061015 Lez 3
Fis. Sper. e app. Did.

primo livello

• *la grandezza fisica descrive una proprietà*

⇨ *indirettamente accessibile attraverso gli effetti ad essa associati: es.*

la velocità → moto più o meno rapido

la forza → varia il moto, deforma, …

⇨ *che individua una relazione significativa fra grandezze*

Un esempio di “primo livello”: il concetto di velocità

Le caratteristiche che rendono la velocità un concetto utile ed economico:

- *il significato cinematico → diagramma orario*
- *il significato dinamico → che cosa succede se voglio cambiare la velocità . . . .*

Misurare è utile

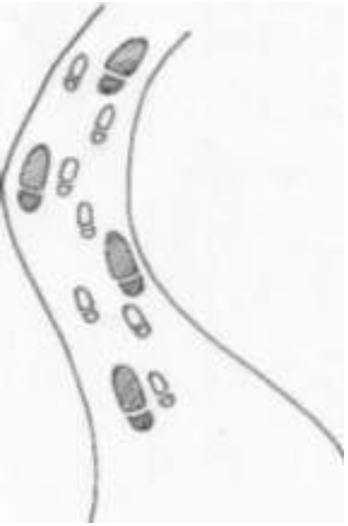
Perché:

- con i numeri il confronto e l'ordinamento di lunghezze sono più facili e precisi
- sui numeri si possono fare operazioni (di somma, sottrazione, moltiplicazione, ecc.)
- con i numeri, è più facile trovare le correlazioni con le altre grandezze fisiche interessate nel fenomeno

Attenzione:

- per confrontare od operare su più misure, è essenziale esprimerle tutte con le stesse unità di misura
- è possibile convertire una misura da una unità all'altra conoscendo il fattore di conversione

Camminare



Seguono attività proposte da *Valentina Montel* (Indire2002)

Gigantino

- *Tanto tempo fa in mezzo al bosco c'era una casa di abitata da una famiglia di giganti, che si volevano molto bene ma spesso fra di loro scoppiavano liti furibonde perché non si capiva chi avesse ragione.*
  Una volta a Papà Gigante venne voglia di mele; il figlio Gigantino si ricordò di averne vista una pianta poco distante da casa, così andò a raccoglierle. Quando tornò il papà esclamò: "Così poche! Dimmi dov'è l'albero che vado a prenderne altre". Gigantino rispose: "Esci dalla porta, cammina dritto davanti a te per 20 passi e troverai l'albero sulla destra". Il papà cominciò a contare "Uno, due, tre ... dieci" ... splash! Era finito nell'acqua di un laghetto! Ritornato a casa, infuriato e bagnato, urlò al figlio: "Non sai neppure contare i passi!". La mamma intervenne: "Basta! Vi dico io chi ha ragione."
- Il racconto di Gigantino è un valido attacco iniziale per introdurre la premisura.
  Il racconto può essere proposto agli alunni, chiedendo loro di aggiungere il finale e di discuterlo: è certamente interessante conoscere le diverse risposte in relazione al contesto (livello di scuola, età …).

Sistemi di unita'

- Sistema scientifico o CGS (cm, g, s)
- Sistema pratico o degli ingegneri (m, kg-peso, s)
- **Sistema Internazionale (SI) (m, kg, s), dal 1971 adottato (quasi) universalmente**

Grandezze fondamentali (SI)

Le grandezze fondamentali sono 7:

♣ Lunghezza	Metro (m)	Cinematica, Meccanica
♣ Tempo	Secondo (s)	Cinematica, Meccanica
♣ Massa	Kilogrammo (kg)	Meccanica
♣ Temperatura	Kelvin (K)	
♣ Corrente elettrica	Ampere (A)	
♣ Quantita' di materia	Mole (mol)	
♣ Intensita' luminosa	Candela (cd)	

Lunghezza

La lunghezza e' la distanza fra gli estremi di un segmento rettilineo

E' ben chiaro come, immaginando di disporre di due segmenti contigui, sia possibile definire l'uguaglianza, la somma o la differenza delle lunghezze con gli stessi criteri validi in geometria.

Il campione oggi scelto e' il metro (m)

Per definire la lunghezza di un segmento, basta contare quante volte il metro campione e' contenuto fra gli estremi del segmento

Grandezze derivate della lunghezza

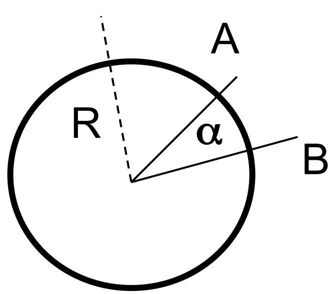
Grandezze derivate della lunghezza sono:
1) superficie. E' facile constatare che le relazioni che legano le aree ai segmenti che le delimitano sono sempre del tipo: somma di termini ciascuno dei quali e', a parte un eventuale coefficiente numerico, il prodotto delle lunghezze dei segmenti che le delimitano, per cui p.es. L'aea del rettangolo di lati a e b e' S = ab; in un cerchio di raggio r, $S=\pi r^2$.
Matematicamente, si dice che l'area e' una funzione omogenea di II grado delle lunghezze da cui dipende. Cio' si esprime simbolicamente mediante un'equazione dimensionale

$$[S] = [L^2]$$

cioe' l'area di una superficie, nel sistema che usa la lunghezza come grandezza fondamentale, ha le dimensioni di una lunghezza al quadrato → unita' m^2
2) Volumi. Considerazioni analoghe portano per i volumi all'equazione dimensionale $[V] = [L^3]$ → unita' m^3
3) angoli. L'angolo α fra 2 rette uscenti da P e' definito come α = AB/R, AB= lunghezza dell'arco di cerchio fra A e B →

$$[\alpha] = [L]/[L] = [L^0] = 1$$

L'angolo e' una quantita' adimensionata, ha lo stesso valore qualunque sia l'unita' di misura scelta



Tempo

Cos'e' il tempo? E' una grandezza fisica che permette di distinguere un prima e un dopo rispetto all'accadere di un fenomeno o evento.
Il tempo serve a descrivere il cambiamento

P. es. se si osserva un oggetto in moto, si stabilisce un legame soggettivo fra le posizioni assunte dal corpo da una parte e la successione delle percezioni e degli stati psicologici dell'osservatore, che prendiamo come indice del variare del tempo.

Nella meccanica di Newton, il tempo scorre alla stessa velocita' per tutti gli osservatori, ovvero esiste un tempo universale, comune ai diversi osservatori

NB: questa e' un'assunzione valida se il moto in oggetto avviene a velocita' molto piccole rispetto alla velocita' della luce. In caso contrario, occorre modificare le leggi fisiche e introdurre la relativita' di Einstein.

Tempo

Per definire il tempo come grandezza fisica, osserviamo che in natura esistono moti in cui il corpo torna successivamente e ripetutamente nelle stessa posizione nelle stesse condizioni di moto (moti periodici).

Possiamo allora definire un intervallo di tempo "di riferimento", prendendo la durata fra due successivi ritorni alla stessa posizione (il periodo), p. Es. si pensi a un pendolo).

Se due osservatori usano lo stesso pendolo nelle stesse condizioni, trovano che la durata e' la stessa →il periodo e' un modo oggettivo di misurare la durata.

Se prendiamo un moto periodico di piccolo periodo, possiamo arrivare alla definizione di uguaglianza di 2 intervalli e di somma, contando per ciascun intervallo il numero di volte che il moto periodico preso come paragone si ripete.

Basta ora fissare l'unita' di misura campione, usando moti periodici, che avvengono in natura, che diano affidamento di stabilita' e osservabili con accuratezza

⇒ TEMPO

i) prima del 1960 : Giorno Solare Medi

sec = $\frac{1}{60} \cdot \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{86400}$ "

ii) sec = 9 192 631 770 vibrazioni del Cs^{133}

Usare i numeri: Notazione scientifica

Per esprimere numeri molto grandi o molto piccoli si usa la cosidetta **notazione scientifica**, che utilizza le potenze di 10.
Per es. **3.560.000.000 = 3.56×10^9** e **0.000 000 492 = 4.92×10^{-7}**

TABELLA 1.4 Alcuni prefissi per le potenze di dieci

Potenza	Prefisso	Abbrev.
10^{-18}	atto	a
10^{-15}	femto	f
10^{-12}	pico	p
10^{-9}	nano	n
10^{-6}	micro	μ
10^{-3}	milli	m
10^{-2}	centi	c
10^{-1}	deci	d
10^{3}	chilo	k
10^{6}	mega	M
10^{9}	giga	G
10^{12}	tera	T
10^{15}	peta	P
10^{18}	exa	E

TABELLA 1.5 Densità di varie sostanze

Sostanza	Densità ρ (kg/m^3)
Platino	21.45×10^3
Oro	19.3×10^3
Uranio	18.7×10^3
Piombo	11.3×10^3
Rame	8.93×10^3
Ferro	7.86×10^3
Alluminio	2.70×10^3
Magnesio	1.75×10^3
Acqua	1.00×10^3
Aria	0.0012×10^3

TABELLA 1.1 Valori approssimati di alcune lunghezze misurate

	Lunghezza (m)
Distanza dalla Terra alla più lontana quasar nota	1.4×10^{26}
Distanza dalla Terra alla più lontana galassia normale nota	4×10^{25}
Distanza dalla Terra alla più vicina grande galassia (M 31 in Andromeda)	2×10^{22}
Distanza dal Sole alla stella più vicina (Proxima Centauri)	4×10^{16}
Un anno-luce	9.46×10^{15}
Raggio orbitale medio della Terra	1.5×10^{11}
Distanza media Terra-Luna	3.8×10^{8}
Distanza dall'equatore al polo nord	1×10^{7}
Raggio medio della Terra	6.4×10^{6}
Tipica altezza di un satellite terrestre orbitante	2×10^{5}
Lunghezza di un campo di calcio	9.1×10^{1}
Lunghezza di una mosca domestica	5×10^{-3}
Dimensione della più piccola particella di polvere	1×10^{-4}
Dimensione delle cellule della maggior parte degli organismi viventi	1×10^{-5}
Diametro di un atomo di idrogeno	1×10^{-10}
Diametro di un nucleo di uranio	1.4×10^{-14}
Diametro di un protone	1×10^{-15}

TABELLA 1.3 Valori approssimati di alcuni intervalli di tempo

	Intervallo (s)
Età dell'Universo	5×10^{17}
Età della Terra	1.3×10^{17}
Tempo dalla caduta dell'Impero Romano	5×10^{12}
Età media di uno studente universitario	6.3×10^{8}
Un anno	3.2×10^{7}
Un giorno (tempo per una rivoluzione della Terra attorno al suo asse)	8.6×10^{4}
Tempo fra normali battiti cardiaci consecutivi	8×10^{-1}
Periodo[a] di un'onda sonora nell'udibile	1×10^{-3}
Periodo di una tipica onda radio	1×10^{-6}
Periodo di vibrazione di un atomo in un solido	1×10^{-13}
Periodo di un'onda luminosa nel visibile	2×10^{-15}
Durata di una collisione nucleare	1×10^{-22}
Tempo richiesto dalla luce per attraversare un protone	3.3×10^{-24}

[a] Il periodo è definito come l'intervallo di tempo di una vibrazione completa.

