

Lecture 9 061119

- Il pdf delle lezioni puo' essere scaricato da
- http://www.fisgeo.unipg.it/~fiandrin/didattica_fisica/cosmic_rays1920/

Distr. Angolare

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{\gamma^4(1-\beta\mu)^4} \frac{dP'}{d\Omega'}$$

$$\frac{dP'}{d\Omega'} = \frac{q^2}{4\pi c^3} |\vec{a}'|^2 \sin^2 \Theta'$$

$$|\vec{a}'|^2 = \gamma^6 |\vec{a}_{\parallel}|^2 + \gamma^4 |\vec{a}_{\perp}|^2$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3} \frac{(\gamma^2 |\vec{a}_{\parallel}|^2 + |\vec{a}_{\perp}|^2)}{(1-\beta\mu)^4} \sin^2 \Theta'$$

Ora bisogna trovare la relazione fra Θ' e gli angoli in K

Il caso generale e' complicato dal punto di vista matematico ma e' facile in due casi limite

Caso 1: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{v} \rightarrow \Theta' = \Theta$

Basta usare le formule di aberrazione relativistica

$$\cos \Theta = (\cos \Theta' + \beta) / (1 + \beta \cos \Theta')$$

$$\sin \Theta = dp_y / dp = \frac{dp'_y}{(dp/dp')dp'} = \frac{dp'_y}{dp'} \left(\frac{dp'}{dp} \right) = \frac{dp'}{dp} \sin \Theta'$$

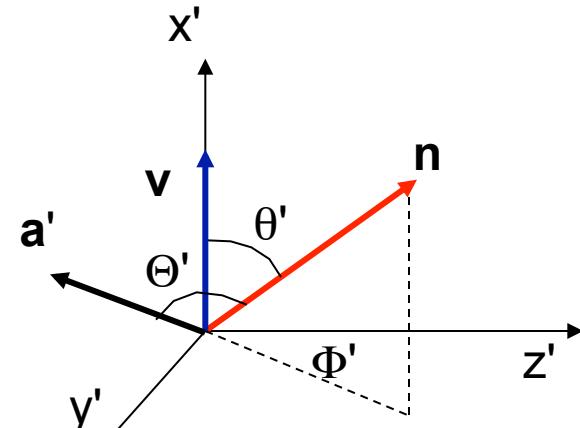
$$\sin \Theta = \frac{\sin \Theta'}{\gamma(1 + \beta\mu')}$$



$$\sin \Theta' = \frac{\sin \Theta}{\gamma(1 - \beta\mu)}$$

(le trasf di Lorentz sono reciproche)

$$\left(\frac{dP}{d\Omega} \right)_{\parallel} = \frac{q^2}{4\pi c^3} \frac{|\vec{a}_{\parallel}|^2}{(1 - \beta\mu)^6} \sin^2 \Theta$$



$$dp'/dp = 1/\gamma(1 + \beta\mu')$$

Distr. Angolare

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3} \frac{(\gamma^2 |\vec{a}_\parallel|^2 + |\vec{a}_\perp|^2)}{(1 - \beta\mu)^4} \sin^2 \Theta'$$

Caso 2: **a perp v**

a giace nel piano yz

→ scelgo il rif in modo che **a** osservazione sia diretta come z'

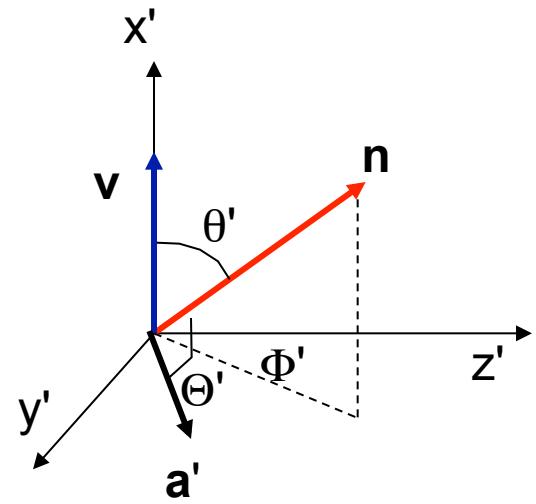
→ $\cos \Theta' = \frac{\vec{a}' \cdot \vec{n}}{a}$ → $\cos \Theta' = \sin \theta' \cos \Phi'$

$$\sin^2 \Theta' = 1 - \cos^2 \Theta' = 1 - \sin^2 \theta' \cos^2 \Phi'$$

$$\sin^2 \Theta' = 1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \Phi}{\gamma^2 (1 - \beta\mu)^2}$$

$$\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)_\perp = \frac{q^2}{4\pi c^3} \frac{|\vec{a}_\perp|^2}{(1 - \beta\mu)^4} \left(1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \Phi}{\gamma^2 (1 - \beta\mu)^2}\right)$$

$$\sin \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma (1 - \beta\mu)}$$

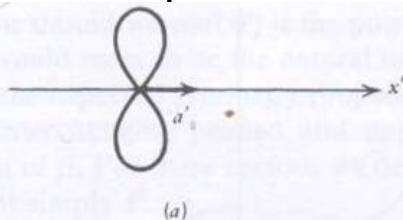


Distr. Angolare

$$\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)_{\perp} = \frac{q^2}{4\pi c^3} \frac{|\vec{a}_{\perp}|^2}{(1 - \beta\mu)^4} \left(1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \Phi}{\gamma^2(1 - \beta\mu)^2}\right)$$

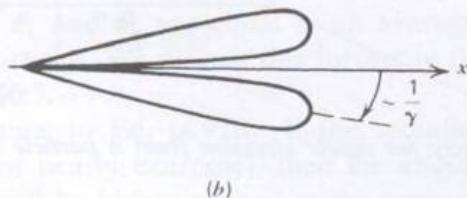
$$\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)_{\parallel} = \frac{q^2}{4\pi c^3} \frac{|\vec{a}_{\parallel}|^2}{(1 - \beta\mu)^6} \sin^2 \Theta$$

La direzione di \mathbf{a} definisce i dettagli della distribuzione, il fattore di boost picca in avanti tutta la radiazione emessa



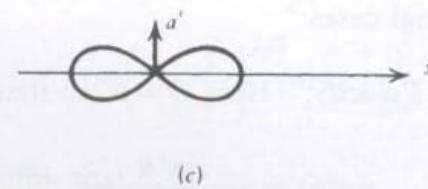
(a)

Figure 4.11a Dipole radiation pattern for particle at rest.



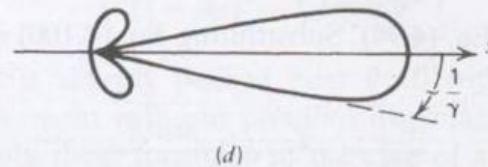
(b)

Figure 4.11b Angular distribution of radiation emitted by a particle with parallel acceleration and velocity.



(c)

Figure 4.11c Same as a.



(d)

Figure 4.11d Angular distribution of radiation emitted by a particle with perpendicular acceleration and velocity.

Conversione da SI a MKSA

Per convertire le unita' di misura da SI a MKSA:

$$E(\text{SI}) \rightarrow (4\pi\epsilon_0)^{1/2} E(\text{MKSA})$$

$$B(\text{SI}) \rightarrow (\mu_0/4\pi)^{1/2} B(\text{MKSA})$$

$$q(\text{SI}) \rightarrow (4\pi\epsilon_0)^{-1/2} q(\text{MKSA})$$

$$c(\text{SI}) \rightarrow (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$$

$$\frac{dP}{d\Omega}(t') = \frac{q^2}{4\pi c} \frac{|\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \vec{\beta}]|^2}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^5} \quad \rightarrow \quad \frac{dP}{d\Omega}(t') = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{|\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \vec{\beta}]|^2}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^5}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2q^2}{3c^3} \gamma^4 \left[\gamma^2 \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \right) + \vec{a}^2 \right] \quad \rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \gamma^4 \left[\gamma^2 \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \right) + \vec{a}^2 \right]$$

Analisi di Fourier

In genere oltre che l'energia per unita' di tempo emessa e la sua distribuzione angolare, e' importante conoscere la distribuzione spettrale di energia, cioe' la sua distribuzione in frequenza.

P.es. L' emissione di radiazione in ambito astrofisico ha una distribuzione spettrale caratteristica che distingue differenti processi, come bremsstrahlung, compton, sincrotrone, corpo nero,...).

Dall'analisi dello spettro di frequenza (i.e. di energia $E=h\nu$) dei fotoni emessi si puo' risalire alla distribuzione di energia delle particelle che hanno emesso, alla distribuzione delle particelle (compresi i fotoni) che hanno causato l'emissione e la distribuzione dei campi magnetici nel mezzo interstellare (ISM).

Analisi di Fourier: Parseval

Il teorema di Parseval permette di correlare la distribuzione di energia emessa nel tempo con la sua distribuzione in frequenza.

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{dt} dt$$

$$E = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \int_{-\infty}^{+\infty} |a(t)|^2 dt$$

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} a(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$a(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} a(t) e^{i\omega t} dt$$

$$|a(t)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' a(\omega) a^*(\omega') e^{-it(\omega-\omega')}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |a(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' a(\omega) a^*(\omega') e^{-it(\omega-\omega')}$$

$$\delta(\omega - \omega') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it(\omega-\omega')} dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |a(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' a(\omega) a^*(\omega') \delta(\omega-\omega')$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |a(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |a(\omega)|^2 d\omega$$

Analisi di Fourier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |a(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |a(\omega)|^2 d\omega$$

A noi serve $\int_0^{+\infty} |a(\omega)|^2 d\omega$

Dato che **a** e' reale,  $\int_{-\infty}^{+\infty} |a(\omega)|^2 d\omega = 2 \int_0^{+\infty} |a(\omega)|^2 d\omega$


$$\int_{-\infty}^{+\infty} |a(t)|^2 dt = 2 \int_0^{+\infty} |a(\omega)|^2 d\omega$$

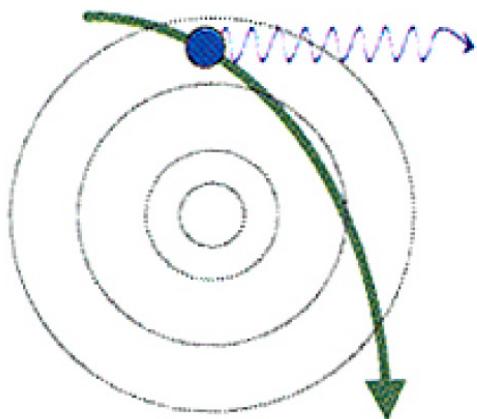
quindi $E = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \int_{-\infty}^{+\infty} |a(t)|^2 dt = \frac{q^2}{3\pi\epsilon_0 c^3} \int_0^{+\infty} |a(\omega)|^2 d\omega$

$$\frac{dE}{d\omega} = \frac{q^2}{3\pi\epsilon_0 c^3} |a(\omega)|^2 \equiv I(\omega) \quad [\text{EHz}^{-1}]$$

E' l'energia emessa per unita' di frequenza durante il periodo di accelerazione da una singola particella

Bremsstrahlung

La bremsstrahlung o radiazione di frenamento e' la radiazione associata con la variazione di quantita' di moto di una particella carica in un campo elettrico.



La descrizione corretta e' quella quantistica poiche' possono essere emessi fotoni con energie paragonabili a quella della particella che emette, ma come nel caso della ionizzazione in molti casi si puo' usare un approccio classico o semi-classico (relativistico).

