

# Lecture 10 071119

Il pdf delle lezioni puo' essere scaricato da

[http://www.fisgeo.unipg.it/~fiandrin/didattica\\_fisica/  
cosmic\\_rays1920/](http://www.fisgeo.unipg.it/~fiandrin/didattica_fisica/cosmic_rays1920/)

# Diffusione Compton

**Gli effetti quantistici compaiono in due modi:**

**(a) nella cinematica della diffusione** → quando  $h\omega/2\pi \approx mc^2$ , la diffusione non e' piu' elastica a causa del rinculo della carica,  $\omega \neq \omega'$

**(b) la sezione d'urto del processo cambia da quella di Thomson, indipendente da  $\omega$  a quella di Klein-Nishina, piu' piccola, che invece e' funzione di  $\omega$**

# Diffusione Compton

Il processo di scattering Compton e' descritto dalla QED

Ci chiediamo quando il processo puo' essere  
descritto adeguatamente dalla sezione d'urto  
Thomson

Consideriamo un e- stazionario

Il processo di diffusione di Thomson e' elastico:  $\omega'=\omega$

La natura quantistica del fotone entra in gioco quando  
 $h\omega/2\pi \approx mc^2$

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{[\frac{\hbar\omega}{mc^2}(1 - \cos\alpha) + 1]} \neq 1$$

Il processo non e' piu' elastico e non puo' piu' essere descritto dalla  
diffusione Thomson → sezione d'urto dalla QED

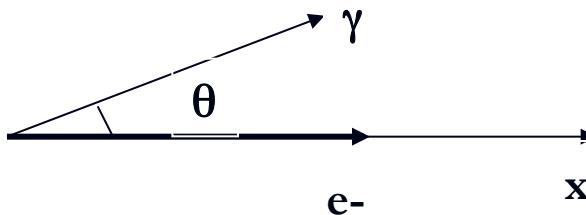
# Diffusione Compton

Un caso importante e' quello di fotoni di bassa energia ( $\ll mc^2$ ) che urtano elettroni ultra-relativistici con  $\gamma \gg 1$  e  $v \approx c$

Il caso piu' generale di fotone che diffonde su un elettrone in moto, puo' essere ridotto a quello stazionario con una trasformazione di Lorentz nel sistema K' di quiete dell'e-

L'energia del fotone in K' e'

$$E'/c = \gamma(E/c - \beta p_x) = \gamma(E/c - \beta p \cos \theta)$$



$$= \gamma(E/c)(1 - \beta \cos \theta)$$

Per una distribuzione isotropa nel labo, il valor medio  $\langle \cos \theta \rangle = 0$

E quindi  $E' \sim \gamma E = \gamma \hbar \omega$

Così' se il fotone incidente e' tale che  $\gamma \hbar \omega \ll mc^2$ , possiamo applicare il limite di Thomson alla sezione d'urto in K', altrimenti occorre usare la sezione d'urto QED

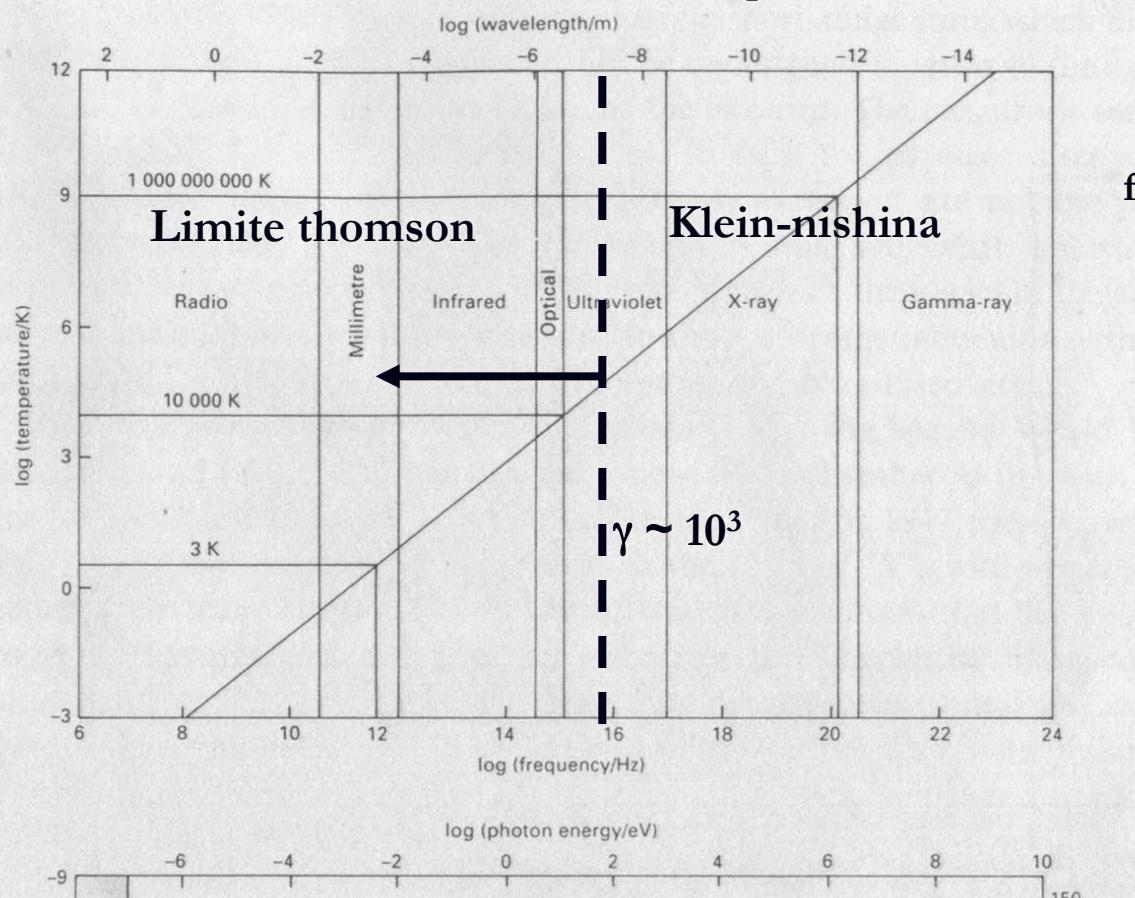
# Compton Inverso: limite di Thomson

In S' il fotone ha energia  $\hbar\omega' \sim \gamma\hbar\omega$

$$\text{Se } \gamma\hbar\omega \ll mc^2 \quad (\text{aa})$$

In S' la sezione d'urto di Thomson descrive correttamente il processo

A quali fotoni si puo' applicare questa approssimazione?



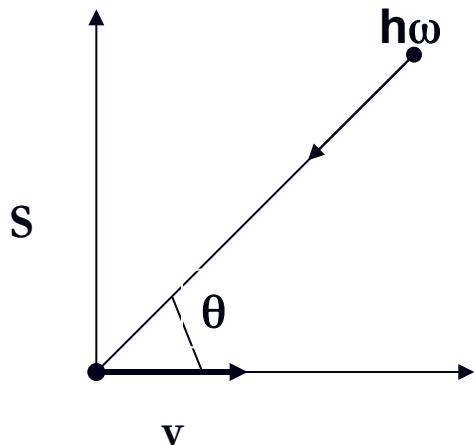
La condizione (aa) e' soddisfatta da fotoni che nel laboratorio hanno energie  $\ll mc^2/\gamma$

P. Es. Elettroni con  $\gamma = 10^3$  la condizione e' soddisfatta da fotoni con  $E < 0.5 \text{ keV}$ , i.e. E' valida per fotoni dall'ottico fino a frequenze radio

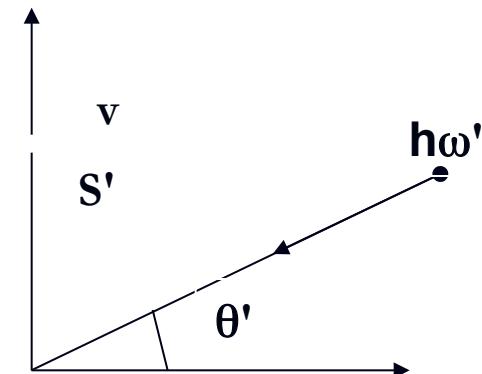
# Compton Inverso: aberrazione e shift doppler

Esaminiamo il caso di fotoni di bassa energia ( $\hbar\omega \ll mc^2$ ) che diffondono su e- ultrarelativistici

Vediamo prima come trasforma la frequenza e l'energia dei fotoni quando si passa dal laboratorio ad un sistema  $S'$  in moto



Se l'angolo di incidenza nel sistema del laboratorio  $S$  e'  $\theta$ , in quello di quiete dell'elettrone  $S'$  e'  $\theta'$  a causa dell'aberrazione relativistica, e anche l'energia del fotone cambia a causa dello shift doppler



# Aber. e shift doppler: metodo B

Le formule di aberrazione e shift doppler si possono ottenere facilmente anche dalle trasformazioni di Lorentz applicate ai fotoni

$$p'_x = \gamma(p_x - \beta E/c) \quad p'_y = p_y \quad E'/c = \gamma(E/c - \beta p_x)$$

Nel caso dei fotoni la relazione energia impulso è  $E = cp$  e  $p_x = p \cos \theta$

$$p' \cos \theta' = \gamma(p \cos \theta - \beta p) \quad p' \sin \theta' = p \sin \theta \quad E'/c = \gamma(E/c - \beta(E/c) \cos \theta)$$

$$p' \cos \theta' = \gamma p(\cos \theta - \beta) \quad E' = \gamma E(1 - \beta \cos \theta)$$

Ma per i fotoni  $p'/p = E'/E = \gamma(1 - \beta \cos \theta)$  

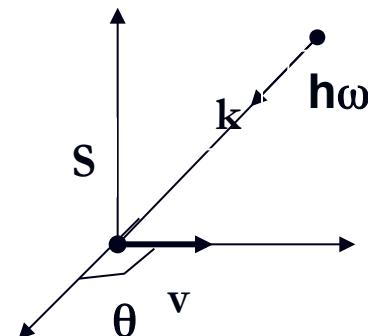
aberrazione

$$\cos \theta' = \gamma(p/p')(\cos \theta - \beta) = \frac{(\cos \theta - \beta)}{1 - \beta \cos \theta}$$

$$\sin \theta' = (p/p') \sin \theta = \frac{\sin \theta}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)}$$

Shift doppler

$$\omega' = \gamma \omega(1 - \beta \cos \theta)$$



# Aber. e shift doppler: nota

Usualmente quando si parla di effetto Doppler si considera lo shift in frequenza rispetto a quella emessa nel sistema di quiete della carica, per cui occorre usare le inverse,  
scambiando  $v \rightarrow -v$  e gli apici

## Aberrazione

$$\cos \theta = \frac{(\cos \theta' + \beta)}{1 + \beta \cos \theta'}$$

Shift doppler

$$\sin \theta = \frac{\sin \theta'}{\gamma(1 + \beta \cos \theta')}$$

$$\omega = \gamma \omega' (1 + \beta \cos \theta')$$

# Compton Inverso

L'energia del fotone in  $S'$  e' quindi  $\hbar\omega' = \gamma\hbar\omega(1 - \frac{v}{c} \cos\theta)$

L'angolo di incidenza e'  $\tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - \frac{v}{c})}$

Per elettroni ultrarelativistici, il fotone nel sistema di riposo della particella colpisce l'elettrone ad angoli molto piccoli anche se in  $S$  arriva in direzione trasversale ( $\theta = \pi/2$ )

→ nel caso di una distribuzione isotropa di fotoni in  $S$ , quella risultante in  $S'$  e' concentrata in un cono di apertura  $1/\gamma$  intorno alla direzione della velocita' dell'elettrone

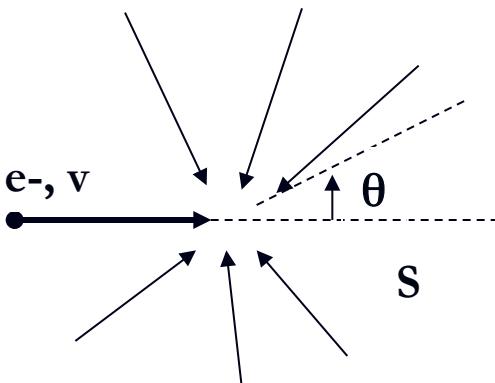
Quando  $\gamma \gg 1$   $\beta \approx 1 - \frac{1}{2}\gamma^{-2}$    $\tan\theta' \approx \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - 1 + \frac{1}{2}\gamma^{-2})} \approx \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - 1)}$

$$\sin\theta = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$$

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2(\theta/2)$$

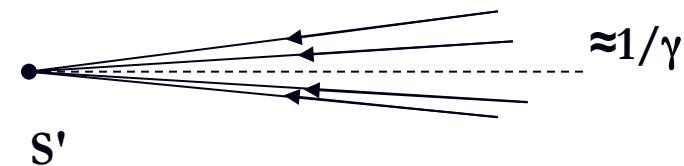
 
$$\tan\theta' \approx \frac{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}{\gamma(1 - 2\sin^2(\theta/2) - 1)} = -\frac{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}{2\gamma\sin^2(\theta/2)}$$

$$-\tan\theta' \approx \frac{\cotg(\theta/2)}{\gamma}$$



Gli angoli tali che  $\cotg(\theta/2) = 1$ ; i.e.  $\theta = \pi/2$  sono trasformati in

$$\tan\theta' \approx 1/\gamma$$



# IC: potenza totale nel limite di Thomson

In S' il fotone ha energia  $\hbar\omega' \sim \gamma\hbar\omega$  Se  $\gamma\hbar\omega \ll mc^2$  (aa)

in S' la sezione d'urto di Thomson descrive correttamente il processo

La potenza totale emessa e'  $(\frac{dE}{dt})' = c\sigma_T U'_{rad}$  con  $U'$  densita' di energia elm incidente in S'

Bisogna trovare  $U'_{rad}$  a partire dalle quantita' definite nel laboratorio

$$dU'_{rad} = E' dn' \quad \text{L'energia trasforma come} \quad E' = \gamma E(1 - \frac{v}{c} \cos \theta)$$

Per la densita' di volume  $dn'$  di particelle si fa nel seguente modo:

Il numero  $dN$  di particelle nel volume e' un invariante relativistico  $dN=dN'$

Il 4-volume  $d^4V = dx_o dx_1 dx_2 dx_3 = dx_o dV$  e' un invariante relativistico

Così' la 4-densita'  $dN/d^4V$  e' un invariante relativistico

$$\left(\frac{dN}{d^4V}\right) = \left(\frac{dN}{dV dx_o}\right) \rightarrow \left(\frac{dN}{dV}\right) = \left(\frac{dN}{d^4V}\right) dx_o$$

La densita' di volume trasforma come la componente temporale di un 4-vettore, i.e. come E

# Compton Inverso: limite di Thomson

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)' = c\sigma_T U'_{rad} \quad U_{rad} = \left(\frac{dN}{dV}\right)E \quad E' = \gamma E \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)$$

$$\left(\frac{dN}{dV}\right)' = \left(\frac{dN}{d^4V}\right)dx'_o = \left(\frac{dN}{d^4V}\right)dx_o \gamma \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right) = \left(\frac{dN}{dV}\right) \gamma \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)$$

$$U'_{rad} = \left(\frac{dN}{dV}\right)' E' = \left(\frac{dN}{dV}\right) E \left[\gamma \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)\right]^2 = U_{rad} \left[\gamma \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)\right]^2$$

**Quindi la potenza in S' è**  $\left(\frac{dE}{dt}\right)' = c\sigma_T U_{rad} \left[\gamma \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)\right]^2$

**Se assumiamo una distribuzione isotropa di fotoni in S, possiamo mediare sugli angoli  $\theta$  per ottenere la potenza media in S'**

$$\left\langle \left(\frac{dE}{dt}\right)' \right\rangle = \frac{c\sigma_T U_{rad}}{4\pi} \int_{4\pi} [\gamma \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)]^2 d\Omega$$

$$\left\langle \left(\frac{dE}{dt}\right)' \right\rangle = \frac{c\sigma_T U_{rad} 2\pi}{4\pi} \int_{-1}^{+1} [\gamma \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)]^2 d\cos \theta$$

# Compton Inverso: limite di Thomson

$$\langle \left(\frac{dE}{dt}\right)' \rangle = \frac{c\sigma_T \gamma^2 U_{rad}}{2} \int_{-1}^{+1} [(1 - \frac{v}{c} \cos \theta)]^2 d\cos \theta = \frac{c\sigma_T \gamma^2 U_{rad}}{2} \int_{-1}^{+1} [(1 - \frac{v}{c}x)]^2 dx$$

$$= \frac{c\sigma_T \gamma^2 U_{rad}}{2} \int_{-1}^{+1} (1 + \frac{v^2}{c^2}x^2 - 2\frac{v}{c}x) dx = \frac{c\sigma_T \gamma^2 U_{rad}}{2} (2 + \frac{2}{3}\beta^2)$$

$$\langle \left(\frac{dE}{dt}\right)' \rangle = c\sigma_T \gamma^2 U_{rad} (1 + \frac{1}{3}\beta^2) = \frac{c\sigma_T U_{rad}}{3} [\gamma^2(3 + \beta^2)]$$