TABELLA 1.2 Masse di alcuni corpi (valori approssimati)

	Massa (kg)
Universo	10^{52}
Via Lattea (galassia)	10^{42}
Sole	2×10^{30}
Terra	6×10^{24}
Luna	7×10^{22}
Squalo	3×10^{2}
Uomo	7×10^{1}
Rana	1×10^{-1}
Zanzara	1×10^{-5}
Batterio	1×10^{-15}
Atomo di idrogeno	1.67×10^{-27}
Elettrone	9.11×10^{-31}

Ordine di grandezza di due numeri

- La fisica, essendo una scienza sperimentale, usa valori approssimati, cioe' fornisce stime del valore di una certa grandezza.

- L'ordine di grandezza di un numero e' dato dalla sua potenza di 10 quando il numero e' espresso in notazione scientifica

- Per esempio se $A=2.3\times10^4$ e $B=4.6\times10^4$, l'ordine di grandezza di entrambi i numeri e' 10^4

Calcolo degli ordini di grandezza

- Valutare l'ordine di grandezza della soluzione di un dato problema

Es: $0.0076 \approx 10^{-2}$

$0.0031 \approx 10^{-3}$

$700 \approx 10^{3}$

Problema di Fermi
[ovvero trovare l'ordine di grandezza della risposta]

Esempio: Quanti soldi vengono spesi ogni anno in Italia per comprare benzina per le automobili?

- Numero di italiani ≈ 60 milioni ($6x10^7$)
- $N_{auto} \approx N_{ita}/3$
- Percorrenza media per auto D ≈ $1.5x10^4$ km/anno
- Consumo medio per auto C = 10 km/l

➔ kilometri percorsi $N_{km} = N_{auto} x\ D = 20x10^6 \ x\ 1.5x10^4$ km/anno = $30x10^{10}$ km/anno

➔ litri di benzina $L = N_{km}/C = 30x10^{10}$ km / 10 km/l = $30x10^9$ l

➔ costo benzina B=1.4 euro/l

➔ soldi spesi S = L x B = $3x10^9$ l x 1.4 euro/l = $42x10^9$ euro

➔ soldi spesi per auto S/N_{auto} = $42x\ 10^9$ euro / $20x10^6$ = $2.1x10^3$ euro

Analisi dimensionale

◇ IN QUALSIASI LEGGE FISICA COMPAIONO QUANTITA' ADIMENSIONALI (NUMERI) E QUANTITA' DIMENSIONALI.

Ex : Area di un cerchio $= \pi R^2$

$$[A] = [L]^2$$

LA SUPERFICIE HA QUINDI LE DIMENSIONI DI UNA LUNGHEZZA AL QUADRATO.

Ex : $v = v_0 + a t$ è corretta ?

$$[v] = [L]/[T] = L\,T^{-1}$$

$$[a] = [L]/[T]^2 = L\,T^{-2}$$

$$[a t] = L\,T^{-2}\,T = L\,T^{-1} \quad \text{O.K.}$$

⇒ L'ANALISI DIMENSIONALE PERMETTE DI VERIFICARE SE UNA EQUAZIONE E' SBAGLIATA.

E' CONDIZIONE NECESSARIA MA NON SUFF. :

I FATTORI ADIMENSIONALI POSSONO ESSERE SBAGLIATI !

CONVERSIONE DELLE UNITA' DI MISURA

○ PASSAGGIO DA Km/h a m/s :

$$36\ \mathrm{Km/h} \longrightarrow x\ \mathrm{m/s}$$

$$36\ \frac{1\ \mathrm{Km} = 1000\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{h} = 3600\ \mathrm{s}} = 36 \cdot \frac{1000}{3600}\ \mathrm{m/s}$$

$$= 36 \cdot \underbrace{\frac{1}{3.6}}_{\text{FATTORE DI CONVERSIONE}}\ \mathrm{m/s} = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Le unita' di misura devono essere sempre omogenee. In caso contrario occorre CONVERTIRE le unita' di misura

Es: un'auto si muove a 60 km/h, quanti metri percorre in 10 minuti?

Cenni di teoria degli errori

Misura: processo che associa ad ogni grandezza fisica uno (scalare) o piu` (vettore) numeri che la quantifica rispetto ad una opportuna unita` di misura.

Procedimento **empirico** soggetto a limitazioni di varia natura che ne determinano la precisionep

Gli errori di misura sono inevitabili

Una misura non ha nessun significato se non viene accompagnata da una stima dell'errore associato

Ad es. Se uso una riga millimetrata ho una sensibilita` di 1 mm: se per confronto vedo che la larghezza di un foglio e` compresa tra le graduazioni 215 e 216 mm posso scrivere:

$$\mathbf{0.215\ m \leq l \leq 0.216\ m} \quad \textbf{ovvero} \quad \mathbf{l = (0.2155 \pm 0.0005)\ m}$$

come vedremo fra poco

Cenni di teoria degli errori

Il risultato di una misura sperimentale su una grandezza fisica è sempre affetto da un'incertezza, per quanto accurata possa essere la misura.

Non conosciamo il valore vero della grandezza da misurare

La differenza tra il valore autentico della grandezza in esame e il suo valore misurato è chiamato *errore* della misura

Indicato con x^* il valore autentico e con x quello misurato, si ottiene quindi:

$$Err = \Delta x = x - x^*$$

Il valore "vero" della grandezza pone un problema di definizione: quale e' il valore vero?
A volte non e' definito chiaramente, ma NON E' IMPORTANTE!
La domanda giusta e': quanto bene dobbiamo "stimare" il valore vero per ottenere risposte soddisfacenti? Es: porta e luce della porta. Per avere una porta che si chiuda bene e non lasci spifferi devo stimare con una misura le dimensioni affinche' ci sia p. es. 1 mm di tolleranza, ma se la voglio stagna devo stimare le dimensioni in modo tale da lasciare 0.0001 mm tra la porta e la cornice.

E’ evidente che se conoscessimo l’errore esatto della misura, dalla formula precedente si ricaverebbe immediatamente il valore autentico!

Il valore vero e l’errore sono ignoti, ma possiamo fornirne una stima

La questione è: **Come fornire questa stima (e fare in modo che sia attendibile)?**

Sperimentalmente si osserva che la ripetizione della misura di una grandezza fisica, nelle medesime condizioni sperimentali, conduce spesso a risultati diversi

Ad es.: misura della lunghezza di un tavolo con metro a nastro.

Risultati:

L=110.5 cm
L=110.6 cm
L=110.4 cm
L=110.4 cm
L=110.5 cm
L=110.3 cm
………….

Cause della variabilita’

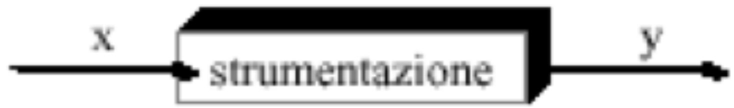
- Nella misura di parametri come la forza o la velocita’, alcune cause di variabilità dipendono dal soggetto, che esegue la prova ogni volta in modo leggermente diverso.
- Altre cause possono dipendere da:
  - perturbazioni ambientali (variazioni di temperatura, pressione, umidità)
  - limitazioni tecnologiche della strumentazione (imperfezioni costruttive, instabilità della taratura, ecc.);
  - imperizia dell’operatore.

Teoria degli errori

- La **"teoria degli error**i" aiuta a valutare e minimizzare gli errori nei procedimenti di misura.

- Problemi di questo tipo possono presentare aspetti e livelli di complicazione diversissimi, e quindi richiedere l'uso delle tecniche più svariate.

Definizione di errore



Errore Assoluto: differenza tra valore misurato y e valore del misurando x

$$y - x = E_x = dx$$

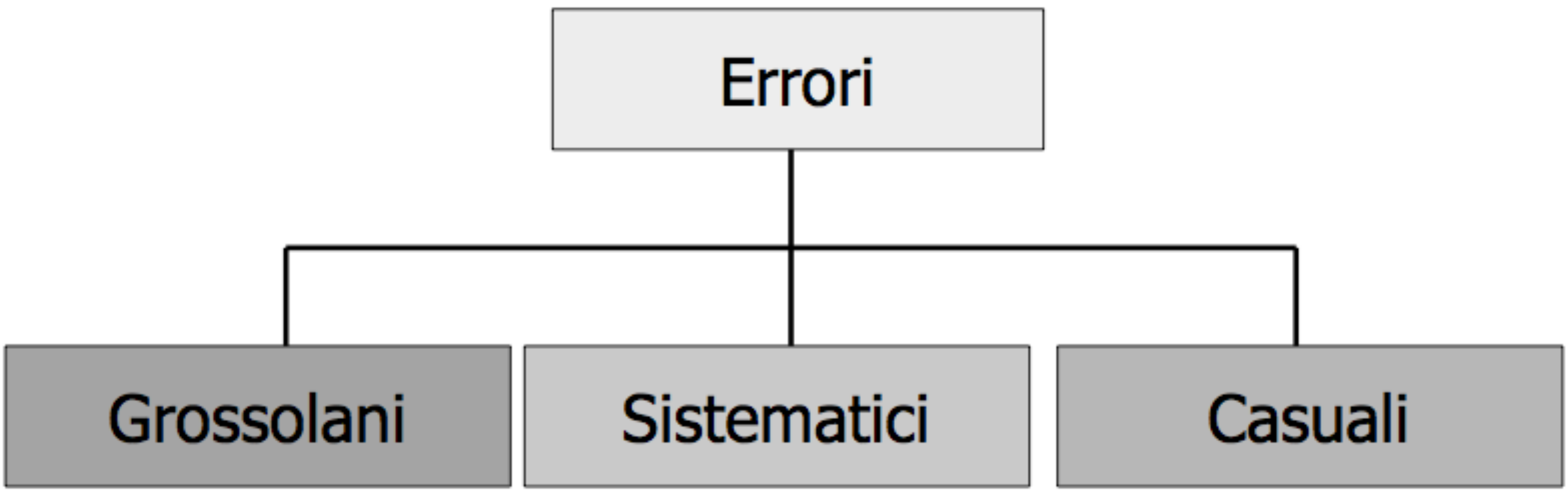
Errore Relativo: rapporto tra l'errore assoluto E_x ed il misurando x

$$e_x = \frac{y-x}{x} = \frac{Ex}{x} = \frac{dx}{x}$$

Errore Percentuale: errore relativo e_x moltiplicato per 100

$$e_x * 100 = \frac{dx}{x} * 100$$

Classificazione degli errori



Errori grossolani

- Possono essere causati da letture errate del visualizzatore, dall'uso improprio degli strumenti, da trascrizioni sbagliate del risultato o da imprecisioni nell'elaborazione numerica o nella rappresentazione
- Sono spesso addebitabili alla distrazione o all'inesperienza
- Possono essere eliminati conducendo le misure con cura ed attenzione

Errori sistematici

- Si presentano sempre con lo stesso segno e con la stessa ampiezza, ripetendo la misura con gli stessi strumenti
- Le cause possono essere imputate sia agli strumenti che ad interferenze dovute all'ambiente.
- Si possono limitare se si conosce una stima attendibile della quantità da misurare e la relazione che lega il valore del misurando al valore della misura.