Bremsstrahlung

Ovunque ci sia gas di elettroni e nuclei si ha emissione di radiazione di frenamento o emissione free-free (per sottolineare il fatto che si tratta di una transizione fra due stati energetici non legati).

Questo accade per:

L' emissione radio da regioni compatte di HII (idrogeno ionizzato) con $T \sim 10^4$ K,

Emissione X da sistemi binari con $T \sim 10^7$ K,

Emissione diffusa da gas intergalattico con $T \sim 10^8$ K

Atmosfere stellari

Inoltre costituisce uno dei processi principali attraverso cui elettroni di alta energia perdono energia

Densità media del mezzo Interstellare

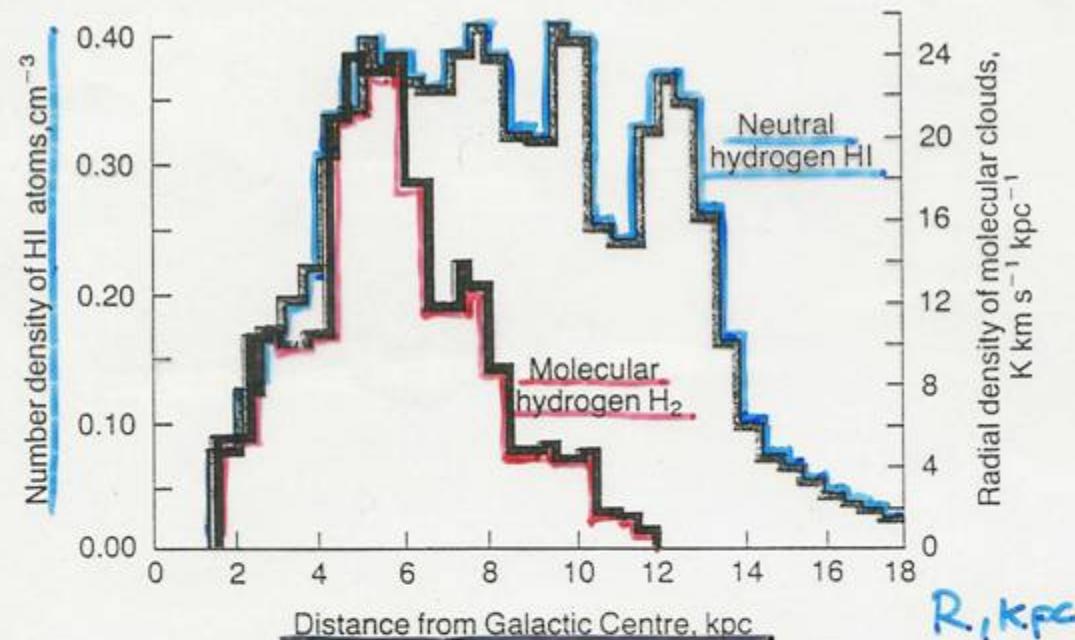


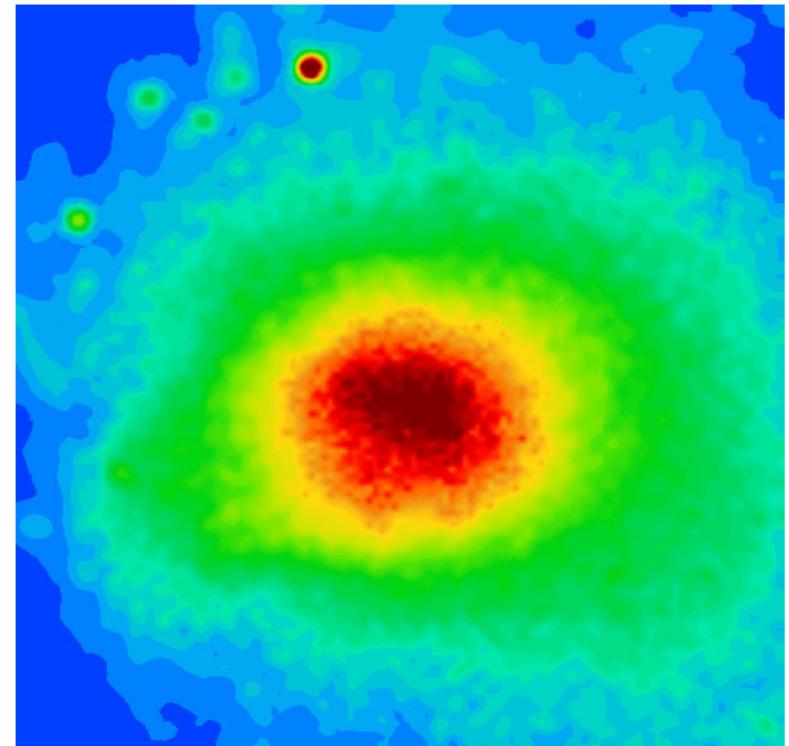
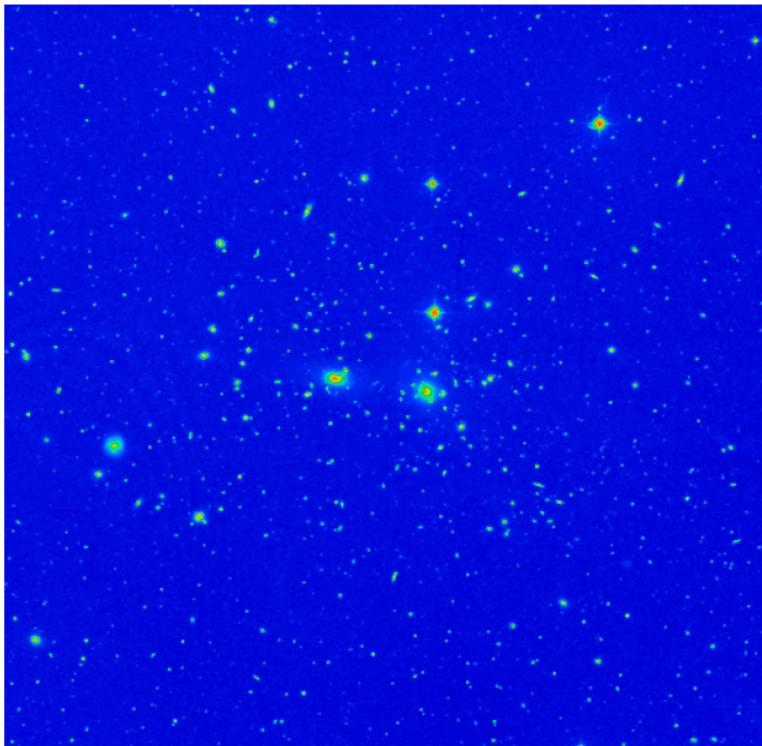
Figure 17.2. The radial distribution of atomic and molecular hydrogen as deduced from radio surveys of the Galaxy in the 21-cm line of atomic hydrogen and from millimetre surveys of the molecular emission lines of carbon monoxide, CO. (After D. Michalis and J. Binney (1981). *Galactic astronomy: structure and kinematics*, pp. 535, 554. San Francisco: W.H. Freeman and Co.)

$$\rho_{IG} = 1 \text{ p/cm}^3 = \\ = 1.67 \times 10^{-24} \text{ g/cm}^3$$

NAME	CONSTITUENTI	Rivelati da...	L'VOLUME e MASSA del Mezzo Int.	N cm^{-3}	T (K)
MOLECOLARI NUBI	H_2, CO CS etc.	linee molecolari Emiss. Polveri	~0.5% 40%	1000	10
NUBI DI H NUBI DIFFUSE	$\text{H}, \text{C}, \text{O}$ neutri	linea di 21 cm Linee Assorbim.	5% 40%	1-100	80
INTER NEBULE	$\text{H}, \text{H}^+, \text{e}^-$ (neutri: 10%)	21 cm + assorbim. Linee H	40% 20%	$0.1-1$	10^4
CORONE stellari	H^+, e^- ... O^{5+}	soft X (0.1-2 keV)	~50% 0.1%	1000	10^6

bremsstrahlung

X-Ray Gas in Galaxy Clusters

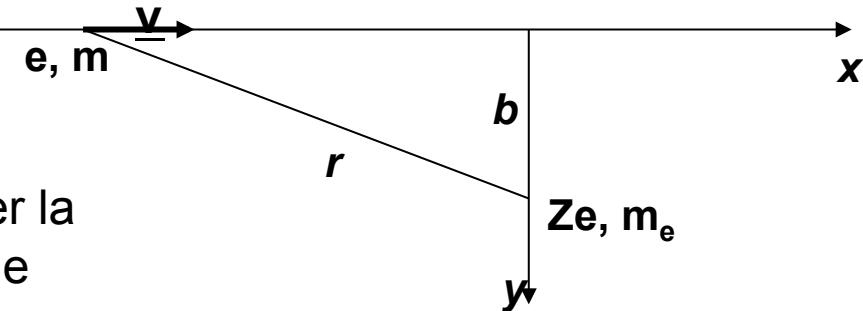


Coma cluster (left: optical image, right: X-ray image)

- An example of high energy thermal bremsstrahlung is the X-ray emission from giant elliptical galaxies and hot intercluster gas.

Bremsstrahlung classica

Per calcolare la radiazione emessa dobbiamo conoscere l'accelerazione dell'e- durante l'interazione.



La situazione e' analoga al caso discusso per la ionizzazione con il ruolo delle due particelle scambiato: ora e' l'e- che si avvicina al nucleo stazionario → nel caso della ionizzazione avevamo calcolato il campo del nucleo sull'elettrone in quiete → già conosciamo l'accelerazione dell'e- nel suo sistema di riferimento di quiete...possiamo usare la simmetria della situazione per ottenere il risultato

Come procederemo: lavoreremo nel sistema di riposo dell'elettrone e poi faremo le trasformazioni di Lorentz appropriate per ottenere l'emissione spettrale nel laboratorio

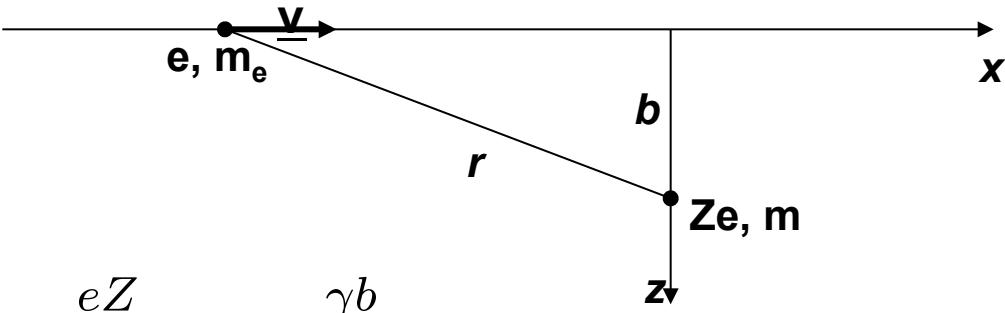
- nota \mathbf{a} , calcoliamo lo spettro della radiazione emessa $I(\omega)$ (EHz $^{-1}$)
- integriamo sui parametri d'impatto b
- trasformiamo nel sistema del nucleo nel caso relativistico

Brems classica (2): campi

Nel caso della ionizzazione avevamo un nucleo di alta energia che colpisce con un e- in quiete \rightarrow il campo elettrico che agisce su un e- stazionario (ie nel rif K' di quiete dell'e-)

e'

$$E_x = -\frac{eZ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma vt}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}} \quad E_z = \frac{eZ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma b}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}}$$