Riscriviamo il termine in parentesi quadra

$$\gamma^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{1 - \beta^2} - \frac{1}{4} = \frac{4 - 1 + \beta^2}{4(1 - \beta^2)} = \gamma^2 \frac{3 + \beta^2}{4}$$



$$\gamma^2(3 + \beta^2) = 4(\gamma^2 - \frac{1}{4}) \quad \text{Sostituisco nella potenza}$$

$$\langle \left(\frac{dE}{dt}\right)' \rangle = \frac{4}{3} c\sigma_T U_{rad} (\gamma^2 - \frac{1}{4})$$

Tenendo conto che la potenza e' un invariante

relativistico →

$$\langle \left(\frac{dE}{dt}\right)' \rangle = \langle \left(\frac{dE}{dt}\right) \rangle$$

In questo modo abbiamo ottenuto l'energia guadagnata dal campo di fotoni dopo l'urto

# Compton Inverso: limite di Thomson

Energia media guadagnata dal campo di fotoni       $\langle \left( \frac{dE}{dt} \right) \rangle = \frac{4}{3} c \sigma_T U_{rad} (\gamma^2 - \frac{1}{4})$

Per ottenere il guadagno netto di energia del campo di fotoni occorre sottrarre l'energia persa nell'urto sugli elettroni, che e' data dal numero di fotoni con energia E rimossi dal fascio per unita' di tempo, che nel caso di distribuzione isotropa e'

$$\frac{dN_{ph}}{dt} = -c \sigma_T n_{ph} \quad \text{Ma} \quad n_{ph} = U_{rad}/E \quad \rightarrow \quad \frac{dN_{ph}}{dt} = -c \sigma_T U_{rad}/E$$

$$\langle \left( \frac{dE}{dt} \right) \rangle = E \times \frac{dN_{ph}}{dt} = -c \sigma_T U_{rad}$$

$$\langle \left( \frac{dE}{dt} \right)_{tot} \rangle = \frac{4}{3} c \sigma_T U_{rad} (\gamma^2 - \frac{1}{4}) - c \sigma_T U_{rad} = c \sigma_T U_{rad} [\frac{4}{3} (\gamma^2 - \frac{1}{4}) - 1]$$

$$= c \sigma_T U_{rad} [\frac{4}{3} (\gamma^2 - 1)] \quad \text{ma} \quad \gamma^2 - 1 = \gamma^2 \beta^2$$

$$\langle \left( \frac{dE}{dt} \right)_{tot} \rangle = \frac{4}{3} c \sigma_T U_{rad} \gamma^2 \beta^2$$

E' la potenza media guadagnata dal campo di fotoni in un urto con singolo elettrone

# IC: conseguenze astrofisiche

Il processo Compton inverso da parte di elettroni ultrarelativistici e' di profonda importanza in astrofisica.

Dalle osservazioni dei raggi cosmici, sappiamo che ci sono elettroni con energie superiori a  $O(100 \text{ MeV}) \rightarrow$  con fattori di Lorentz  $\gamma \approx 10-1000$ , per esempio negli aloni galattici

Questi elettroni diffondono fotoni di bassa energia ad energie molto piu' alte

P. Es. Se si considerano elettroni con  $\gamma \approx 1000$ , la frequenza dei fotoni diffusi aumenta:di un fattore  $10^6$ .

Fotoni radio, tipici dell'emissione da aloni galattici, con  $\nu \approx 10^9 \text{ Hz}$  diventano fotoni UV con  $\nu \approx 10^{15} \text{ Hz}$

Fotoni nell'IR lontano con  $\nu \approx 10^{12} \text{ Hz}$ , emessi dai nuclei galattici ricchi di stelle, diventano fotoni X con  $\nu \approx 10^{18} \text{ Hz}$ , cioe-  $E \approx 1 \text{ KeV}$

Fotoni ottici con  $\nu \approx 10^{14} \text{ Hz}$  diventano raggi  $\gamma$  con  $\nu \approx 10^{20} \text{ Hz}$ , cioe' con  $E \approx \text{MeV}$

# IC: perdita di E delle particelle

Il processo Compton inverso rappresenta una sorgente di energia per i fotoni nello spazio ambiente, mentre rappresenta un pozzo di energia per le particelle su cui i fotoni diffondono

$$\frac{dE_{fotoni}}{dt} = -\frac{dE_{ele}}{dt}$$

La sezione d'urto Compton e' prop a  $m^{-2}$  della particella su cui i fotoni diffondono → le uniche particelle per le quali il processo e' importante sono gli elettroni (a parita' di energia)

Dato che  $dE/dt \sim \gamma^2 = E^2/(mc^2)^2$  → il processo Compton inverso costituisce la sorgente dominante di perdita di energia per gli elettroni in tutti i casi in cui e' presente nella stessa regione un gas di fotoni

Insieme alle perdite per emissione di sincrotrone (che vedremo), il Compton inverso e' il processo che limita fortemente la vita media degli elettroni cosmici dato che

$$\tau_e = \int \frac{dE}{dE_{ele}/dt}$$

e che  $(dE/dt)_{ion} \approx \text{cost.}$  e che  $(dE/dt)_{brems} \approx E$

Si pensi, p. es., al fondo cosmico a microonde di fotoni a 2.7 K: esso permea tutto l'universo e non c'e' modo per nessun elettrone di evitarlo durante la sua propagazione

# Compton inverso: limiti cinematici

La cinematica dell'urto fissa la max energia che il fotone puo' acquistare

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon(1 - \frac{v}{c} \cos \theta)}{[\frac{E}{mc^2\gamma}(1 - \cos \alpha) + (1 - \frac{v}{c} \cos \theta_1)]}$$

$\epsilon_1 \ll \gamma mc^2$

$$\epsilon_1 \approx \epsilon \frac{1 - \beta \cos \theta}{1 - \beta \cos \theta_1}$$

$\theta$  e  $\theta'$  sono gli angoli dell'elettrone rispetto alla linea di volo del fotone incidente prima e dopo l'urto

Così il max si ha quando  $\cos \theta = -1$  e  $\cos \theta_1 = +1$  (collisione head-on)

$$(\epsilon_1)_{max} \approx \epsilon \frac{1 + \beta}{1 - \beta}$$

Nel limite UR ( $\gamma \gg 1$ )

$$1 - \beta = \frac{1}{\gamma^2(1 + \beta)} \approx \frac{1}{2\gamma^2} \quad \rightarrow \quad (\epsilon_1)_{max} \approx 4\gamma^2 \epsilon$$
$$1 + \beta \approx 2$$

Il min si ha quando  $\cos \theta = 1$  e  $\cos \theta_1 = -1$  (collisione follow-on)

$$(\epsilon_1)_{min} = (1 - \beta) / (1 + \beta) = 1 / 4\gamma^2$$

# Spettro: stima della forma

Quindi:

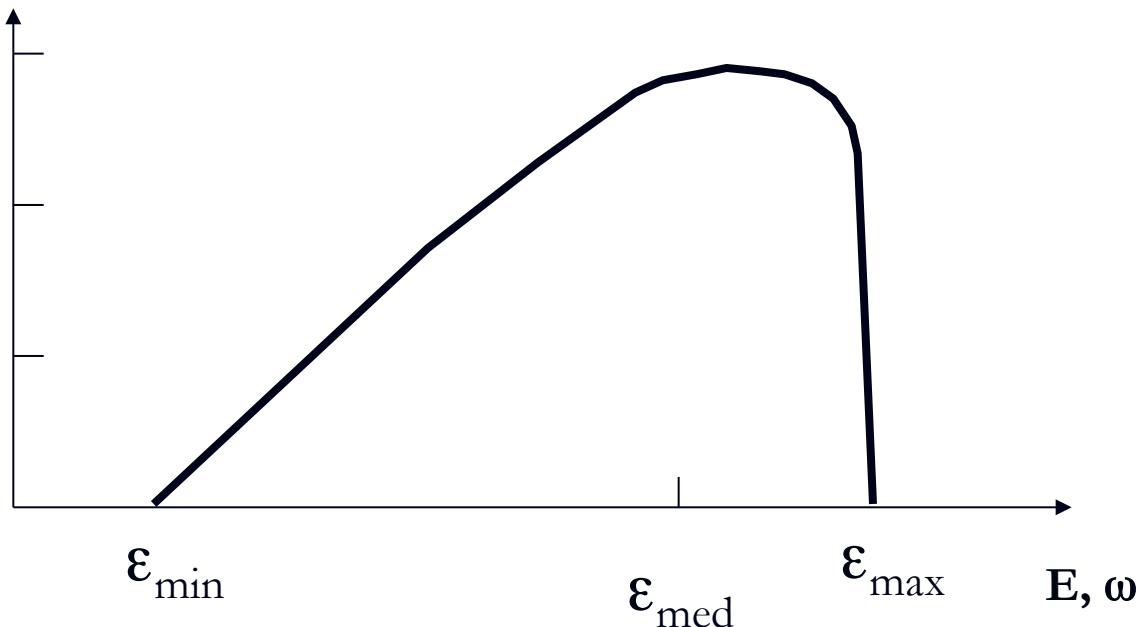
Il guadagno max e'  $A_{\max} = 4\gamma^2$

Il guadagno medio e'  $A_{\text{ave}} = 4\gamma^2/3 \rightarrow = A_{\max}/3$

Il guadagno min e'  $A_{\min} = 1/4\gamma^2 \rightarrow = A_{\max}/16\gamma^4 \ll A_{\max}$

Ne segue che lo spettro deve essere molto piccato vicino al valore max permesso cinematicamente

$dP/dE$  ( $dP/d\omega$ )

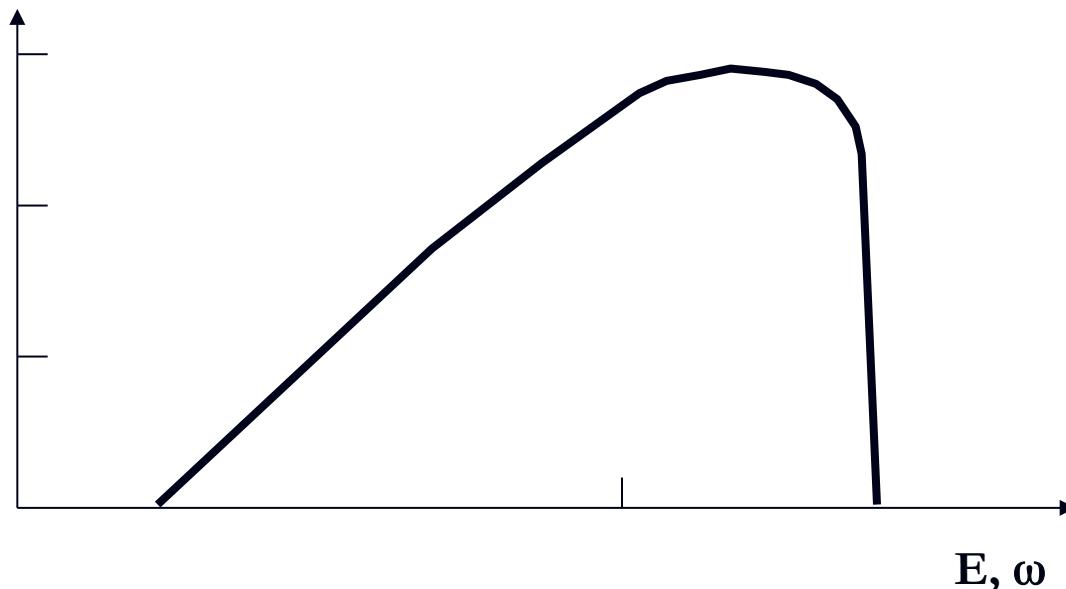


# Spettro Compton:limite di Thomson

## Calcolo esatto

$$\frac{dE}{dt d\omega_1} = \frac{3}{16} \hbar \sigma_{TC} \cdot \frac{n(\omega) d\omega}{\gamma^4 \omega^2} \cdot \omega_1 \cdot [\omega_1 + 4\gamma^2 \omega + 2\omega_1 \ln \frac{\omega_1}{4\gamma^2 \omega} - \frac{\omega_1^2}{2\gamma^2 \omega}]$$

$dP/dE$  ( $dP/d\omega$ )



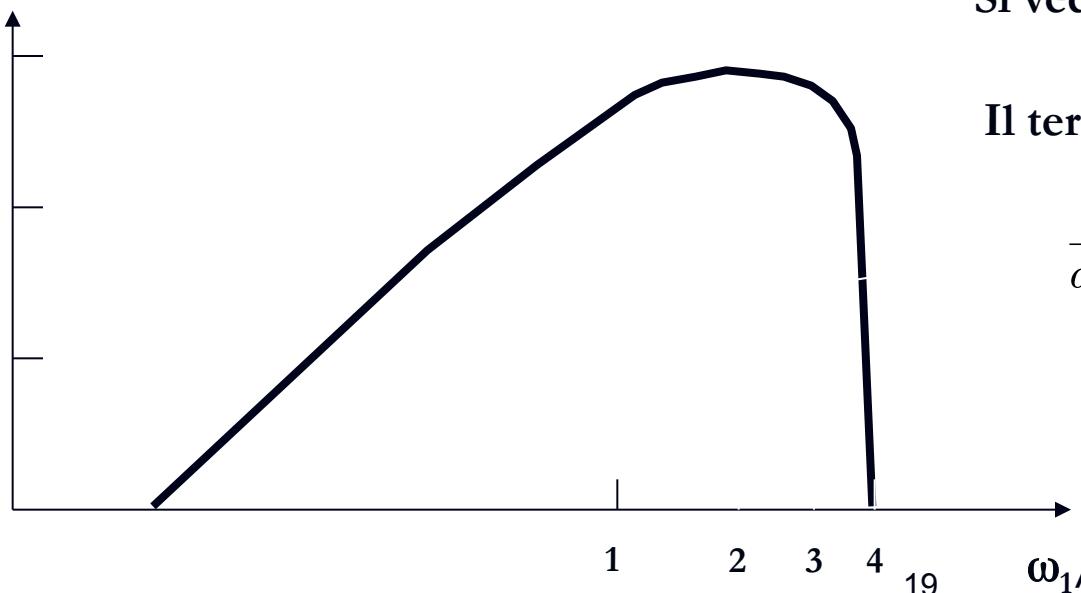
Lo spettro ha una struttura ben definita e caratteristica

# Spettro Compton:limite di Thomson

$$\frac{dE}{dtd\omega_1} = \frac{3}{16} \hbar \sigma_T c \cdot \frac{n(\omega) d\omega}{\gamma^4 \omega^2} \cdot \omega_1 \cdot [\omega_1 + 4\gamma^2 \omega + 2\omega_1 \ln \frac{\omega_1}{4\gamma^2 \omega} - \frac{\omega_1^2}{2\gamma^2 \omega}]$$

Riscrivendo  $dP/d\omega_1$  in funzione della frequenza in  $z = \frac{\omega_1}{4\gamma^2 \omega}$   
unità' di frequenza max di frequenza max

Si ottiene  $\frac{dE}{dtd\omega_1} = \frac{3}{16} \hbar \sigma_T c \cdot \frac{n(\omega) d\omega}{\gamma^4 \omega^2} \cdot 4\gamma^2 \omega \cdot \omega_1 \left[ \frac{\omega_1}{4\gamma^2 \omega} + 1 + 2 \frac{\omega_1}{4\gamma^2 \omega} \ln \frac{\omega_1}{4\gamma^2 \omega} - \frac{\omega_1^2}{8\gamma^4 \omega^2} \right]$



Si vede che quando  $\frac{\omega_1}{4\gamma^2 \omega} \ll 1$

Il termine in parentesi quadra [...] e'  $\ll 1$

$$\frac{dE}{dtd\omega_1} = \frac{3}{4} \hbar c \sigma_T \cdot \frac{n(\omega) d\omega}{\gamma^2 \omega} \cdot \omega_1$$

