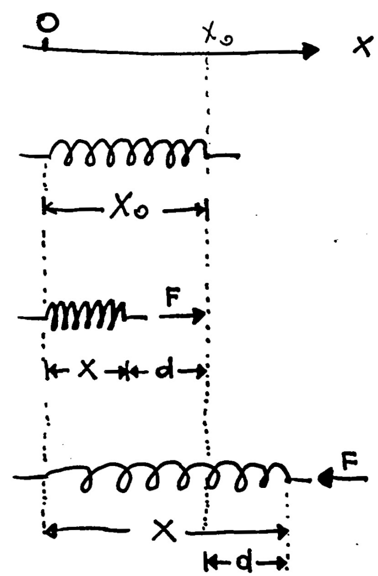
Lez 8 211015

La molla

- LA MOLLA E' UN OGGETTO IDEALE, CHE RISPONDE AD UNA SOLLECITAZIONE ESTERNA CON UNA FORZA DEL TIPO:

$$\vec{F} = -K\,\vec{d} \qquad [\text{legge di Hooke}]$$

- $\vec{d}$ E' LA DEFORMAZIONE DELLA MOLLA (ALLUNGAMENTO O ACCORCIAMENTO RISPETTO AD UNA POSIZIONE DI RIPOSO)
- K E' UNA COSTANTE CARATTERISTICA DI OGNI MOLLA, (COSTANTE ELASTICA) $[K] = [F][S]^{-1}$