Errori casuali

- Sono dovuti a variazioni casuali ed imprevedibili delle condizioni in cui si effettua la misura
- Non possono mai essere completamente eliminati, ma il loro effetto si può ridurre usando le tecniche della statistica (ad esempio ripetendo più volte la misura ed effettuando la media dei valori ottenuti

- Per eseguire correttamente una misura è necessario:
  - conoscere l'unità di misura;
  - conoscere le proprietà della variabile da misurare;
  - che l'operatore abbia l'esperienza necessaria per effettuare la misura, per scegliere la strumentazione più idonea e per leggere ed interpretare la lettura della misura;
  - determinare correttamente l'incertezza di misura e le cifresignificative con cui esprimere il risultato.

Torniamo alla misura del tavolo:

E' evidente che se conoscessimo l'errore esatto della misura, dalla formula precedente si ricaverebbe immediatamente il valore autentico!

Il valore vero e l'errore sono ignoti, ma possiamo fornirne una stima

La questione è: **Come fornire questa stima (e fare in modo che sia attendibile)?**

Sperimentalmente si osserva che la ripetizione della misura di una grandezza fisica, nelle medesime condizioni sperimentali, conduce spesso a risultati diversi

Ad es.: misura della lunghezza di un tavolo con metro a nastro.

Risultati:

L=110.5 cm
L=110.6 cm
L=110.4 cm
L=110.4 cm
L=110.5 cm
L=110.3 cm
…………

I risultati differenti suggeriscono che le condizioni di misura non sono esattamente le stesse, entro la precisione del nostro strumento (il metro a nastro).
Ad es. potremmo non avere steso bene il metro, oppure non averlo allineato accuratamente al lato del tavolo fra una misura e l'altra.

$$\left.\begin{array}{l} L=110.5 \text{ cm} \\ \mathbf{L=110.6 \text{ cm}} \\ L=110.4 \text{ cm} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ L=110.4 \text{ cm} \\ L=110.5 \text{ cm} \\ \mathbf{L=110.3 \text{ cm}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad N= 100$$

Se ripetessimo molte volte questa misurazione, potremmo verificare, ad esempio, che il valore minimo misurato è 110.3 cm, ed il valore massimo misurato è 110.6 cm. Potremmo quindi aspettarci ragionevolmente che il valore autentico cada nell'intervallo [110.3, 110.6]. La misura migliore sarebbe probabilmente nel mezzo: 110.45 con errore massimo 0.15 (in eccesso o difetto)

In forma compatta, possiamo scrivere la nostra misura nella forma

110.45 ± 0.15 cm

L'incertezza che deriva da fluttuazioni non prevedibili delle condizioni di misura è chiamata *errore casuale*.
L'errore casuale cambia da misura a misura quando la misura viene ripetuta.

Supponiamo ora che il nostro metro a nastro si sia "ristretto" (un cattivo lavaggio?): esso risulterà scalibrato, e per una lunghezza reale di un metro indicherà (supponiamo) 110 cm. Tutte le misure ripetute che faremo saranno comunque in eccesso di ca. 10 cm rispetto alla lunghezza del tavolo. Questo errore si ripeterà sempre uguale ad ogni misura, e non vi è quindi modo di scovarlo da misure ripetute. Questo insidioso errore è detto *errore sistematico*

Importanza di metodi di misura molto diversi di una stessa grandezza!!

Cosa abbiamo imparato: l'operazione di misura

" Io affermo che quando voi potete misurare ed esprimere in numeri ciò di cui state parlando, solo allora potete dire di conoscere effettivamente qualcosa . Ma quando non vi e' possibile esprimere numericamente l'oggetto della vostra indagine, la vostra conoscenza e' insoddisfacente, e scarso e' il vostro progresso dal punto di vista scientifico. "

Lord Kelvin

L' operazione di misura si articola in :

1) individuare nell'oggetto la caratteristica che si vuol misurare

2) scegliere un altro oggetto con la stessa caratteristica da usare come campione

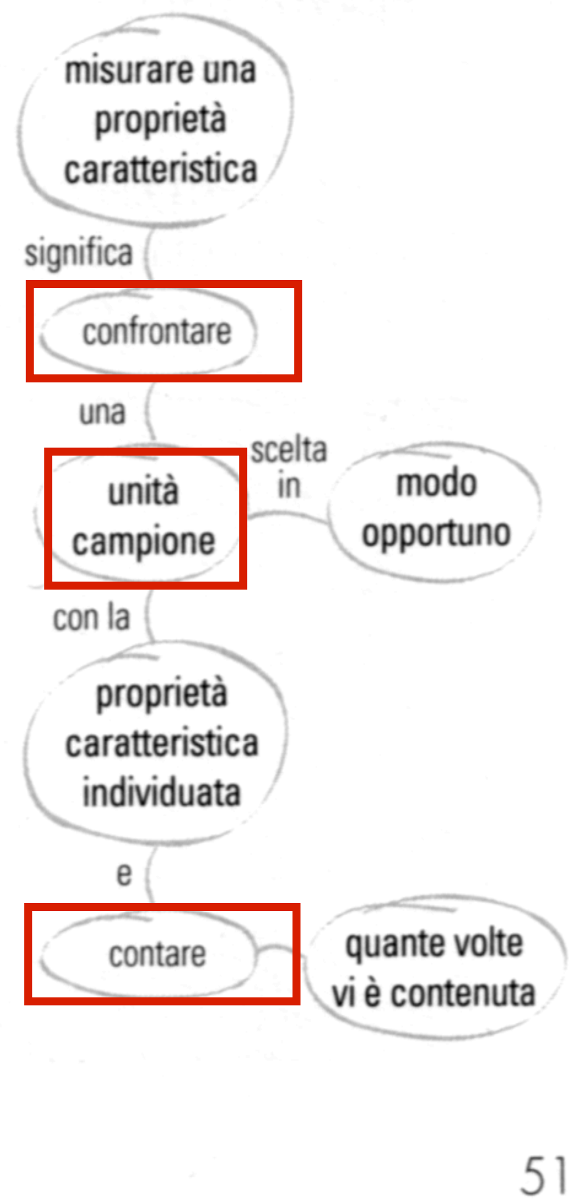
3) confrontare l'unità campione con l'oggetto e contare quante volte vi è contenuta.

Le grandezze fisiche

!!! Def Chiamiamo **GRANDEZZE FISICHE** le proprietà caratteristiche di un oggetto o di un fenomeno per le quali e' possibile elaborare un procedimento di misura. !!!

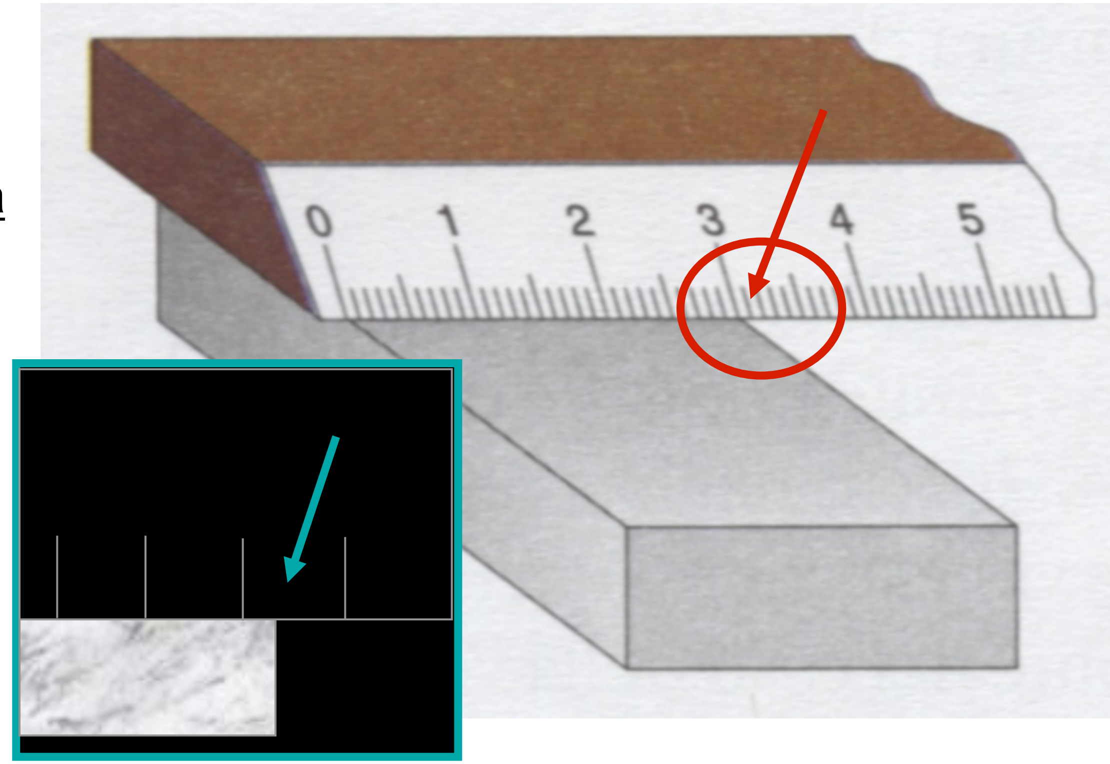
Procedendo secondo le tre fasi indicate prima, si trova il valore di una grandezza fisica presa in esame, in modo operativo.

Una misura e' caratterizzata da:
un **numero**, un' **unità di misura**, e un **indice d'incertezza** .



Incertezza nella misura: Scelta dello strumento idoneo alla misura

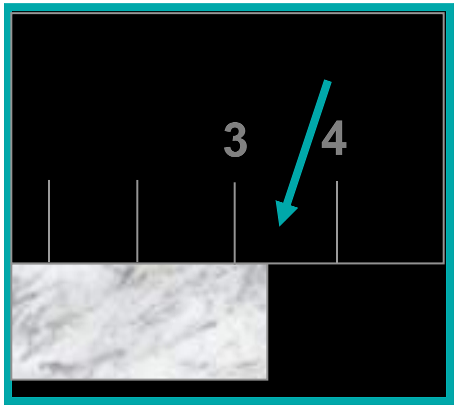
Per misurare una grandezza in pratica scegliamo lo strumento con l'unità di misura più adatta e poi leggiamo direttamente sullo strumento quante volte è contenuta.