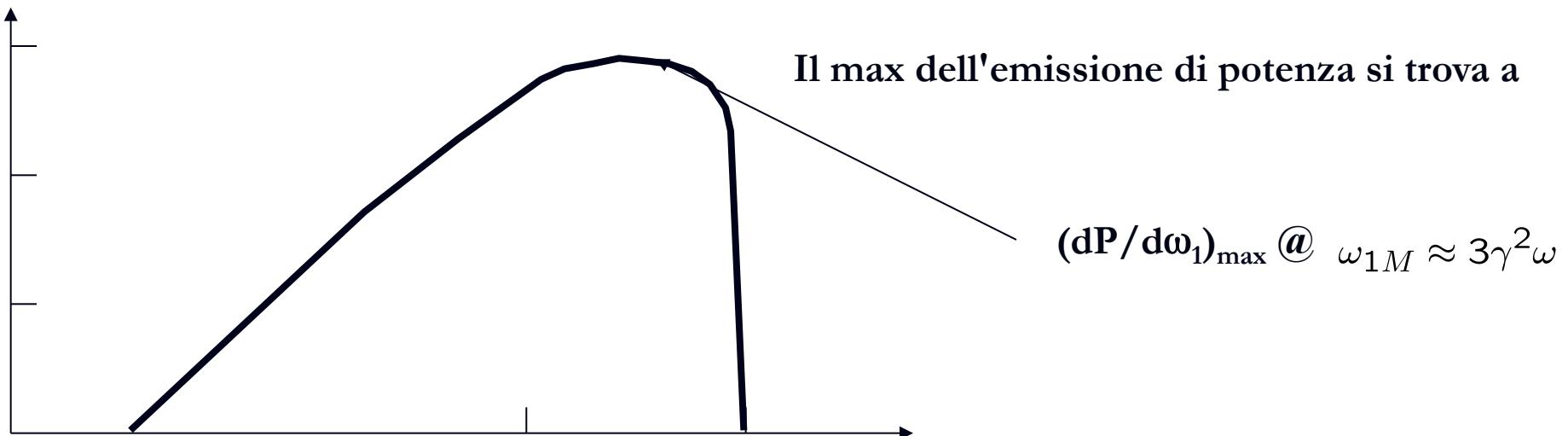
Lo spettro di frequenza tende a zero come  $z$ , cioè fissati  $\gamma$  e  $\omega$ , decresce come  $\omega_1$  a basse frequenze

# Spettro Compton:limite di Thomson

$$\frac{dE}{dtd\omega_1} = \frac{3}{16} \hbar \sigma_T c \cdot \frac{n(\omega)d\omega}{\gamma^4 \omega^2} \cdot \omega_1 \cdot 4\gamma^2 \omega \left[ \frac{\omega_1}{4\gamma^2 \omega} + 1 + 2 \frac{\omega_1}{4\gamma^2 \omega} \ln \frac{\omega_1}{4\gamma^2 \omega} - \frac{\omega_1^2}{8\gamma^4 \omega^2} \right]$$

Lo spettro si deve annullare alla max frequenza di emissione  $(\omega_1)_{max} \approx 4\gamma^2 \omega$

$$\frac{dE}{dtd\omega_1}((\omega_1)_{max}) = \frac{3}{16} \hbar \sigma_T c \cdot \frac{n(\omega)d\omega}{\gamma^4 \omega^2} \cdot \omega_1 \cdot 4\gamma^2 \omega [1 + 1 + 2 \ln 1 - 2] = 0 \quad \text{OK}$$

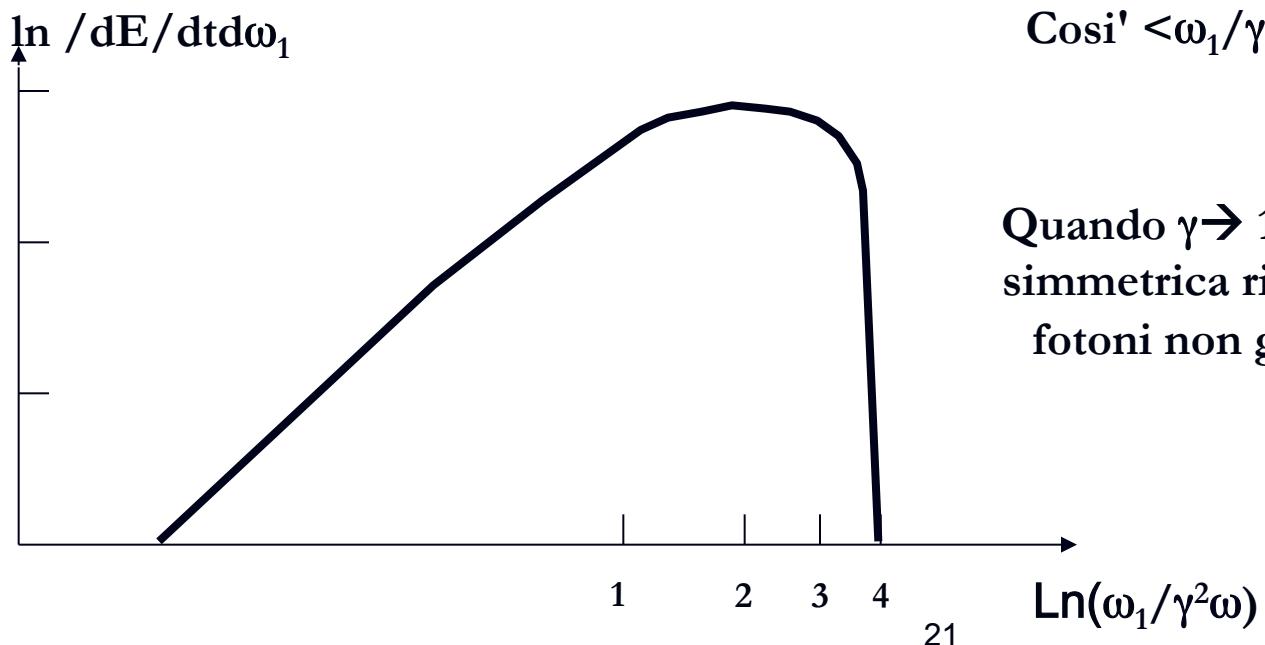


# Spettro Compton:limite di Thomson

$$\frac{dE}{dtd\omega_1} = \frac{3}{16} \hbar \sigma_T c \cdot \frac{n(\omega) d\omega}{\gamma^4 \omega^2} \cdot \omega_1 \cdot 4\gamma^2 \omega \left[ \frac{\omega_1}{4\gamma^2 \omega} + 1 + 2 \frac{\omega_1}{4\gamma^2 \omega} \ln \frac{\omega_1}{4\gamma^2 \omega} - \frac{\omega_1^2}{8\gamma^4 \omega^2} \right]$$

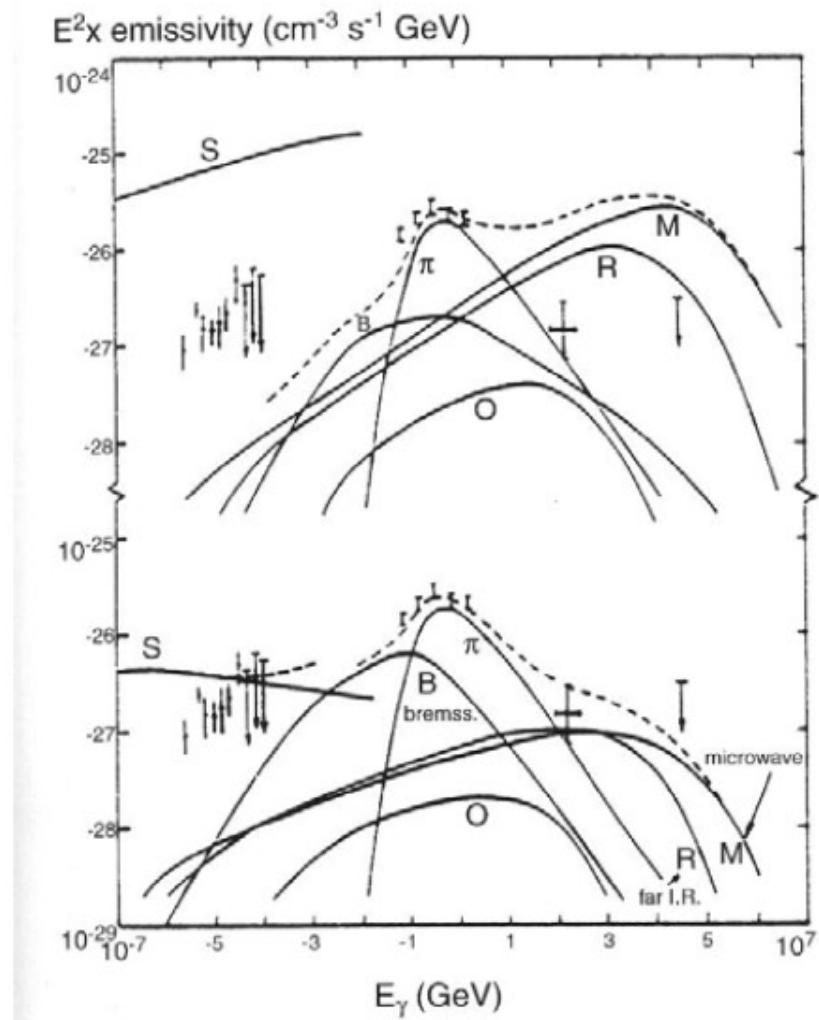
La distribuzione e' asimmetrica rispetto agli estremi: se prendiamo una distribuzione di fotoni monoenergetici, in media il campo di fotoni guadagna energia

NB: il guadagno medio di energia di un fotone su un e- ultrarel. e'  $\langle \epsilon_1 \rangle / \langle \epsilon \rangle \approx 4\gamma^2/3$



Così'  $\langle \omega_1/\gamma^2\omega \rangle \sim 4/3$

Quando  $\gamma \rightarrow 1$  la distribuzione diventa simmetrica rispetto ad 1 e il campo di fotoni non guadagna energia netta



**Fig. 6.13.** The predicted X-ray and  $\gamma$ -ray emissivity from various production processes: inverse Compton-interactions with the microwave background (**M**), far infrared radiation (**R**), starlight (**O**); synchrotron radiation (**S**); nonthermal bremsstrahlung (**B**); the decay of neutral pions produced in nuclear interactions of cosmic rays ( $\pi$ ). The total emissivity is shown as the **dashed curve**. The predictions are compared with the derived emissivity from observations in different energy bands. From Protheroe and Wolfendale (1980 [409])

# Compton inverso

Si ha compton inverso ogni volta che un e- si propaga in un gas di fotoni, cioe' in regioni in cui vi radiazione elettromagnetica (eg CMB, luce stellare, radiazione radio,...)

Il calcolo dettagliato della perdita di energia di un singolo e- (vedi proc. Emiss. Elm) che si propaga in un campo di radiazione omogeneo ed isotropo fornisce

$$\langle \left( \frac{dE}{dt} \right)_{tot} \rangle = \frac{4}{3} c \sigma_T U_{rad} \gamma^2 \beta^2$$

Dove  $U_{rad}$  e' la densita' di energia del campo di fotoni,  $\sigma_T = 8\pi r_e^2/3 = 0.66$  barn e' la sez d'urto Thomson,  $\gamma = E/m_e c^2$  e' l'energia dell'elettrone inc,  $\beta \sim 1$  per part ultrarel

$$\left( \frac{dE}{dt} \right)_{IC} = 1.66 \times 10^6 \gamma^2 U_{rad} \quad \text{eV s}^{-1} \quad \beta \sim 1$$

$U_{rad}^{ottico} \sim 6 \times 10^5 \text{ eV m}^{-3}$  per fotoni ottici in un punto tipico della galassia,

$U_{rad}^{CMB} \sim 2.6 \times 10^5 \text{ eV m}^{-3}$  per il fondo di radiazione cosmico che permea tutto l'universo

# Spettro Compton totale

Per ottenere lo spettro fisico della radiazione Compton  $dN_1/dtd\epsilon_1$ , occorre che lo spettro prodotto da un segmento di popolazione di fotoni  $n(\epsilon)d\epsilon$  sia integrato sullo spettro di elettroni e dei fotoni iniziali

$$\frac{dN_{\gamma, \epsilon}}{dtd\epsilon_1} = \frac{3}{16}\sigma_T c \cdot \frac{1}{\gamma^4 \epsilon^2} \cdot [\epsilon_1 + 4\gamma^2 \epsilon + 2\epsilon_1 \ln \frac{\epsilon_1}{4\gamma^2 \epsilon} - \frac{\epsilon_1^2}{2\gamma^2 \epsilon}] n(\epsilon) d\epsilon = f(\gamma, \epsilon, \epsilon_1) n(\epsilon) d\epsilon$$

Data una distribuzione di elettroni  $dN_e = N_e(\gamma) d\gamma$  Lo spettro Compton e'

$$(\frac{dN_{tot}}{dtd\epsilon_1}) = \int_{\gamma, \epsilon} f(\gamma, \epsilon, \epsilon_1) n(\epsilon) d\epsilon N_e(\gamma) d\gamma$$

Il caso interessante e' quello di una distribuzione di elettroni  $dN_e = N_e(\gamma) d\gamma$

con una legge di potenza

$$N_e(\gamma) = \begin{cases} K_e \gamma^{-p} & \gamma_o \leq \gamma \leq \gamma_m \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

# Spettro qualitativo

Qualitativamente poiche' lo spettro e' molto piccato intorno al max, il cui ordine di grandezza e'  $\epsilon_{\max} \approx \gamma^2 \epsilon$ , possiamo pensare gli e- diffondano solo fotoni con  $E = \epsilon_{\max}$   $\rightarrow$  all'energia  $\epsilon_1$  contribuiscono solo gli e- con  $\gamma = (\epsilon_1 / \epsilon)^{1/2}$

$\rightarrow dN_\gamma \approx dn_e \approx \gamma^{-p} d\gamma \approx \epsilon_1^{-(p+1)/2} d\epsilon_1$

# Spettro Compton totale: Thomson

$$\left(\frac{dN_{tot}}{dtd\epsilon_1}\right) = \pi r_e^2 c K_e 2^{p+3} \frac{p^2 + 4p + 11}{(p+3)^2(p+1)(p+5)} \epsilon_1^{-(p+1)/2} \int \epsilon^{(p-1)/2} n(\epsilon) d\epsilon$$

L'intensita', i.e. la normalizzazione dello spettro fisico OSSERVATO, dipende dalla distribuzione iniziale dei fotoni

Ma l'indice spettrale dipende SOLO dalla distribuzione energetica degli elettroni

Nel caso di una distribuzione di corpo nero dei fotoni lo spettro osservato e'

$$\left(\frac{dN_{tot}}{dtd\epsilon_1}\right) = \pi^{-1} (r_e^2 / \hbar^3 c^2) K_e (kT)^{(p+5)/2} F(p) \epsilon_1^{-(p+1)/2}$$

TABLE I. The function  $F(p)$  in Eq. (2.66).

$p$	$F(p)$
0	3.48
0.5	3.00
1.0	3.20
1.5	3.91
2.0	5.25
2.5	7.57
3.0	11.54
3.5	18.44
4.0	30.62
4.5	52.57
5.0	92.90

$F(p) = 2^{p+3} [(p^2 + 4p + 11)/(p+3)^2(p+1)(p+5)] \times \Gamma[\frac{1}{2}(p+5)] \xi[\frac{1}{2}(p+5)]. \quad (2.66)$

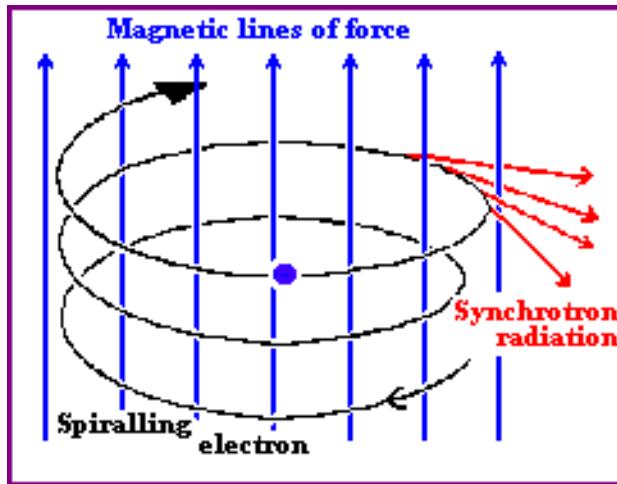
L'espressione e' esatta finche'  $\epsilon_1$  e' LONTANO dagli end-points della distribuzione: il range di validita' dell'espressione e' infatti

$\gamma_o^2 kT \ll \epsilon_1 \ll \gamma_m^2 kT$

Oltre alla condizione di Thomson  $\epsilon_1 \sim \gamma^2 kT \ll \gamma m c^2$

# Radiazione di Sincrotrone (RS)

La radiazione di sincrotron e' quella emessa da elettroni di alta energia che curvano in un campo magnetico



Questo processo e' quello che domina nella astrofisica delle alte energie

Storicamente fu osservato nei primi esperimenti con betatroni in cui gli e- erano accelerati ad energie relativistiche

Lo stesso meccanismo e' responsabile dell'emissione radio della galassia, di supernovae remnants e di oggetti extragalattici

E' anche responsabile, p.es., dell'emissione non termica osservata nella Crab nebula

# Sincrotrone

Si hanno perdite per emissione di radiazione di sincrotrone ogni volta che un e- si propaga in un campo magnetico

Calcolo dettagliato per la perdita di energia di singolo e- che si muove in un campo  $B$  (in cui la direzione fra  $B$  e  $\nu$  e' distribuita isotropicamente)

$$\langle \left( \frac{dE}{dt} \right) \rangle = \frac{4}{3} \sigma_T c U_B \beta^2 \gamma^2$$

$U_B = B^2/8\pi$  e' la densita' di energia del campo magnetico

$$\left( \frac{dE}{dt} \right)_S = 6.6 \times 10^4 \gamma^2 B^2 \text{ eV s}^{-1} \quad \beta \approx 1$$