molla in posizione di riposo

molla compressa

$F = -Kd = -K\underbrace{(X - X_0)}_{<0} > 0$

molla allungata

$F = -Kd = -K\underbrace{(X - X_0)}_{>0} < 0$

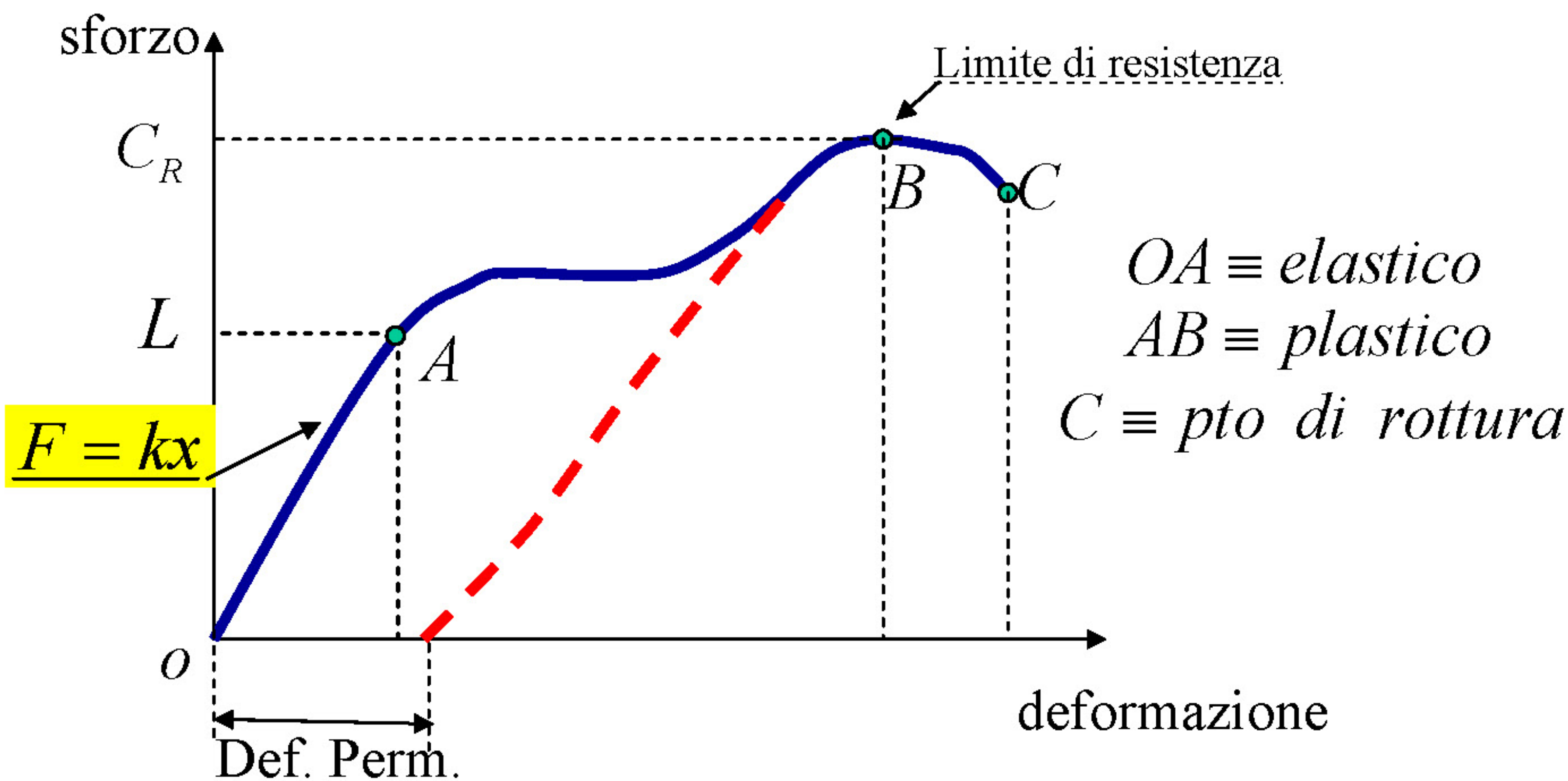
La molla

- Tutti i corpi entro certi limiti si comportano come molle: sottoposti a sollecitazioni, si deformano
- Se la deformazione e' piccola, essi tendono a tornare alla config iniziale, cioe' nasce una forza che si oppone alla deformazione
- Se la deformazione e' piccola, la forza e' proporzionale all deformazione➔ puo' essere rappresentata dalla legge di Hooke

a) vale fino a che *F/S* non supera un valore massimo ***L*** (limite di elasticità A);

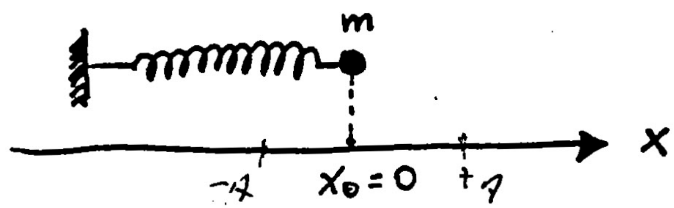
b) il superamento del limite di elasticità induce ***deformazioni permanenti***.

c) aumentando la forza per unità di superficie si raggiunge il ***carico di rottura (C_R)*** : unità (Nm^{-2})



Eq. DEL MOTO DELLA MOLLA

- FORZA DELLA MOLLA: $F = -kx$
- APPLICHIAMO UNA MASSA m AD UN'ESTREMITA' DELLA MOLLA



- SE SPOSTIAMO LA MASSA DALLA SUA POSIZIONE DI RIPOSO E LA LASCIAMO ANDARE, QUESTA COMINCERA' A MUOVERSI
- $F = ma \Rightarrow -kx = ma$

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad \text{[equazione differenziale]}$$

Devo trovare una funzione x(t) che soddisfi l'uguaglianza qualunque sia t→ la soluzione dell'equazione e' una funzione...non un numero!

- E' un'equazione differenziale lineare del II ordine
- Esistono soluzioni generali (ie nello stesso modo in cui esiste la soluzione generale di equ di II grado)
- Il metodo piu' semplice e' trovare delle "funzioni di prova" da sostituire nell'equ.