NB: V e' la vel dell'e- nel labo \rightarrow -v e' quella nucleo in K', i.e. dovremmo mettere gli apici alle quantita' che compaiono nelle equazioni...non le mettiamo per non appesantire la notazione ma e' chiaro che sono riferite in K'

Quindi 'accelerazione a cui e' sottoposto e'

$$a_x = \frac{e}{m_e} E_x \quad a_z = \frac{e}{m_e} E_z$$

$$a_x = -\frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 m_e} \frac{\gamma vt}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}}$$

$$a_z = \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 m_e} \frac{\gamma b}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}}$$

Brems classica (3):trasf. di Fourier

$$a_x(t) = -\frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 m_e} \frac{\gamma v t}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}} \quad a_z(t) = \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 m_e} \frac{\gamma b}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}}$$

Le trasformate di Fourier sono

$$a_x(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 m_e} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma v t}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}} e^{i\omega t} dt$$

$$a_z(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 m_e} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma b}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}} e^{i\omega t} dt$$

Pongo $\mathbf{x} = \gamma v t / b \rightarrow dx = (\gamma v / b) dt$
 $\rightarrow dt = (b / \gamma v) dx$



$$a_z(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 m_e} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma b}{b^3 [1 + x^2]^{3/2}} e^{\frac{i\omega b}{\gamma v} x} (b / \gamma v) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 m_e b v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[1 + x^2]^{3/2}} e^{\frac{i\omega b}{\gamma v} x} dx$$

$$a_x(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 m_e} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma v (bx / \gamma v)}{b^3 [1 + x^2]^{3/2}} e^{\frac{i\omega b}{\gamma v} x} (b / \gamma v) dx$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 m_e b v \gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{[1 + x^2]^{3/2}} e^{\frac{i\omega b}{\gamma v} x} dx$$

Brems classica (4): emissione spettrale

$$a_z(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 m_e b v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[1+x^2]^{3/2}} e^{\frac{i\omega b}{\gamma v} x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 m_e b v} I_1\left(\frac{i\omega b}{\gamma v}\right) \quad \parallel \text{comp}$$

$$a_x(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 m_e b v \gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{[1+x^2]^{3/2}} e^{\frac{i\omega b}{\gamma v} x} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 m_e b v \gamma} I_2\left(\frac{i\omega b}{\gamma v}\right) \quad \text{perp comp}$$

NB: $a_x/a_z = I_2/\gamma I_1 \rightarrow a_x$ e' soppresso di un fattore γ rispetto ad a_z

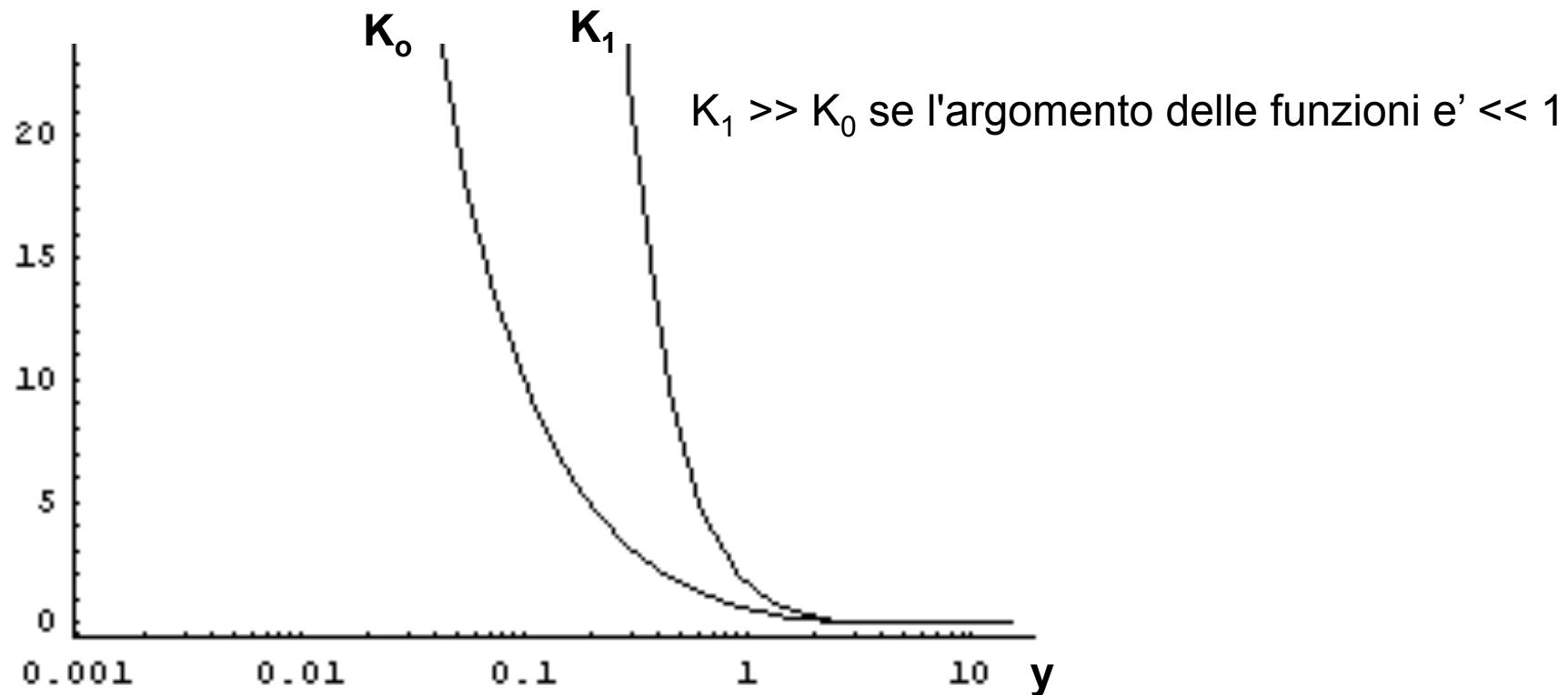
Posto $y = \omega b / \gamma v$, le funzioni $I(y)$ possono essere espresse come funzioni di Bessel modificate di ordine 1 e 0 (...consultando tavole di integrali)

$$I_1 = 2yK_1(y)$$

$$I_2 = 2iyK_0(y)$$

Funzioni di Bessel: esempio

Le funzioni Bessel K modificate divergono per $y \rightarrow 0$ e tendono a zero molto rapidamente per $y \rightarrow +\infty$ e non sono esprimibili in termini finiti, ie analitici



Brems classica (4): emissione spettrale

Riprendiamo l'analisi dello spettro della radiazione di bremsstrahlung

$$a_z(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 m_e b v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[1+x^2]^{3/2}} e^{\frac{i\omega b}{\gamma v} x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 m_e b v} I_1\left(\frac{i\omega b}{\gamma v}\right)$$

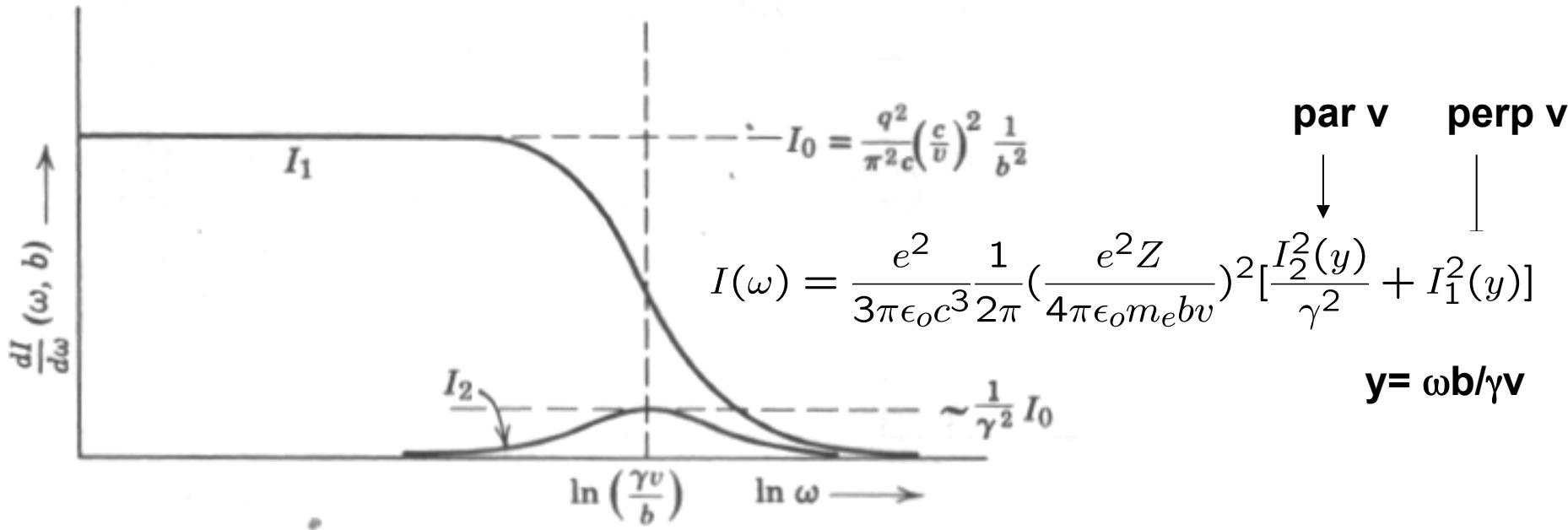
$$a_x(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 m_e b v \gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{[1+x^2]^{3/2}} e^{\frac{i\omega b}{\gamma v} x} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 m_e b v \gamma} I_2\left(\frac{i\omega b}{\gamma v}\right)$$

Posto $y = \omega b / \gamma v$, le funzioni I possono essere espresse come funzioni di Bessel modificate di ordine 1 e 0 (di solito espresse come somma di una serie)

$$I_1 = 2yK_1(y) \quad I_2 = 2iyK_0(y)$$

$$\begin{aligned} I(\omega) &= \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 c^3} |a(\omega)|^2 = \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 c^3} (|a_{\parallel}(\omega)|^2 + |a_{\perp}(\omega)|^2) = \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 c^3} (|a_x(\omega)|^2 + |a_z(\omega)|^2) \\ &= \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 c^3} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 m_e b v} \right)^2 \left[\frac{I_2^2(y)}{\gamma^2} + I_1^2(y) \right] \end{aligned}$$

