Lez 18 011215

Carica elettrica

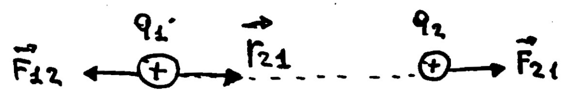
La carica non e' continua, come non lo e' nessun materiale:
Essi sono costituiti da entita' discrete, atomi o molecole.
Allo stesso modo si 'e trovato che la carica elettrica puo' assumere solo valori discreti, multipli interi della carica elettrica fondamentale **$e = 1.6021 x 10^{19}$ C**, cioe' la carica elettrica e quantizzata, **$q = ne$** dove n =±1,±2,±3...
La carica e e' una delle costanti fondamentali della natura
NB: la carica elettrica non e' una "sostanza": le particelle materiale sono sostanza, la carica elettrica e' una proprieta' delle praticelle, come la massa

La carica elettrica totale di un sistema isolato e' conservata in tutti i processi fisici: $Q_{prima} = Q_{dopo}$

E' una delle leggi di conservazione fondamentali (come quelle di quantita' di moto, energia e momento angolare)

Particolarmente evidente e importante in fisica delle particelle elementari

Forza di Coulomb



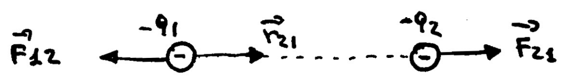
REPULSIVA

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 \cdot q_2}{r_{21}^2}\,\hat{r}_{21}$$

forza sulla carica 2 dovuta alla carica 1

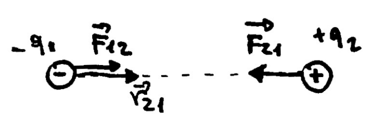
- IL RAGGIO VETTORE $\vec{r}$ È DIRETTO DALLA CARICA CHE ESERCITA LA FORZA ALLA CARICA CHE LA SUBISCE
- VERSORE $\hat{r} = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$
- PER IL PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE SI HA:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$



REPULSIVA

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 \cdot q_2}{r_{21}^2}\,\hat{r}_{21}$$

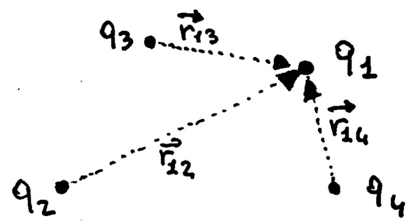


ATTRATTIVA

$$\vec{F}_{21} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 \cdot q_2}{r_{21}^2}\,\hat{r}_{21}$$

Principio di sovrapposizione

- SUPPONIAMO DI AVERE 4 CARICHE, q_1, q_2, q_3, q_4
VALUTIAMO LA FORZA CHE LE TRE CARICHE q_2, q_3, q_4
ESERCITANO SULLA CARICA q_1



$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$$ forza esercitata sulla carica 1 dalla carica 2

$$\vec{F}_{13} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 \cdot q_3}{r_{13}^2}\hat{r}_{13}$$ forza esercitata sulla carica 1 dalla carica 3

$$\vec{F}_{14} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 \cdot q_4}{r_{14}^2}\hat{r}_{14}$$ forza esercitata sulla carica 1 dalla carica 4

- CIASCUNA CARICA SEPARATAMENTE ESERCITA SULLA CARICA 1 LA FORZA $\vec{F}_{1i}$ $(i=2,3,4)$

Principio di sovrapposizione

- LA FORZA CHE LE TRE CARICHE ESERCITANO CONTEMPORANEAMENTE SULLA CARICA 1 È DATA DALLA SOMMA VETTORIALE:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_3}{r_{13}^2}\hat{r}_{13} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_4}{r_{14}^2}\hat{r}_{14} =$$

$$= q_1\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3}{r_{13}^2}\hat{r}_{13} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_4}{r_{14}^2}\hat{r}_{14}\right) =$$

$$= q_1 \sum_{2}^{4}{}_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}_{1i}}{r_{1i}^2}$$

- LA PROPRIETÀ DI POTER SOMMARE GLI EFFETTI DELLE SINGOLE CAUSE PER TROVARE L'EFFETTO GLOBALE SI CHIAMA PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI.

N.B. SE LASCIAMO INVARIATE LE POSIZIONI DELLE CARICHE E CAMBIAMO SOLO IL VALORE DELLA CARICA q_1

$$q_1 \longrightarrow q_1'$$

AVREMO CHE

$$\vec{F}_1{}' = \frac{q_1'}{q_1}\cdot\vec{F}_1$$

Campo elettrico

❑ Prendiamo Q_1 come sorgente: su Q_2 agisce una forza dovuta alla presenza della carica Q_1

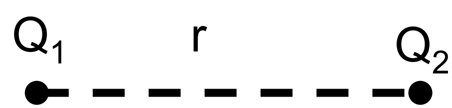
❑ Le due cariche non sono a contatto ma si trovano a una distanza r: com'e' possibile che vi sia una forza senza contatto?

❑ Faraday (»1830) ipotizzo' il concetto di campo elettrico

❑ La carica Q_1 modifica le proprieta' dello spazio circostante creando un "campo" di forze.

❑ Q_2 interagisce con il campo (creato da Q_1) presente nel punto in cui essa si trova

$$\vec{F} = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}\hat{u}_r$$



Definizione di E

1) UNA CARICA q POSTA NELLO SPAZIO PRODUCE UN CAMPO ELETTRICO

2) UN'ALTRA CARICA q_0 INTERAGISCE CON IL CAMPO ELETTRIC PRODOTTO DALLA PRIMA E SUBISCE QUINDI UNA FORZA

3) MISURANDO QUESTA FORZA SI RISALE AL CAMPO.
LA FORZA SI PUO' MISURARE IN MANIERA STATICA (DINAMOMETRO) OPPURE DINAMICA (ACCELERAZIONE, $F = ma$)

- SPERIMENTALMENTE SI TROVA CHE LA FORZA MISURATA E' PROPORZIONALE ALLA CARICA q_0 USATA PER MISURARE IL CAMPO

$$F \propto q_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = q_0 \vec{E}$$

- QUINDI OPERATIVAMENTE SI HA:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

- SPOSTANDO LA CARICA q_0 SI DETERMINA $\vec{E}$ IN TUTTI I PUNTI DELLO SPAZIO.

