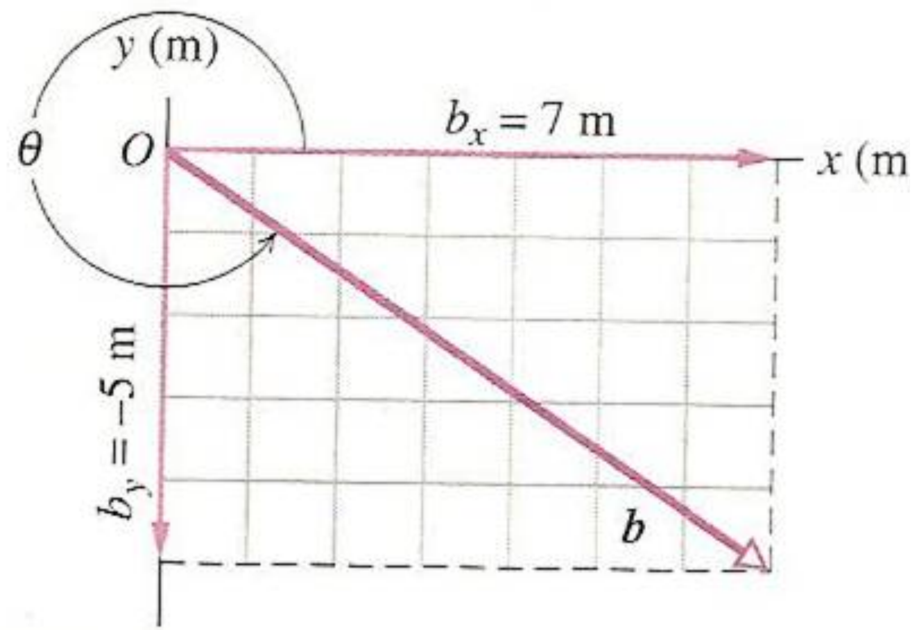
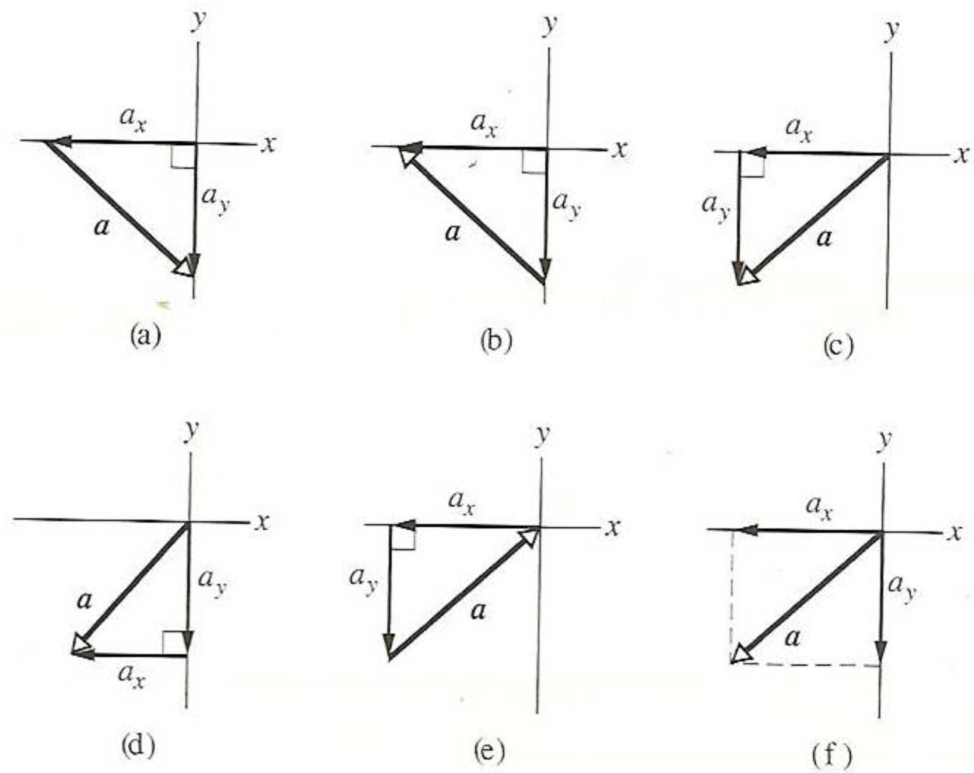