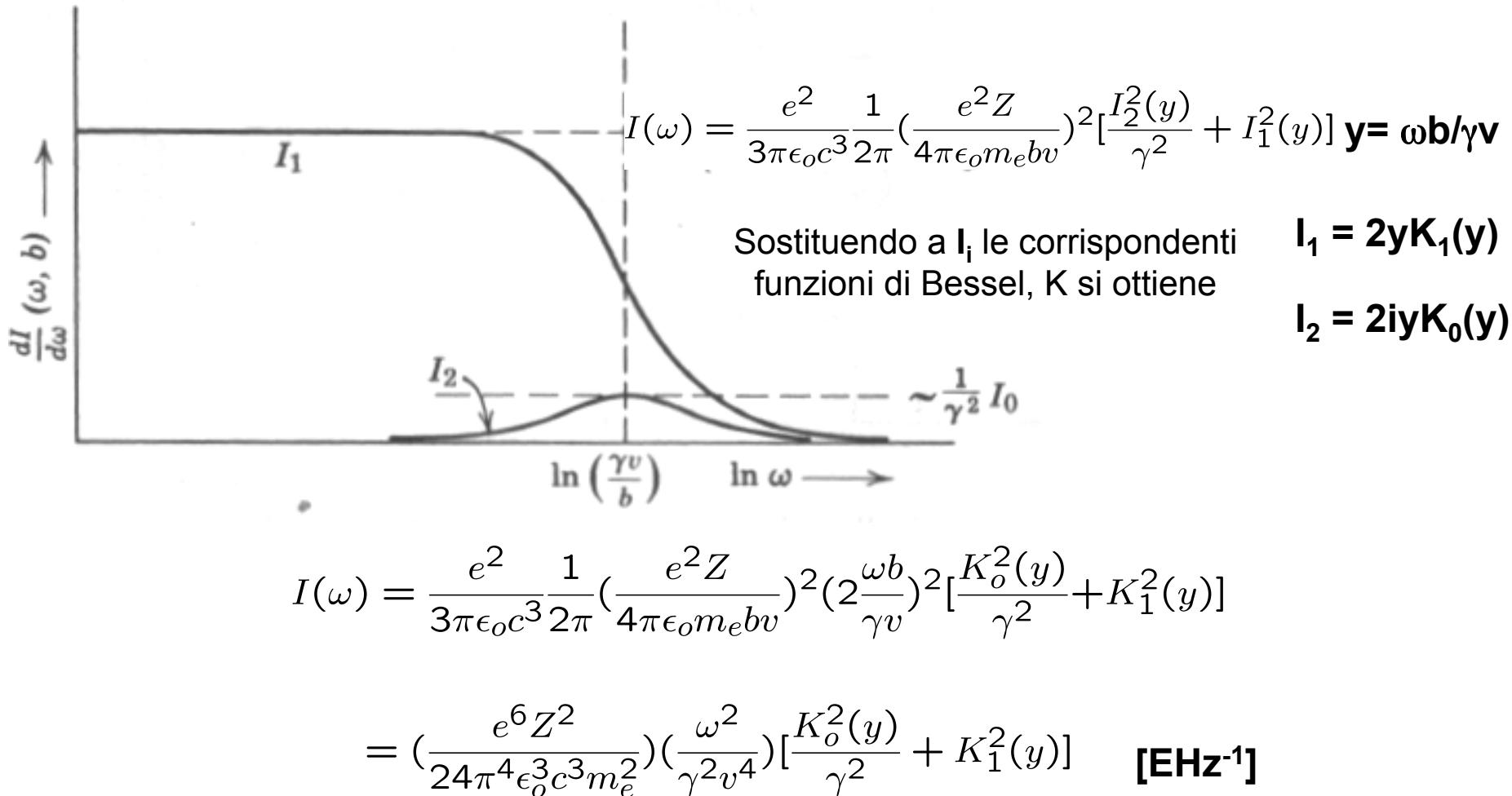
Brems classica (5): emissione spettrale



Il contributo della componente perp (I_1) domina l'emissione: anche nel caso non relativistico il contributo e' piuttosto trascurabile (cfr. Vedi funzioni di Bessel K_0 e K_1 : $K_1 \ll K_0$ per $y \ll 1$), nel caso relativistico e' ulteriormente soppresso di un fattore γ^2

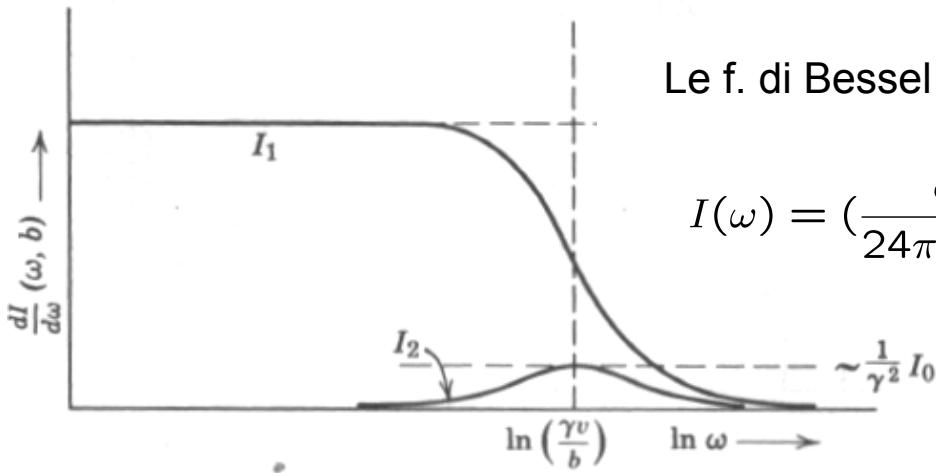
Il contributo di I_2 e' limitato a frequenze $\omega \sim \gamma v / b$, mentre quello di I_1 si estende e domina totalmente l'emissione a basse frequenze

Brems classica (6): emissione spettrale



Si vede chiaramente che la comp perp \gg comp par per $y \ll 1$ (ie $\omega \ll \gamma v/b$) poiche' $K_0 \ll K_1$ e il fattore $1/\gamma^2$ deprime ulteriormente nel caso relativistico

Brems classica(7): emiss. spettrale



Le f. di Bessel K_i non sono esprimibili in termini finiti ma come somma di una serie.

$$I(\omega) = \left(\frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{\omega^2}{\gamma^2 v^4} \right) \left[\frac{K_o^2(y)}{\gamma^2} + K_1^2(y) \right] \quad y = \omega b / \gamma v$$

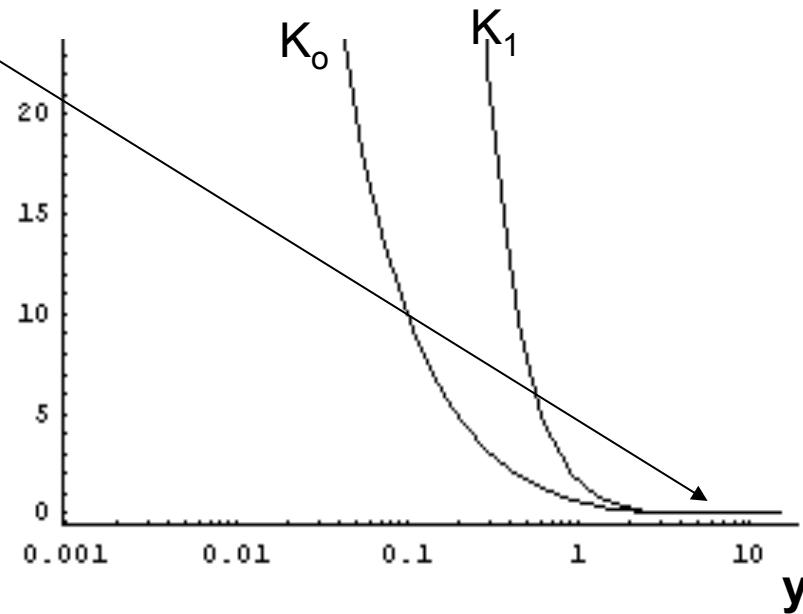
Pero' possiamo studiare il loro comportamento asintotico per $y \rightarrow 0$ e $y \rightarrow +\infty$

Limite $y = \omega b / \gamma v \gg 1$

$$K_o(y) = K_1(y) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2y}} e^{-y}$$

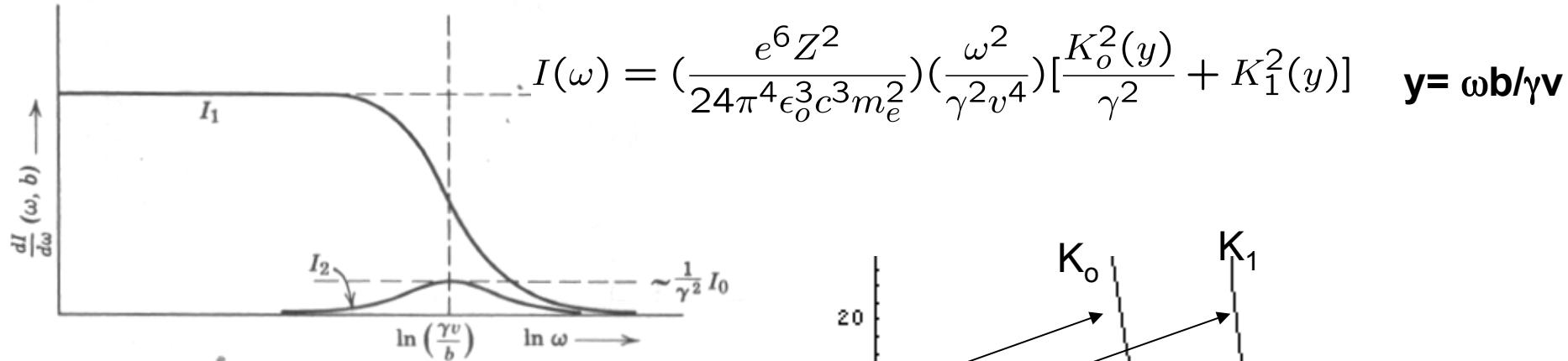
$$\begin{aligned} I(\omega) &= \left(\frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{\omega^2}{\gamma^2 v^4} \right) \frac{\pi}{2y} e^{-2y} \left[\frac{1}{\gamma^2} + 1 \right] \\ &= \left(\frac{e^6 Z^2}{48\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{\omega^2}{\gamma^2 v^4} \right) \frac{\gamma v}{\omega b} e^{-2\frac{\omega b}{\gamma v}} \left[\frac{1}{\gamma^2} + 1 \right] \\ &= C \left(\frac{\omega}{\gamma b v^3} \right) e^{-2\frac{\omega b}{\gamma v}} \left[\frac{1}{\gamma^2} + 1 \right] \end{aligned}$$

C'e' un cutoff esponenziale a frequenze $\omega \sim \gamma v / b = \omega_{\text{cutoff}}$
 \rightarrow c'e' poca potenza emessa a frequenze superiori a $\gamma v / b$



NB: ω_{cutoff} dipende da $b \rightarrow$ frequenze di taglio diverse per diversi b