- N.B. PER EVITARE CHE LA CARICA DI PROVA DISTURBI LA DISTRIBUZIONE DELLE ALTRE CARICHE CHE GENERANO IL CAMPO, SI SCEGLIE UNA CARICA MOLTO PICCOLA

$$\vec{E} = \lim_{q_0 \to 0} \frac{\vec{F}}{q_0}$$

- SE SI HANNO PIU' CARICHE IL CAMPO ELETTRICO RISULTANTE E' LA SOMMA DEI SINGOLI CAMPI ELETTRICI (PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE)

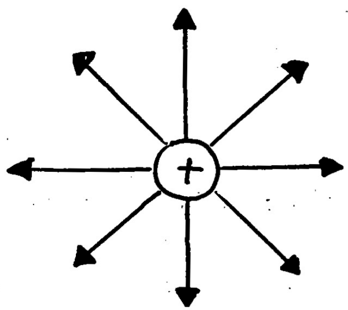
Linee di forza

- LE LINEE DI FORZA DANNO LA DIREZIONE E IL VERSO DEL CAMPO. IN OGNI PUNTO IL VETTORE $\vec{E}$ E' TANGENTE ALLE LINEE DEL CAMPO.

CARICA PUNTIFORME $+q$

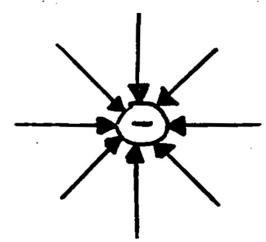
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{F} = q_0 \cdot \vec{E}$$



LE LINEE DI FORZA DEL CAMPO ELETTRICO SONO DELLE RETTE USCENTI DALLA CARICA

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$



LE LINEE DI FORZA DEL CAMPO ELETTRICO SONO DELLE RETTE ENTRANTI NELLA CARICA

CRITERIO DI FARADAY

DOVE L'INTENSITA' DEL CAMPO E' PIU' FORTE, LE LINEE DI FORZA SONO PIU' DENSE

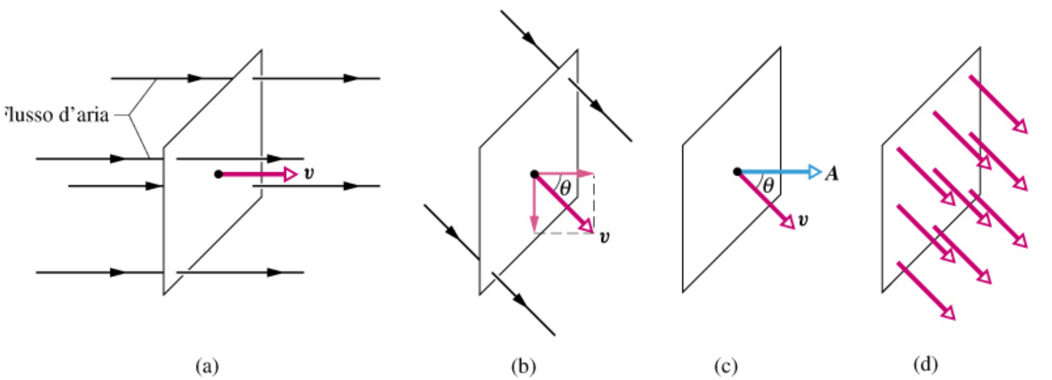
N.B. LE LINEE DEL CAMPO NON POSSONO MAI INCROCIARSI NEI PUNTI DELLO SPAZIO DOVE NON CI SONO CARICHE

Flusso di un Campo Vettoriale

- Il flusso infinitesimo di un campo vettoriale è definito da:

$$d\phi(\vec{v}) = \vec{v} \cdot \hat{n}\, dS = v \cos\theta\, dS$$

- In origine il flusso è stato definito per correnti di fluidi (aria, acqua) per caratterizzare ad esempio la quantità di volume di un fluido che passa attraverso una superficie nell'unità di tempo
- Successivamente il concetto di flusso è stato esteso ad un generico campo vettoriale (come estensione della corrente, cioè del flusso del campo definito dalle velocità vettoriali)

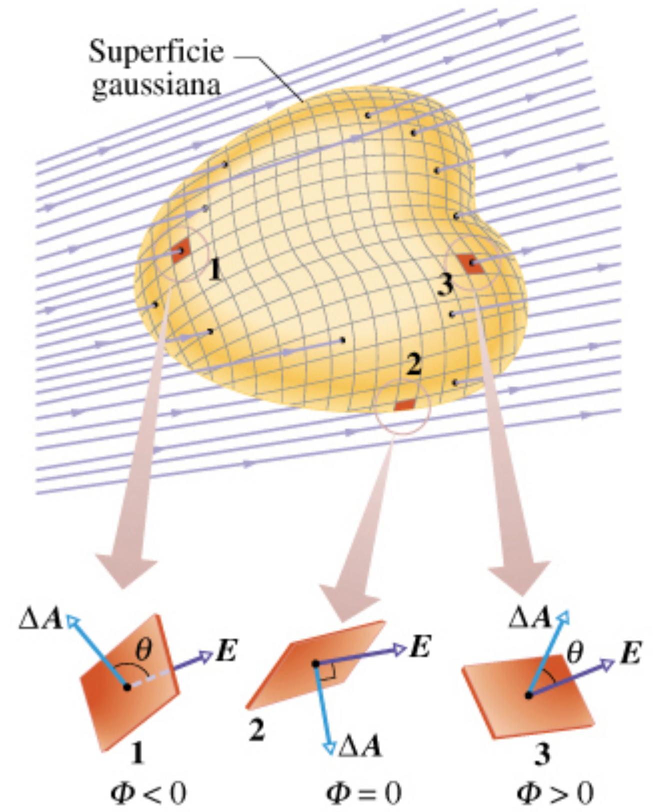


Flusso di un Campo Vettoriale 2

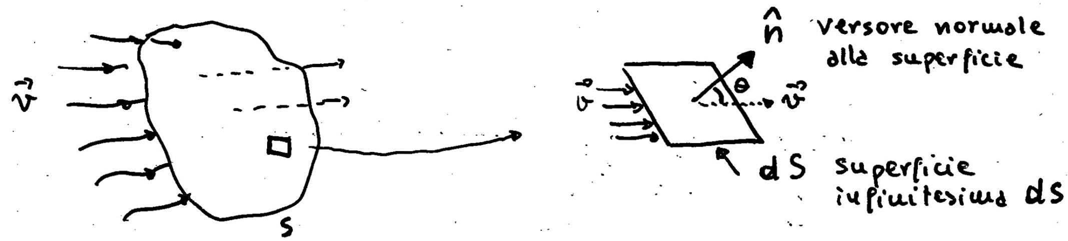
- Il differenziale del flusso può essere usato per calcolare il flusso attraverso una superficie generica…
- Il flusso totale attraverso tutta la superficie *S* è l'integrale, esteso la superficie *S*, di tutti i contributi $d\phi(\mathbf{v})$:

$$\phi(\vec{v}) = \int_{S\,\mathbf{chiusa}} \vec{v}\cdot\hat{n}\,dS = \oint \vec{v}\cdot\hat{n}\,dS$$

- Se la superficie *S* è una superficie chiusa (per ex. una sfera), il versore normale ***n*** si definisce sempre rivolto verso l'esterno e il flusso si dice uscente da *S*.