# Il campo magnetico galattico

Intensità media:  $(3 \pm 3) \times 10^{-10}$

Coerenti su scale di 1-10 pc

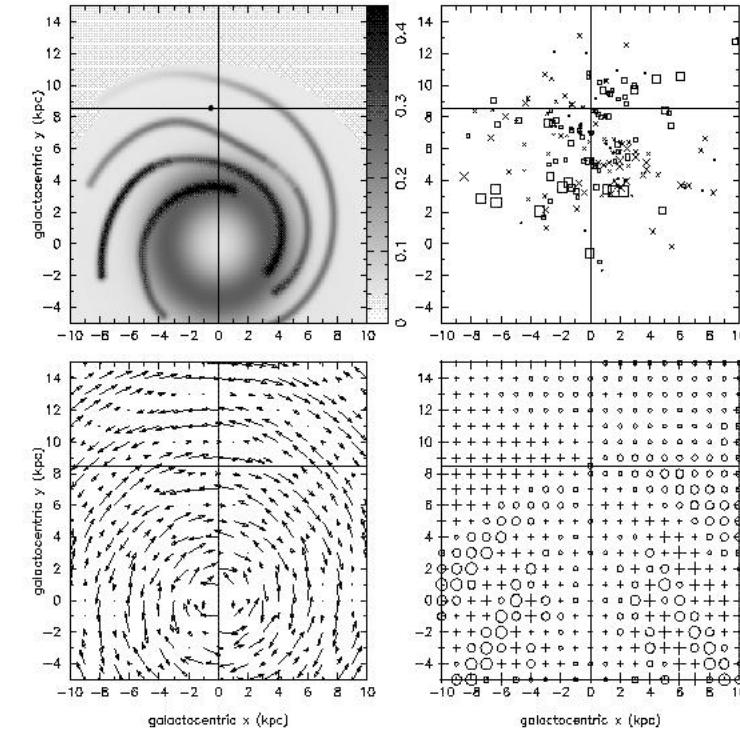
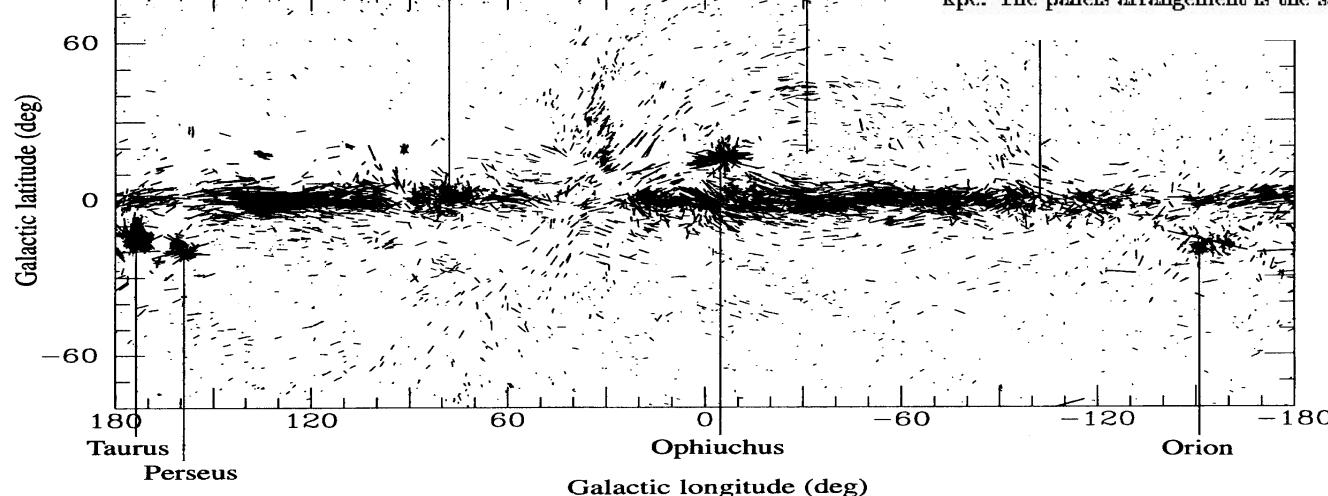
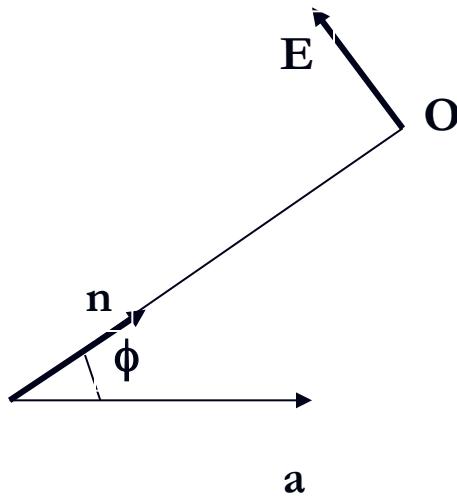


Figure 4. The large scale pattern of the magnetic field, using  $p = -4.5^\circ$  and  $R_o = 9.3$  kpc. The panels arrangement is the same as in figures 1 and 2.

# RS: potenza totale

Abbiamo tutti gli ingredienti per calcolare la potenza totale emessa

La potenza relativistica di Larmor e'  $\frac{dE}{dt} = \frac{\gamma^4 e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} (a_{\perp}^2 + \gamma^2 a_{\parallel}^2)$



Nel sistema di quiete della carica si ha Larmor non relativistico

$$\frac{dE}{dt} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} (a_{\perp}^2 + a_{\parallel}^2) = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} a^2$$

Ricordiamo che:

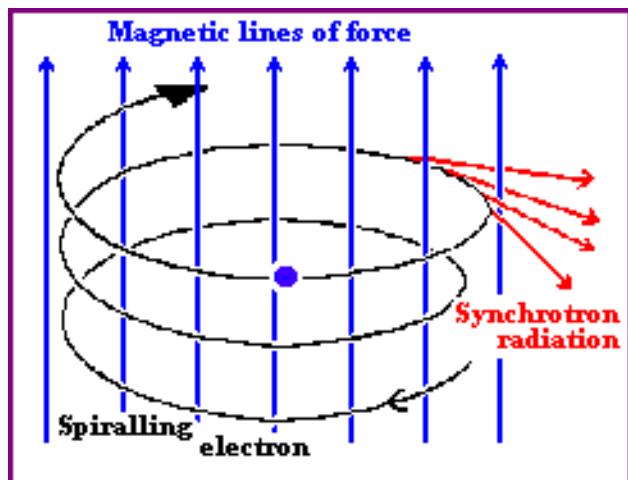
- la distribuzione angolare e' prop  $\sin^2 \phi$
- la radiazione e' polarizzata: E oscilla come la proiezione di a nel piano **perp** alla dir di osservazione  
 $E \approx n \times (n \times a)$

Basta quindi calcolare l'accelerazione di una particella in un campo magnetico

# RS: potenza totale

In un campo magnetico una particella si muove lungo una spirale con angolo di pitch costante

Infatti le equazioni relativistiche del moto sono



$$\frac{d(\gamma m \vec{v})}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\gamma \frac{d(m \vec{v})}{dt} + \frac{d(\gamma m)}{dt} \vec{v} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\frac{d(\gamma m c^2)}{dt} = q \vec{v} \cdot \vec{E}$$

Se  $E=0 \rightarrow \gamma = \text{cost.}$  e  $v=\text{cost.}$

L'equazione si riduce a  $\gamma \frac{d(m \vec{v})}{dt} = q \vec{v} \times \vec{B}$

# RS: potenza totale

$$\gamma \frac{d(m\vec{v})}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Scompongo  $v$  in componenti **parallele** e **perpendicolari**  
 L'angolo di pitch è  $\theta = v_{\perp}/v_{\parallel}$

$$\frac{d(m\vec{v}_{\parallel})}{dt} = 0 \quad \text{dato che la forza è perp B}$$

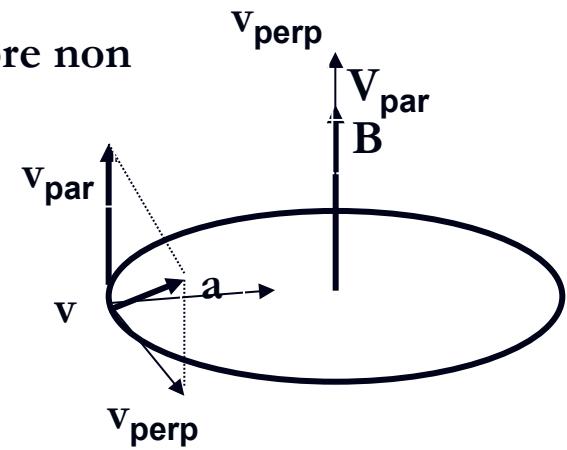
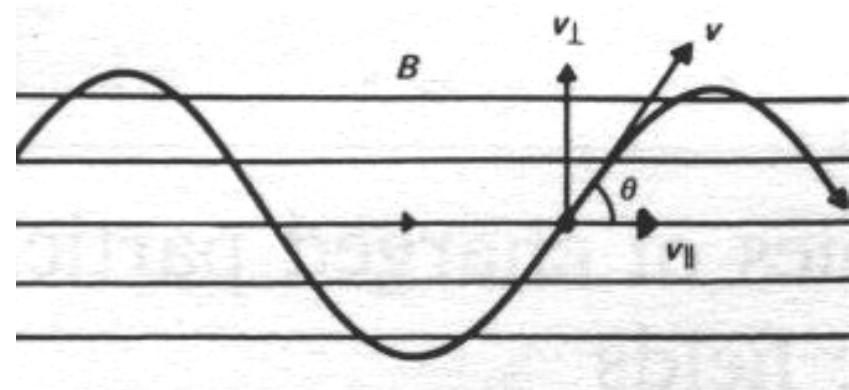
Nel piano **perp B**  $\gamma \frac{d(m\vec{v}_{\perp})}{dt} = q\vec{v}_{\perp} \times \vec{B} = qvB \sin \theta i_v \times i_B$  L'accelerazione è **perp B** e

Dato che se aggiungo la comp. parallela il prodotto vettore non cambia si puo' scrivere

$$\gamma \frac{d(m\vec{v})}{dt} = q\vec{v}_{\perp} \times \vec{B} = qvB \sin \theta i_v \times i_B$$

Così l'accelerazione ist. è **perp** al piano di  $v$  e  $B$

→  $v$  ruota intorno alla direzione di  $B$



→ In campi B costanti, questo risulta in un moto di traslazione lungo B e uno circolare uniforme intorno alla direzione del campo B

# RS: potenza totale

Nel piano **perp** B, l'accelerazione e'  $a = v_{\perp}^2/r = qvB \sin \theta/\gamma m$

Il raggio di curvatura o di girazione della traiettoria e'  $r = \gamma mv \sin \theta/qB$

La frequenza del moto circolare e'  $\omega = v_{\perp}/r = qB/\gamma m$  detta di Larmor

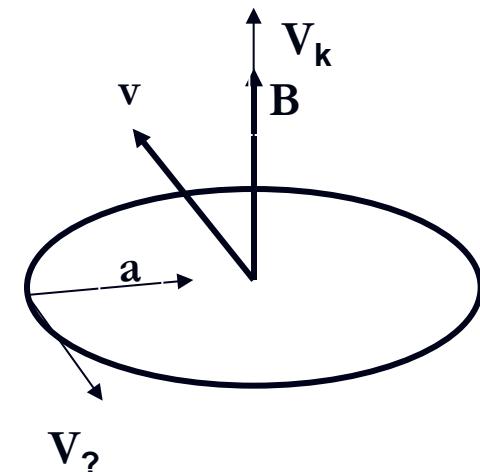
Nel caso non relativistico  $\gamma = 1 \rightarrow \omega/B = q/m$

Per un'elettrone  $v/B = 28 \text{ GHz T}^{-1}$

Per ottenere la potenza totale basta sostituire nell'espressione di Larmor, l'accelerazione centripeta del moto

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\gamma^4 e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} a_{\perp}^2 = \frac{\gamma^4 e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} (evB \sin \theta/\gamma m)^2$$

$$= \frac{\gamma^2 e^4 v^2 B^2 \sin^2 \theta}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3} = \frac{e^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c} \frac{v^2}{c^2} \gamma^2 \sin^2 \theta$$



E' la potenza totale emessa

# RS: potenza totale B

C'e' anche un altro modo di derivare la potenza: calcolare la potenza nel sistema di quiete dell'e- e trasformarla poi nel laboratorio

Nel sistema di quiete dell'elettrone,  $v_{ist} = 0$  e l'accelerazione  $d\beta/dt$  e' piccola rispetto a c

Qui si puo' usare la formula non relativistica di Larmor  $(\frac{dE}{dt})' = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} a'^2$

Nel labo, dove B e' fissato, l'asse x e'  $\parallel$  a  $v_{ist}$  dell'e- e z e' nel piano di x e B ( con z perp x)

Per trovare a dobbiamo trasformare i campi elm in S' dato che  $\vec{F}' = q(\vec{E}' + \vec{v}' \times \vec{B}')$

$$\vec{E}' = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \gamma\vec{v} \times \vec{B}$$

Poiche'  $v' = 0$  basta considerare solo E'

$$\vec{B}' = \gamma(\vec{B} - \vec{v} \times \vec{E}) = \gamma\vec{B}$$

$$\vec{F}' = q\vec{E}'$$

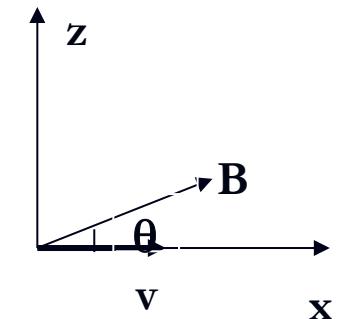
Con la scelta degli in S  $v(v_x, 0, 0)$  e  $B(B_x, 0, B_z)$

$$E'_x = 0$$

$$E'_y = -\gamma v B_z = -\gamma v B \sin \theta \quad \rightarrow \quad a' = -e\gamma v B \sin \theta / m$$

$$E'_z = 0$$

$$(\frac{dE}{dt}) = (\frac{dE}{dt})' = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} a'^2 = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} (e\gamma v B \sin \theta / m)^2 = \frac{e^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c} \frac{v^2}{c^2} \gamma^2 \sin^2 \theta$$



# RS: potenza totale B

$$\left(\frac{dE}{dt}\right) = \frac{e^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c} \frac{v^2}{c^2} \gamma^2 \sin^2 \theta \quad \text{La riscriviamo come}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dE}{dt}\right) &= \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0 m^2 c} B^2 \beta^2 \gamma^2 \sin^2 \theta \frac{2\mu_o c^3}{2\mu_o c^3} = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^4} \frac{B^2}{2\mu_o} \beta^2 \gamma^2 \sin^2 \theta 2\mu_o \frac{c}{\epsilon_0 \mu_o} \quad c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_o} \\ &= \frac{2e^4}{6\pi\epsilon_0^2 m^2 c^4} c \frac{B^2}{2\mu_o} \beta^2 \gamma^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

**Ma**  $\sigma_T = \frac{8}{3}\pi r_e^2 = \frac{8}{3}\pi \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}\right)^2 = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0^2 m^2 c^4}$

e  $U_B = \frac{B^2}{2\mu_o}$  e' la densita' di energia magnetica


$$\left(\frac{dE}{dt}\right) = 2\sigma_T c U_B \beta^2 \gamma^2 \sin^2 \theta$$

E' la potenza emessa da un elettrone con angolo di pitch  $\theta$

# RS: potenza totale B

$$\left(\frac{dE}{dt}\right) = 2\sigma_T c U_B \beta^2 \gamma^2 \sin^2 \theta$$

- Nel caso di una distribuzione isotropa di particelle la potenza media si ottiene mediando sugli angoli di pitch con probabilità'

$$p(\Omega)d\Omega = d(\cos\theta)/2$$

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = 2\sigma_T c U_B \beta^2 \gamma^2 \int \sin^2 \theta p(\Omega) d\Omega$$

$$= 2\sigma_T c U_B \beta^2 \gamma^2 \int (1 - x^2) dx / 2 \quad \blacksquare \text{x}=\cos\theta$$

$$= \frac{4}{3} \sigma_T c U_B \beta^2 \gamma^2$$

- nel caso di particelle che si propagano nel mezzo interstellare,  $U_B$  e' il valore medio della densita' di energia. Le irregolarita' casuali del campo B "diffondono" la particella che cambia il suo angolo di pitch in modo casuale → in questo senso l'espressione trovata rappresenta la potenza totale media

# RS: potenza totale B

$$\langle \left( \frac{dE}{dt} \right) \rangle = \frac{4}{3} \sigma_T c U_B \beta^2 \gamma^2$$