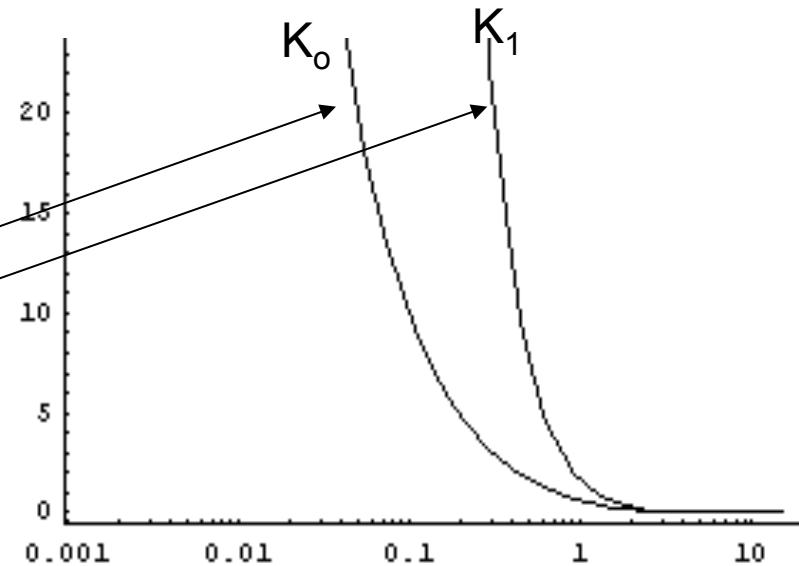
Brems classica (8): emiss. spettrale



Limite $y = \omega b / \gamma v \ll 1$

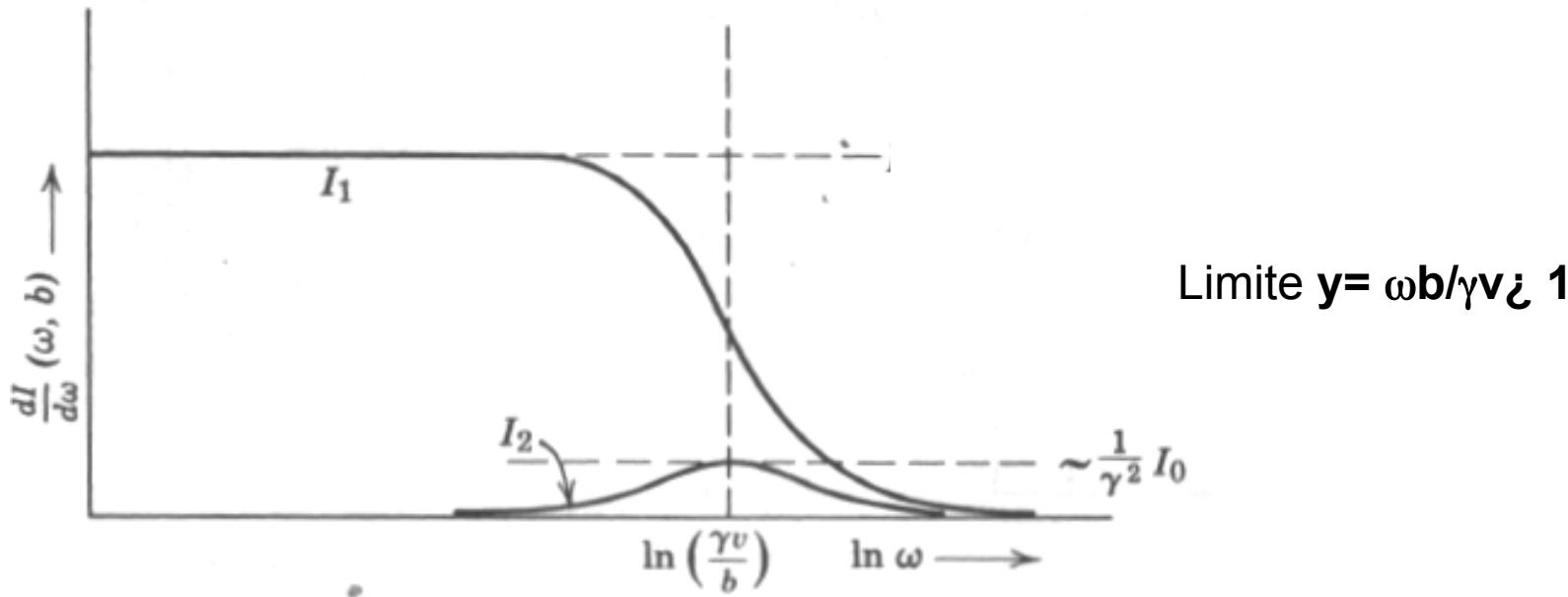
$$K_o(y) \approx -\ln y = \ln(1/y)$$

$$K_1(y) \approx 1/y$$



$$\begin{aligned}
 I(\omega) &= \left(\frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{\omega^2}{\gamma^2 v^4} \right) \left[\frac{K_o^2(y)}{\gamma^2} + K_1^2(y) \right] = \left(\frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{\omega^2}{\gamma^2 v^4} \right) \left[\frac{\ln^2(\omega b / \gamma v)}{\gamma^2} + \frac{\gamma^2 v^2}{\omega^2 b^2} \right] \\
 &= \left(\frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{\omega^2}{\gamma^2 v^4} \right) \frac{\gamma^2 v^2}{\omega^2 b^2} \left[1 + \left(\frac{\omega^2 b^2}{\gamma^2 v^2} \right) \frac{\ln^2(\omega b / \gamma v)}{\gamma^2} \right] = \left(\frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{1}{v^2 b^2} \right) \left[1 + \left(\frac{\omega^2 b^2}{\gamma^2 v^2} \right) \frac{\ln^2(\omega b / \gamma v)}{\gamma^2} \right]
 \end{aligned}$$

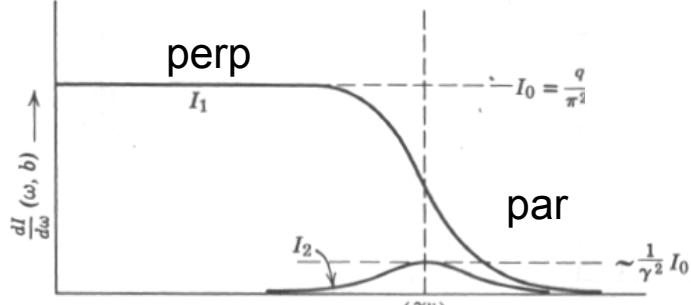
Brems classica (9): emiss. spettrale



$$I(\omega) = \left(\frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{1}{v^2 b^2} \right) \left[1 + \left(\frac{\omega^2 b^2}{\gamma^2 v^2} \right) \frac{\ln^2(\omega b / \gamma v)}{\gamma^2} \right] \approx \left(\frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{1}{v^2 b^2} \right)$$

- Lo spettro a bassa frequenza ($y \ll 1$) e' dovuto quasi totalmente alla componente perp dell'impulso rispetto alla linea di volo
- E' indipendente da ω
- E' indipendente da γ ← perche' $\Delta p_{t\text{perp}}$ non dipende da γ

Brems classica (10): em. spettrale

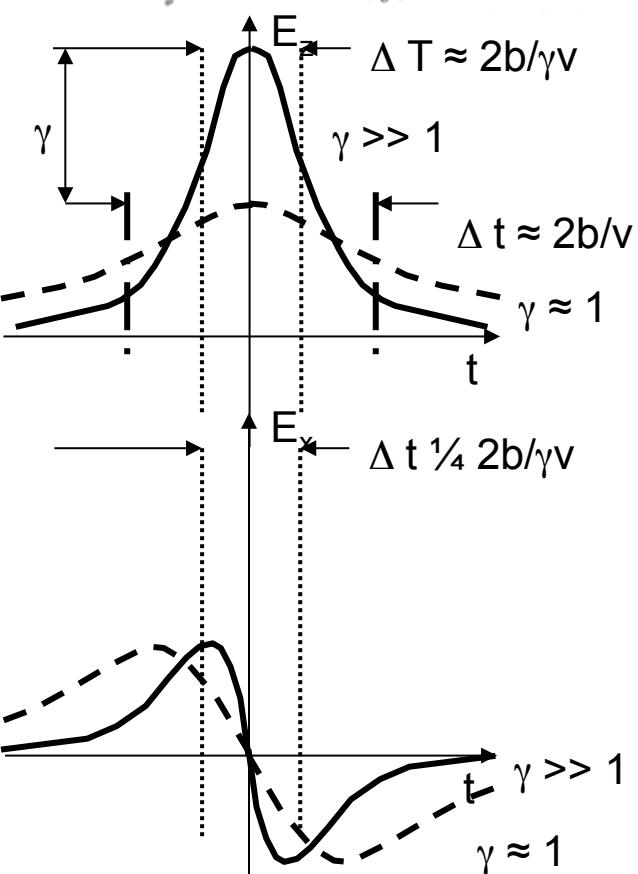


$$I(\omega) = \left(\frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{\omega^2}{\gamma^2 v^4} \right) \left[\frac{K_o^2(y)}{\gamma^2} + K_1^2(y) \right]$$

Qualitativamente l'andamento delle due componenti si spiega osservando la forma temporale dell'impulso

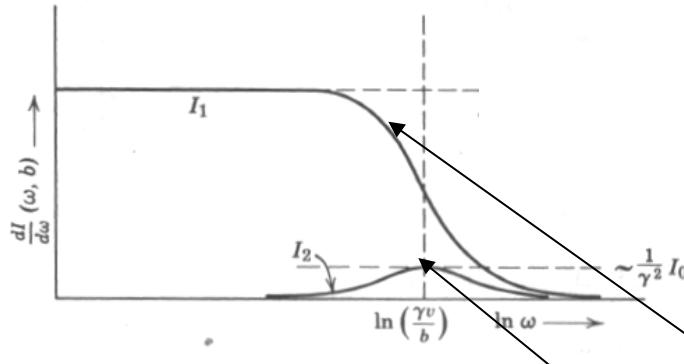
La componente perpendicolare ha la forma che "somiglia" ad una δ di Dirac per le componenti a bassa frequenza \rightarrow

lo spettro contiene tutte le frequenze con uguale peso fino a $\omega \approx 1/\Delta T = \gamma v/b$, oltre cui lo spettro decade exp



La componente parallela ha invece un andamento simile ad un'onda sinusoidale di dutata ΔT e quindi contiene solo poche frequenze intorno a ΔT

Brems classica (11): em. spettrale



$$I(\omega) = \left(\frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{\omega^2}{\gamma^2 v^4} \right) \left[\frac{K_o^2(y)}{\gamma^2} + K_1^2(y) \right]$$

$$\omega b / \gamma v \gg 1$$

$$\approx \left(\frac{e^6 Z^2}{48\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{\omega}{\gamma b v^3} \right) e^{-2\frac{\omega b}{\gamma v}} \left[\frac{1}{\gamma^2} + 1 \right]$$

$$\omega b / \gamma v \ll 1$$

$$\approx \left(\frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{1}{v^2 b^2} \right)$$

E' lo spettro di emissione di un singolo elettrone su un singolo nucleo

NB: siamo nel riferimento di quiete dell'elettrone

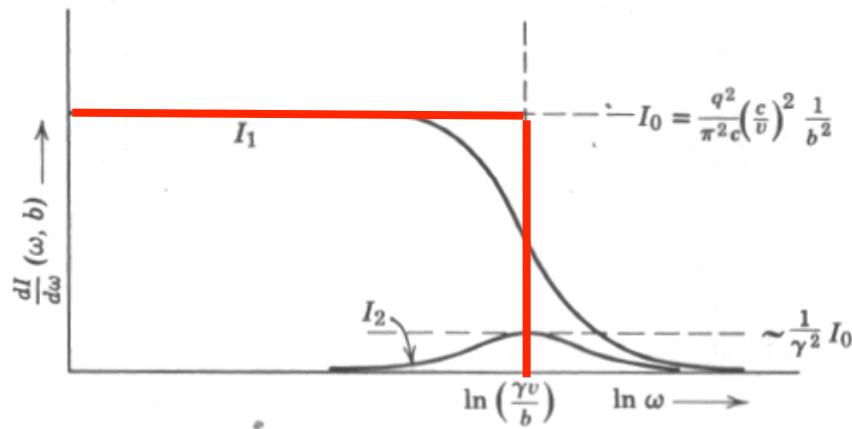
Brems classica (12): em. spettrale

Ora bisogna integrare sui parametri d'impatto

$$I(\omega) = \left(\frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{\omega^2}{\gamma^2 v^4} \right) \left[\frac{K_o^2(y)}{\gamma^2} + K_1^2(y) \right] \quad \text{NB: nel sist. di quiete dell'e-}$$