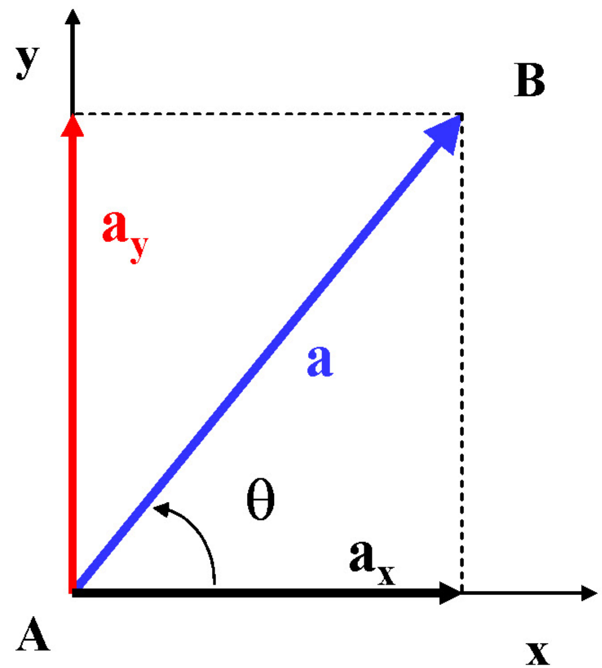
Figura 3.9 Le componenti di ***b*** sono positive sull'asse x e negative sull'asse y.

VERIFICA 2: Nella figura che segue, quali dei metodi indicati per combinare le componenti x e y del vettore $\boldsymbol{a}$ sono appropriati per individuare questo vettore?



Componenti cartesiane

Il vettore può essere individuato anche tramite le sue componenti lungo un sistema di assi cartesiani.



NB: l'angolo θ e' orientato→ verso di rotazione positivo antiorario

Il modulo del vettore può essere espresso in funzione delle componenti (teorema di Pitagora):

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Le componenti, a loro volta, sono legate al modulo dalle relazioni (trigonometria):

$$\begin{aligned} a_x &= |\mathbf{a}| \cos\theta \\ a_y &= |\mathbf{a}| \operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

Anche l'angolo θ può essere espresso in funzione delle componenti:

$$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x}$$

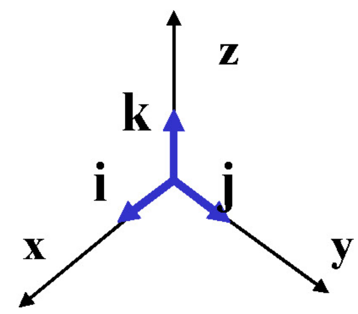
La somma dei vettori a_x e a_y dà il vettore a, di cui a_x e a_y sono i vettori componenti.

Due vettori sono uguali se e solo se hanno le stesse componenti

Versori e componenti cartesiane

Esistono dei vettori speciali, detti versori, che possono essere utilizzati per caratterizzare tutti gli altri vettori. I versori hanno queste caratteristiche:

- ✓ **hanno modulo 1;**
- ✓ **sono diretti lungo gli assi cartesiani;**
- ✓ **indicano il verso positivo degli assi cartesiani**



- ❑ I versori sono privi di dimensioni (e quindi anche di unita' di misura) e servono unicamente ad indicare una direzione
- ❑ ***i***, ***j*** e ***k*** indicano i versori degli x, y e z rispettivamente
- ❑ il sistema di coordinate va costruito come in figura: sistema destrorso di coordinate ortogonali (regola della mano destra