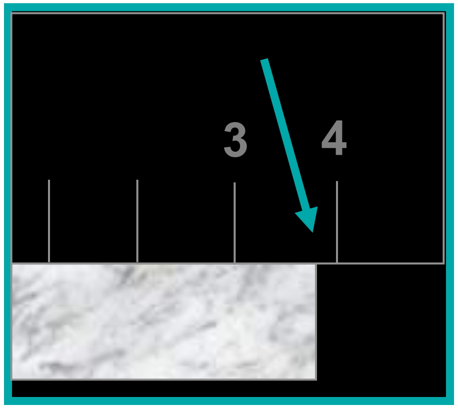
Se la grandezza da misurare non è un numero intero di volte l'unità (o un suo sottomultiplo) il valore della misura è dato come **approssimazione**, alla tacca più vicina.

Incertezza nella misura: approssimazione 1

Ma come facciamo ad approssimare?



In difetto: segno 3mm



In eccesso: segno 4mm

Scegliamo come valore quello della tacca più vicina, IN ECCESSO O IN DIFETTO, se si tratta di una misura nella quale leggiamo direttamente il valore.

Incertezza nella misura: approssimazione 2

Se la misura ci viene fornita da un display luminoso oppure è stata ottenuta da un calcolo, per approssimare dobbiamo:

- decidere quante cifre possiamo tenere (cifre significative)

Esempio1: 15,423 mm e supponiamo di decidere di troncare le cifre dopo il 4

- se la <u>prima cifra da togliere</u> è minore di 5 (0,1,2,3,4) si scrive lo stesso numero troncando le cifre successive

Esempio1: 15,423 mm diventa 15,4 mm perché 2 è minore di 5

- se la <u>prima cifra da togliere</u> è uguale o maggiore di 5 (5,6,7,8,9) si scrive l'ultima cifra aumentata di uno

Esempio2: 15,473 mm diventa 15,5 mm perché 7 è maggiore di 5

Incertezza nella misura: approssimazione 3

Esempio1: 3,777777 kg e si deve troncare alla 2^a cifra dopo la virgola

Diventa 3,78 kg

Esempio2: 4,545 m, alla 2^a cifra dopo la virgola

Diventa 4,55 m

Esempio3: 4,3412 km, alla 3^a cifra dopo la virgola

Diventa 4,341 km

Esempio4: 0,998 s, alla 1^a cifra dopo la virgola

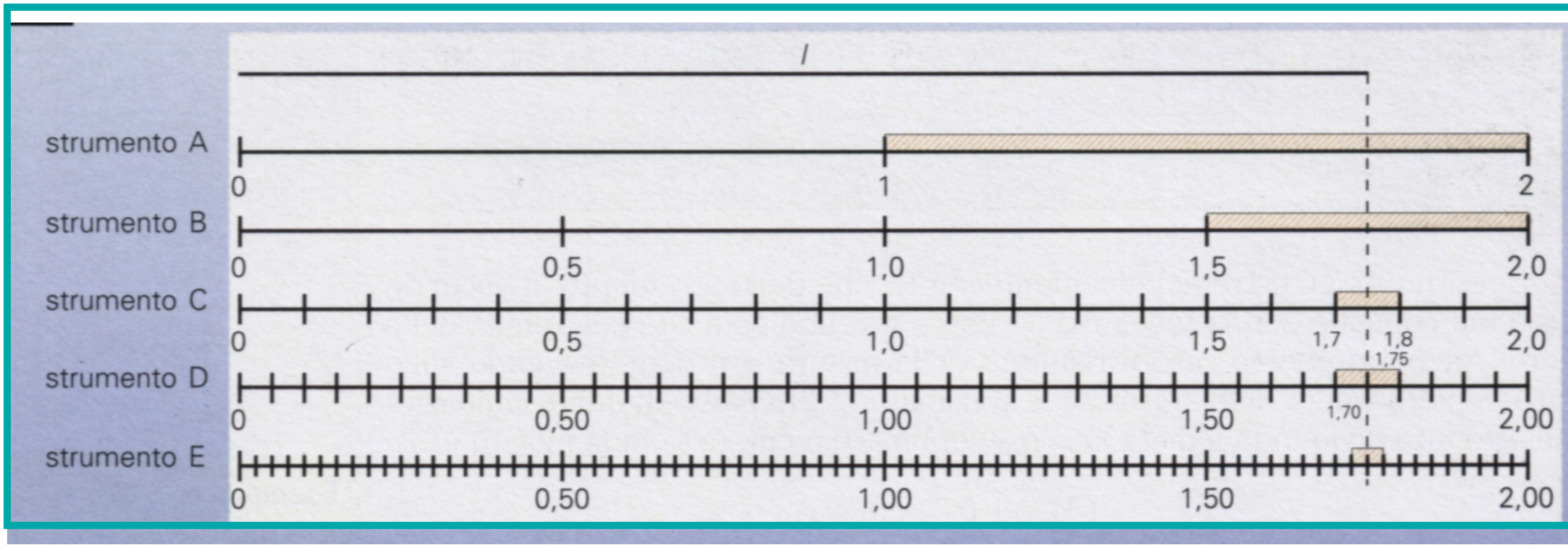
Diventa 1,0 s

Ma come faccio a sapere quante cifre devo tenere? Per saperlo devo tornare allo strumento.

Incertezza nella misura: Sensibilità

Se la distanza fra una tacca e quella più vicina rappresenta un valore grande, quando approssimiamo introduciamo una correzione grande. Più è piccola la distanza fra le tacche minore sarà la correzione al valore effettivamente letto.

Diventa allora fondamentale la distanza fra le tacche che è una caratteristica dello strumento.



Def **La sensibilità** e' il più piccolo valore che può essere letto sulla scala di uno strumento di misura.

Incertezza nella misura: Portata

Un’altra importante caratteristica dello strumento di misura è la quantità massima che quello strumento può leggere, che troviamo solitamente a *fondo scala,* cioè all’ultima tacca presente sulla scala.

Def **La portata** è il massimo valore che può essere letto sulla scala di uno strumento di misura.

Misure dirette e indirette

Facciamo misure in due modi:

misura diretta, quella che si esegue direttamente, facendo una lettura sullo strumento

misura indiretta, quella che si ottiene attraverso operazioni matematiche tra le misure di due o più grandezze misurate direttamente.

Misure dirette e indirette

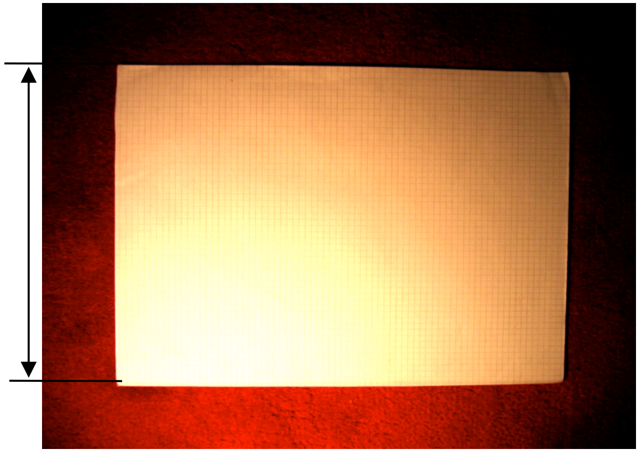
Se per esempio misuro il lato (a) di un CD e scrivo il suo valore (per esempio 12,5 cm) ho ottenuto una misura diretta.

Se poi misuro l'altro lato (b)del CD (per esempio 14,0 cm) e trovo l'area calcolando A=lato (a) x lato (b) il valore ottenuto A= 175,0 cm^2 è una misura indiretta perché ottenuta attraverso un calcolo.

Le cifre significative 1

Ora che sappiamo cos'è una misura indiretta, eseguiamone una.

Misuriamo un lato di un foglio a quadretti: la lunghezza vale 21,7 cm. Nel lato si contano 25 quadretti.



$$\text{Lquadretto} = \frac{21{,}7\ \text{cm}}{25} = 0{,}868 cm$$

Se guardiamo questo risultato ci accorgiamo subito che non ha senso: infatti non è possibile conoscere il lato del quadretto con una precisione superiore rispetto alla misura del lato del foglio!!! Infatti conosciamo il lato del foglio fino al mm, mentre la lunghezza del quadretto fino al centesimo di millimetro.

Come può un calcolo successivo migliorare la misura eseguita all'inizio?

Le cifre significative 2

E' chiaro che si rende necessario approssimare. In che modo? Considerando le cifre significative.

Def Chiamiamo cifre significative le cifre certe (ossia assegnate dallo strumento) di una misura e la prima incerta.

cifra incerta

Le cifre certe

21,7 cm

7 è la cifra incerta perché il bordo del foglio potrebbe trovarsi al di là della metà della distanza fra le due tacche entro cui cade. Ci stiamo muovendo al limite della sensibilità dello strumento.

Le cifre significative 3

<u>In pratica</u> per contare le cifre significative si parte da destra e si procede verso sinistra fino a quando non inizia una fila ininterrotta di zero (0). Le cifre zero in coda vanno contate.

Esempi 21,7 cm ha 3 cifre significative

0,10234s ha 5 cifre significative

12,4300 m ha 6 cifre significative

18,09 kg ha 4 cifre significative

Le cifre dopo la virgola <u>non sono</u> le cifre significative!
Ma sono importanti per le scelte di approssimazione.

Le cifre significative 4

Ora rispondiamo alla domanda: come facciamo quando compiamo delle operazioni con le misure.

1) Divisione o moltiplicazione per un numero: il risultato deve avere le stesse cifre significative (dopo la virgola) della misura

$$\text{Lquadretto} = \frac{21{,}7\ \text{cm}}{25} = 0{,}868cm \cong 0{,}9cm$$

2) Divisione o moltiplicazione fra due misure: il risultato deve avere le stesse cifre significative della misura meno precisa

$$15{,}6\ \text{m x } 18{,}232\ \text{m} = 284{,}4192m^2 \cong 284{,}4m^2$$

2) Somma e sottrazione fra due misure: bisogna approssimare la più precisa alla meno precisa

$$15{,}6\ \text{m} + 18{,}232\ \text{m} = 15{,}6m + 18{,}2m \cong 33{,}8m$$

Come facciamo a rappresentare una misura?