La componente par e' piccola rispetto a quella perp e contribuisce solo intorno a $\omega_0 = \gamma v / b \rightarrow$ si puo' trascurare in prima approssimazione

$$I(\omega) \approx \left(\frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{1}{v^2 b^2} \right) \quad \text{fino a } \omega = \gamma v / b, \text{ cioe' fino a } y \sim 1, \text{ i.e. I e' una step function con il gradino a } \omega = \gamma v / b$$



Brems classica (12): em. spettrale

$$I(\omega) \approx \left(\frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{1}{v^2 b^2} \right)$$

fino a $\omega = \gamma v / b$, cioe' fino a $y \sim 1$, i.e. I e' una step function con il gradino a $\omega = \gamma v / b$

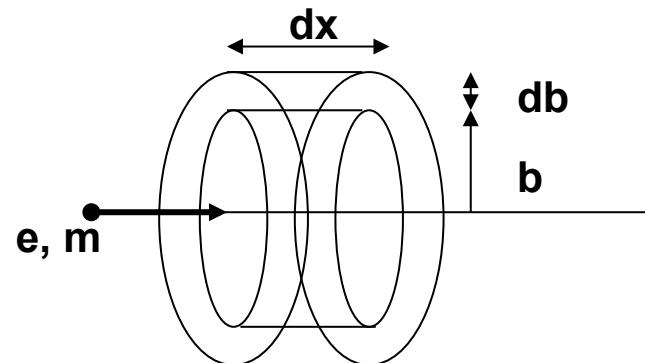
L'energia totale per unita' di frequenza da un singolo elettrone su una popolazione di nuclei di carica Z e'

$$I_t(\omega) = \int_{b_{min}}^{b_{max}} I(\omega) dN'$$

Il # di nuclei nel volume $dV = 2\pi b db dx$ e'
 $dN' = N' dV = 2\pi N' b db dx$, **N' = densita' dei nuclei in K'**

$$dI_t(\omega) = \left(\frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{1}{v^2 b^2} \right) dN'$$

$$= \left(\frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{1}{v^2 b^2} \right) 2\pi N' b db dx$$



Brems classica (13)

$$\begin{aligned}
 dI(\omega) &= \left(\frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{1}{v^2 b^2} \right) 2\pi N' b db dx &= \left(\frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{1}{v^2 b^2} \right) 2\pi N' b db v dt \\
 &= \left(\frac{e^6 Z^2}{12\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{1}{vb} \right) N' db dt \quad [\text{EHz}^{-1}]
 \end{aligned}$$

L'energia emessa per unita' di tempo e frequenza
dovuta a nuclei con $b \div b+db$ e' quindi

$$d\left(\frac{dI(\omega)}{dt}\right) = \left(\frac{e^6 Z^2}{12\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{1}{vb} \right) N' db$$

$$\frac{dI(\omega)}{dt} = \left(\frac{e^6 Z^2 N'}{12\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 v} \right) \int_{b_{min}}^{b_{max}} \left(\frac{db}{b} \right) = \left(\frac{e^6 Z^2 N'}{12\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 v} \right) \ln \frac{b_{max}}{b_{min}} \quad [\text{WHz}^{-1}]$$

Nel caso generale, la densita' N' nel sistema di quiete dell'e- e' data da $\mathbf{N}' = \gamma \mathbf{N}$, con N = densita' nel sistema di quiete del nucleo, cioe' il laboratorio dato che $N = dN / dV$ e $dV' = dV / \gamma$

$$\frac{dI(\omega)}{dt} = \left(\frac{e^6 Z^2 \gamma N}{12\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 v'} \right) \ln \frac{b'_{max}}{b'_{min}}$$

Gli apici indicano esplicitamente che le quantita' sono valutate nel rif di quiete dell'e-

Bisogna scegliere i valori appropriati dei limiti di integrazione nel caso e- relativistici e non.

Brems relativistica

Lo spettro di potenza emesso nel sistema proprio dell'e- e', come si e' gia' visto:

$$\frac{dI'(\omega)}{dt'} = \left(\frac{e^6 Z^2 \gamma N}{12\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 v'} \right) \ln \frac{b'_{max}}{b'_{min}}$$

Gli apici indicano che le quantita' corrispondenti sono valutate nel rif dell'e-
Il fattore γ viene dalla trasformazione della densita' di particelle $N' = \gamma N$

Come al solito bisogna scegliere i valori appropriati per i limiti in b:
Dato che sono quantita' lineari perp a v sono invarianti per trasf di Lorentz
Nel caso della ionizz. per b_{min} , dato che $v/c > Z/137$ occorreva usare il limite
quantistico dettato dal principio di indeterminazione $b_{min} = h/\Delta p$

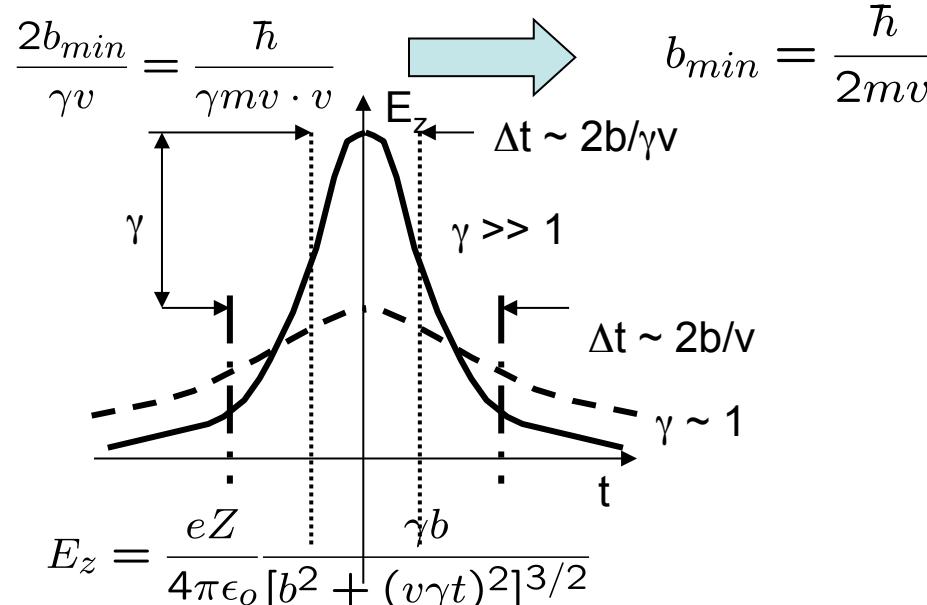
Nel caso della brems, in cui abbiamo a che fare con la radiazione emessa
dall'elettrone, il valore min di b e' fissato invece dalla condizione che l'emissione sia
coerente, cioe' che l'e- emetta "come un'unica carica". Per valori piu' piccoli, gli
effetti della nube di coppie virtuali e+e- intorno alla carica nuda (i.e. Effetti di
polarizzazione del vuoto) cominciano a diventare importanti e l'emissione non e' piu'
coerente

Brems: caso relativistico

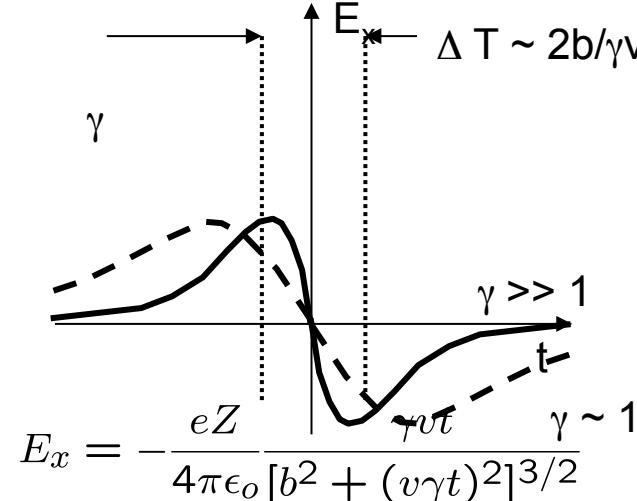
L'affermazione di prima puo' essere riferita dicendo che la durata dell'impulso di radiazione deve essere piu' lunga del tempo impiegato dall'e- a percorrere una lunghezza pari al suo "raggio" Δx_e (come nel caso di atomi o molecole in cui la lunghezza di coerenza e' fissata dalla durata dell'emissione; pacchetti d'onda emessi da sistemi a distanza maggiori di quella di coerenza, $L=cT$, non hanno alcuna relazione di fase e non sono coerenti –p.es. non danno interferenza

$$\Delta T \geq (\Delta x)_e/v \quad \rightarrow \quad \Delta T_{min} = (\Delta x)_e/v$$

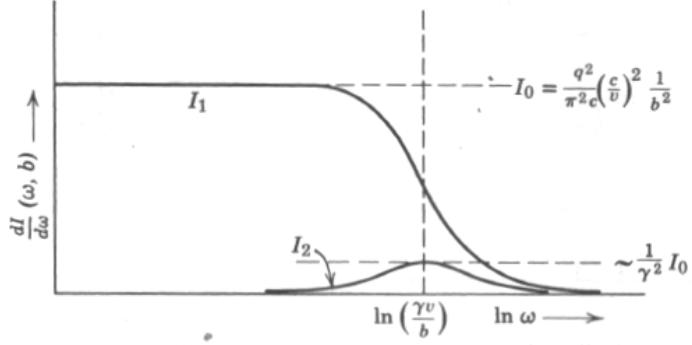
$$\text{ma} \quad \Delta T_{min} = \frac{2b_{min}}{\gamma v} \quad \Delta x_e = \frac{\hbar}{\Delta p} = \frac{\hbar}{\gamma mv}$$



Alla distanza di max avvicinamento a $t=0$, $E_z = \gamma E_z(\text{NR})$, ma la durata dell'interazione e' contratta di un fattore γ (contrazione di Lorentz per b lungo x)



Brems relativistica



L'analisi fatta dell'emissione spettrale e' del tutto relativistica e lo spettro di emissione di un singolo elettrone su un singolo nucleo **ionizzato** e'

$$I(\omega) = \left(\frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{\omega^2}{\gamma^2 v^4} \right) \left[\frac{K_o^2(y)}{\gamma^2} + K_I^2(y) \right]$$

$\omega b / \gamma v \gg 1$

$$\approx \left(\frac{e^6 Z^2}{48\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{\omega}{\gamma b v^3} \right) e^{-2\frac{\omega b}{\gamma v}} \left[\frac{1}{\gamma^2} + 1 \right]$$

$\omega b / \gamma v \ll 1$

$$\approx \left(\frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{1}{v^2 b^2} \right)$$

Il valore max di b e' quello a cui c'e' il cutoff exp

$$2 \frac{\omega b_{max}}{\gamma v} \approx 1 \quad \Rightarrow \quad b_{max} \approx \frac{\gamma v}{2\omega}$$

Quindi $\frac{b_{max}}{b_{min}} \approx \frac{\gamma v}{2\omega} \times \frac{2mv}{\hbar} = \frac{\gamma mv^2}{\hbar\omega}$



$$\frac{dI'(\omega)}{dt'} = \left(\frac{e^6 Z^2 \gamma N}{12\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 v'} \right) \ln \frac{\gamma mv^2}{\hbar\omega}$$

$$\vec{v}' = -\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{dI'(\omega)}{dt'} = \left(\frac{e^6 Z^2 \gamma N}{12\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 v} \right) \ln \frac{\gamma mv^2}{\hbar\omega}$$