PROVIANO UNA SOLUZIONE DEL TIPO:

$$X = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

- A = ampiezza massima ; φ = fase iniziale
- ω = pulsazione $\left[\omega = \frac{2\pi}{T}\right]$

- VERIFICHIAMO SE E' UNA SOLUZIONE

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi)$$

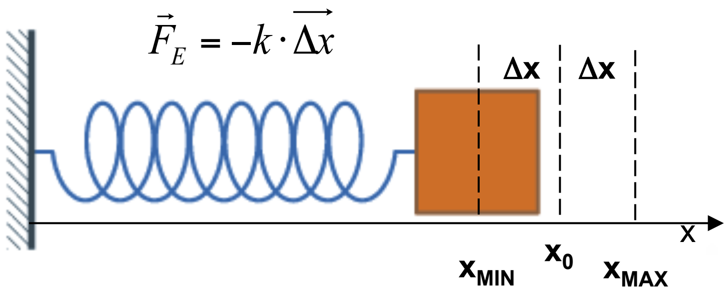
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2X}{dt^2} = -\omega^2 A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

SOSTITUIAMO NELL'EQUAZIONE $-KX = ma$

$$-K \cancel{A} \cancel{\operatorname{sen}}(\omega t + \varphi) = -m\omega^2 \cancel{A} \cancel{\operatorname{sen}}(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{K}{M} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$ [Pulsazione angolare]

L' Oscillatore Armonico



Consideriamo un corpo di massa m fissato ad una molla (con costante elastica k) che può muoversi su un piano senza attrito.
Supponiamo che inizialmente il corpo sia in equilibrio nella posizione x_0.

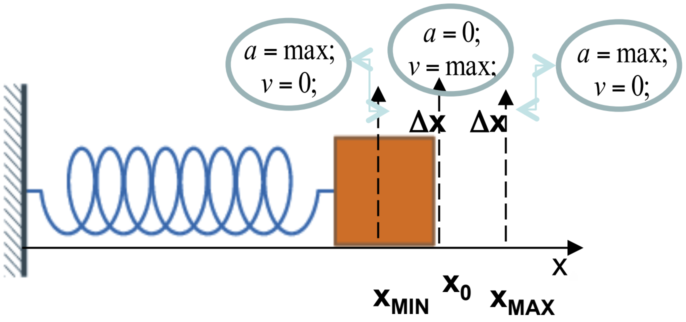
Applicando una forza sul corpo, ad esempio tirandolo sino alla posizione x_{MAX}, provochiamo un allungamento della molla Δx al quale la molla "reagisce" con la **Forza Elastica Di Richiamo**, data dalla legge di Hooke, che si oppone allo spostamento e fa sì che il corpo ritorni verso la posizione di equilibrio.

Il corpo, quindi, "ripassa" per la posizione di equilibrio con una **velocità non nulla**, diretta in verso opposto allo spostamento iniziale, supera la posizione di equilibrio (x_0) e si porta sino alla posizione x_{MIN}.

A questo punto la molla reagisce alla compressione ancora con la forza elastica, diretta nel verso opposto rispetto allo spostamento, per cui il moto cambia verso ed il corpo tende di nuovo alla posizione di equilibrio, superandolo e portandosi sino alla posizione x_{MAX}.

In sintesi il corpo inizia ad oscillare indefinitamente fra le due posizioni, realizzando così un **MOTO OSCILLATORIO ARMONICO** di ampiezza $2\Delta x$ e periodo T.

L'Oscillatore Armonico



Accelerazione: Quando il corpo si trova agli estremi dell'intervallo di oscillazione (x_{MAX} o x_{MIN}), lo spostamento è massimo quindi, per la legge di Hooke, la forza elastica è massima e di conseguenza lo è anche l'accelerazione; mentre nella posizione di equilibrio (x_0) l'accelerazione è nulla in quanto è nullo lo spostamento .