- IL FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE È UNA GRANDEZZA PROPORZIONALE AL NUMERO DI LINEE DI FORZA DEL CAMPO CHE ATTRAVERSANO UNA DATA SUPERFICIE



- $d\Phi = \vec{v}\cdot\hat{n}\, dS = |\vec{v}|\, ds \cos\theta$

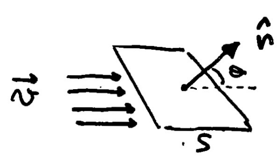
- θ È L'ANGOLO FORMATO DALLA NORMALE ALLA SUPERFICIE CON IL VETTORE $\vec{v}$.

  SE L'ANGOLO È 90° ALLORA IL FLUSSO È NULLO.

- IL FLUSSO ATTRAVERSO L'INTERA SUPERFICIE S È DATO DALLA SOMMA DEI FLUSSI ELEMENTARI $d\Phi$

$$\Phi_S(\vec{v}) = \int_S d\Phi = \int_S \vec{v}\cdot\hat{n}\, dS = \int_S |\vec{v}|\, ds \cos\theta$$

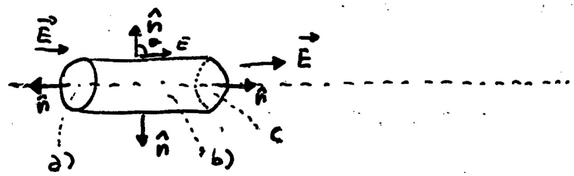
- CASO PARTICOLARE: LA SUPERFICIE È PIANA ED IL VETTORE $\vec{v}$ È LO STESSO IN TUTTI I PUNTI DELLA SUPERFICIE



$$\Phi_S(\vec{v}) = \int_S \vec{v}\cdot\hat{n}\, ds = \vec{v}\cdot\hat{n}\int_S ds = \vec{v}\cdot\hat{n}\, S = \underline{|\vec{v}|\cdot S\cdot\cos\theta}$$

Esempio

LA FIGURA MOSTRA UNA SUPERFICIE GAUSSIANA DI FORMA CILINDRICA CON RAGGIO R IMMERSA IN UN CAMPO ELETTRICO UNIFORME $\vec{E}$. L'ASSE DEL CILINDRO SIA PARALLELO AL CAMPO. QUANTO VALE IL FLUSSO Φ DEL CAMPO ELETTRICO PER QUESTA SUPERFICIE CHIUSA?



$$\Phi_s(\vec{E}) = \int_s \vec{E}\cdot\hat{n}\,ds = \int_a \vec{E}\cdot\hat{n}\,ds + \int_b \vec{E}\cdot\hat{n}\,ds + \int_c \vec{E}\cdot\hat{n}\,ds$$

- SULLA SUPERFICIE a L'ANGOLO TRA $\hat{n}$ E IL CAMPO $\vec{E}$ VALE 180°

$$\int_a \vec{E}\cdot\hat{n}\,ds = \vec{E}\cdot\hat{n}\int_a ds = |\vec{E}|\cdot S_a\cdot\cos\theta = -|\vec{E}|\,S_a$$

- SULLA SUPERFICIE CILINDRICA L'ANGOLO E' 90°

$$\int_b \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \vec{E}\cdot\hat{n}\int_b dS = |\vec{E}|\cdot S_b\cdot\cos\theta = |\vec{E}|\cdot S_b\cdot\cos 90° = 0$$

- SULLA SUPERFICIE C L'ANGOLO E' ZERO

$$\int_c \vec{E}\cdot\hat{n}\,ds = \vec{E}\cdot\hat{n}\int_c dS = |\vec{E}|\cdot S_c\cdot\cos\theta = |\vec{E}|\cdot S_c$$

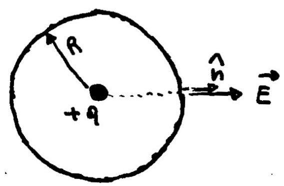
- NEL CILINDRO $S_a = S_c = S$
- SOMMIAMO I TRE INTEGRALI

$$\Phi_s(\vec{E}) = -E\cdot S + 0 + E\cdot S = 0$$

$\Rightarrow$ IL FLUSSO DI UN CAMPO UNIFORME ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE CHIUSA E' ZERO.

TEOREMA DI GAUSS

- CALCOLIAMO IL FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO GENERATO DA UNA CARICA PUNTIFORME POSITIVA, ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE SFERICA CHE HA NEL SUO CENTRO LA CARICA.



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

- SUPERFICIE DI UNA SFERA: $S = 4\pi R^2$
  PRENDIAMO UNA SUPERFICIE INFINITESIMA dS SULLA SFERA
  $dS = R^2\, d\Omega$
- $d\Omega$ E' L'ANGOLO SOLIDO INFINITESIMO [$d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$]

[circonferenza $= 2\pi R$; infinitesimo di circonferenza $dl = R\, d\varphi$]

- LA NORMALE $\hat{n}$ E' DIRETTA COME IL RAGGIO VETTORE $\vec{R}$

$$d\Phi(\vec{E}) = \vec{E}\cdot\hat{n}\, dS = |\vec{E}|\cdot dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}\cdot R^2 d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\, d\Omega$$