Il risultato di una singola misura viene indicato con il valore numerico che rappresenta la grandezza misurata specificando la sensibilità dello strumento utilizzato. La misura può essere scritta :

$$\text{Risultato} = X \pm \varepsilon\,(X)$$

Dove

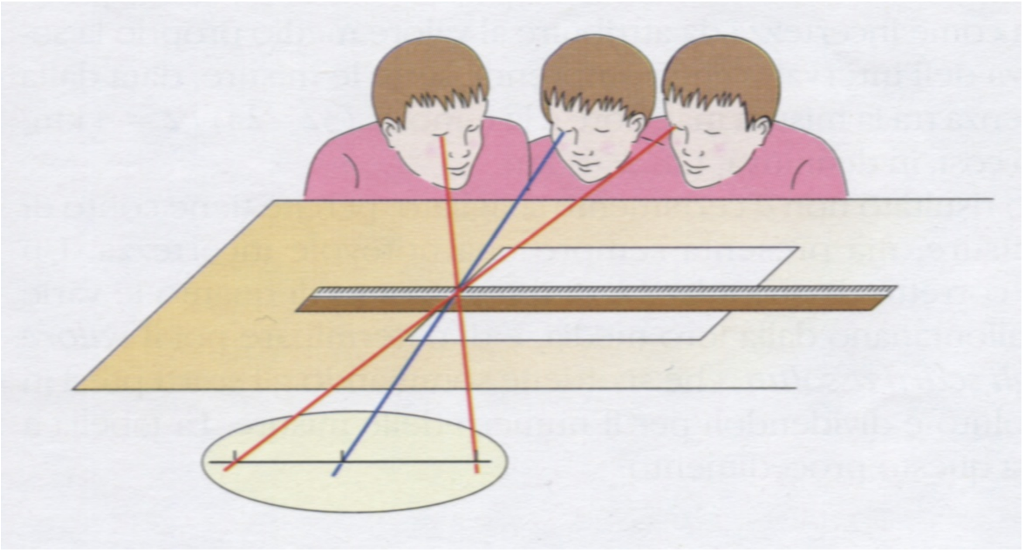
$$\varepsilon\,(x) = \text{sensibilità dello strumento}$$

rappresenta l'incertezza della misura e prende il nome di **errore assoluto**. Il termine assoluto indica il fatto che l'errore dipende solo dalla sensibilità dello strumento.

Errori nella misura

Effettuando una misura si possono commettere:

- **errori sistematici** dovuti al metodo di misura utilizzato (strumenti, operatore...) tra questi c'e' quello di **parallasse** legato alla non corretta posizione dell'operatore rispetto alla scala di misura.



- **errori accidentali** dovute a cause non prevedibili (presenza di apparati che possono disturbare la misura, disturbi dovuti all'ambiente ecc.)

Errore nella misura: le misure ripetute

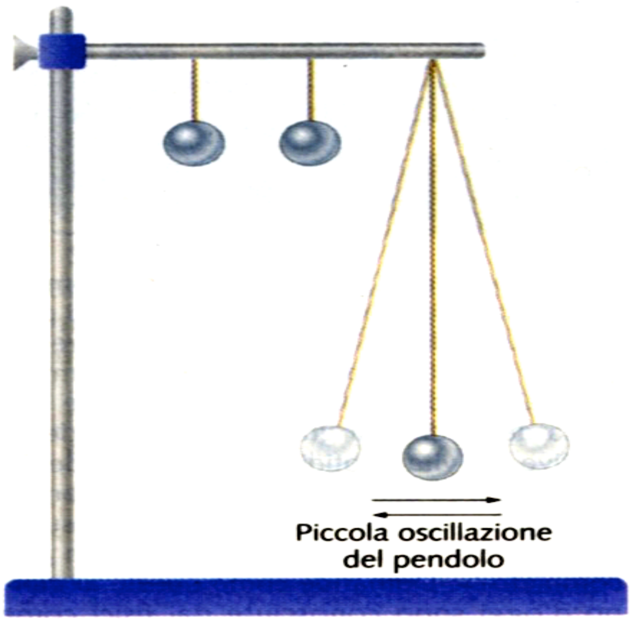
Per migliorare la qualità della nostra misura e affrontare il problema dell'errore si applica la strategia di ripetere più volte la misura.

Esperimento1: Misure ripetute del periodo di oscillazione di un pendolo.

Raccogliamo una serie di 10 misurazioni:

26,4s ; 23,9s ; 25,1s ; 24,6s ; 22,7s ; 23,8s ; 25,1s ; 23,9s ; 25,3s ; 25,4s .

I dati visti così non ci danno informazioni su quale sia il valore "corretto" dell'oscillazione.

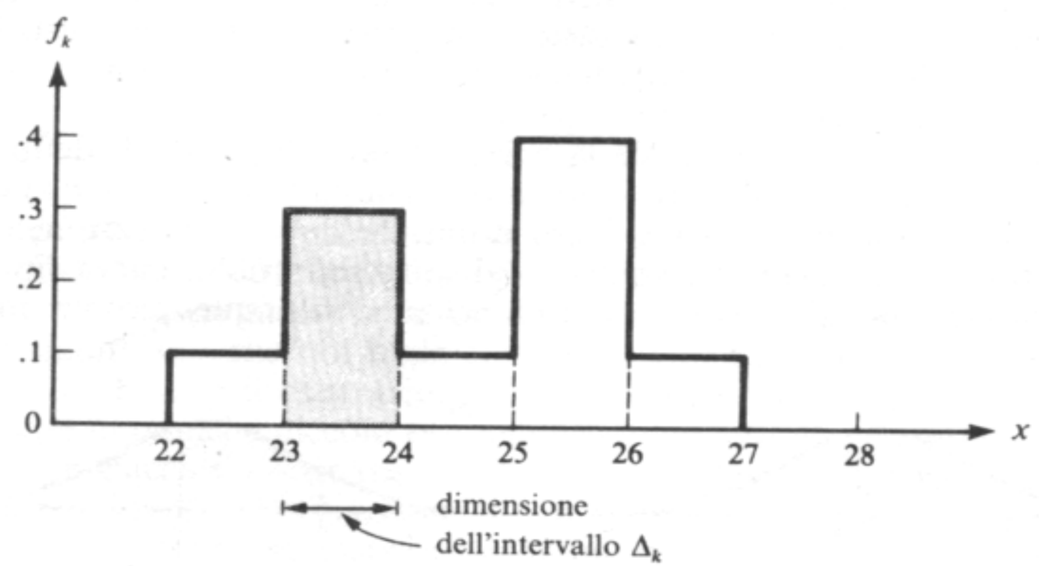


Errore nella misura: la gaussiana 1

Dividiamo la serie secondo intervalli e contiamo quante volte i valori delle misurazioni cadono in ciascun intervallo:

Intervallo 22-23 s	22,7s ;	1
Intervallo 23-24 s	23,9s ; 23,9s 23,8s ;	3
Intervallo 24-25 s	24,6s ;	1
Intervallo 25-26 s	25,1s ; 25,1s ; 25,3s ; 25,4s .	4
Intervallo 26-27 s	26,4s ;	1
Intervallo 27-28 s	-	0

Ora che i dati sono stati raccolti tracciamo un istogramma con una colonna rappresentativa di ogni intervallo. L'altezza della colonna è pari alla *frequenza, cioè al numero di volte che una misura si ripete.*



Con una decina di misure l'istogramma delle frequenze è simile a questo.

Errore nella misura: la gaussiana 2

Se andiamo avanti a ripetere le misure, l'istogramma si trasforma gradualmente:

Con 100 misure

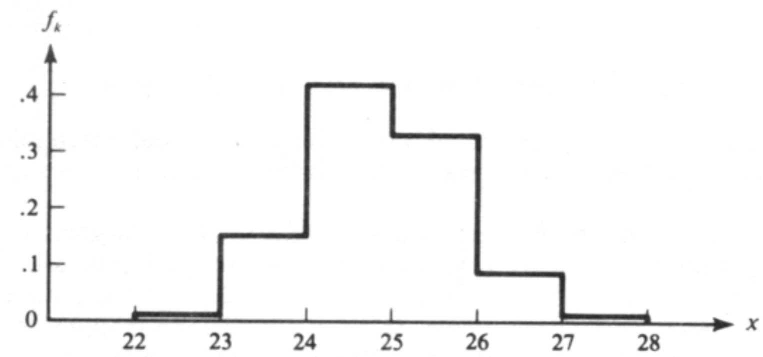


Figura 5.3. *Istogramma per 100 misure della stessa grandezza di Figura 5.2.*

Con 1000 misure

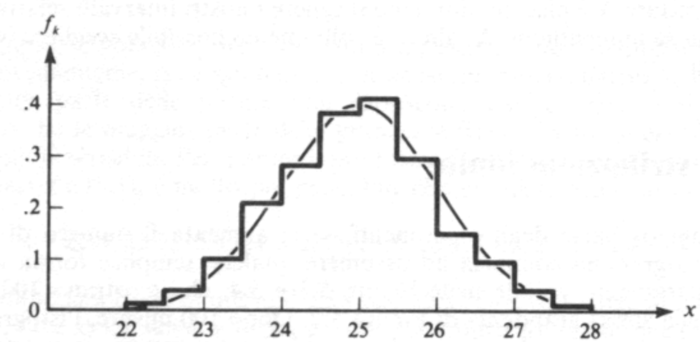
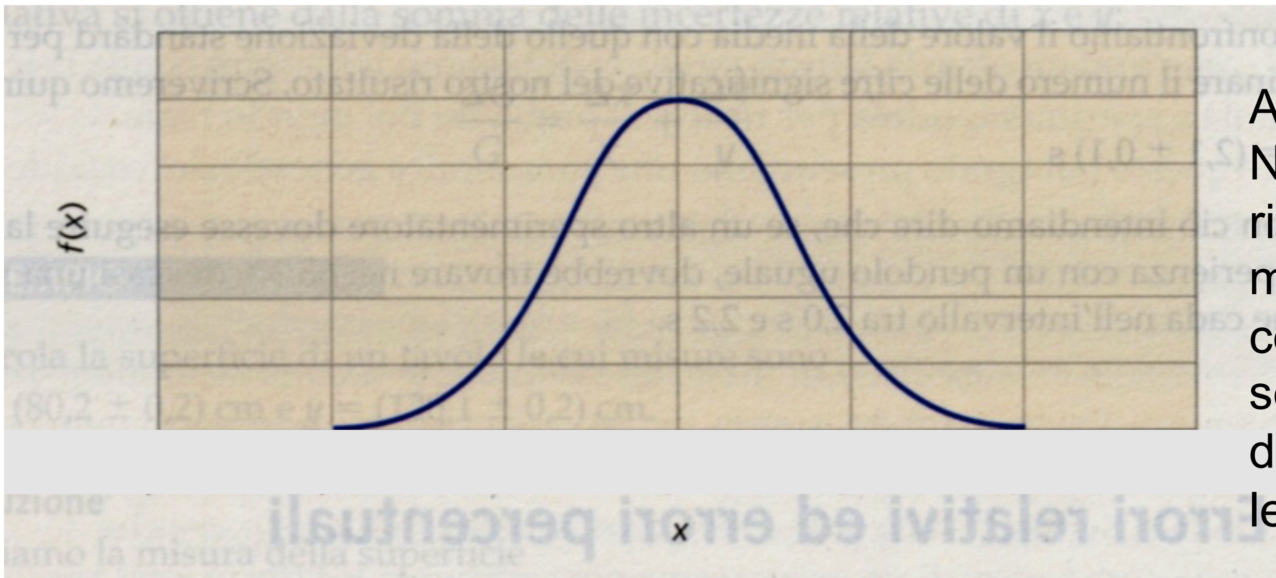


Figura 5.4. *Istogramma per 1000 misure della stessa grandezza di Figura 5.3. La curva tratteggiata è la distribuzione limite.*

Errore nella misura: la gaussiana

Per moltissime misure (per esempio 100.000) l'istogramma si avvicina molto ad una curva limite a forma di campana chiamata DISTRIBUZIONE NORMALE DI GAUSS O GAUSSIANA



A causa degli errori casuali NON possiamo prevedere il risultato di una singola misura ma possiamo sapere come si distribuisce una seria di N misure: la distribuzione segue una legge statistica ben precisa

Ovviamente se dovessimo decidere quale valore prendere come più rappresentativo, nel nostro gruppo di dati, sceglieremmo quello che si presenta più volte, cioè il più frequente.