Velocità: La velocità è nulla agli estremi dell'intervallo di oscillazione, dove si inverte il moto, ed è massima nel punto centrale di equilibrio.

$$\begin{cases} a = \frac{F}{m} = \frac{-ks}{m} = -\frac{k}{m}s; \\ a = -\omega^2 s; \end{cases} \Rightarrow -\frac{k}{m}s = -\omega^2 s \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

PULSAZIONE OSCILLATORE ARMONICO

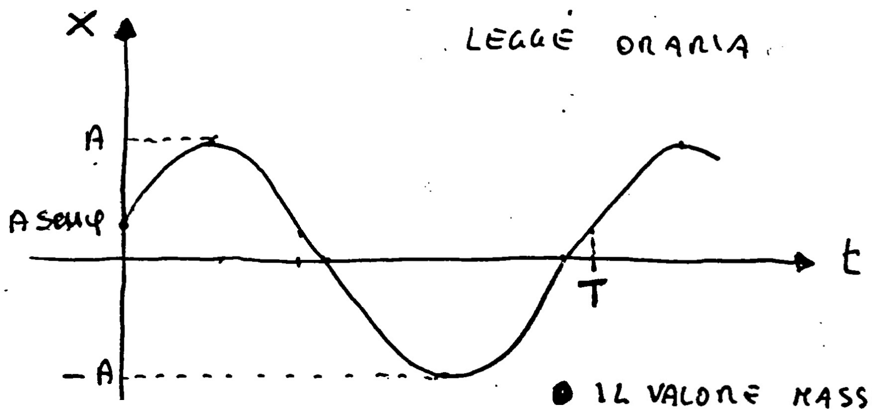
Poiché l'accelerazione è direttamente proporzionale allo spostamento dalla posizione di equilibrio ed è diretta nel verso opposto, possiamo dedurre che il moto di un oscillatore è un ***MOTO ARMONICO, cioe' periodico***.

$$\begin{cases} \omega = \sqrt{k/m}; \\ \omega = 2\pi/T; \\ f = 1/T; \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \\ f &= \frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}}$$

PERIODO E FREQUENZA OSCILLATORE ARMONICO

UN MOTO DEL TIPO $X = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$ SI CHIAMA MOTO ARMONICO

Moto armonico



- IL VALORE MASSIMO DELLA FUNZIONE SI HA QUANDO

  $\operatorname{SEN}(\omega t + \varphi) = 1$, OVVERO $(\omega t + \varphi) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n = 0, 1, 2,$

- IL MINIMO SI HA PER

  $\operatorname{SEN}(\omega t + \varphi) = -1$, OVVERO $(\omega t + \varphi) = \frac{3}{2}\pi + 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

- LA FUNZIONE VALE ZERO QUANDO

  $\operatorname{SEN}(\omega t + \varphi) = 0$, OVVERO $(\omega t + \varphi) = 0 + n\pi$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

- IL PERIODO T DELLA FUNZIONE VALE

  $$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

- NEL CASO DELLA MOLLA $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

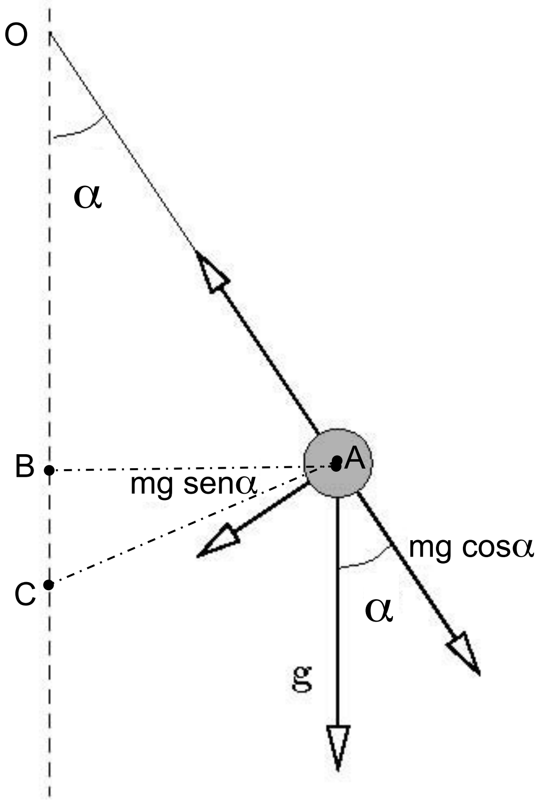
- LE DUE COSTANTI A e φ CHE COMPAIONO NELLA LEGGE ORARIA DIPENDONO DALLE CONDIZIONI INIZIALI