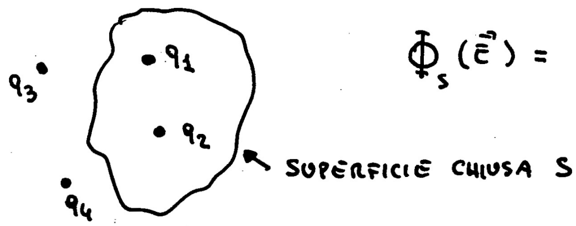
- IL FLUSSO INFINITESIMO NON DIPENDE DAL RAGGIO DELLA SFERA

$$\Phi_S(\vec{E}) = \int_{S_{chiusa}} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\, d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S_{chiusa}} d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot 4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

- q E' LA CARICA CONTENUTA ALL'INTERNO DELLA SFERA

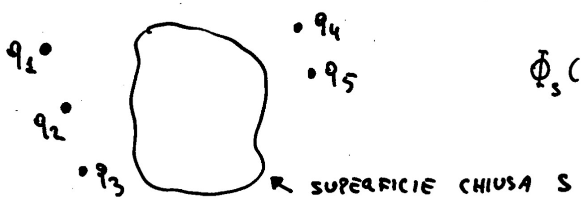
TEOREMA DI GAUSS

- IL FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE <u>CHIUSA</u> QUALSIASI E' PARI ALLA SOMMA ALGEBRICA DELLE CARICHE CONTENUTE ALL'INTERNO DIVISO ε_0



$$\Phi_s(\vec{E}) = \frac{q_1 + q_2}{\varepsilon_0}$$

- LE CARICHE AL DI FUORI DELLA SUPERFICIE NON CONTANO, SEBBENE CONTRIBUISCONO AL VALORE DEL CAMPO $\vec{E}$



$$\Phi_s(\vec{E}) = 0$$ [non ci sono cariche all'interno]

- IL TEOREMA DI GAUSS E' UTILE OGNI QUALVOLTA, PER RAGIONI DI SIMMETRIA, E' POSSIBILE SCEGLIERE UNA SUPERFICIE SULLA QUALE IL MODULO DEL CAMPO ELETTRICO E' COSTANTE

$$\Phi_s(\vec{E}) = \int_{S_{chiusa}} \vec{E}\cdot\hat{n}\, ds = \vec{E}\cdot\hat{n}\int_{S_{chiusa}} dS = |\vec{E}|\int_{S_{chiusa}} ds = |\vec{E}|\cdot S$$

PER IL TEOREMA DI GAUSS $\Phi_s(\vec{E}) = \frac{q_{interna}}{\varepsilon_0}$, ALLORA:

$$|\vec{E}|\cdot S = \frac{q_{interna}}{\varepsilon_0} \Rightarrow |\vec{E}| = \frac{1}{S}\cdot\frac{q_{interna}}{\varepsilon_0}$$

Flusso Elettrico e Teorema di Gauss

- Tale teorema mette in relazione la carica elettrica (che produce il campo elettrico) presente all'interno di una superficie chiusa e il flusso del campo elettrico attraverso tale superficie
- Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa dipende solo dalla carica elettrica all'interno di tale superficie. Le cariche elettriche presenti all'esterno della superficie in esame non contribuiscono al flusso.
- L'enunciato del teorema può essere riassunto da tale equazione:

$$\boxed{\phi(\vec{E}) = \oint_{S_{chiusa}} \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}}$$

- dove la sommatoria è estesa a tutte le cariche all'interno della superficie *S* e la relazione vale per cariche nel vuoto (se siamo in presenza di un mezzo è sufficiente effettuare la sostituzione $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$)
  - Nel caso di somma positiva di cariche racchiuse da *S*, si parla di flusso uscente da *S*; se la somma delle cariche è negativa parliamo di flusso entrante.

Teorema di Gauss per il campo elettrico E

Il grande matematico tedesco K. F. Gauss (1777-1855) formulò la legge di Gauss per il campo elettrico (Legge di Maxwell per il flusso del campo elettrico)

Teorema di Gauss per il campo elettrico:
Il flusso elettrico attraverso una superficie gaussiana è direttamente proporzionale alla somma algebrica di tutte le cariche elettriche presenti all'interno della superficie.

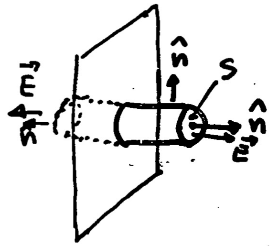
$$\Phi\left(\vec{E}\right) = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q}{\varepsilon}$$

Significato fisico:
Il teorema di Gauss per il campo elettrico descrive una caratteristica importante del campo elettrostatico:

1. **Le cariche elettriche sono le sorgenti del campo elettrico.**
2. **Le linee di campo nascono o muoiono sulle cariche elettriche.**

Lamina isolante carica

TROVIAMO IL CAMPO ELETTRICO CREATO DA UNA CARICA DISTRIBUITA UNIFORMEMENTE CON DENSITA' SUPERFICIALE σ SU UN PIANO INFINITO ISOLANTE.



$$\sigma = \frac{dQ}{dS} \Rightarrow dQ = \sigma \cdot dS$$

- PER RAGIONI DI SIMMETRIA IL CAMPO $\vec{E}$ DEVE ESSERE ORTOGONALE ALLA LAMINA
- SCEGLIAMO COME SUPERFICIE UN CILINDRO CON L'ASSE PERPENDICOLARE AL PIANO
- IL FLUSSO DALLA FACCIA LATERALE DEL CILINDRO E' NULLO PERCHE' $\vec{E} \cdot \hat{n} = 0$ [l'altezza del cilindro può essere qualsiasi]
- IL FLUSSO DA UNA BASE DEL CILINDRO VALE:

$$\Phi_s(\vec{E}) = |\vec{E}| \cdot S$$

- IL FLUSSO USCENTE DA TUTTO IL CILINDRO VALE:

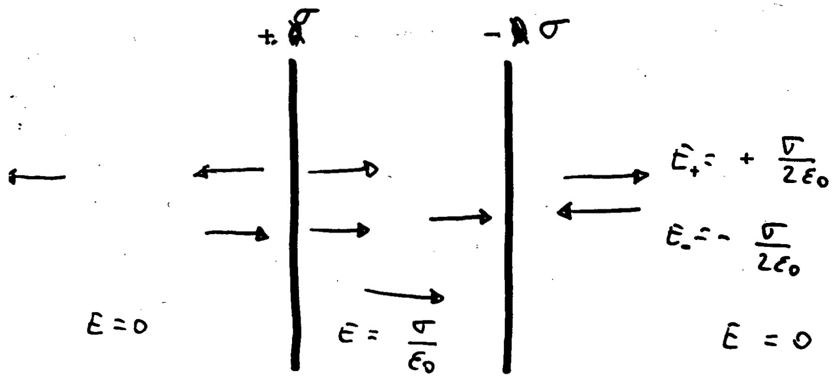
$$\Phi(\vec{E}) = |\vec{E}| \cdot S + |\vec{E}| \cdot S + 0 = 2|\vec{E}| \cdot S$$