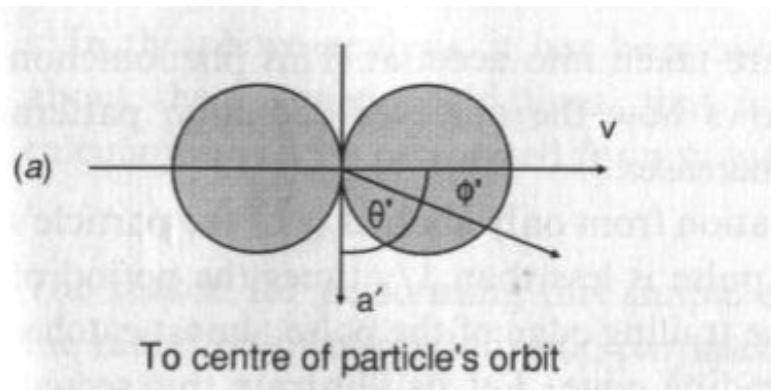
- L'espressione trovata e' uguale a quella dello scattering Compton nel limite di Thomson con  $U_B$  al posto di  $U_E$
- La coincidenza non e' accidentale
- La radiazione di sincrotrone puo' essere considerata come scattering Compton dell'elettrone con i fotoni virtuali del campo B → potremmo procedere esattamente come nel caso Compton nel limite di Thomson

# RS: spettro-argomenti fisici

- Cominciamo con l'analizzare alcuni degli aspetti fondamentali dei processi in cui sono implicate particelle relativistiche, che saranno utili per capire da dove molti dei risultati esatti provengono
- Una delle caratteristiche fondamentali della radiazione da particelle relativistiche e' che essa e' collimata nella direzione del moto della particella che emette
- Parte di questo effetto e' associato con l'aberrazione relativistica tra il riferimento della particella e quello dell'osservatore
- Ma oltre a cio' occorre valutare con attenzione anche lo sviluppo temporale di cosa e' realmente visto dall'osservatore distante

# RS: beaming

Consideriamo per semplicita' un elettrone con angolo di pitch  $\pi/2$



Nel riferimento S' dell'elettrone, la distribuzione angolare della radiazione e' quella dipolare

$$\approx \sin\theta'^2 = \cos\phi'^2$$

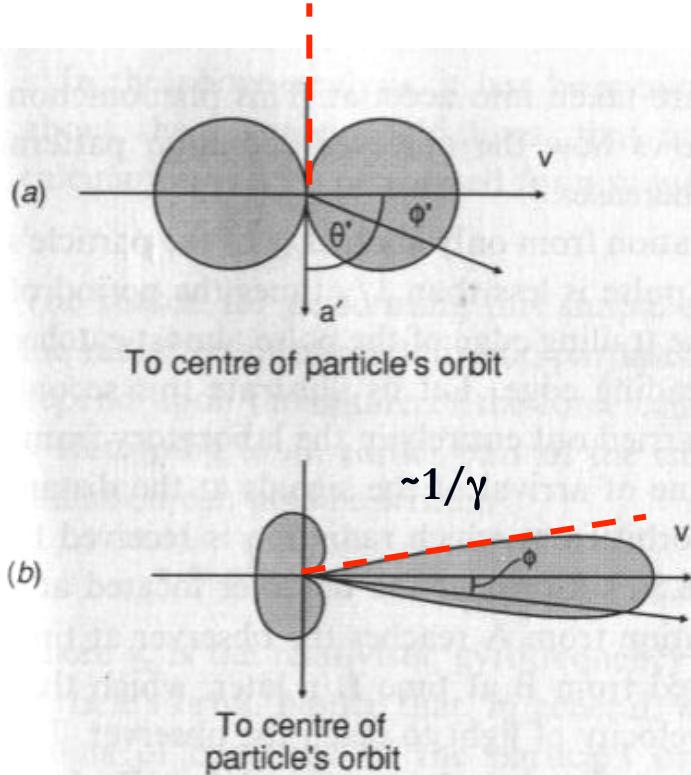
A parte la normalizzazione, puo' essere pensata come alla probabilita' con cui i fotoni sono emessi in S'

Applicando le formule di aberrazione possiamo ottenere la distribuzione nel labo

$$\cos\phi = \frac{(\cos\phi' + \beta)}{(1 + \beta \cos\phi')} \quad \sin\phi = \frac{\sin\phi'}{\gamma(1 + \beta \cos\phi')}$$

(il segno + compare perche' stiamo applicando le trasformazioni inverse da S' a S)

# RS: beaming



$$\cos \phi = \frac{(\cos \phi' + \beta)}{(1 + \beta \cos \phi')} \quad \sin \phi = \frac{\sin \phi'}{\gamma(1 + \beta \cos \phi')}$$

Come già sappiamo, la radiazione viene concentrata in avanti in un angolo  $\phi \approx 1/\gamma$

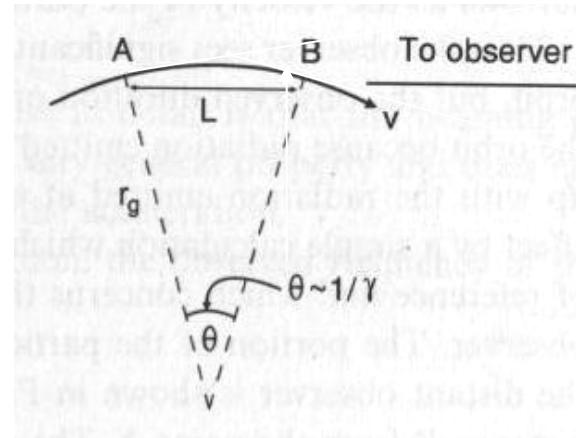
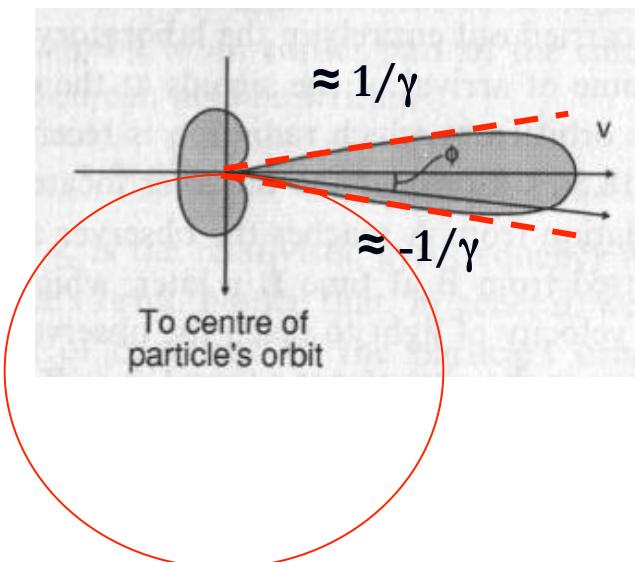
$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{\gamma^4(1 - \beta \cos \theta)^4} \frac{dP'}{d\Omega'}$$

Infatti se prendiamo  $\phi' = \pi/2 \rightarrow \sin \phi \approx 1/\gamma \approx \phi$

La conseguenza di ciò è che un osservatore lontano riceve un impulso di radiazione solo quando la velocità della particella punta lungo la linea di vista entro un angolo  $1/\gamma$ , fortemente spostata in frequenza a causa dell'effetto Doppler

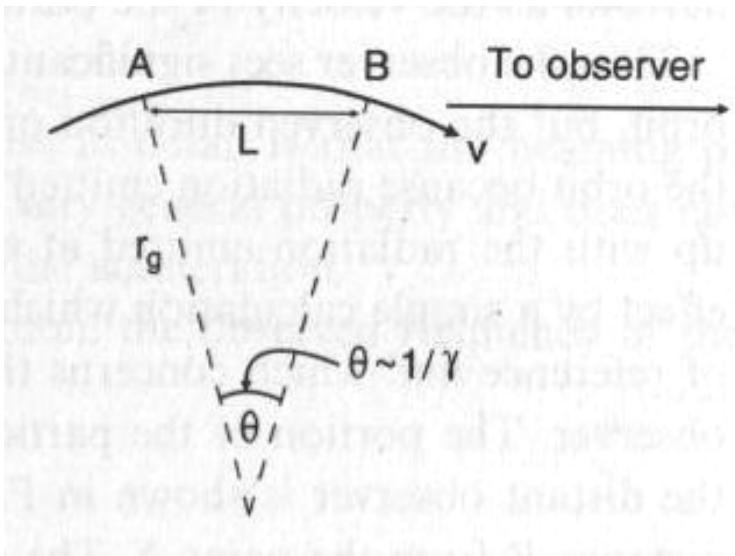
# RS: beaming

Da cio' segue che l'osservatore riceve radiazione solo da una frazione  $1/\gamma$  dell'orbita della particella



Ma la durata dell'impulso, misurata da un osservatore distante e' pero' molto piu' breve di  $1/\gamma$  volte il periodo dell'orbita come ci si potrebbe a prima vista aspettare nel caso di una particelle relativistica

# RS: beaming



Supponiamo che l'osservatore **O** sia a distanza **R** dalla posizione **A**

**O** inizia a ricevere la radiazione quando la particella transita in **A**

Il tempo di volo dei fotoni da **A** e'  $t_A = R/c$

**O** cessa di ricevere la radiazione quando la particella transita in **B** dopo un tempo  $\approx L/v$  dal suo passaggio in **A** e giunge ad **O** dopo un tempo  $\approx t_B = (R-L)/c$  dal transito in **B**

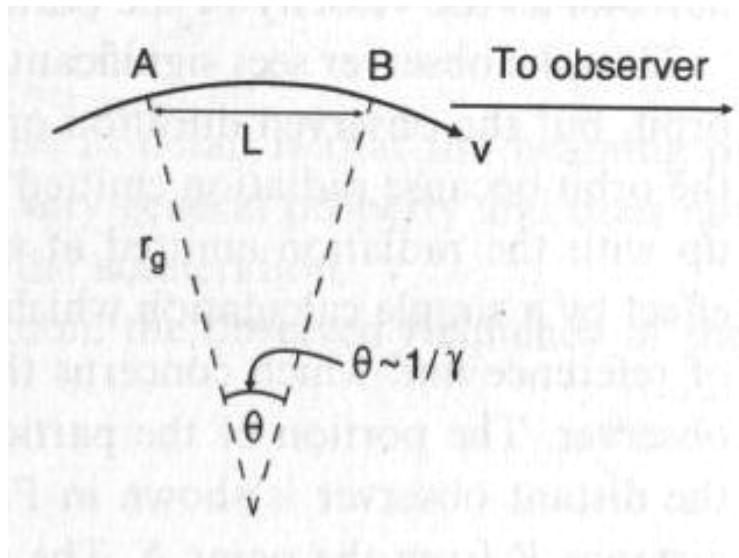
Quindi la durata totale dell'impulso misurata da **O** e'  $\Delta T \approx t_B + L/v - t_A$

$$\Delta t = (R - L)/c + L/v - R/c = -L/c + L/v = (L/v)(1 - v/c)$$

Se  $v \approx c$  la durata dell'impulso e'  $\ll L/v$  come ci si poteva aspettare ingenuamente (accade per  $c \rightarrow \infty$ )

Il fattore Doppler tiene conto del fatto che la sorgente e' in moto e "quasi" raggiunge la radiazione che emette

# RS: beaming



$$\Delta t = (L/v)(1 - v/c)$$

l'arco AB percorso sulla traiettoria  $\approx L$  se  $1/\gamma \ll 1$

$$\rightarrow L/v = r_c\theta/v \approx 1/\gamma\omega_r \quad V = \omega r_c \text{ e } \theta \sim 1/\gamma$$

ma  $\omega_r = eB/m\gamma = \omega_g/\gamma$

$\omega_g$  frequenza di Larmor non relativistica

$$\rightarrow L/v \approx 1/\omega_g$$

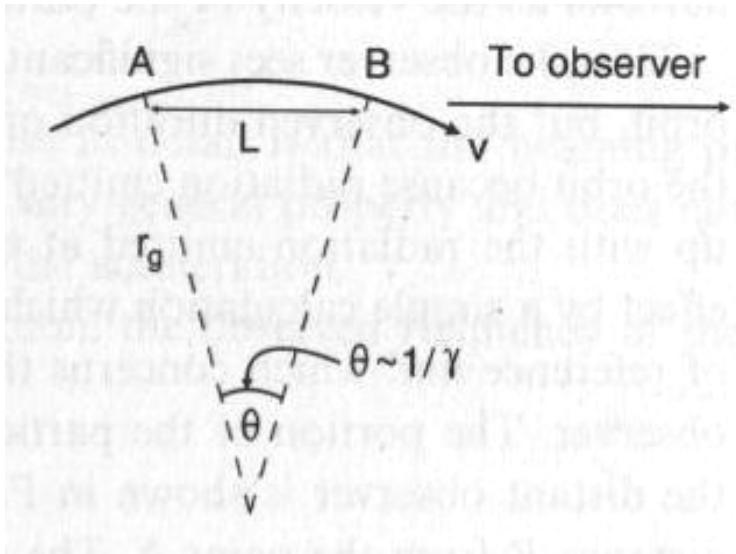
inoltre  $(1 - v/c) \approx 1/2\gamma^2$  se  $v/c \approx 1$  →  $\Delta t \approx (1/\omega_g)(1/2\gamma^2)$

$$= (1/2\omega_g\gamma^2)$$

La durata dell'impulso osservato da O e'  $\approx 1/\gamma^2$  volte piu' breve del periodo non relativistico del moto della particella  $T_g = 2\pi/\omega_g$

In termini di  $\omega_r$  si ha  $\Delta t \approx (1/2\omega_r\gamma^3)$

# RS: frequenza di emissione



$$\Delta t \approx 1/2\gamma^2\omega_g$$

Noi sappiamo che lo spettro in tal caso sara' piuttosto largo, con un cutoff a frequenze  $\omega \approx 1/\Delta t$

definiamo una frequenza critica

$$\omega_c \equiv \frac{3}{2}\gamma^2\omega_g = \frac{3}{2}\gamma^3 2\omega_r$$

Se l'angolo di pitch non e'  $\pi/2$  allora  $\omega_g \rightarrow \omega_g \sin \alpha$

Ci aspettiamo che lo spettro si estenda fino  $\approx \omega_c$  e che oltre decada rapidamente, ie c'e' poca potenza emessa oltre  $\omega_c$

Se la durata dell'impulso e'  $\Delta t$ , la massima componente di Fourier si ha alla frequenza  $\nu \approx (\Delta t)^{-1}$

Per un'elettrone  $v/B = 28 \text{ GHz T}^{-1}$

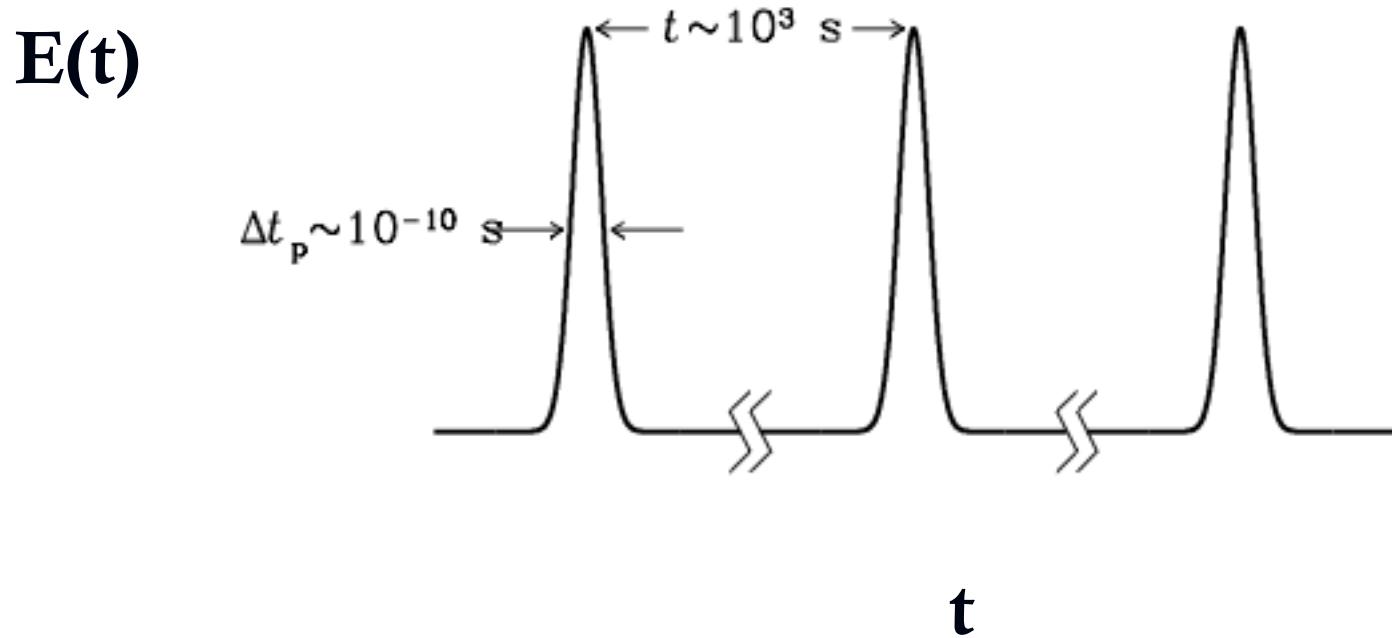
Con  $B \sim 5 \times 10^{-6} \text{ G}$

$$\omega_{larmor} \approx 2\pi \times 14 \text{ rad s}^{-1}$$

Per un e- con  $\gamma \sim 10^4$  la larghezza dell'impulso e'

$$\Delta t_{pulse} \approx \frac{1}{\gamma^2 \omega_{larmor}} \approx \frac{1}{(10^4)^2 \times 2\pi \times 14} \approx 10^{-10} \text{ s}$$