I versori sono utili per descrivere altri vettori
Un vettore puo' essere scritto come

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$

$a_x \vec{i}, a_y \vec{j}$ Sono le componenti vettoriali di a, da *non* confondere con le componenti scalari a_x e a_y (o semplicemente, come prima, le componenti

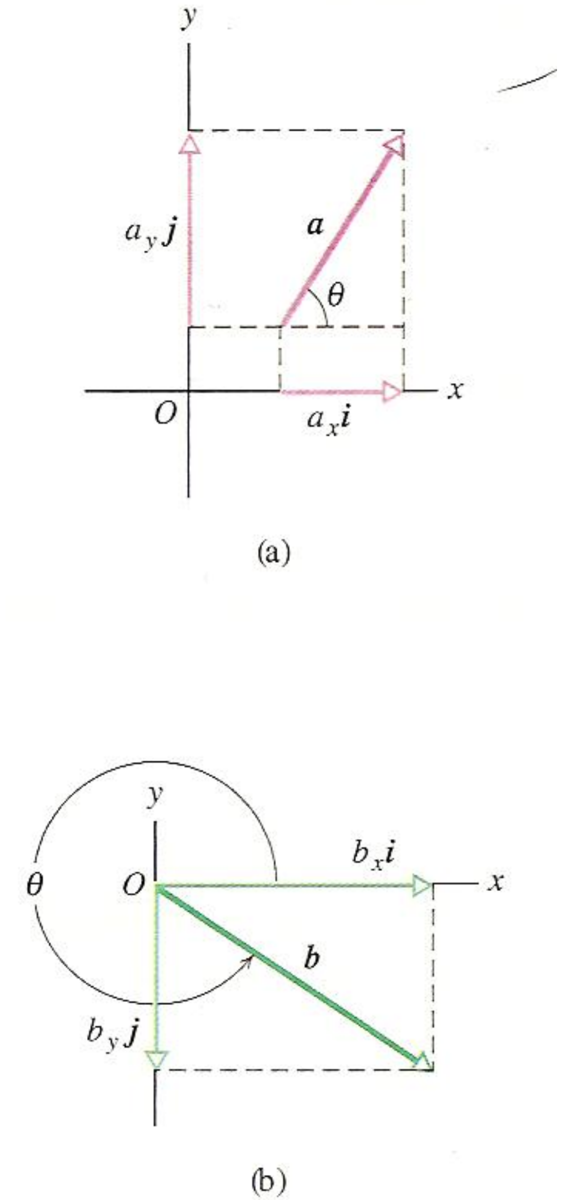
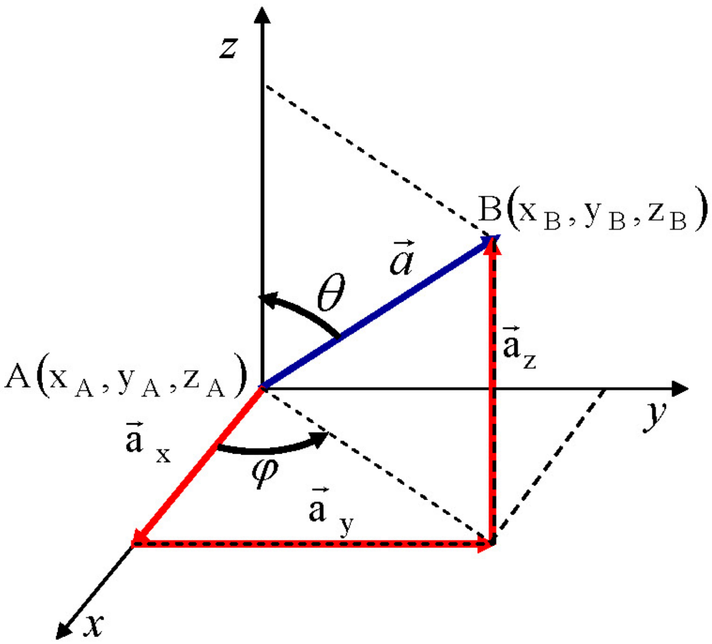


Figura 3.15 (a) Componenti vettoriali del vettore ***a***. (b) Componenti vettorial del vettore ***b***.