- PER IL TEOREMA DI GAUSS $\Phi(E) = \frac{Q_{interna}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \cdot S}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow 2|\vec{E}| \cdot S = \frac{\sigma \cdot S}{\varepsilon_0} \Rightarrow |\vec{E}| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

N.B. IL MODULO DEL CAMPO ELETTRICO NON DIPENDE DALLA DISTANZA DALLA LAMINA

Doppio strato



- PRENDIAMO DUE LAMINE PIANE INFINITE, UNA CON DENSITA' $+\lambda$ E L'ALTRA $-\lambda$

- ALL'INTERNO DEL DOPPIO STRATO IL CAMPO VALE $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

- FUORI DAL DOPPIO STRATO IL CAMPO VALE 0

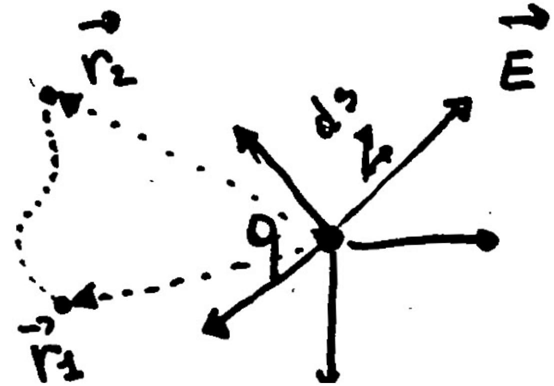
Lavoro del campo E

Mettiamo una carica q_o di prova nel campo ***E*** generato da una carica puntiforme ***F*** = q_o***E***

Spostiamo q_o da ***r***$_1$ a ***r***$_2$; il lavoro fatto dalla forza del campo e'

$$L = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{q \cdot q_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{s} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dr}{r^2} =$$

$$= \frac{q_0 \cdot q}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = \frac{q_0 \cdot q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$



IL LAVORO NON DIPENDE DAL PERCORSO, MA SOLO DALLO STATO FINALE E DA QUELLO INIZIALE

=> LA FORZA ELETTROSTATICA E' CONSERVATIVA

=> SI PUO' DEFINIRE L'ENERGIA POTENZIALE ELETTROSTATICA

N.B. DATO IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE, LE CONCLUSIONI SONO VALIDE QUALUNQUE SIA IL NUMERO DI CARICHE

Energia potenziale elettrostatica

- DEFINIAMO ENERGIA POTENZIALE DEL CAMPO ELETTRICO $\vec{E}$ IN UN PUNTO $\vec{r}$ DELLO SPAZIO IL LAVORO FATTO DA UNA FORZA ESTERNA PER SPOSTARE LA CARICA q_0 DALL'INFINITO AL PUNTO $\vec{r}$

$$U(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} q_0 \cdot \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

- CALCOLIAMO IL LAVORO FATTO DA $\vec{E}$ PER FAR MUOVERE UNA CARICA DA $\vec{A}$ a $\vec{B}$

$$L_{AB} = \int_A^B q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_A^{\infty} q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{\infty}^{B} q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} =$$

$$= -\int_{\infty}^{A} q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} - \left(-\int_{\infty}^{B} q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}\right) = U(A) - U(B)$$

- $L_{AB} = U(A) - U(B)$

- SE $U(B) < U(A)$ $\Rightarrow$ IL LAVORO FATTO DAL CAMPO E' POSITIVO

Potenziale elettrico

- $U(\vec{r}) = -q_0 \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{s}$

- CONSIDERIAMO L'ENERGIA POTENZIALE PER UNITA' DI CARICA

$$V(\vec{r}) = \frac{U(\vec{r})}{q_0} = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{s} \qquad \text{[potenziale elettrico]}$$

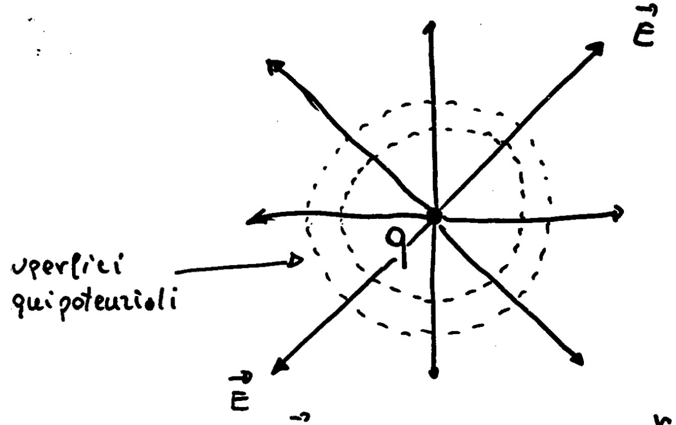
- IL POTENZIALE ELETTRICO DI UN PUNTO ARBITRARIO E' UGUALE AL LAVORO PER UNITA' DI CARICA NECESSARIO PER PORTARE UNA CARICA DI PROVA POSITIVA DALL'INFINITO AL PUNTO

- LA QUANTITA' DI INTERESSE FISICO NON E' IL POTENZIAL BENSI' LA DIFFERENZA DI POTENZIALE

$$\Delta V = V(A) - V(B) = \int_{A}^{B} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Il pot elettrico si misura in J/C = Volt
Il campo elettr si misura in V/m = N/C

Pot el di una carica puntiforme



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

$$V(r) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}\cdot d\vec{s} = -\int_{\infty}^{r}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