The time between pulses is  $\sim t \approx \frac{\gamma}{\nu_{larmor}} \approx 10^3 s$



# RS: spettro qualitativo

Possiamo dedurre molto sulle caratteristiche dello spettro usando il fatto che  $E$  e' solo funzione di  $\gamma\theta$

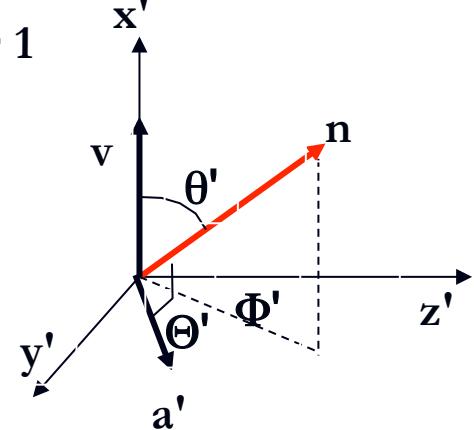
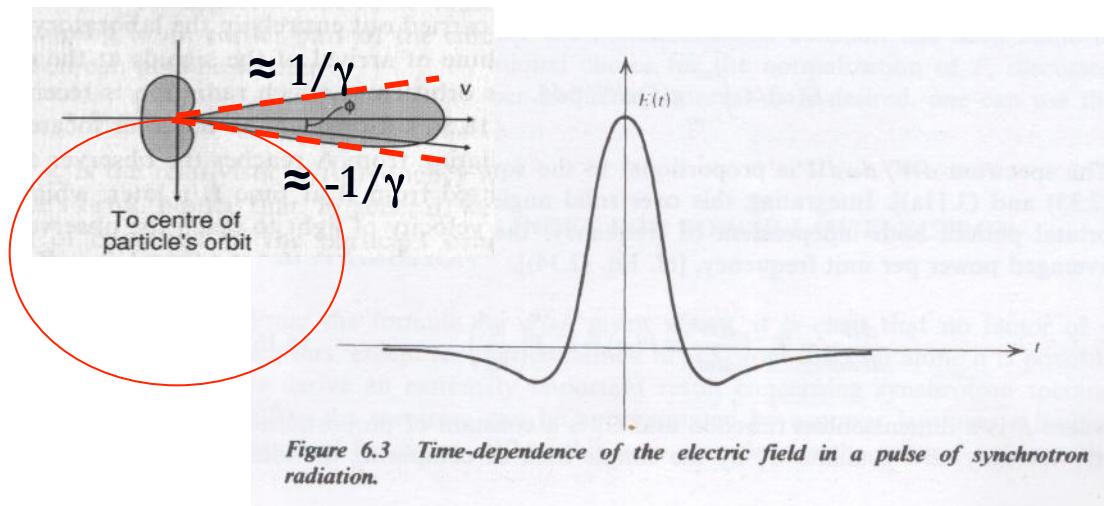
Nel caso di accel **perp**  $v$ , come della RS, la distribuzione angolare e' (cfr. Irraggiamento)

$$\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)_\perp = \frac{q^2}{4\pi c^3} \frac{|\vec{a}_\perp|^2}{(1-\beta\mu)^4} \left(1 - \frac{\sin^2\theta \cos^2\Phi}{\gamma^2(1-\beta\mu)^2}\right) \quad \text{Nel limite ultra-rel } \gamma \gg 1$$

$$\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)_\perp \approx \frac{4q^2 a_\perp^2}{\pi c^3} \gamma^8 \frac{1 - 2\gamma^2\theta^2 \cos^2\phi + \gamma^4\theta^4}{(1+\gamma^2\theta^2)^6}$$

Dato che  $\left(\frac{dP}{d\Omega}\right) \propto |E|^2$  possiamo scrivere  $E(t) \propto F(\gamma\theta)$

$t$  e' misurato nel rif dell'osservatore



L'osservatore osserva  $E \neq 0$  solo quando  $v$  punta su di lui entro un cono di semi-aper.  $1/\gamma$ , cioe' in un intervallo di tempo ben definito → esiste una relazione fra  $\theta$  e  $t$  (se misuriamo il tempo a partire dall'istante in cui l'osserv inizia a ricevere la radiazione

# RS: spettro qualitativo

$$E(t) \propto F(\gamma\theta) \quad \omega_c \equiv \frac{3}{2}\gamma^2\omega_g = \frac{3}{2}\gamma^3\omega_r$$

Abbiamo visto che la durata misurata dall'osservatore e'

$$t = (L/v)(1 - \beta) \approx \frac{L}{2v\gamma^2} \quad \text{Per definizione } \theta = L/a$$

$$t \approx \frac{L}{2v\gamma^2} = \frac{a\theta}{2v\gamma^2} \quad \text{Ma } \omega_r = v/a \quad t \approx \frac{\theta}{2\omega_r \sin \alpha \gamma^2} \quad \rightarrow \quad \gamma\theta \approx 2\gamma(\gamma^2\omega_r \sin \alpha)t \propto \omega_c t$$

  $E(t) \propto g(\omega_c t)$

La costante di prop non e' (ancora) nota e puo' dipendere da tutto, eccetto che dal tempo

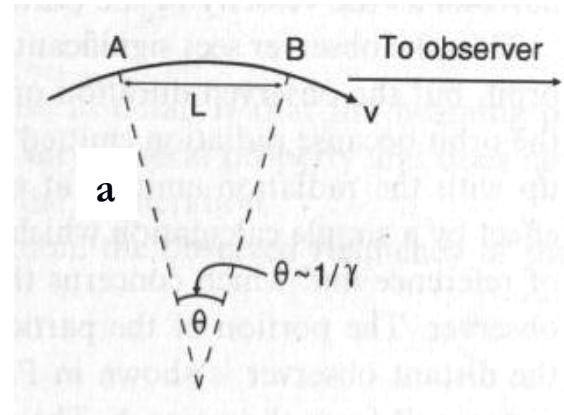
Questo e' suff per derivare la dipendenza generale della spettro da  $\omega$

La distribuzione spettrale dipende dalla trasformata di Fourier del campo E di radiazione

$$\tilde{E}(\omega) \propto \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega_c t) e^{i\omega t} dt$$

Ponendo  $x = \omega_c t$  si ha

$$\tilde{E}(\omega) \propto \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{ix\omega/\omega_c} dx$$



# RS: spettro qualitativo

$$\tilde{E}(\omega) \propto \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{ix\omega/\omega_c} dx \equiv f(\omega/\omega_c)$$

Lo spettro di energia per unita' di frequenza e angolo solido e'

$$\frac{dE}{d\omega d\Omega} \propto |E(\omega)|^2 \quad \rightarrow \quad \frac{dE}{d\omega} \propto \int |E(\omega)|^2 d\Omega \quad \text{NB: l'integrazione non cambia la dip da } \omega$$

Se T e' il periodo orbitale dell'e- (indipendente dalla frequenza emessa), la potenza media irraggiata in T e'

$$\frac{dE}{d\omega dt} = T^{-1} \frac{dE}{d\omega}$$

$$\frac{dE}{d\omega dt} \propto T^{-1} \int |E(\omega)|^2 d\Omega \equiv C_1 F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \quad \text{Lo spettro dipende solo da } \omega/\omega_c$$

La costante (rispetto a  $\omega$  e t) puo' essere determinata dalla condizione che

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^\infty \frac{dE}{d\omega dt} d\omega = C_1 \int_0^\infty F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) d\omega = \omega_c C_1 \int_0^\infty F(z) dz \quad z = \omega/\omega_c$$

Tenendo conto che

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2q^4 B^2 \gamma^2 \beta^2 \sin^2 \alpha}{3m^2 c^3} \quad \omega_c \equiv \frac{3}{2} \gamma^2 \omega_g \sin \alpha = \frac{3}{2} \gamma^3 \omega_r \sin \alpha \quad \text{Si ottiene}$$

$C_1 = \frac{4}{3} \frac{q^3 B \sin \alpha}{mc} \int_0^\infty F(z) dz$  Non conosciamo il valore assoluto di  $C_1$  finche' non si determina  $F(z)$ , ma l'integrale a denominatore fissa solo la normalizzazione assoluta dello spettro, non la dipendenza dalle variabili, che e' esatta

$$\rightarrow \frac{dE}{d\omega dt} = K \frac{q^3 B \sin \alpha}{mc} F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \quad \text{dove K e' un numero privo di dimensioni fisiche (dell'ordine dell'unita')}$$

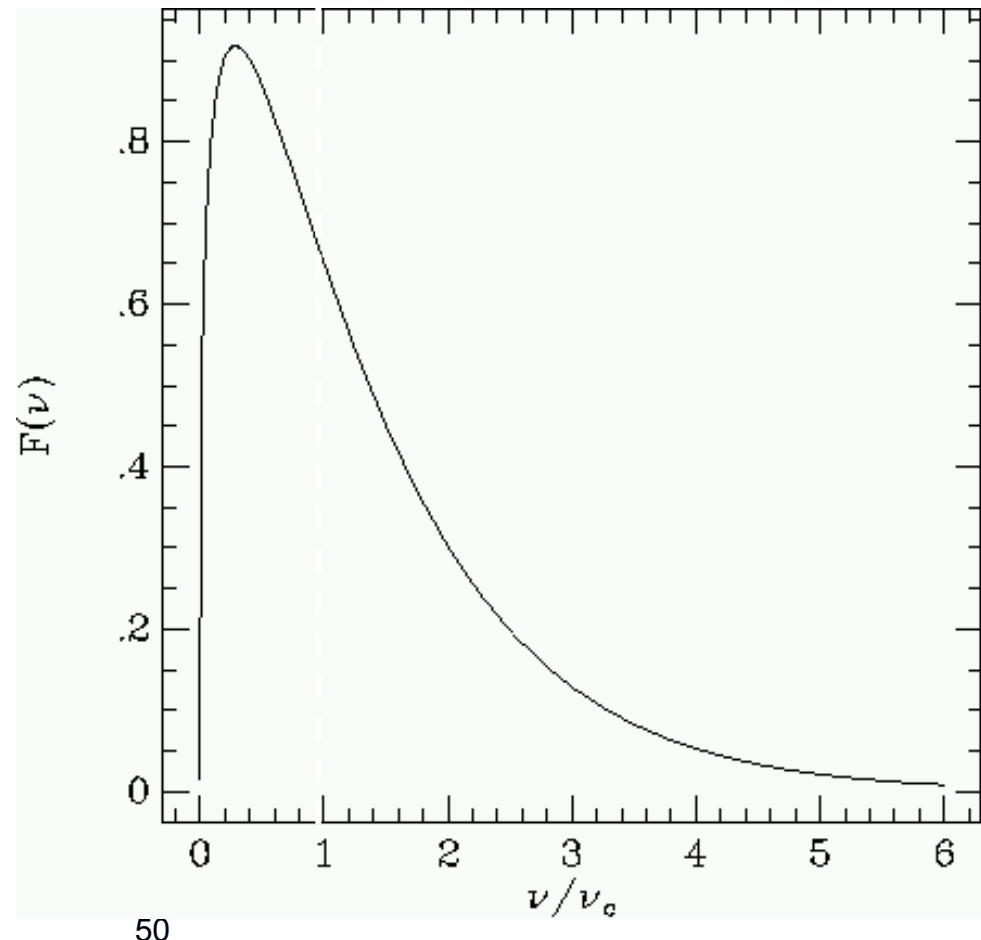
# RS: spettro di emissione

$$\left(\frac{dP}{d\omega}\right) \approx \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{2\pi mc} F(x) \quad [W Hz^{-1}] \quad x = \omega/\omega_c \\ \omega_c = 3\gamma^3 c/2a$$

La distribuzione dello spettro e' interamente determinata da  $F(x)$

La funzione  $F$  ha un largo massimo a  $\nu \approx \nu_c$  con una larghezza  $\Delta\nu/\nu \approx 1$

Il max dell'emissione si ha a  $\nu = 0.29\nu_c$



# RS: spettro di emissione

$$\left(\frac{dP}{d\omega}\right) = \left(\frac{dP}{d\omega}\right)_\perp + \left(\frac{dP}{d\omega}\right)_\parallel \approx \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{2\pi mc} F(x) \quad [\text{Es}^{-1}\text{Hz}^{-1}]$$

$$x = \omega/\omega_c$$

La frequenza critica  $\omega_c$  puo' essere espressa in funzione della frequenza di Larmor dell'elettrone, eliminando a

$$\omega_c = 3\gamma^3 c / 2a$$

La particella descrive una spirale con angolo di pitch  $\alpha$  → istantaneamente il piano dell'orbita ha la stessa inclinazione. Nel piano istantaneo dell'orbita (che contiene v ed a), il moto puo' essere considerato circolare quindi

$$v/a = \omega_r \sin \alpha \quad \longrightarrow \quad a = v/\omega_r \sin \alpha$$

Nel limite ultra relativistico  $v \approx c$        $a = c/\omega_r \sin \alpha$        $\longrightarrow$        $\omega_c = \frac{3}{2}\gamma^3 \omega_r \sin \alpha$

Ma  $\omega_r = \omega_g/\gamma$       dove  $\omega_g$  e' la frequenza di larmor non relativistica       $\omega_g = qB/m$

$$\omega_c = \frac{3}{2}\gamma^2 \omega_g \sin \alpha$$

Il risultato ottenuto e' molto simile a quello ottenuto da considerazioni elementari da cui si era ottenuto che la radiazione e' emessa a frequenze  $\omega \approx \gamma^2 \omega_g \sin \alpha$

# RS: comportamenti asintotici dello spettro

$$\left(\frac{dP}{d\omega}\right) = \left(\frac{dP}{d\omega}\right)_\perp + \left(\frac{dP}{d\omega}\right)_\parallel \approx \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{2\pi mc} F(x)$$

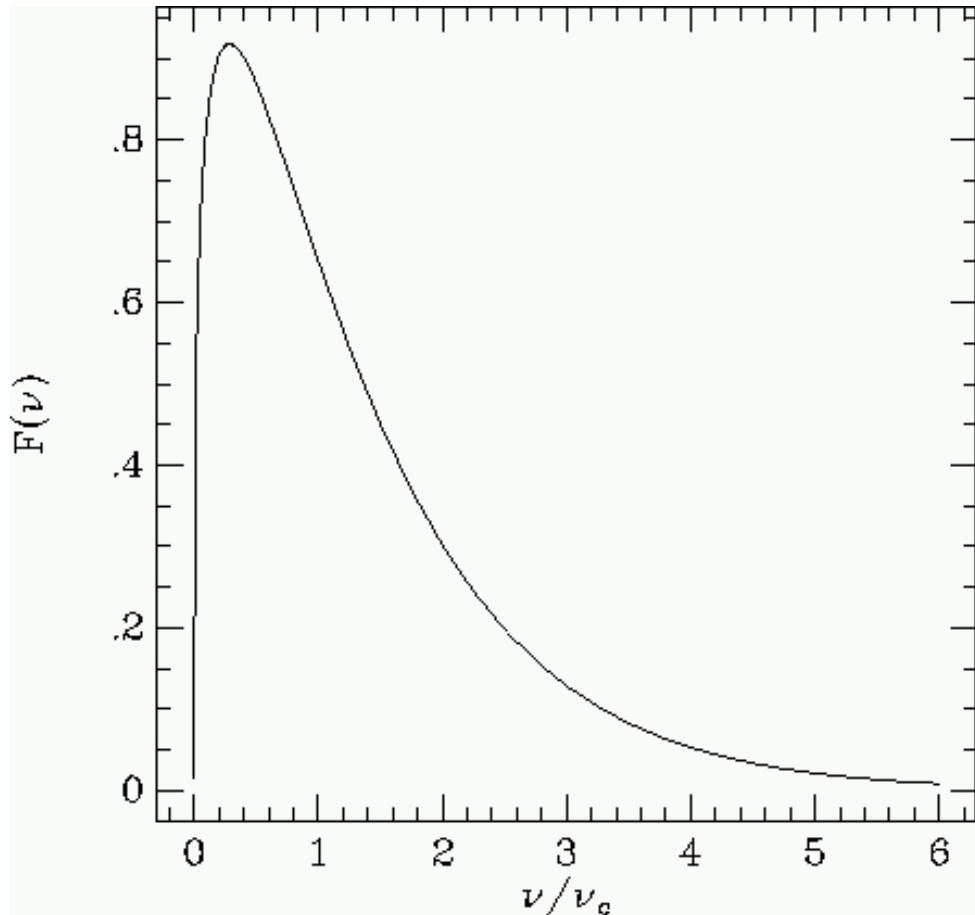
$$x = \omega/\omega_c$$

$$\omega_c = \frac{3}{2}\gamma^2\omega_g \sin \alpha$$

La forma della  $F(x)$  non e' esprimibile in forma analitica chiusa ma nei limiti di  $x \ll 1$  e  $x \gg 1$  e' possibile ottenere forme funzionali semplici, sfruttando le proprietà asintotiche delle funzioni di Bessel

$$F(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} x^{1/2} e^{-x} \quad x \gg 1$$

$$F(x) = \frac{4\pi}{\sqrt{3}\Gamma(1/3)} \left(\frac{x}{2}\right)^{1/3} \quad x \ll 1$$