NB: qualunque sistema fisico segue una traiettoria del genere ovvero soddisfa un'equazione di tipo $d^2x/dt^2 = -\omega^2 x$ si chiama OSCILLATORE ARMONICO

ω^2 dipende dalle proprieta' del sistema-nel caso della molla $\omega = k/m$

Il Pendolo Semplice

- 1/3



Consideriamo un corpo di massa m sospeso mediante un filo inestensibile di lunghezza l.
Supponiamo che inizialmente il corpo sia in equilibrio, cioè che la massa si trovi in posizione verticale, in modo che la forza peso sia completamente equilibrata dalla reazione vincolare del filo.
Se spostiamo di poco la massa dalla posizione verticale le forze non sono più equilibrate ed il corpo inizia ad oscillare intorno alla posizione di equilibrio.
Considerando piccole oscillazioni otteniamo:

$$\overline{OA} = l; \quad \overline{AC} = s; \quad \overline{AB} \approx \overline{AC};$$

$$\overline{AB} = \overline{OA} \cdot sen\alpha \quad \Rightarrow \quad \overline{AC} = \overline{OA} \cdot sen\alpha \quad \Rightarrow \quad s = l \cdot sen\alpha$$

Da cui segue che: $a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{-mgsen\alpha}{m} \approx -g\dfrac{s}{l};$

Poiché l'accelerazione è direttamente proporzionale allo spostamento dalla posizione di equilibrio ed è diretta nel verso opposto, possiamo dedurre che il moto di un pendolo semplice è un **MOTO ARMONICO**.

Il Pendolo Semplice

$$\begin{cases} a = \dfrac{F}{m} \approx -g\dfrac{s}{l}; \\ a = -\omega^2 s; \end{cases} \Rightarrow \quad -g\frac{s}{l} = -\omega^2 s \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

PULSAZIONE PENDOLO SEMPLICE

$$\begin{cases} \omega = \sqrt{g/l}; \\ \omega = 2\pi/T; \\ f = 1/T; \end{cases} \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{c} T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} \\ f = \dfrac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\dfrac{g}{l}} \end{array}}$$

PERIODO E FREQUENZA PENDOLO SEMPLICE

<u>**Osservazioni**</u>

- il periodo del pendolo, per piccole oscillazioni, non dipende dall'ampiezza dell'oscillazione. Questa legge, detta **legge dell'isocronismo delle oscillazioni**, è dovuta a Galileo;
- il periodo non dipende dalla massa appesa al pendolo;
- il periodo di un pendolo dipende dal pianeta su cui esso oscilla.

Il Pendolo Semplice

DETERMINAZIONE DEL VALORE DELL'ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ

Dalla relazione che esprime il periodo di oscillazione del pendolo semplice possiamo dedurre un metodo per determinare il valore dell'accelerazione di gravità:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}}$$

Quindi, effettuando delle misure della lunghezza e del periodo del pendolo possiamo determinare il valore dell'accelerazione.

Il pendolo

- Pesetto legato ad un filo di seta o di nylon
- “Uovo” per il tè con dei pesetti
- Misura del periodo e della sua costanza
- Dipendenza del periodo dalla lunghezza del pendolo
- Indipendenza del periodo dal peso
- Altri fenomeni periodici: molle, altalene
- Modi per forzare il moto (risonanza)