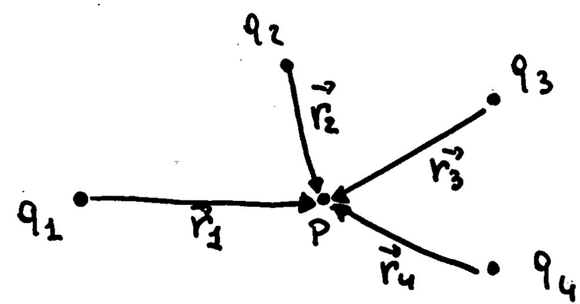
- IL POTENZIALE È UNA GRANDEZZA SCALARE
- $q > 0 \Rightarrow V > 0$; $q < 0 \Rightarrow V < 0$
- I PUNTI CHE HANNO LA STESSA DISTANZA r DALLA CARICA q HANNO LO STESSO POTENZIALE (SUPERFICIE EQUIPOTENZIALE)
- I PUNTI DI UNA SUPERFICIE ORTOGONALE AL CAMPO ELETTRICO HANNO LO STESSO POTENZIALE
- MUOVENDOSI LUNGO UNA SUPERFICIE EQUIPOTENZIALE NON SI COMPIE LAVORO (NON VARIA L'ENERGIA POTENZIALE)

Pot di n cariche puntiformi

- VALE IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1}$$ [r_1 = distanza della carica q_1 dal punto $\vec{P}$]

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2} \quad ; \quad V_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3}{r_3} \quad ; \quad V_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_4}{r_4}$$



$$V(P) = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \frac{q_4}{r_4}\right)$$

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_1^4{}_i \frac{q_i}{r_i}$$

- L'ENERGIA POTENZIALE DI UNA CARICA q_0 POSTA IN $\vec{P}$ VALE

$$U(P) = q_0 \cdot V(P) = q_0 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_1^4{}_i \frac{q_i}{r_i}$$

N.B. IL CALCOLO DEL POTENZIALE E' PIU' SEMPLICE DEL CALCOLO DEL CAMPO ELETTRICO

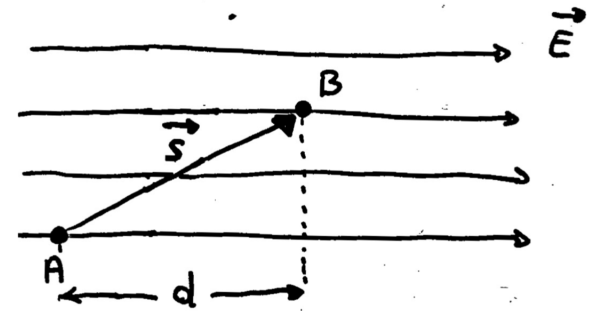
$\Rightarrow$ SI RICAVA V $\Rightarrow$ DA QUESTI SI RICAVA $\vec{E}$

D.d.p. In un campo E uniforme

- CALCOLIAMO LA DIFFERENZA DI POTENZIALE TRA DUE PUNTI $\vec{A}$ E $\vec{B}$ CHE SI TROVANO IN UN CAMPO $\vec{E}$ UNIFORME

$$\Delta V = V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} =$$

$$= \vec{E} \cdot \int_{\vec{A}}^{\vec{B}} d\vec{s} = \vec{E} \cdot \vec{s} = E \cdot d$$



- SE CI MUOVIAMO IN VERSO CONCORDE CON IL CAMPO ELETTRICO, IL POTENZIALE DIMINUISCE.

- SE METTIAMO UNA CARICA q_0 POSITIVA, DI MASSA m, IN UN CAMPO $\vec{E}$, LA CARICA SEGUIRA' LE LINEE DEL CAMPO DIMINUENDO LA SUA ENERGIA POTENZIALE E AUMENTANDO LA SUA ENERGIA CINETICA.

N.B.
$$\Delta V = V(f) - V(i) = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s} = -Ed$$

$$\Rightarrow \Delta V = V(i) - V(f) = +\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Ricavare E conoscendo V

- IN UN CAMPO UNIFORME ABBIAMO VISTO CHE:

$$V(f) - V(i) = \Delta V = -\vec{E}\cdot d\vec{s} = -E\,d$$

- IN QUESTO CASO:

$$E = -\frac{\Delta V}{d}$$

- NEL CASO DI UNA VARIAZIONE INFINITESIMA

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{s}$$

- SE IL CAMPO HA UNA SOLA COMPONENTE (E_x) ALLORA SI HA:

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{s} = -E_x\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{E_x = -\frac{dV}{dx}}$$ (derivata di V rispetto a x)

- NEL CASO GENERALE SI HA:

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{s} = -(E_x\,dx + E_y\,dy + E_z\,dz)$$

$$\Rightarrow \quad E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}\ ; \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}\ ; \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$ [derivate parziali]

- N.B. IN CASO DI SIMMETRIA SFERICA

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{s} = -E\,dr$$

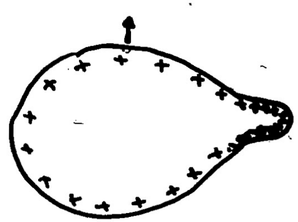
$$\Rightarrow \quad E = -\frac{dV}{dr}$$

IN UN CONDUTTORE LE CARICHE ELETTRICHE POSSONO MUOVERSI LIBERAMENTE AL SUO INTERNO.

Conduttori

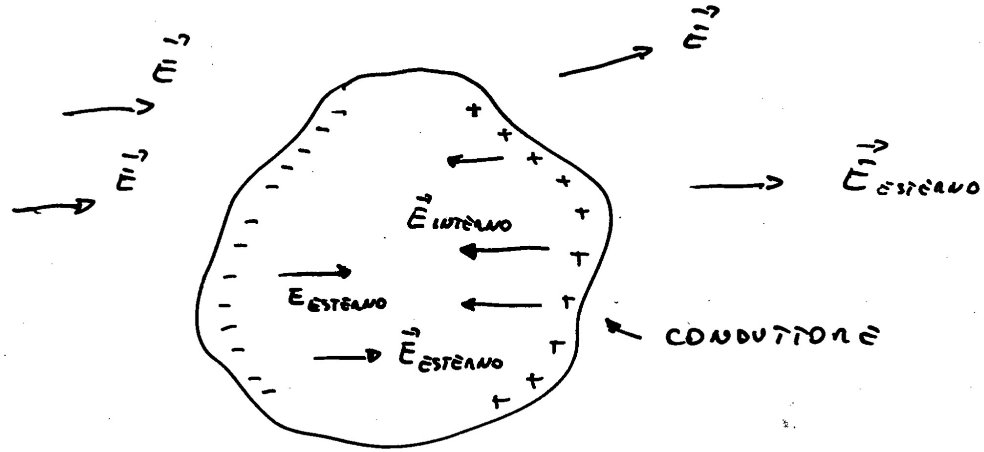
- IN UN CONDUTTORE IN EQUILIBRIO ELETTROSTATICO NON C'E' NESSUN MOVIMENTO DI CARICA
- TALE CONDUTTORE POSSIEDE LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