Abbiamo espresso tutte le quantita' a destra nel labo

Brems relativistica

Dobbiamo trasformare le quantita' a sx dal K' a K del labo

Nel labo $\frac{dI}{dt} = \frac{dE}{dtd\omega}$ ma $dE = \frac{dE}{dE'}dE'$ $d\omega = \frac{d\omega}{d\omega'}d\omega'$ $dt = \frac{dt}{dt'}dt'$

$$= \frac{dE}{dE'}dE' \frac{1}{\frac{dt}{dt'}dt' \frac{d\omega}{d\omega'}d\omega'} = \frac{dE}{dE'} \frac{dt'}{dt} \frac{d\omega'}{d\omega} \frac{dE'}{dt'd\omega'} = \frac{dE}{dE'} \frac{dt'}{dt} \frac{d\omega'}{d\omega} \frac{dI'}{dt'}$$

Dalle trasf di Lorentz $dE = \gamma dE' (1 + \beta \cos \theta')$ Poiche' non siamo interessati alla distribuzione angolare e l'emissione e' isotropa in K', mediamo su $\theta' \rightarrow \cos \theta$ sparisce

$$\begin{aligned} dE &= \gamma dE' \\ d\omega &= \gamma d\omega' \\ dt &= \gamma dt' \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \frac{dI}{dt} = \gamma \frac{1}{\gamma} \frac{1}{\gamma} \frac{dI'}{dt'} = \frac{1}{\gamma} \frac{dI'}{dt'} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{e^6 Z^2 \gamma N}{12\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 v} \right) \ln \frac{\gamma m v^2}{\hbar \omega}$$

$$\frac{dI}{dt} = \left(\frac{e^6 Z^2 N}{12\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 v} \right) \ln \frac{\gamma m v^2}{\hbar \omega} \quad \text{Rimane solo una debole dipendenza da } \gamma \text{ nel log}$$

NB: $\ln(\gamma m v^2 / \hbar \omega) \sim G_{ff}$, fattore di gaunt, come nel caso non relativistico

Il fattore davanti al log e' lo stesso del caso non relativistico

Brems relativistica

$$\frac{dI}{dt} = \left(\frac{e^6 Z^2 N}{12\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 v} \right) G_{ff}^{rel}$$

Nel caso ultra relativistico $v \sim c$

$$\frac{dI}{dt} \approx \left(\frac{e^6 Z^2 N}{12\pi^3 \epsilon_0^3 m_e^2 c^4} \right) G_{ff}^{rel}$$

E' lo spettro di potenza emesso da un e-

NB: la dipendenza da v e' G_{ff}

Nel caso relativistico, la distribuzione termica di equilibrio e' ancora una maxwelliana, ma stavolta relativistica

Per particelle ultra-relativistiche $E \gg cp \rightarrow f(\vec{p})d^3p = 4\pi A e^{-cp/kT} p^2 dp$

$$A = (4\pi \int e^{-cp/kT} p^2 dp)^{-1} \quad \text{Tenendo conto che} \quad \int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = a^{-1-n} \Gamma(n+1)$$

e che $\Gamma(n+1) = n!$ se n intero $\rightarrow A = (8\pi c/kT)^{-3} = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{c}{kT}\right)^3$

$$f(\vec{p})d^3p = \frac{1}{2} \left(\frac{c}{kT}\right)^3 e^{-cp/kT} p^2 dp \quad \rightarrow \quad dn = N_e \frac{1}{2} \left(\frac{c}{kT}\right)^3 e^{-cp/kT} p^2 dp$$

E' la densita' di volume delle particelle ultra relativistiche con p fra p e $p+dp$

Brems relativistica:materia neutra

Fino ad ora abbiamo considerato emissione su nuclei completamente ionizzati.

Tuttavia, nelle galassie in particolare e' presente una grande quantita' di materia neutra (atomica e molecolare). p.es. sotto forma di HI (idrogeno atomico), H₂ e molte altre molecole che formano regioni compatte e dense.

Nel caso di materia neutra di numero atomico Z e di massa A, occorre tenere conto dello screening della carica nucleare da parte degli elettroni atomici

In un approccio naive, si puo' sostituire al campo coulombiano, quello di Fermi-Thomas

$$V = \frac{eZ^2}{4\pi\epsilon_0 r} \longrightarrow V = \frac{eZ^2}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/a} \quad a = 1.4a_o Z^{-1/3}$$
$$a_o = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = 0.53 \times 10^{-10} m$$

E approssimare con una step function $\theta(r/a)$, i.e. non c'e campo a distanze $r > a$

$$\rightarrow \mathbf{b}_{\max} = a$$

Brems relativistica:materia neutra

Fra i due limiti di b_{max} , quello "ionizzato" e quello "neutro" di FT occorre scegliere il piu' piccolo

$$\frac{b_{FT}}{b_{ion}} = \frac{1.4a_o}{Z^{1/3}} \frac{\omega}{\gamma v}$$

Quando $\omega \geq \frac{\gamma v Z^{1/3}}{1.4a_o} \rightarrow b_{ion}$

Nel limite $\gamma \rightarrow \infty$ occorre usare il limite di FT

$$b_{max} = 1.4a_o Z^{-1/3} \quad b_{min} = \frac{\hbar}{2mv}$$

$$\frac{dI'(\omega)}{dt} = \left(\frac{e^6 Z^2 \gamma N}{12\pi^3 \epsilon_o^3 c^3 m_e^2 v'} \right) \ln \frac{1.4 \cdot 2mva_o}{\hbar Z^{1/3}}$$

La frequenza max di emissione corrisponde alla (solita) condizione che l'e- non puo' emettere fotoni con energie superiori alla sua energia cinetica

$$\omega_{max} = \frac{mc^2(\gamma - 1)}{\hbar}$$

Lo spettro e' piatto fino a ω_{max}

Brems relativistica:materia neutra

$$\frac{dI'(\omega)}{dt} = \left(\frac{e^6 Z^2 \gamma N}{12\pi^3 \epsilon_o^3 c^3 m_e^2 v'} \right) \ln \frac{1.4 \cdot 2mva_o}{\hbar Z^{1/3}} \quad \omega_{max} = \frac{mc^2(\gamma - 1)}{\hbar}$$

Ora dobbiamo trasformare la potenza spettrale nel laboratorio

$$\frac{dI(\omega)}{dt} = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{dE}{dt} \right)$$

La potenza totale dE/dt e' un invariante relativistico
→

Basta trasformare il differenziale in ω

$$\omega' = \frac{1}{T'} \quad T' = \gamma T \quad 1/T' = 1/(\gamma T) \quad \omega' = \frac{\omega}{\gamma}$$

$$\frac{d}{d\omega} = \frac{d\omega'}{d\omega} \frac{d}{d\omega'} \quad \frac{d\omega'}{d\omega} = \frac{1}{\gamma} \quad \frac{d}{d\omega} = \frac{1}{\gamma} \frac{d}{d\omega'}$$

$$\frac{dI(\omega)}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{d}{d\omega'} \left(\frac{dE}{dt} \right) = \frac{1}{\gamma} \frac{dI'(\omega')}{dt'} \approx \left(\frac{e^6 Z^2 N}{12\pi^3 \epsilon_o^3 c^4 m_e^2} \right) \ln \frac{1.4 \cdot 2mca_o}{\hbar Z^{1/3}}$$

Per e- ultrarelativistici $v \sim c$

Brems relativistica:materia neutra

$$\frac{dI(\omega)}{dt} \approx \left(\frac{e^6 Z^2 N}{12\pi^3 \epsilon_0^3 c^4 m_e^2} \right) \ln \frac{1.4 \cdot 2mc a_o}{\hbar Z^{1/3}}$$

$$\omega_{max} = \frac{mc^2(\gamma - 1)}{\hbar}$$

La potenza totale emessa e'

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^{E_k/\hbar} \frac{dI(\omega)}{dt} d\omega = (E_k/\hbar) \frac{dI(\omega)}{dt} d\omega$$

$$\frac{dE}{dt} = \left(\frac{e^6 Z^2 N}{12\pi^3 \epsilon_0^3 c^4 m_e^2 \hbar} \right) E_k \ln \frac{192}{Z^{1/3}}$$

Il calcolo esatto da'

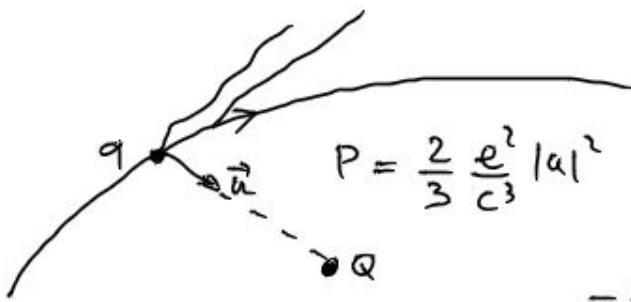
$$\frac{dE}{dt} = \frac{Z(Z + 1.3)e^6 N}{16\pi^3 \epsilon_0^3 c^4 m_e^2 \hbar} E_k \ln \left(\frac{183}{Z^{1/3}} + \frac{1}{8} \right)$$

Nonostante le approx fatte il risultato e' sostanzialmente corretto. La forma funzionale della potenza emessa e'

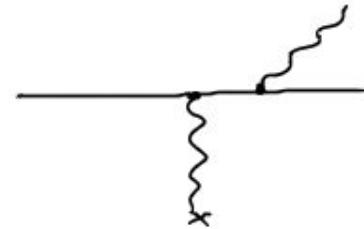
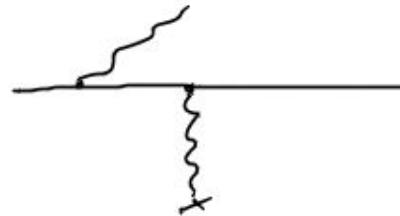
$$\frac{dE}{dt} = (cost.) \cdot Z(Z + 1.3) N E_k$$

Brems

- Emissione di fotoni nel campo elettrico di una carica



$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} |\mathbf{u}|^2$$



$$-\frac{1}{E} \left(\frac{dE}{dt} \right)_{\text{br}} = 4 N z^2 r_e^2 \alpha c \bar{g}$$

• N = densità dei nuclei sui cui gli elettroni fanno scattering

$$r_e = \frac{e^2}{m_e c^2} \quad \text{raggio class. dell}'e^- \quad \alpha = \text{cost. di strutt. fine}$$

\bar{g} = fattore di Gaunt - parametrizza le correzioni quant. alla formula classica

Si ha bremsstrahlung ogni volta che particelle leggere cariche attraversano un gas di particelle pesanti – tipicamente protoni dell'ISM

Brems

- \bar{g} tiene conto del fatto che ci può essere screening nucleare degli elettroni atomici

- no screening, i.e. plasma completamente ionizzato

$$\bar{g} = \ln(2\gamma) + \frac{1}{3} = \ln\gamma + 0.36$$

- screening totale, i.e. H freddo $\bar{g} = \ln(183\bar{Z}^{-1/3}) - 1/18$

$$-\frac{1}{E} \left(\frac{dE}{dt} \right)_{BN} = \begin{cases} 7.0 \times 10^{-23} N (\ln\gamma + 0.36) & \text{No scr.} \\ 3.6 \times 10^{-22} N & \text{Tot. scr.} \end{cases} \text{ s}^{-1}$$

- Entro un intervallo $100 \leq \gamma \leq 10^5$ coincidono entro un fattore ~ 2

- In entrambi i casi $\left(\frac{dE}{dt} \right)_{BN} \propto E$

Brems

La potenza di singola particella emessa per bremsstrahlung ha una distribuzione spettrale caratteristica.