Versori e componenti cartesiane



$$\overline{a} = \overline{AB} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

Le componenti di un vettore qualsiasi $\vec{AB}$ si ottengono anche dalla differenza delle corrispondenti coordinate dell'estremo finale B con quelle del estremo iniziale A, ossia:

$$\vec{AB} = (x_B - x_A)\hat{i} + (y_B - y_A)\hat{j} + (z_B - z_A)\hat{k}$$

Il modulo espresso tramite le sue componenti sarà dunque dato da:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}$$

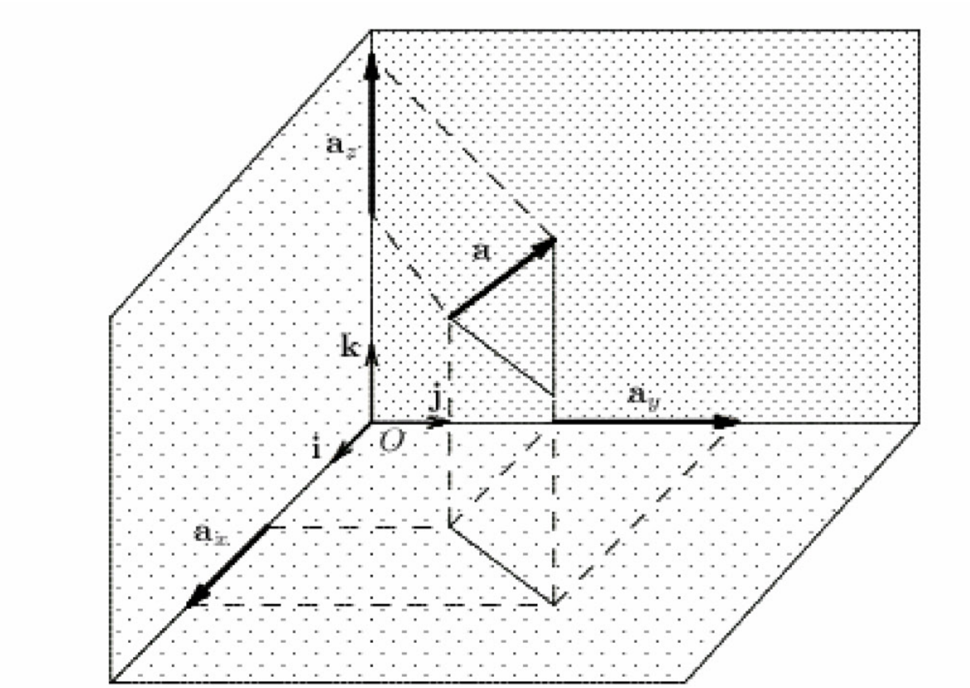
$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Componenti cartesiane

In tre dimensioni:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

$$\mathbf{b} = \overline{\mathbf{b}}_x + \overline{\mathbf{b}}_y + \overline{\mathbf{b}}_z = \mathbf{b}_x\mathbf{i} + \mathbf{b}_y\mathbf{j} + \mathbf{b}_z\mathbf{k} = \mathbf{b}_x\hat{\mathbf{i}} + \mathbf{b}_y\hat{\mathbf{j}} + \mathbf{b}_z\hat{\mathbf{k}}$$



Le operazioni finora introdotte possono essere scritte in una nuova forma:

$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j} + (a_z + b_z)\hat{k}}$$

$$\boxed{\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x)\hat{i} + (a_y - b_y)\hat{j} + (a_z - b_z)\hat{k}}$$

$$\boxed{\alpha\vec{a} = \alpha a_x\hat{i} + \alpha a_y\hat{j} + \alpha a_z\hat{k}}$$

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

Fare operazioni sui vettori e' equivalente ad operare sulle loro componenti

Perche' i sistemi di coordinate?