Errore nella misura: il valor medio

Def. Chiamiamo MIGLIOR STIMA del valore vero di una grandezza il valore che meglio rappresenta il gruppo di dati. E' il valore più frequente cioè più probabile.

E' chiaro però che se abbiamo poche misure, 5 o 10, non possiamo affidarci al valore più frequente perché i valori sono pochi e il valore più probabile (più frequente) non ha alcun valore. I cinque o dieci valori potrebbero anche essere tutti diversi! Inoltre continuare a eseguire le misure ci mostrerebbe che la MIGLIOR STIMA (cioè il più frequente) su un piccolo numero di dati, continua a cambiare.

Come fare? Un noto teorema di statistica dice che:

TEOREMA: Per un qualunque gruppo di dati la MIGLIOR STIMA del valore vero coincide con il VALOR MEDIO che si calcola con:

$$\text{Valor Medio M} = \frac{\text{Somma di tutte le misure } (\mathrm{m_i})}{\text{numero di misure } (\mathrm{N})} = \frac{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_N}{N}$$

Errore nella misura: il valor medio

TEOREMA: Per un qualunque gruppo di dati la MIGLIOR STIMA coincide con il VALOR MEDIO che si calcola con:

$$\text{Valor Medio M} = \frac{\text{Somma di tutte le misure}\,(\text{m}_i)}{\text{numero di misure}\,(\text{N})} = \frac{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_N}{N}$$

Esempio: Calcoliamo il valor medio dei dati raccolti sul periodo di oscillazione del pendolo:

$$\text{Tmedio} = \frac{26{,}4\text{s} + 23{,}9\text{s} + 25{,}1\text{s} + 24{,}6\text{s} + 22{,}7\text{s} + 23{,}8\text{s} + 25{,}1\text{s} + 23{,}9\text{s} + 25{,}3\text{s} + 25{,}4\text{s}}{10} = 24{,}6s$$

A questo punto dobbiamo stimare l'errore accidentale commesso in queste misure.

Errore nella misura: l'errore assoluto

Per quanto riguarda la stima dell'errore è chiaro che tanto è più larga la "campana", tanto più distanti sono i valori trovati dalla MIGLIOR STIMA, tanto più grande è l'errore commesso mediamente.

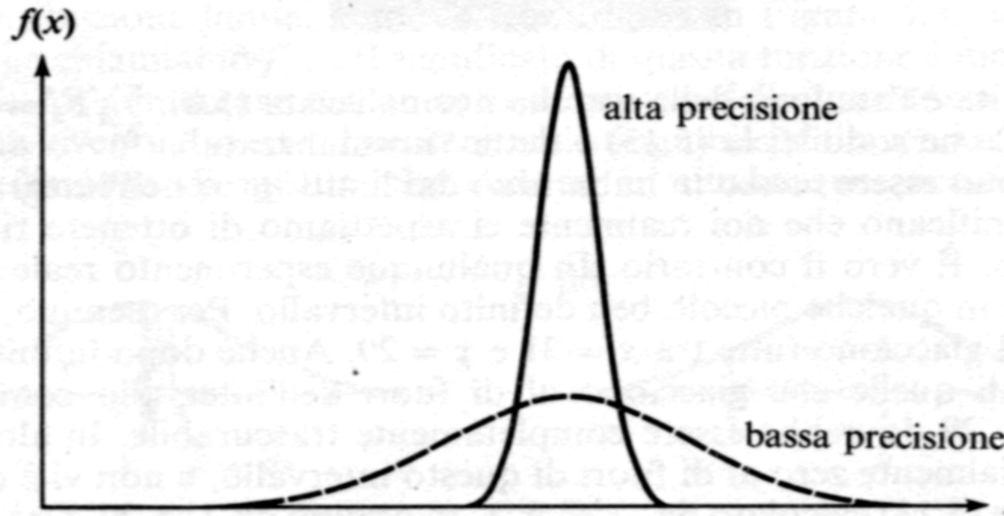


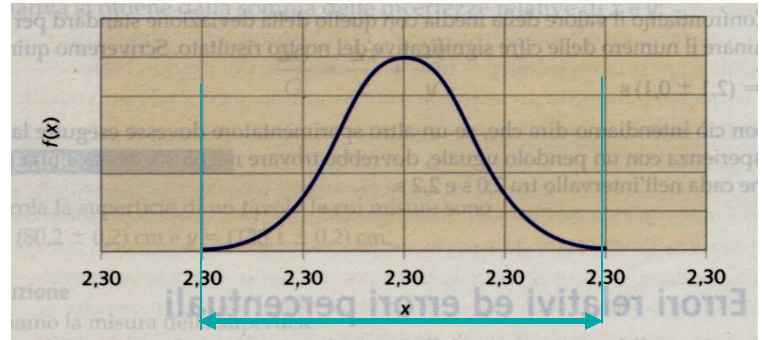
Figura 5.6. *Due distribuzioni limite, una per una misura ad alta precisione, l'altra per una misura a bassa precisione.*

Errore nella misura: l' errore assoluto

Possiamo prendere come indice dell' errore la larghezza della campana che chiamiamo DISPERSIONE.

La dispersione si calcola :

DISPERSIONE= m_{Max}-m_{min}



DISPERSIONE= m_{MAX}-m_{min}

Però è più logico prendere la metà della dispersione perché ci interessa sapere quanto AL MASSIMO dista un valore dalla miglior stima e non un valore (il più grande) da un altro (il più piccolo).

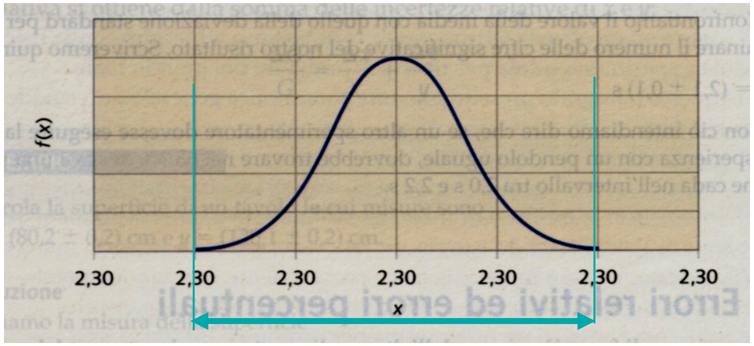
Chiamiamo ERRORE ASSOLUTO la metà della dispersione e lo calcoliamo:

$$\text{errore assoluto } \varepsilon_a = \frac{m_{Max} - m_{min}}{2}$$

Errore nella misura: l'errore assoluto

Calcoliamo la dispersione e l'errore assoluto:

DISPERSIONE= $m_{Max}-m_{min}$



DISPERSIONE

Esempio:

Dispersione= 26,4s-22,7s=3,7s

Intervallo 22-23 s	22,7s ;	1
Intervallo 23-24 s	23,9s ; 23,9s 23,8s ;	3
Intervallo 24-25 s	24,6s ;	1
Intervallo 25-26 s	25,1s ; 25,1s ; 25,3s ; 25,4s .	4
Intervallo 26-27 s	26,4s ;	1
Intervallo 27-28 s	-	0

$$\text{errore assoluto } \varepsilon_a = \frac{m_{Max} - m_{min}}{2}$$

Esempio:

$$\varepsilon_a = \frac{m_{Max} - m_{min}}{2} = \frac{26,4s - 22,7s}{2} = 1,85s \cong 1,9s$$

La misura: il valore vero

A questo punto ci possiamo domandare: come possiamo rappresentare le nostre misure con una scrittura chiara e breve?

Chiamiamo valor vero il valore che meglio rappresenta il gruppo di misure effettuate della grandezza da determinare

valor vero (v.v.) = valor medio ± errore assoluto = M ± ε_a

Esempio: Scriviamo il valor vero per la misura del pendolo:

sarà T= 24,6s ± 1,9s

Errore nella misura: l'errore relativo

L'errore assoluto è una importante informazione sulle misure. Però non ci consente di stabilire la qualità della misura.

Esempio: 1,9s è un errore grande o piccolo sull'oscillazione di un pendolo?

Non possiamo nemmeno confrontare gruppi di misure diversi:

Esempio: Supponiamo di aver trovato:

- un errore assoluto di 1m nella misura del lato di un edificio lungo 10m.

- un errore assoluto di 1m nella misura di un tratto di strada lunga 1km

Si vede subito che pesa di più l'errore nella prima misura che non nella seconda: infatti si capisce che commettere un errore di 1m su 10m è "più grave" che non commettere un errore di 1m su 1km!!

Dobbiamo trovare una quantità che fotografi la situazione.