Molla verticale

- PRENDIAMO UNA MASSA m APPESA AD UNA MOLLA IN UN PIANO VERTICALE
- LA MASSA È SOGGETTA ALLA FORZA ELASTICA E ALLA FORZA PESO
- NELLA POSIZIONE DI EQUILIBRIO SI HA:

$$mg = kd \Rightarrow d = \frac{mg}{k}$$

- SPOSTIAMO ORA LA MASSA RISPETTO AL PUNTO d

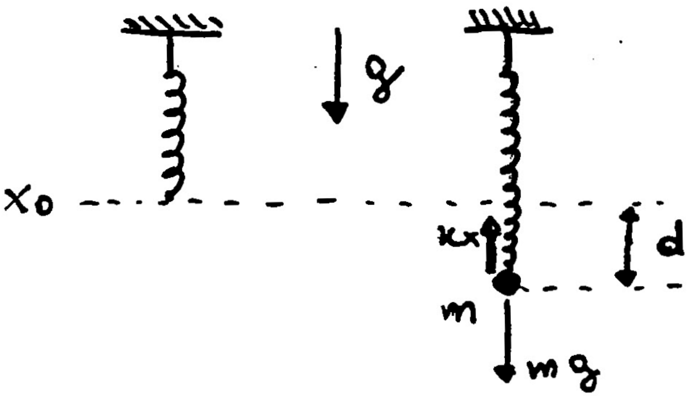
$$x + mg = ma$$

$$: x' + d$$ [cambiamo l'origine del sistema di riferiment

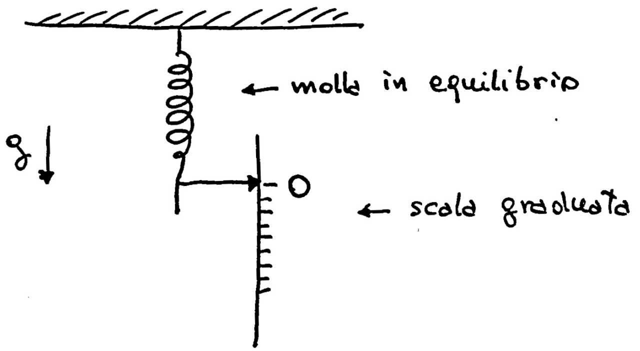
$$x' + d) + mg = ma$$

$$' \underbrace{-kd + mg}_{=0} = ma$$

$$x' = ma$$

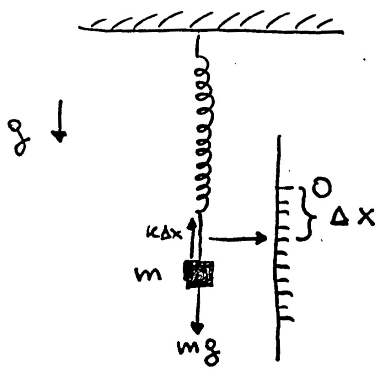


- ABBIAMO UN MOTO ARMONICO INTORNO AL NUOVO PUNTO DI EQUILIBRIO d



Dinamometro

APPENDIAMO UNA MASSA m ALLA MOLLA



- SUL CORPO IN EQUILIBRIO AGISCONO DUE FORZE: LA FORZA PESO E LA FORZA DI RICHIAMO ELASTICA DELLA MOLLA

$$mg - k\Delta x = 0 \quad \Rightarrow \quad mg = k\Delta x$$

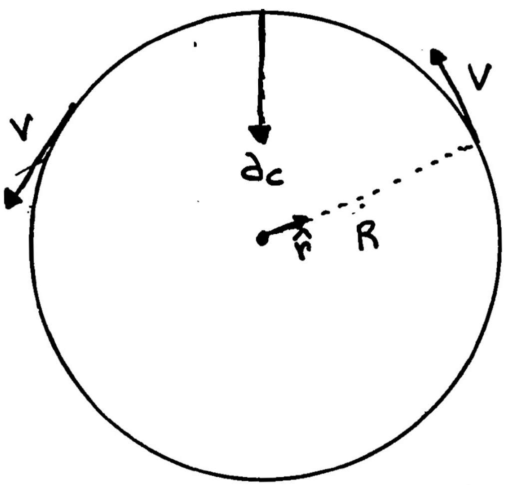
$$\Rightarrow \boxed{m = \frac{k}{g}\Delta x}$$

- LA MASSA m È DIRETTAMENTE PROPORZIONALE ALLO SPOSTAMENTO Δx DELL'AGO.