- IL CAMPO ELETTRICO ALL'INTERNO DI ESSO E' NULLO OVUNQUE
- UN QUALUNQUE ECCESSO DI CARICA SU UN CONDUTTORE ISOLATO DEVE RISIEDERE UNICAMENTE SULLA SUA SUPERFICIE ESTERNA
- IL CAMPO ELETTRICO IN UN PUNTO APPENA AL DI FUORI DI UN CONDUTTORE CARICO E' PERPENDICOLARE ALLA SUPERFICIE E HA MODULO σ/ε_0. (teorema di Coulomb)
- SU UN CONDUTTORE DI FORMA IRREGOLARE, LA CARICA TENDE AD ACCUMULARSI IN PUNTI IN CUI LA CURVATURA E' MAGGIORE (effetto delle punte)



E

$\underline{\boldsymbol{E}}$ nullo all'interno



- PONIAMO UN CONDUTTORE IN UN CAMPO $\vec{E}$ ESTERNO
- GLI ELETTRONI ALL'INTERNO SENTIRANNO LA FORZA

$$\vec{F} = -q_e \cdot \vec{E}$$

E QUINDI SI SPOSTERANNO

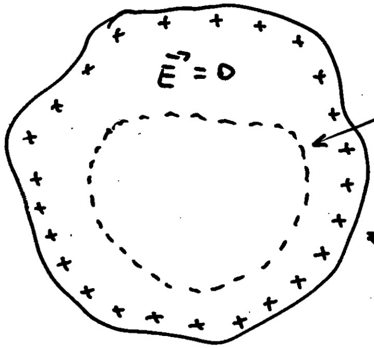
COSÌ FACENDO SI CREA UN'ASIMMETRIA DI CARICA ALL'INTERNO DEL CONDUTTORE CHE GENERA A SUA VOLTA UN CAMPO $\vec{E}$ "INTERNO"

GLI ELETTRONI SI "RIARRANGIANO" FINO A QUANDO SU DI ESSI NON VI SARA' PIÙ NESSUNA FORZA CHE LI FA MUOVERE (EQUILIBRIO ELETTROSTATICO)

$$\vec{F} = -q_e \cdot \vec{E} = -q_e \left(\vec{E}_{ESTERNO} + \vec{E}_{INTERNO} \right) = 0$$

QUINDI $\quad \vec{E} = \vec{E}_{ESTERNO} + \vec{E}_{INTERNO} = 0$

N.B. LA CONDIZIONE $\vec{E} = 0$ SI OTTIENE QUASI ISTANTANEAMENTE



Carica sulla superficie esterna

- METTIAMO UNA CARICA Q SU UN CONDUTTORE ISOLATO.
- LA CARICA SI RIDISTRIBUISCE IN MODO DA AVERE $\vec{E}=0$ ALL'INTERNO
- SCEGLIAMO UNA SUPERFICIE CHIUSA QUALSIASI ALL'INTERNO DEL CONDUTTORE SULLA QUALE APPLICARE IL TEOREMA DI GAUSS:

$$\Phi_s(\vec{E}) = \frac{q_{interna}}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_s(\vec{E}) = \int_{S_{chiusa}} \vec{E}\cdot\hat{n}\, dS = 0 \quad [\text{dato che } \vec{E}=0]$$

- NE CONSEGUE CHE ANCHE

$$q_{INTERNA} = 0$$

QUINDI LA CARICA NON PUO' CHE DISPORSI SULLA SUPERFICIE ESTERNA

Teorema di Coulomb

- PRENDIAMO UN CONDUTTORE CHE ABBIA UNA DENSITA' SUPERFICIALE DI CARICA σ

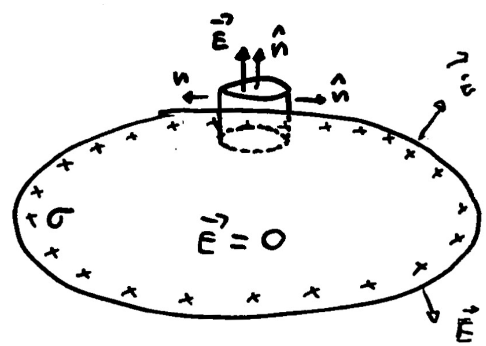
- SE IL CAMPO $\vec{E}$ SULLA SUPERFICIE DEL CONDUTTORE AVESSE UNA COMPONENTE PARALLELA ALLA SUPERFICIE, ALLORA CI SAREBBE SULLE CARICHE UNA FORZA $\vec{F}_{\parallel} = q \cdot \vec{E}_{\parallel}$ CHE LE FAREBBE MUOVERE. DATO CHE IL CONDUTTORE E' IN EQUILIBRIO ELETTROSTATICO ALLORA $\vec{E}$ DEVE ESSERE PERPENDICOLARE

APPLICHIAMO IL TEOREMA DI GAUSS AD UN CILINDRETTO AVENTE SUPERFICIE DI BASE S

$$\Phi_s(\vec{E}) = \underbrace{0}_{\text{base interna}} + \underbrace{0}_{\text{superficie laterale}} + \underbrace{|E| \cdot S}_{\text{base esterna}}$$

$$\Phi_s(\vec{E}) = \frac{Q_{interna}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \cdot S}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad |E| \cdot S = \frac{\sigma \cdot S}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$



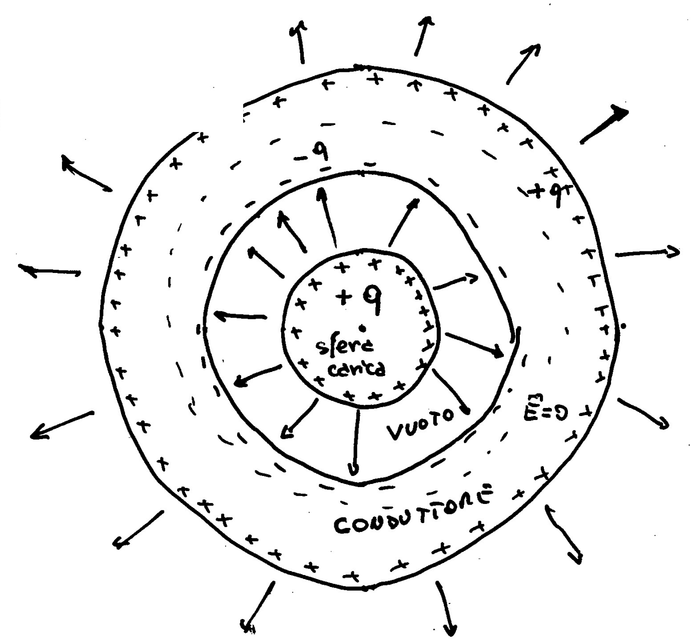
← CONDUTTORE

Sfera cava (induz. Elettrostat.)