PERCHÈ NUMERICAMENTE SI POSSONO SOMMARE, SOTTRARRE, MOLTIPLICARE SOLTANTO DEI NUMERI E NON DELLE QUANTITÀ ASTRATTE COME DEI VETTORI.

USANDO UN SISTEMA DI COORDINATE SI RIDUCE UN VETTORE ALLA SOMMA VETTORIALE DI TRE COMPONENTI.

SULLE SINGOLE COMPONENTI SI PUO' USARE L'ALGEBRA ORDINARIA

EX: $\vec{A} + \vec{B}$; $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$; $\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j}$

$$\vec{A} + \vec{B} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + B_x \hat{i} + B_y \hat{j} =$$

$$= (A_x + B_x)\hat{i} + (\cancel{A_y} + B_y)\hat{j}$$

HO TROVATO LE COMPONENTI DEL VETTORE $\vec{A} + \vec{B}$ SENZA RICORRERE AL METODO GRAFICO

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (B_y + A_y)^2}$$

Perche' usare vettori?

Assioma 1: le leggi della fisica sono le stesse per tutti gli osservatori (o sperimentatori) → devono essere espresse in forma matematica indipendente dal particolare osservatore.

Assioma 2: Un osservatore e' equivalente ad un sistema di coordinate (immaginate una terna di assi cartesiani associata a ciascun osservatore)
➔ le leggi della fisica devono essere indipendenti dal sistema di coordinate usato per descrivere il fenomeno

I vettori sono un enti geometrici (segmenti orientati) le cui relazioni sono indipendenti da chi "li osserva", cioe' se due vettori sono uguali per un osservatore , allora sono uguali per tutti gli osservatori ➔ possiamo esprimere le leggi fisiche in forma vettoriale

Perche' usare vettori?

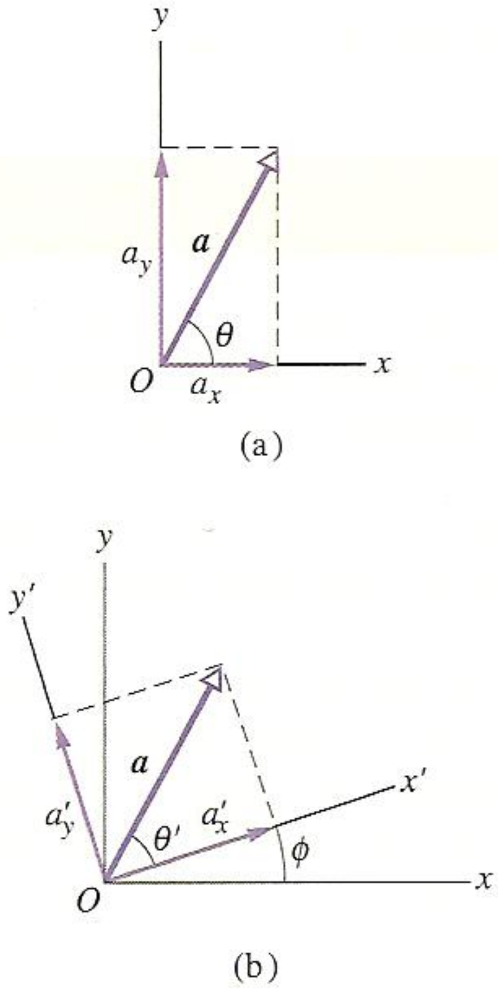


Figura 3.18 (a) Il vettore ***a*** e le sue componenti. (b) Lo stesso vettore, con gli assi del sistema di coordinate ruotato di un angolo ϕ.