# RS: comportamenti asintotici dello spettro

$$\left(\frac{dP}{d\omega}\right) = \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{2\pi mc} F(x)$$

$$x = \omega/\omega_c$$

$$\omega_c = \frac{3}{2}\gamma^2\omega_g \sin \alpha$$

Nel limite  $x \gg 1$   $F(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} x^{1/2} e^{-x}$

Percio' lo spettro ha la forma

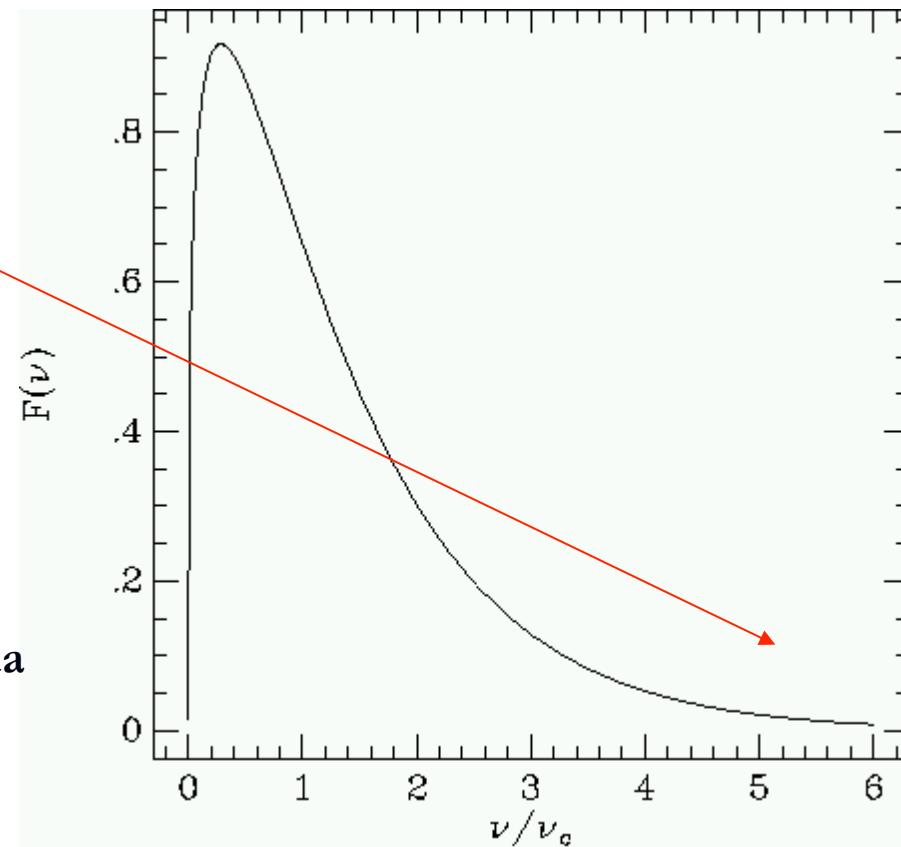
$$\left(\frac{dP}{d\omega}\right) = \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{2\pi mc} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{1/2} e^{-\omega/\omega_c}$$

C'e' poca potenza emessa a frequenze  $> \omega_c$

E' una diretta conseguenza del beaming relativistico

La durata dell'impulso di radiazione misurata da un osservatore lontano e'

$$\Delta t \approx \gamma^2 \omega_g$$



Quindi le componenti di Fourier hanno intensita' apprezzabili solo fino a  $\approx (\Delta t)^{-1}$ , i.e.  $\omega_c$

# RS: comportamenti asintotici dello spettro

$$\left(\frac{dP}{d\omega}\right) = \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{2\pi mc} F(x)$$

$$x = \omega/\omega_c$$

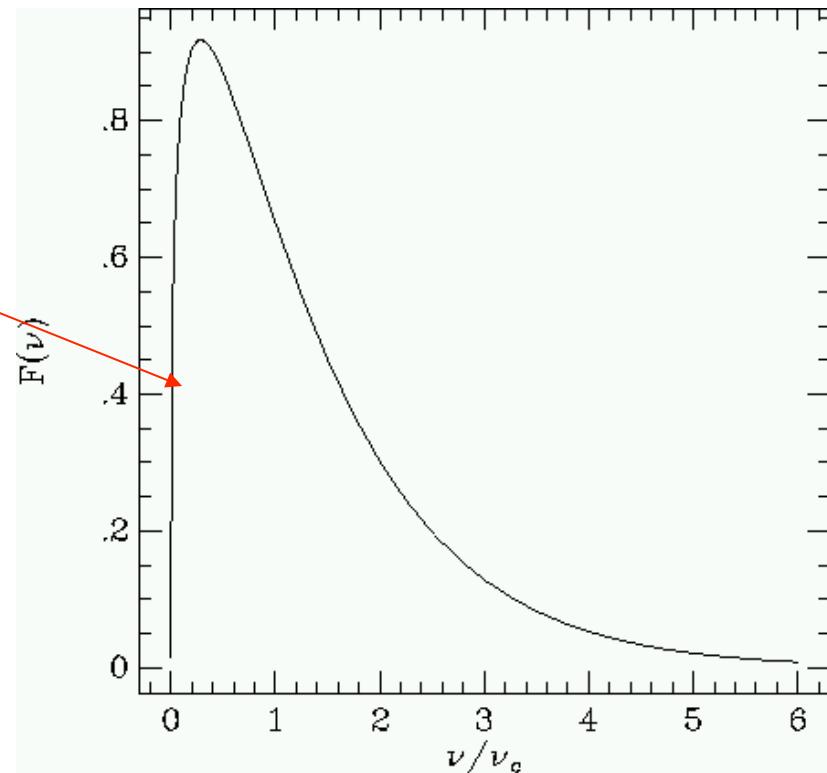
$$\omega_c = \frac{3}{2}\gamma^2 \omega_g \sin \alpha$$

Nel limite  $x \ll 1$   $F(x) = \frac{4\pi}{\sqrt{3}\Gamma(1/3)} \left(\frac{x}{2}\right)^{1/3}$

quindi

$$\left(\frac{dP}{d\omega}\right) = \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{2\pi mc} \frac{4\pi}{\sqrt{3}\Gamma(1/3)} \left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right)^{1/3}$$

L'origine della dipendenza sta nel fatto che la potenza totale emessa e' indipendente dalla massa di riposo della particella che emette e puo' essere espressa in funzione delle frequenze di larmor e critica



# RS: spettro da una distribuzione

Per ottenere lo spettro osservato occorre integrare sulla popolazione di elettroni nel campo magnetico       $n(E) = dN/dEdV$

La potenza per unita' di volume emessa e'     $J(\omega) \equiv \left( \frac{dE}{dt dV} \right) = \int \left( \frac{dP}{d\omega} \right)_e n(E) dE$  [Es-1V<sup>-1</sup>Hz-1]

con       $\left( \frac{dP}{d\omega} \right) = \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{8\pi^2 \epsilon_0 mc} F(x)$       [Es<sup>-1</sup>Hz<sup>-1</sup>]

Se prendiamo una distribuzione di elettroni con una legge di potenza in energia

$$n(E)dE = kE^{-p}dE$$

Lo spettro e'       $J(\omega) = \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{8\pi^2 \epsilon_0 mc} k \int_0^\infty F(x) E^{-p} dE$

Supponiamo per ora che l'angolo di pitch  $\alpha$  sia fissato

# RS: spettro da una distribuzione

$$J(\omega) = \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{8\pi^2 \epsilon_0 mc} k \int_o^\infty F(x) E^{-p} dE \quad x = \omega/\omega_c \quad \omega_c = \frac{3}{2}\gamma^2 \omega_g \sin \alpha$$

Integriamo il contributo di elettroni di diverse energie ad una data frequenza  $\omega$

Per una data frequenza,  $x$  dipende dall'energia della particella

$$x = \omega / \left( \frac{3}{2} \gamma^2 \omega_g \sin \alpha \right) = \frac{2}{3} \frac{m^2 c^4}{(\omega_g \sin \alpha)} \frac{\omega}{E^2} = \frac{A}{E^2}$$

Fissata una frequenza  $\omega$ , quando  $E \gg mc^2$  (i.e.  $\gamma \gg 1$ )  $\rightarrow x \ll 1$ , cioe' sommiamo sulla coda a bassi  $x$  di  $F(x)$ , mentre quando  $E \ll mc^2$ ,  $x \gg 1$  e sommiamo sulle code esponenziali di  $F(x)$

Grazie alla relazione di sopra, possiamo trasformare l'integrale su  $E$  in un integrale su  $x$

Invertendo si ha  $E = \left(\frac{A}{x}\right)^{1/2}$   $dE = -\frac{1}{2} \frac{A^{1/2}}{x^{3/2}} dx$

# RS: spettro da una distribuzione

$$J(\omega) = \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{8\pi^2 \epsilon_0 mc} k \int_o^\infty F(x) E^{-p} dE \quad x = \omega/\omega_c \quad \omega_c = \frac{3}{2}\gamma^2 \omega_g \sin \alpha$$

$$E = \left(\frac{A}{x}\right)^{1/2} \quad dE = -\frac{1}{2} \frac{A^{1/2}}{x^{3/2}} dx$$

$$\begin{aligned} J(\omega) &= \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{8\pi^2 \epsilon_0 mc} k \int_o^\infty \left(\frac{A}{x}\right)^{-p/2} F(x) \left(-\frac{1}{2} \frac{A^{1/2}}{x^{3/2}}\right) dx = \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{16\pi^2 \epsilon_0 mc} k A^{-(p-1)/2} \int_o^\infty x^{p/2-3/2} F(x) dx \\ &= \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{16\pi^2 \epsilon_0 mc} k \left(\frac{2}{3} \frac{m^2 c^4}{(\omega_g \sin \alpha)} \omega\right)^{-(p-1)/2} \int_o^\infty x^{p/2-3/2} F(x) dx \end{aligned}$$

**L'integrale si ottiene da**  $\int_0^\infty x^\mu F(x) dx = \frac{2^{\mu+1}}{\mu+2} \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{7}{3}\right) \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{2}{3}\right)$  **Con  $\mu=(p-3)/2$**

$$\int_o^\infty x^{p/2-3/2} F(x) dx = \frac{2^{(p-3)/2+1}}{(p-3)/2+2} \Gamma\left(\frac{(p-3)/2}{2} + \frac{7}{3}\right) \Gamma\left(\frac{(p-3)/2}{2} + \frac{2}{3}\right) = \frac{2^{(p-1)/2}}{(p+1)/2} \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{1}{12}\right)$$

$$J(\omega) = \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{16\pi^2 \epsilon_0 mc} k \left(\frac{2}{3} \frac{m^2 c^4}{\omega_g \sin \alpha} \omega\right)^{-(p-1)/2} \frac{2^{(p-1)/2}}{(p+1)/2} \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{1}{12}\right)$$

$$J(\omega) = \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{8\pi^2 \epsilon_0 mc(p+1)} k \left(\frac{m^2 c^4}{3\omega_g \sin \alpha} \omega\right)^{-(p-1)/2} \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{1}{12}\right)$$

# RS: spettro da una distribuzione

$$J(\omega) = \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{8\pi^2 \epsilon_0 mc(p+1)} k \left( \frac{m^2 c^4}{3\omega_g \sin \alpha} \omega \right)^{-(p-1)/2} \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{1}{12}\right) \quad [\text{Es-1V-1Hz-1}]$$

**Bisogna ora integrare sull'angolo di pitch, assegnata una distribuzione**

$$J(\omega) = \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin^{(p+1)/2} \alpha}{8\pi^2 \epsilon_0 mc(p+1)} k \left( \frac{m^2 c^4}{3\omega_g} \omega \right)^{-(p-1)/2} \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{1}{12}\right)$$

**Il caso piu' semplice e' quello di una distribuzione isotropa di angoli di pitch**

**La distribuzione e'**  $p(\alpha) = \frac{1}{2} \sin \alpha d\alpha$       **quindi**       $\langle J(\omega) \rangle_\alpha = \int_0^\pi p(\alpha) J(\omega; \alpha) d\alpha$

**Per cui l'integrale da calcolare e'**       $\frac{1}{2} \int_0^\pi \sin^{(p+3)/2} \alpha d\alpha = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma((p+5)/4)}{2 \Gamma((p+7)/4)}$

$$\langle J(\omega) \rangle_\alpha = \frac{\sqrt{3\pi} q^3 B}{16\pi^2 \epsilon_0 mc(p+1)} k \left( \frac{m^2 c^4}{3\omega_g} \omega \right)^{-(p-1)/2} \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{1}{12}\right) \frac{\Gamma((p+5)/4)}{2 \Gamma((p+7)/4)}$$

**Sostituendo**       $\omega_g = \frac{qB}{m}$

$$\langle J(\omega) \rangle_\alpha = \frac{\sqrt{3\pi} q^3 B}{16\pi^2 \epsilon_0 mc(p+1)} k \left( \frac{m^3 c^4}{3qB} \omega \right)^{-(p-1)/2} \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{1}{12}\right) \frac{\Gamma((p+5)/4)}{2 \Gamma((p+7)/4)} \quad [\text{Es-1V-1Hz-1}]$$

**E' la forma finale dello spettro da una distribuzione  
isotropa di elettroni con legge di potenza**

# RS: spettro da una distribuzione

$$\langle J(\omega) \rangle_{\alpha} = \frac{\sqrt{3\pi}q^3 B}{16\pi^2\epsilon_0 mc(p+1)} k \left( \frac{m^3 c^4}{3qB} \omega \right)^{-(p-1)/2} \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{1}{12}\right) \frac{\Gamma((p+5)/4)}{2\Gamma((p+7)/4)}$$

■ Le dipendenze essenziali sono  $\langle J(\omega) \rangle_{\alpha} = DkB^{(p+1)/2}\omega^{-(p+1)/2}$  ■ [Es-1V<sup>-1</sup>Hz<sup>-1</sup>]

- ▷ L'intensita' dell'emissione per unita' di volume dipende dal valore del campo B in cui gli elettroni spiralano e dall'indice dello spettro → misurando lo spettro abbiamo informazioni sull'intensita' del campo B nella regione di emissione
- ▷ La pendenza dello spettro e' diversa da quella degli elettroni ma misurando l'indice spettrale della radiazione conosciamo quello degli elettroni che emettono

# RS: spettro da una distribuzione

- Lo spettro da una distribuzione di elettroni puo' essere ricavato anche da considerazioni piu' semplici che mettono in evidenza il motivo per cui lo spettro della radiazione e' piu' ripido
  - La considerazione chiave e' che gli elettroni emettono la maggior parte della potenza intorno alla frequenza critica  $\omega_c$ , cioe' la distribuzione spettrale e' piccata intorno ad  $\omega_c$
  - La larghezza della distribuzione in  $\omega_c$  e' molto piu' stretta della distribuzione di energia degli elettroni
  - Cosi' possiamo ritenere che, con buona approssimazione, che tutta la radiazione da un singolo elettrone sia emessa alla frequenza  $\omega_c$
- $$\nu \approx \nu_c \approx \gamma^2 \nu_g = \left( \frac{E}{mc^2} \right)^2 \nu_g \quad \nu_g = qB/2\pi m$$
- → la radiazione emessa tra  $\nu$  e  $\nu + d\nu$ , puo' essere attribuita ad elettroni con energia tra  $E$  ed  $E + dE$

# RS: spettro da una distribuzione

Percio' possiamo scrivere

$$J(\nu)d\nu = \left(\frac{dE}{dt}\right)N(E)dE$$

$$\nu = \left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 \nu_g \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}}$$

$$E = \left(\frac{\nu}{\nu_g}\right)^{1/2} mc^2 \quad dE = \frac{mc^2}{2\nu_g^{1/2}} \nu^{-1/2} d\nu$$

$$\left(\frac{dE}{dt}\right) = \frac{4}{3} \sigma_T U_B c \gamma^2 \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}}$$

$$\left(\frac{dE}{dt}\right) = \frac{4}{3} \sigma_T U_B c (E/mc^2)^2 = \frac{4}{3} \sigma_T U_B c \frac{\nu}{\nu_g}$$

$$N(E)dE = kE^{-p}dE = \frac{k}{(mc^2)^p} \frac{\nu^{-p/2}}{\nu_g^{-p/2}} \cdot \frac{mc^2}{2\nu_g^{1/2}} \nu^{-1/2} d\nu = \frac{k}{2(mc^2)^{p-1}} \nu_g^{p/2-1/2} \cdot \nu^{-p/2-1/2} d\nu$$

$$J(\nu)d\nu = \frac{4}{3} \sigma_T U_B c \frac{\nu}{\nu_g} \frac{k}{2(mc^2)^{p-1}} \nu_g^{p/2-1/2} \cdot \nu^{-p/2-1/2} d\nu \quad \nu_g = qB/2\pi m \quad U = B^2/8\pi$$

$$J(\nu)d\nu = \frac{4}{3} \sigma_T \frac{B^2}{8\pi} c \frac{k}{2(mc^2)^{p-1}} (qB/2\pi m)^{p/2-3/2} \nu^{-p/2+1/2} d\nu$$