- PRENDIAMO UNA SFERA CONDUTTRICE SCARICA CON ALL'INTERNO UNA CAVITA'.
- METTIAMO ALL'INTERNO DELLA CAVITA' UNA SFERA CONDUTTRICE CARICA CON CARICA $+q$.
- SULLA SFERA CAVA LE CARICHE SI RIDISTRIBUIRANNO IN MODO DA AVERE $\vec{E}=0$ AL SUO INTERNO.
- SULLA FACCIA INTERNA COMPARE UNA CARICA $-q$

$$0 = \Phi_s(\vec{E}) = \frac{q_{interna}}{\varepsilon_0} = \frac{+q-q}{\varepsilon_0} = 0$$

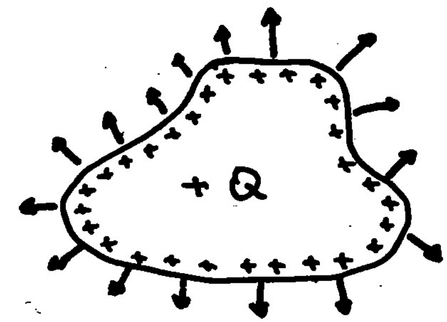
- SULLA FACCIA ESTERNA COMPARE LA CARICA $+q$



NB: il campo E e' nullo DENTRO i conduttori, ma NON e' nullo nello spazio vuoto fra i due conduttori

Pot di un cond carico

- IL CAMPO $\vec{E}$ ALL'INTERNO DI UN CONDUTTORE E' NULLO
- IL CAMPO $\vec{E}$ ESTERNO E' ORTOGONALE ALLA SUPERFICIE



- CALCOLIAMO LA d.d.p. TRA DUE PUNTI SULLA SUPERFICIE

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0 \quad [\ \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0\ ]$$

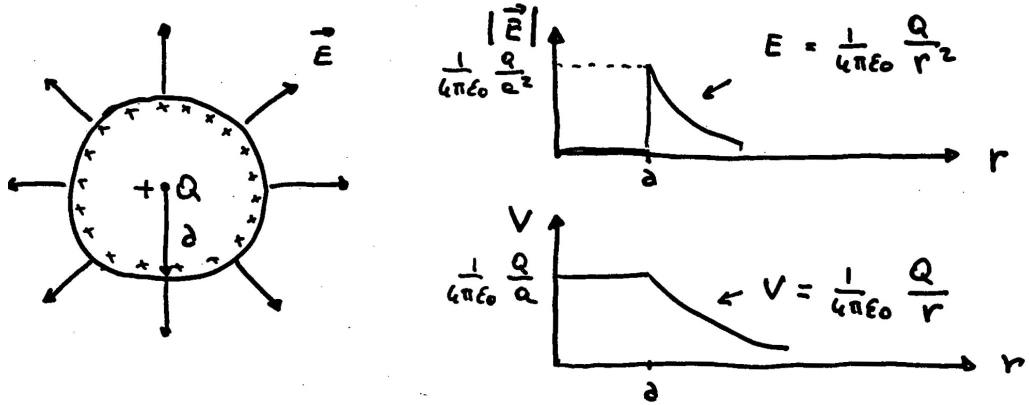
$\Rightarrow$ I PUNTI SULLA SUPERFICIE DEL CONDUTTORE HANNO TUTTI LO STESSO POTENZIALE

- DATO CHE $\vec{E} = 0$ PER OGNI PUNTO ALL'INTERNO DEL CONDUTTORE, ALLORA TUTTI QUESTI PUNTI HANNO LO STESSO POTENZIALE DELLA SUPERFICIE

- QUALUNQUE SIA LA FORMA DEL CONDUTTORE, TUTTI I PUNTI DELLO STESSO HANNO LO STESSO POTENZIALE

- IL RISULTATO È VALIDO ANCHE PER UNA CAVITA' CONTENUTA ALL'INTERNO DEL CONDUTTORE (GABBIA DI FARADAY)

D



Pot di una sfera cond carica

- POTENZIALE DELLA SFERA

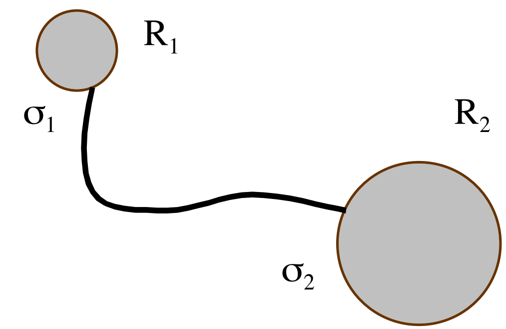
$$V(r=a) = -\int_{\infty}^{a} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_{\infty}^{a} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,dr =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left.\frac{1}{r}\right|_{\infty}^{a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a}$$

- $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot a}\cdot Q$ IL POTENZIALE DELLA SFERA È PROPORZIONALE ALLA CARICA POSSEDUTA.

Effetto “punta”

- la densità di carica sulla superficie esterna di un conduttore è inversamente proporzionale al raggio di curvatura della superficie
- Consideriamo due conduttori sferici
  - Di raggio diverso
  - Sufficientemente lontani in maniera che non si influenzano l’un l’altro
  - Connessi elettricamente in maniera da risultare allo stesso potenziale



$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1}{R_1} \qquad V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_2}{R_2}$$

$$V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2} \qquad q_1 = 4\pi R_1^2\sigma_1 \quad q_2 = 4\pi R_2^2\sigma_2 \qquad \frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2} \Rightarrow \frac{4\pi R_1^2\sigma_1}{R_1} = \frac{4\pi R_2^2\sigma_2}{R_2}$$

$$R_1\sigma_1 = R_2\sigma_2$$

- Poiché R_1 è più piccolo, σ_1 sarà più grande