LA SCALA GRADUATA PUÒ ESSERE TARATA IN KG ANZICHÈ IN m

Moto circolare uniforme

v e' costante in modulo, ma cambia direzione ad ogni istante



- L'ACCELERAZIONE E' DIRETTA VERSO IL CENTRO DELLA CIRCONFERENZA (ACCELERAZIONE CENTRIPETA)

$$\vec{a}_c = -\frac{v^2}{R}\hat{r} = -\omega^2 R\hat{r} \quad \left(\omega = \frac{v}{R} \text{ velocita' angolare}\right)$$

- SE VI E' UN'ACCELERAZIONE DEVE ESISTERE ANCHE UNA FORZA RESPONSABILE DELLA STESSA, CHE SI CHIAMA FORZA CENTRIPETA

$$\boxed{\vec{F}_c = m\vec{a}_c = -m\frac{v^2}{R}\hat{r} = -m\omega^2 R\hat{r}}$$

ESEMPI: SASSO LEGATO AD UNA CORDA ⇒ TENSIONE DELLA CORDA

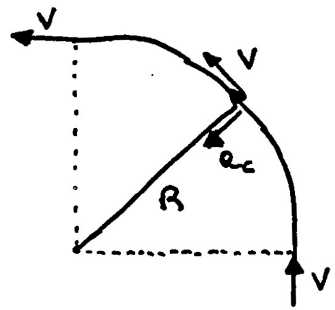
TERRA CHE RUOTA INTORNO AL SOLE ⇒ FORZA GRAVITAZIONALE

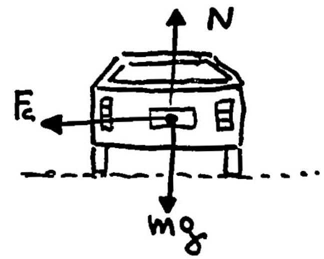
AUTOMOBILE IN CURVA ⇒ ATTRITO DELLE RUOTE CON L'ASFALTO

N.B. OGNI QUAL VOLTA UN CORPO CAMBIA DIREZIONE DELLA VELOCITA' E' PRESENTE UNA FORZA CENTRIPETA PARI A:

$$F = m\frac{v^2}{R} \quad (R = \text{raggio di curvatura della traiettoria})$$

AUTOMOBILE IN CURVA SU STRADA ORIZZONTALE SCABRA





- L'AUTOMOBILE FA UNA CURVA ⇒ ACCELERAZIONE CENTRIPETA ⇒ FORZA CENTRIPET
- LA FORZA CENTRIPETA È FORNITA DALLA FORZA DI ATTRITO STATICO TRA LE RUOTE E L'ASFALTO

$$a_c = m\frac{V^2}{R}$$

$\begin{cases} R = \text{raggio di curvatura della "curva"} \\ V = \text{velocità dell'automobile} \end{cases}$

$$F_c = \mu_s \cdot N = \mu_s \cdot m g \quad (\text{N.B. } \mu_s \text{ è sempre} < 1)$$

$$\Rightarrow F_c = m \cdot a_c \Rightarrow \mu_s \cdot \cancel{m} g = \cancel{m}\frac{V^2}{R}$$

Continua...

- POSSIAMO RICAVARE IL VALORE MASSIMO PER V AL DI LA' DEL QUALE L'ATTRITO NON RIESCE A FORNIRE LA FORZA CENTRIPETA NECESSARIA E L'AUTOMOBILE PARTE PER LA TANGENTE :-c !

$$V_{max}^2 \leq R \cdot \mu_s \cdot g \Rightarrow \boxed{V_{max} \leq \sqrt{\mu_s R g}}$$

- COSA SUCCEDE NEL CASO DI STRADE GHIACCIATE QUANDO $\mu_s \simeq 0$? A COSA SERVONO LE CATENE?