Errore nella misura: l'errore relativo

Poiché non amiamo lavorare con numeri decimali a tanti zeri, moltiplichiamo per cento l'errore relativo e troviamo l'errore relativo percentuale

$$\text{errore relativo percentuale } \varepsilon_R\% = \frac{\varepsilon_a}{M}\cdot 100 = \frac{\text{errore assoluto}}{\text{Valor Medio}}\cdot 100$$

Esempio: Per i due esempi riportati l'errore relativo percentuale vale:

$$\varepsilon_{R1}\% = \varepsilon_{R1}\cdot 100 = 0{,}1\cdot 100 = 10\%$$

$$\varepsilon_{R2}\% = \varepsilon_{R2}\cdot 100 = 0{,}001\cdot 100 = 0{,}1\%$$

Si impone come valore massimo (indicativo) dell'errore relativo percentuale accettabile negli esperimenti didattici il 10% (il 5% negli esperimenti di ricerca)

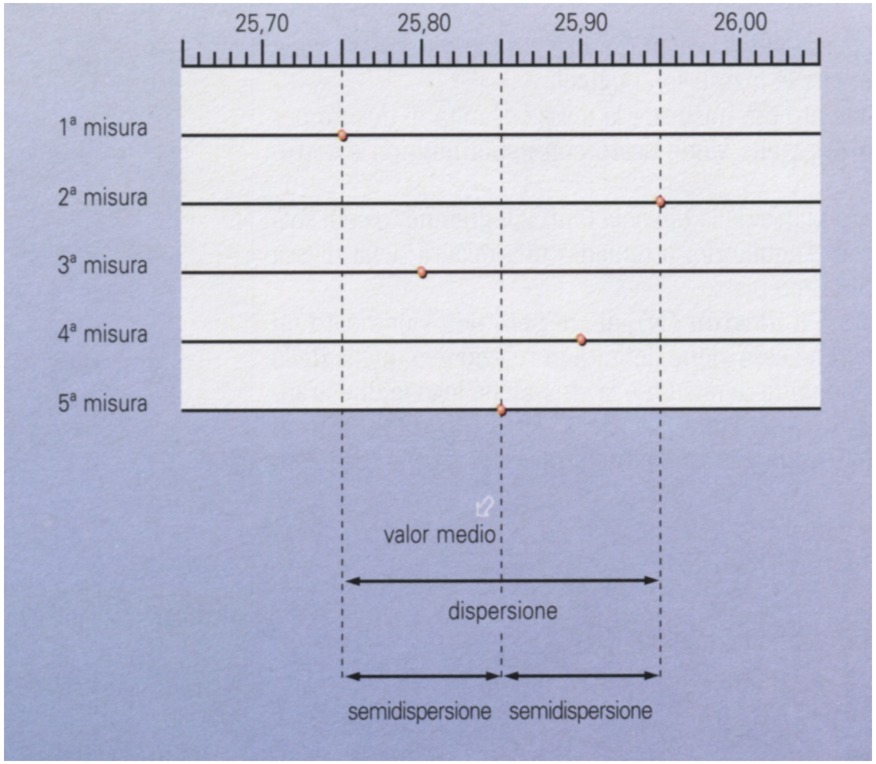
Riassumendo:

$$\text{Valor Medio M} = \frac{\text{Somma di tutte le misure } (m_i)}{\text{numero di misure (N)}} = \frac{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_N}{N}$$

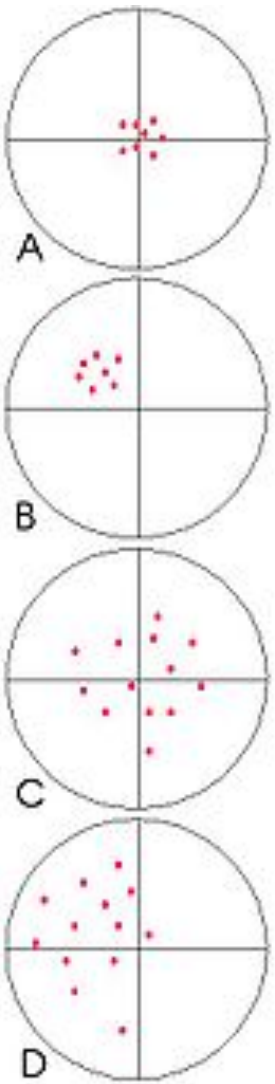
$$\text{errore assoluto } \varepsilon_a = \frac{m_{Max} - m_{min}}{2}$$

$$\text{errore relativo } \varepsilon_R = \frac{\varepsilon_a}{M} = \frac{\text{errore assoluto}}{\text{Valor Medio}}$$

$$\text{errore relativo percentuale } \varepsilon\% = \varepsilon_R \cdot 100$$



Accuratezza e precisione



Accuratezza: rappresenta la vicinanza della misura (o della media di misure, per misure ripetute) al valore vero → dipende dagli errori sistematici

Precisione: rappresenta l'ampiezza della distribuzione di valori in un gruppo di misure ripetute. Maggiore la precisione, minore l'ampiezza della distribuzione.→ dipende dagli errori casuali

A: Preciso e accurato; **B**: Preciso, poco accurato; **C:** Accurato, poco preciso; **D:** Poco accurato, poco preciso

L'accuratezza non può essere appurata dall'applicazione di misure ripetute, poiché non si possono stimare in tal modo gli errori sistematici

La precisione viene invece stimata sulla base di misure ripetute. Maggiore la precisione, migliore la riproducibilità del dato.

Per valutare l'accuratezza è importante disporre di metodi differenti e indipendenti di misura della stessa grandezza fisica!

Propagazione degli errori

Quando si eseguono misure indirette, cioè quando si fanno calcoli con le misure di grandezze (per esempio calcoli di aree o volumi), gli errori si propagano nei calcoli. Vediamo come risultano l'errore assoluto e relativo a seguito di operazioni matematiche.

Somma e differenza

Se X è una misura indiretta, ottenuta dalla somma o dalla differenza di due misure omogenee a e b, allora

$$e_a(X) = e_a(a) + e_a(b).$$

Gli errori assoluti di a e b si sommano sempre, indipendentemente dal fatto che la misura X sia ottenuta come somma o come differenza tra a e b.

Il tutto vale anche se le misure sono più di due.

Prodotto e quoziente

Se X è una misura indiretta, ottenuta dal prodotto o dal quoziente di due misure a e b, allora

$$e_r(X) = e_r(a) + e_r(b).$$

Gli errori relativi e percentuali di a e b si sommano sempre, indipendentemente dal fatto che la misura X sia ottenuta come prodotto o come quoziente tra a e b.

Il tutto vale anche se le misure sono più di due.

Vettori e scalari

GRANDEZZE FISICHE

Scalari: sono completamente definite quando se ne conosce la sola misura (es. tempo, massa, temperatura, volume…)

Vettoriali: richiedono un maggior contenuto informativo (es. velocità, accelerazione, forza…)

*Domenica sono andato in bicicletta per **due ore**…*

L'informazione sul tempo è completa?

Il **tempo** è un esempio di quantità **scalare**: sono sufficienti un numero e la rispettiva unità di misura per caratterizzarlo completamente. Quindi informazione sul tempo è completa

Vettori e scalari

•*Domenica ho fatto venti chilometri in bicicletta…*

L'informazione sullo spostamento è completa? No, ne conosco solo l'entità.

•*Domenica ho fatto venti chilometri in bicicletta lungo* *il Tevere* … ⇒ **ho aggiunto informazione sulla mia direzione.**

•*Domenica ho fatto venti chilometri in bicicletta lungo* *il Tevere* ***verso*** *Perugia* **questo dato completa l'informazione sul verso del mio spostamento.**

Una grandezza fisica è un vettore quando per definirla completamente è necessario fornire un modulo (= l'entità), una direzione e un verso.

$$\textbf{VETTORE} \begin{cases} \text{modulo} \\ \text{direzione} \\ \text{verso} \end{cases}$$

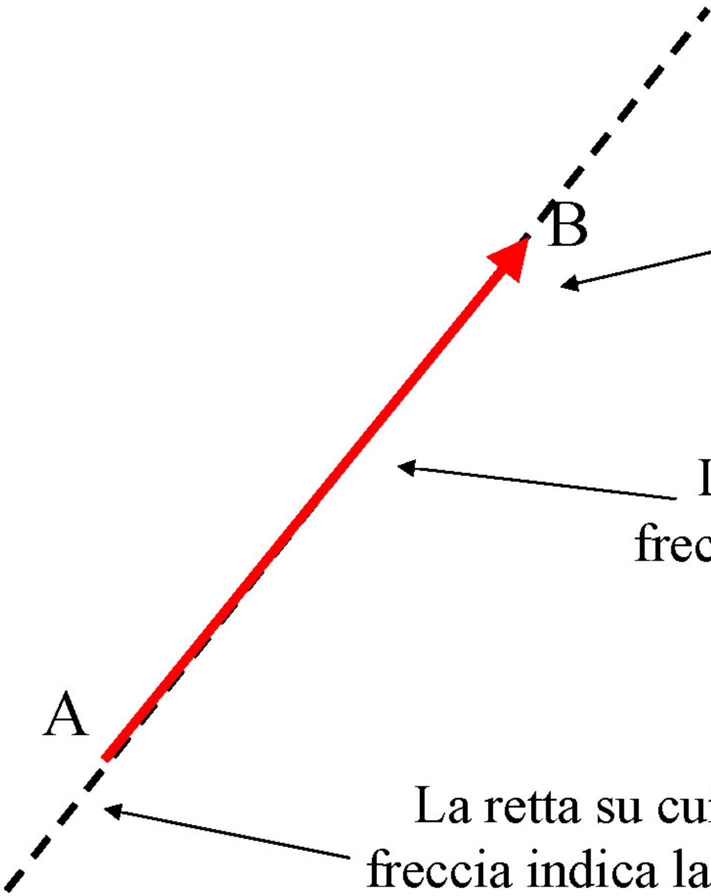
Il concetto di vettore e' **FONDAMENTALE** propedeutico a **moltissima** parte della fisica che faremo

Rappresentazione grafica

Un **vettore** può essere rappresentato graficamente da un **segmento orientato**.

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$$

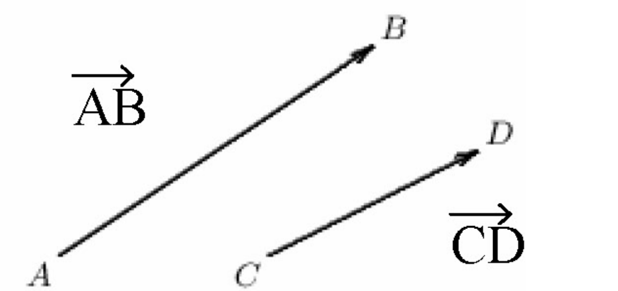
$|\,\mathbf{a}\,| = |\,\overrightarrow{AB}\,|$ si chiama modulo



La punta della freccia indica il **verso**.

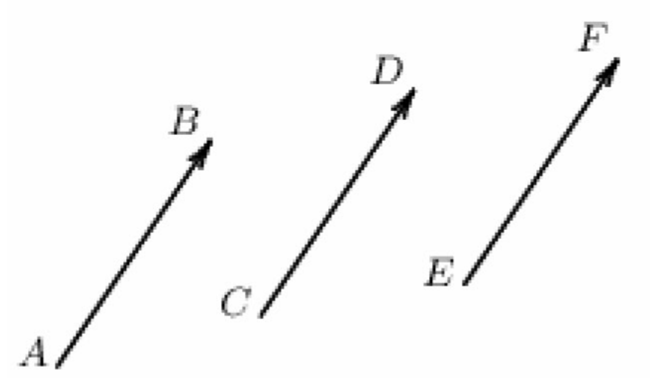
La lunghezza della freccia indica il **modulo**.

La retta su cui giace la freccia indica la **direzione**.