L'uso di assi paralleli ai bordi della pagina non ha alcun significato profondo. E' solo piu' comodo per visualizzare la situazione

Se ruotiamo gli assi (ma non il vettore a) di un angolo Φ arbitrario (ovvero se cambiamo punto di vista), le componenti cambiano (il vettore no) in a'_x e a'_y.
Non esiste una coppia di componenti "piu' giusta" di altre, sono tutte equivalenti (cioe' rappresentano lo stesso oggetto rispetto a osservatori –ie sistemi di riferimento- diversi.
Tutte esprimono lo stesso modulo, la stessa direzione e verso per il medesimo vettore anche se con numeri differenti (in linguaggio piu' tecnico si dice che la lunghezza di un vettore e' un invariante per trasformazioni di coordinate)

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_x'^2 + a_y'^2}$$

Perche' usare vettori?

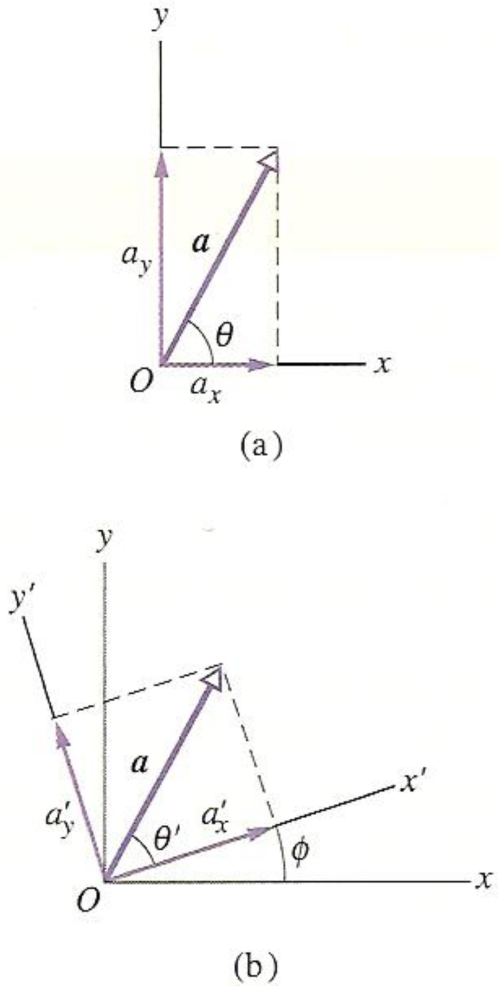


Figura 3.18 (a) Il vettore ***a*** e le sue componenti. (b) Lo stesso vettore, con gli assi del sistema di coordinate ruotato di un angolo ϕ.

Quindi abbiamo una grande liberta' di scelta per definire i sistemi di coordinate perche' le relazioni fra vettori non dipendono dalla collocazione dell'origine e dall'orientazione degli assi del sistema di riferimento.
Non esiste un criterio generale per la scelta del riferimento: l'unico criterio e' che la scelta deve essere fatta in modo tale che i calcoli siano i piu' semplici possibili ovvero tale che la descrizione dei fenomeni fisici sia la piu' semplice possibile dal punto di vista matematico

Esempio

Quanto valgono la somma e la differenza di due vettori di componenti a_x = -2, a_y = 1 e b_x = 5, b_y = 2 ? Calcolare il modulo dei vettori somma e differenza.

$$\vec{a} = -2\hat{i} + \hat{j}$$

$$\vec{b} = 5\hat{i} + 2\hat{j}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (-2 + 5)\hat{i} + (1 + 2)\hat{j} = 3\hat{i} + 3\hat{j}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 4.24$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (-2 - 5)\hat{i} + (1 - 2)\hat{j} = -7\hat{i} - \hat{j}$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 7.07$$