Mettendo in evidenza la dipendenza da  $B$ ,  $k$  e  $\nu$  si ha  $J(\nu)d\nu = DkB^{(p+1)/2}\nu^{-(p-1)/2}d\nu$

esattamente la stessa di quella ottenuta con l'analisi rigorosa

→ La forma dello spettro di radiazione e' determinata dallo spettro di elettroni e non dalla distribuzione di singola particella a causa del forte beaming a  $v_c$

→ La differente pendenza e' dovuta alla relazione quadratica tra  $\nu$  ed  $E$

# RS: polarizzazione

- La potenza emessa nelle due direzioni di polarizzazione? e  $\mathbf{k}$  a  $\mathbf{B}$  e'

$$j_{\perp}(\omega) = \left(\frac{dP}{d\omega}\right)_{\perp} \approx \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{4\pi mc} [F(x) + G(x)] \quad j_{\parallel}(\omega) = \left(\frac{dP}{d\omega}\right)_{\parallel} \approx \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{4\pi mc} [F(x) - G(x)]$$

$$x = \omega/\omega_c$$

- Si vede subito che la potenza emessa nella componente **parallela** e' piu' piccola di quella nella direzione **perp**

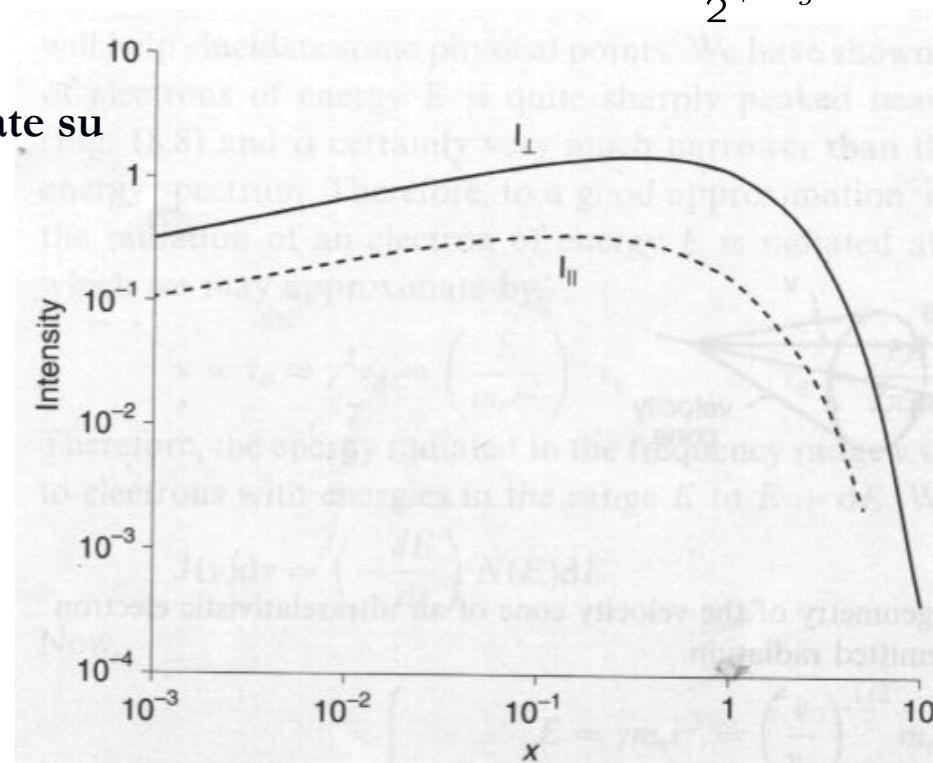
$$\omega_c = \frac{3}{2} \gamma^2 \omega_g \sin \alpha$$

- Il rapporto delle energie totali (i.e. integrate su  $\omega$ ) irraggiate nelle due componenti e'

$$\begin{aligned} \frac{I_{\perp}}{I_{\parallel}} &= \frac{\int_0^{\infty} [F(x) + G(x)] dx}{\int_0^{\infty} [F(x) - G(x)] dx} \\ &= \frac{\Gamma(7/3)\Gamma(2/3) + \Gamma(4/3)\Gamma(2/3)}{\Gamma(7/3)\Gamma(2/3) - \Gamma(4/3)\Gamma(2/3)} \end{aligned}$$

■ [Dato che  $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ ]  $= \frac{4/3 + 1}{4/3 - 1} = 7$

- L'energia liberata nelle due polarizzazioni da un singolo elettrone e' esattamente 7:1

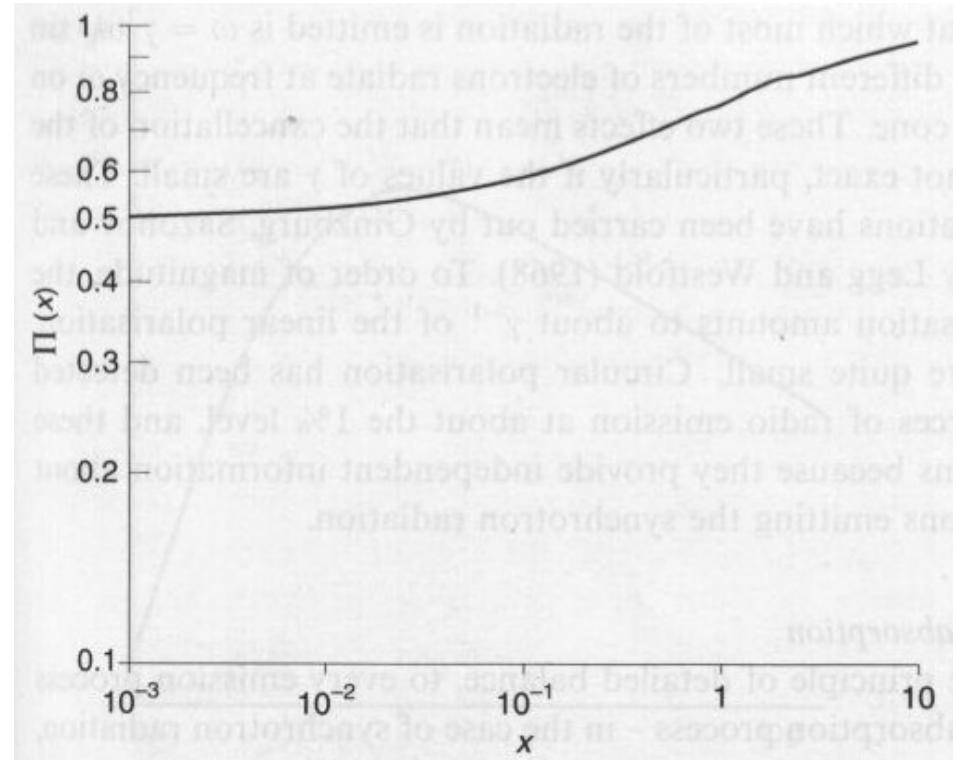


- La radiazione emessa da un e' ultrarelativistico e' quasi completamente polarizzata nel piano **perp** a  $\mathbf{B}$

# RS: polarizzazione

- La frazione di polarizzazione della radiazione di singolo elettrone e'

$$\Pi(\omega) = \frac{j_{\perp} - j_{\parallel}}{j_{\perp} + j_{\parallel}} = \frac{G(x)}{F(x)}$$



- La radiazione di singolo elettrone e' fortemente polarizzata a tutte le frequenze

# RS: polarizzazione

- Nel caso di una popolazione di elettroni, per ottenere la polarizzazione bisogna mediare sulle energie degli elettroni che possono contribuire all'intensita' ad una data frequenza
- Per calcolarlo si procede esattamente come nel caso dello spettro totale. Senza ripetere i passaggi si ottiene

■ Usando gli integrali

$$\Pi = \frac{\int_0^\infty G(x)x^{(p-3)/2}dx}{\int_0^\infty F(x)x^{(p-3)/2}dx}$$
$$\int_0^\infty x^\mu F(x)dx = \frac{2^{\mu+1}}{\mu+2} \Gamma(\frac{\mu}{2} + \frac{7}{3}) \Gamma(\frac{\mu}{2} + \frac{2}{3}) \quad \int_0^\infty x^\mu G(x)dx = \frac{2^\mu}{\mu+2} \Gamma(\frac{\mu}{2} + \frac{4}{3}) \Gamma(\frac{\mu}{2} + \frac{2}{3})$$
$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{p+1}{4} \frac{\Gamma(p/4 + 7/12)}{\Gamma(p/4 + 19/12)} &= \frac{p+1}{4} \frac{\Gamma(p/4 + 7/12)}{\Gamma(p/4 + 19/12)} & \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \\ &= \frac{p+1}{4\Gamma(p/4 + 7/12)} &= \frac{p+1}{p+7/3} \end{aligned}$$

■ I valori tipici dell'indice spettrale del flusso di elettroni e'  $p \approx 2.5 \rightarrow \Pi \approx 72\%$

■ La radiazione di sincrotrone da una popolazione di elettroni e' MOLTO polarizzata  
→ la polarizzazione e' una segnatura caratteristica della radiazione di sincrotrone

# Sincrotrone/Compton Inverso

$$\langle \left( \frac{dE}{dt} \right) \rangle = \frac{4}{3} \sigma_T c U_B \beta^2 \gamma^2 \quad \quad \quad \langle \left( \frac{dE}{dt} \right)_{tot} \rangle = \frac{4}{3} c \sigma_T U_{rad} \gamma^2 \beta^2$$

Sono le stesse con  $U_B \leftrightarrow U_{rad}$

Perche' l'emissione e' causata dal campo elettrico che accelera l'e- nel suo rest frame, indipendentemente dall'origine del campo elettrico:

sincrotrone – il campo  $\mathbf{E}$  e' quello indotto dal moto dell'e- nel campo  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E} \sim \mathbf{v} \times \mathbf{B}$

Compton – il campo  $\mathbf{E}$  e' la somma dei campi elettrici delle onde elm incidenti sull'e-

In entrambi i casi, l'emissione  $e' \sim U$

In entrambi casi la perdita di energia  $e' \sim E^2$

# Sincrotrone/Compton Inverso

$$\langle \left( \frac{dE}{dt} \right) \rangle = \frac{4}{3} \sigma_T c U_B \beta^2 \gamma^2$$

$$\langle \left( \frac{dE}{dt} \right)_{tot} \rangle = \frac{4}{3} c \sigma_T U_{rad} \gamma^2 \beta^2$$

Importanza relativa di S ed IC:

$$\frac{(dE/dt)_{IC}}{(dE/dt)_S} = \frac{U_{rad}}{U_B}$$

- Assumendo  $B \sim 3 \times 10^{-10}$  T,  $U_B = B^2/2\mu_0 \sim 2.24 \times 10^5$  eV m<sup>-3</sup>
- →  $U_{rad}/U_B \sim 3$ . quindi entrambi i processi rappresentano importanti perdite di energia per gli e- nella galassia
- NB: mentre sincrotrone e' "limitato" alla galassia, l'IC e' presente ovunque (anche nello spazio intergalattico, dove sincrotrone e' assente o minimo perche'  $B \sim 0$ ) poiche' il CMB permea l'intero Universo e  $U_{CMB}/U_B \sim 1$

# Decelerazione adiabatica

E' possibile che il mezzo in cui le particelle diffondono sia in moto, p es di espansione, come accade per SuperNovae Remnant (SNR), venti stellari (plerioni – pulsars con venti stellari o come il vento solare)

Due conseguenze:

Oltre al flusso di diffusione, c'e' anche un flusso di convezione

Le particelle che diffondono in un mezzo in espansione perdono energia

# Convezione

- $J = -D \nabla n$  — Legge di Fick per il flusso di diffusione

• Il flusso di convezione è semplicemente  $\vec{J}_{conv} = m \vec{V}$   
 $\vec{V}$  = velocità di convezione del mezzo

• Il flusso totale è  $\vec{J}_{tot} = \vec{J}_{diff} + \vec{J}_{conv} = m \vec{V} - D \vec{\nabla} n$  o  
in comp.  $J_i = m V_i - D \nabla_i n$

$\Rightarrow$  Facciamo la divergenza  $\nabla^i J_i = \nabla^i (m V_i) - \nabla^i (D \nabla_i n)$

• In un fluido (gas), la massa si conserva  $\Rightarrow \nabla^i J_i + \frac{\partial n}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \nabla^i J_i = - \frac{\partial n}{\partial t}$$

$$\Rightarrow - \frac{\partial n}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{m} \vec{V} - D \vec{\nabla} n)$$



Termino di  
convezione

Il resto dei termini dell'equazione  
rimane lo stesso

# Decelerazione adiabatica (1)

I RC si muovono nell'ISM e ne sono parte

L'ISM e' un gas, quindi un sistema termodinamico

Se l'ISM o una parte di esso si espande, le particelle diffondono e allo stesso tempo perdono energia (in media), infatti:

L'energia interna  $U$  del gas diminuisce se si espande  $dU = -pdV$

I RC che diffondono all'interno del mezzo in espansione devono fare lavoro contro l'espansione del gas che li trascina via

# Decelerazione adiabatica (2)

• L'energia interna del gas è  $U = n E \nu$   $E = E_{n\text{media}}$ ,

$$\Rightarrow dU = n \nu dE \Rightarrow n \nu dE = -p d\nu$$

ma  $p = \frac{n}{3} \langle u P \rangle^*$ ,  $P = \text{mom. di una particella}$

$$\Rightarrow \nu \ll c \quad P = mu \Rightarrow p = \frac{2m}{3} \left\langle \frac{mu^2}{2} \right\rangle = \frac{2}{3} m E$$

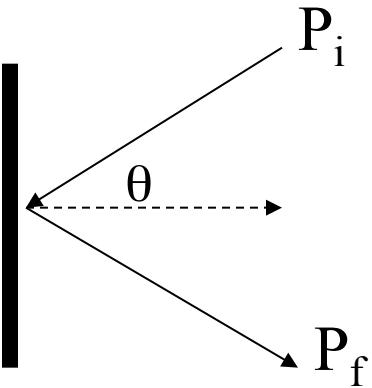
$$\nu \approx c \Rightarrow E \approx c p \Rightarrow p = \frac{m E}{3}$$

$$\Rightarrow \nu dE = -\frac{2}{3} E d\nu \quad z = \begin{cases} 1 & \nu \approx c \\ 2 & \nu \ll c \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{dt}$$

\* See next 2 slides

# \*Pressure, statistical derivation

We have to find the momentum transfer to a wall from a gas of particles with number density  $n$  in the hypothesis of elastic collisions  $|p_i| = |p_f|$



A single particle with momentum  $p$  arriving from direction  $\theta$  with respect to the normal  $n$  to the wall gets a  $\Delta p = 2p\cos\theta$

In the time  $dt$ , the # of particles coming from  $\theta$  direction impinging the wall are  $dN = nvc\cos\theta Sdt$ , ie all the particles in the volume  $(vc\cos\theta)dtS$

Then the net momentum transfer to the wall is  $dP = (\text{single part } \Delta p) \times (\# \text{ of part imping. the wall}) = 2p\cos\theta \times nvc\cos\theta Sdt = 2nvp\cos^2\theta Sdt$

# \*Pressure

The force is  $F = dP/dt = 2nvp\cos^2\theta S$

The pressure is  $p = dF/dS$

So  $p(\theta) = 2nvp\cos^2\theta$  is the pressure due to particles arriving from direction  $\theta$

If the distribution of directions is isotropic, then the probability for a particle to arrive in a solid angle  $d\Omega$  along  $\theta$  is  $d\Omega/4\pi$ , so the total pressure is

$$P_{tot} = \int p(\theta) \frac{d\Omega}{4\pi} = \int_0^1 p(\theta) \frac{2\pi d\cos\theta}{4\pi} = nvp \int_0^1 \cos^2\theta d\cos\theta = nvp/3$$

non relativistic particle  $p = mv$

$$P_{tot} = nmv^2/3 = \frac{2}{3}u \quad u = \frac{1}{2}nmv^2$$

From equipartition theorem  $\langle E \rangle = 3kT/2$

Energy density

$$P_{tot} = nkT \quad \text{Ideal gas law}$$

Relativistic particle (as photons)  $E_{tot} = cp$  and  $v \sim c$

$$P_{tot} = ncp/3 = u/3$$

E. Fiandrini Cosmic Rays 1819

$$u = ncp \quad \text{Energy density}$$