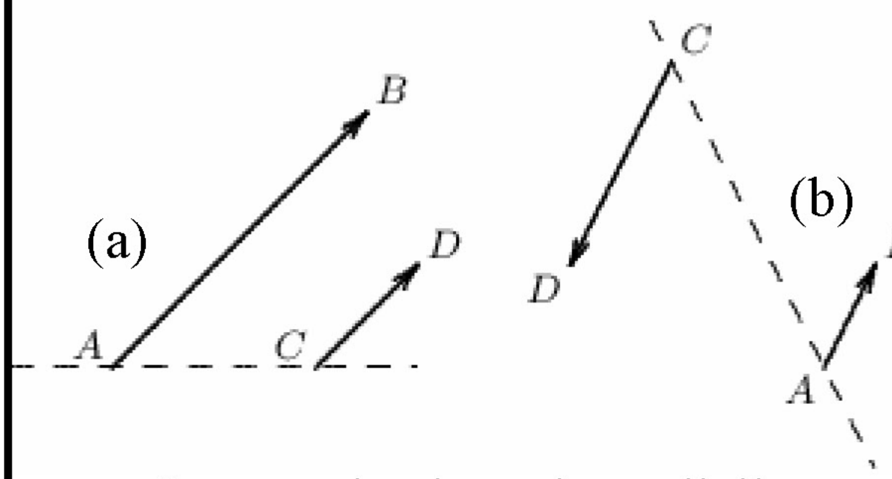


Rappresentazione grafica

Definizione: Un **vettore** nel piano o nello spazio è definito come **l'insieme di tutti i segmenti orientati aventi uguali direzione, verso e modulo**.



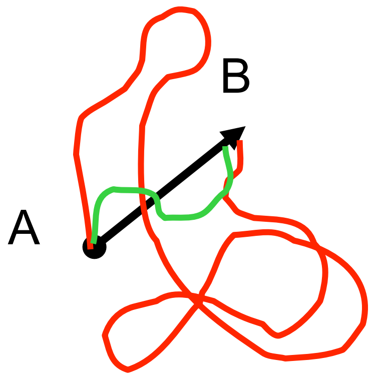
Segmenti orientati **rappresentativi di uno stesso vettore**.



Segmenti orientati paralleli concordi (a) ed opposti (b).

Vettori

La piu' semplice grandezza vettoriale e' lo spostamento, cioe' un cambiamento di posizione da una iniziale A ad una finale B



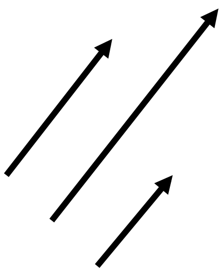
Se una particella cambia posizione spostandosi da A a B, diciamo che essa subisce uno spostamento da A a B, rappresentato da una freccia che parte da (applicata in) A e termina in (punta a) B

Vettori

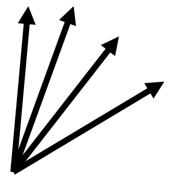
Norma o Modulo: distanza tra l'origine A e l'estremo B. Si indica con $|\boldsymbol{v}|=\overline{AB}$

Direzione: orientamento nello spazio (o nel piano) della retta su cui il segmento orientato AB

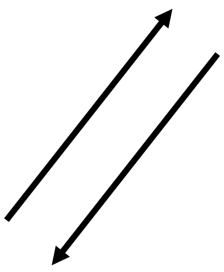
Verso: senso di percorrenza sulla retta



Stessa direzione,
stesso verso,
diversi moduli



Stesso modulo,
direzioni diverse



Stesso modulo, stessa
direzione, versi opposti

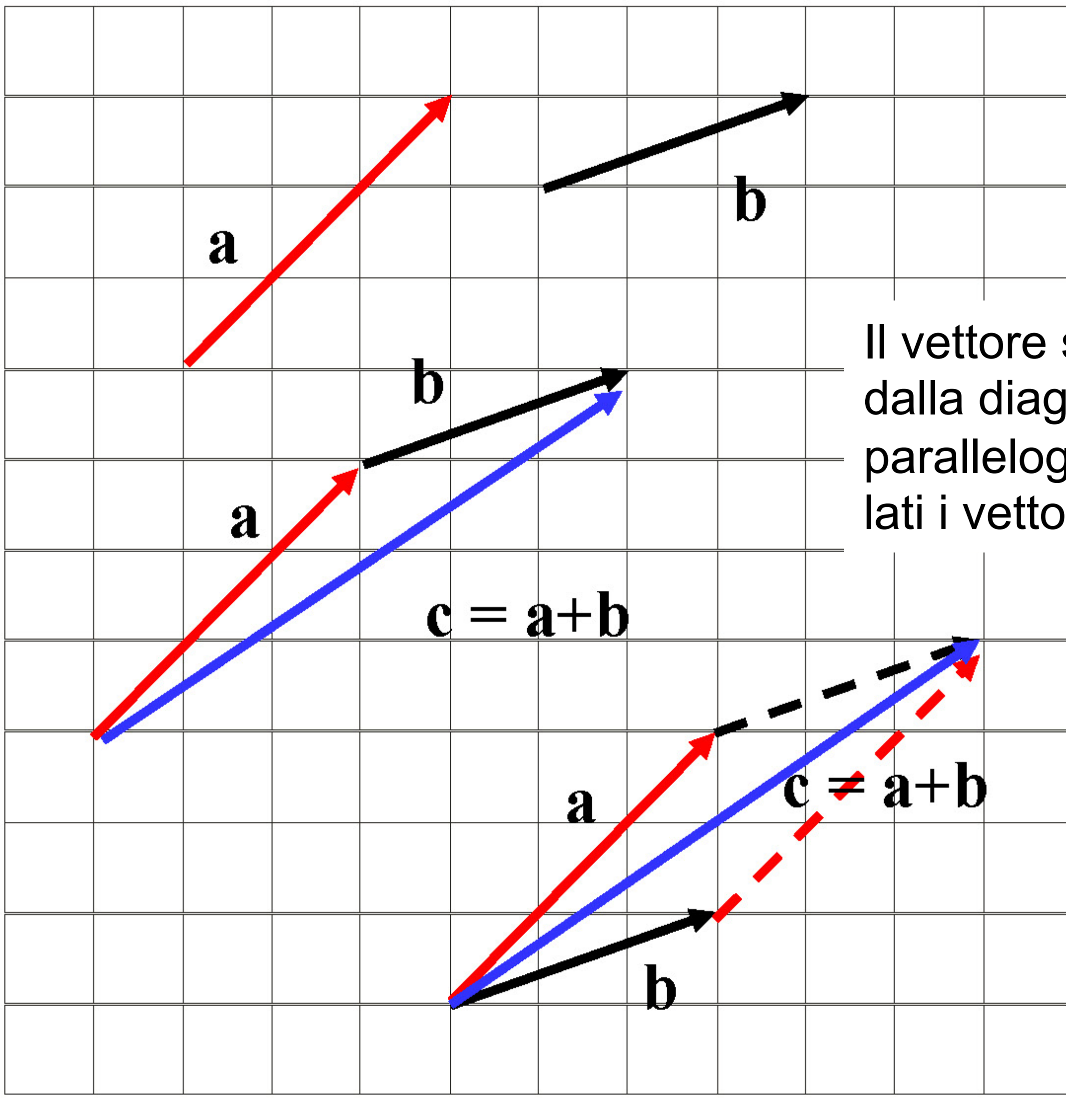
Uguaglianza di vettori

✓ Due vettori si dicono uguali se e solo se hanno:

- ❑ Il medesimo modulo
- ❑ La stessa direzione
- ❑ Lo stesso verso

✓ Se due vettori non sono uguali, si dicono disuguali, ma non si puo' trovare una relazione di ordine in quanto non si puo' trovare un criterio per stabilire se uno e' maggiore o minore dell'altro

Somma di vettori

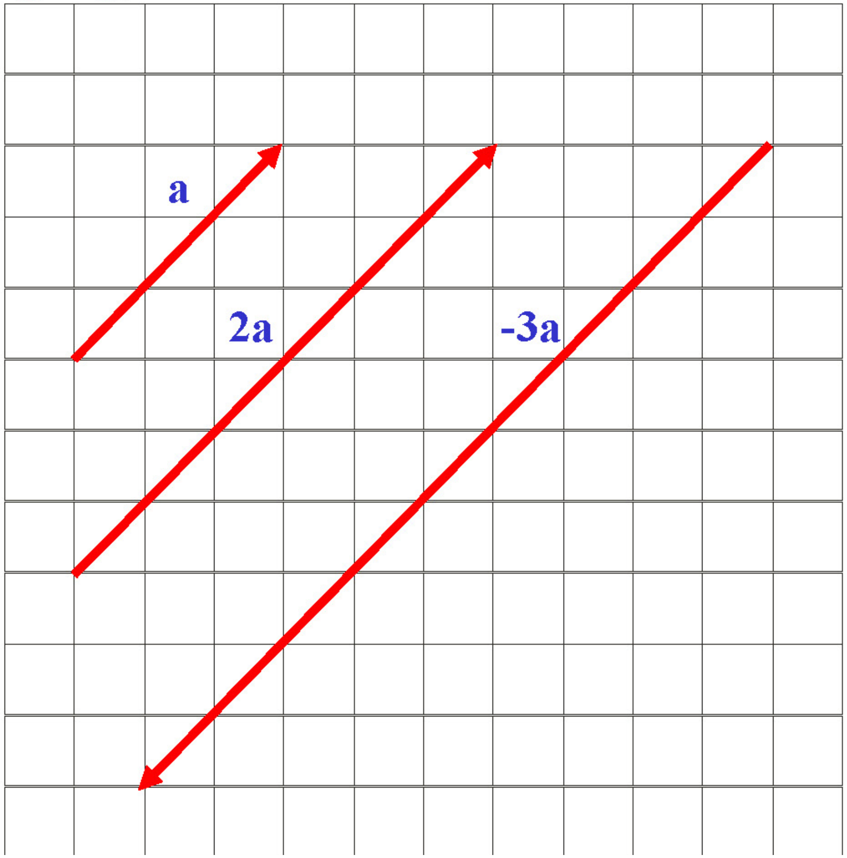


Il vettore somma **c** e' costituito dalla diagonale maggiore del parallelogramma avente come lati i vettori dati **a** e **b**

Moltiplicazione scalare-vettore

Definizione: La moltiplicazione αa (o aα) di un vettore a con il numero reale α è un vettore b = aα, collineare ad a, di modulo $|\alpha| \cdot |a|$ e verso coincidente con quello di a se $\alpha > 0$, opposto a quello di a se $\alpha < 0$.
Nel caso che sia $\alpha = 0$ o a = 0, il vettore b = 0.

Proprietà:
1. $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$
2. $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
3. $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$



Dalla geometria ai numeri

- Le operazioni sui vettori appena definite sono di tipo “geometrico”
- Non sono molto pratiche
- Occorre trasformare le relazioni geometriche in relazioni tra numeri: e’ piu’ facile manipolare numeri invece che segmenti orientati