Un elettrone di energia E puo' emettere solo fotoni con un'energia $h\omega < E$

Lo spettro di frequenza e' piatto fino alla frequenza max

Il calcolo dello spettro di frequenza da bremsstrahlung e' lungo e laborioso. Fisicamente e' dovuto alla forma del campo elettrico che interviene nell'interazione.

Brems classica: emissività'

L'emissione totale per unita' di volume di una popolazione di elettroni, detta emissività' k_ω ($\text{P}\text{Hz}^{-1}\text{L}^{-3}$) si ottiene integrando l'emissione di singola particella sulla distribuzione di particelle

$$k_\omega \equiv \frac{dE(\omega)}{d\omega dt dV} = \int \frac{dI(\omega)}{dt} dn \quad [\text{P}\text{L}^{-3}\text{Hz}^{-1}] \quad \frac{dI(\omega)}{dt} = \left(\frac{e^6 Z^2 N}{12\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 v} \right) \ln \Lambda$$

Fino a $h\omega = E$

La densita' dn rappresenta la densita' di volume di elettroni e puo' rappresentare **qualunque** distribuzione, i.e. $dn = n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$ con x_1, \dots, x_n variabili nello spazio delle fasi appropriato: p. es. v od E

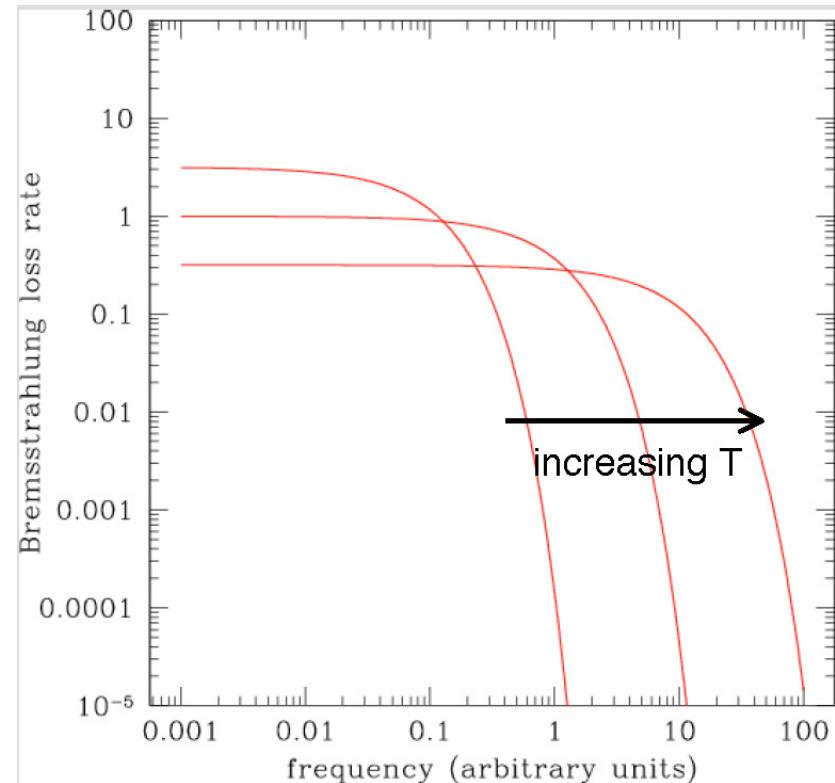
I casi piu' comuni sono quelli in cui la distribuzione e' una legge di potenza in energia

$$n(E) dE \propto E^{-\gamma} dE$$

o una maxwelliana (non relativistica)

$$n(v) dv = 4\pi N_e \left(\frac{m_e}{2\pi k T} \right)^{3/2} v^2 \exp(-mv^2/2kT) dv$$

$$k_\omega = 6.8 \times 10^{-51} T^{-1/2} Z^2 N N_e e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} G(\omega, T) \quad \text{W Hz}^{-1} \text{m}^{-3}$$

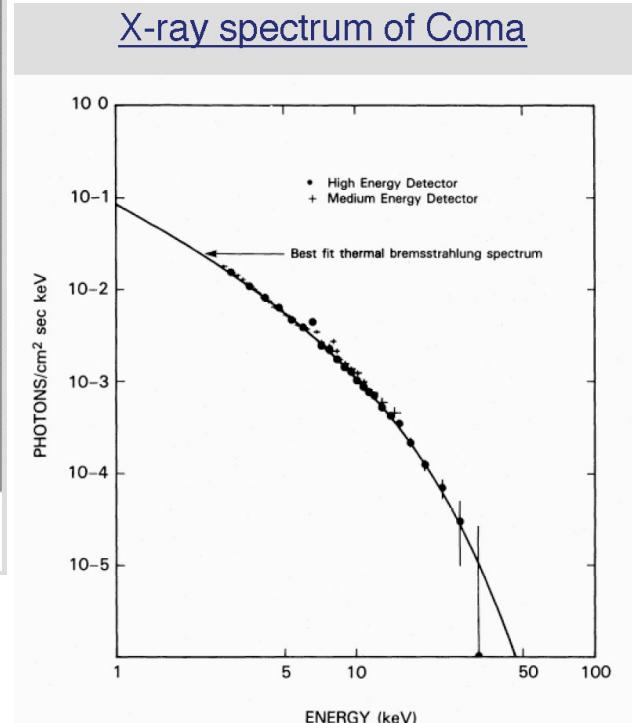


La pendenza della curva ci dà la temperatura della sorgente

Nota T, se conosciamo la distanza della sorgente, possiamo calcolare anche $N N_e$

Assumendo $N \approx N_e$, $N^2 \approx N_e^2$ possiamo calcolare la densità del gas che emette

$$k_\omega = 2.75 \times 10^2 \frac{T^{-1/2} Z^2 N N_e}{E} e^{-\frac{E}{kT}} G(E/\hbar, T) \quad \# \text{ fotoni s}^{-1} (\text{eV})^{-1} \text{m}^{-3}$$



Shape of spectrum gives the temperature.

Intensity (for a known distance) gives the density of the gas.

Galaxy cluster: find $T = 10 - 100$ million K.

$$F_\omega = \frac{k_\omega V}{4\pi d^2}$$

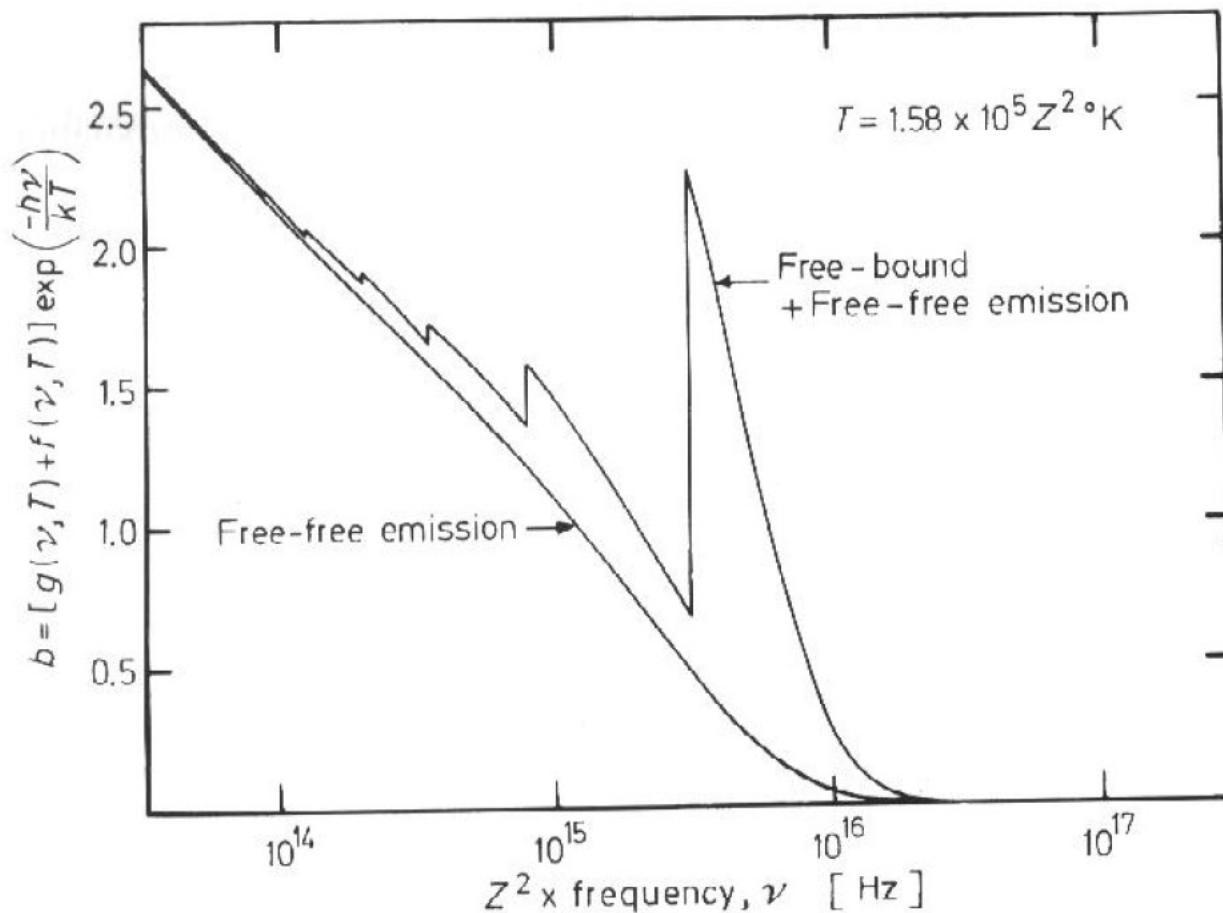


Fig. 1.5. The emission spectrum of a Maxwellian distribution of electrons at a temperature of $T = 2\pi^2 me^4 Z^2 / (h^2 k) = 1.58 \times 10^5 Z^2 \text{ } ^\circ\text{K}$ with exact Gaunt factors taken into account [after Brussard and van de Hulst, 1962]. The lower curve illustrates the spectrum of thermal bremsstrahlung emission, whereas the upper curve illustrates the combined spectrum of thermal bremsstrahlung and recombination radiation. The volume emissivity, ε_ν , is related to b by Eq. (1.237)

Spettro da una distr non termica

Se la popolazione di e^- e' non termica, p. es. $n(E)dE = AE^{-p}dE$
→ Elettroni ultrarelat → $v \approx c$

Fattore di Gaunt ≈ 1

■ Spettro di singola particella piatto in frequenza

$$\frac{dI(\omega)}{dt} \approx \left(\frac{e^6 Z^2 N}{12\pi^3 \epsilon_0^3 c^4 m_e^2} \right)$$

■ Fino a $\omega_{\max} = E_{e^-}$

$$k_{\omega} \equiv \frac{dE(\omega)}{d\omega dt dV} = \int_{\omega_{\max}}^{\infty} \frac{dI(\omega)}{dt} dn \quad \text{Dato che solo } e^- \text{ con } E > \hbar\omega \text{ contribuiscono all'emissione}$$

$$k(\omega) = \frac{aB}{(p-1)} (\hbar\omega)^{-p+1}$$

$$N_{\gamma}(\omega) = \frac{k}{\hbar\omega} = \frac{aB}{\hbar(p-1)} (\hbar\omega)^{-p}$$

■ I fotoni emessi hanno lo stesso indice spettrale delle particelle che emettono

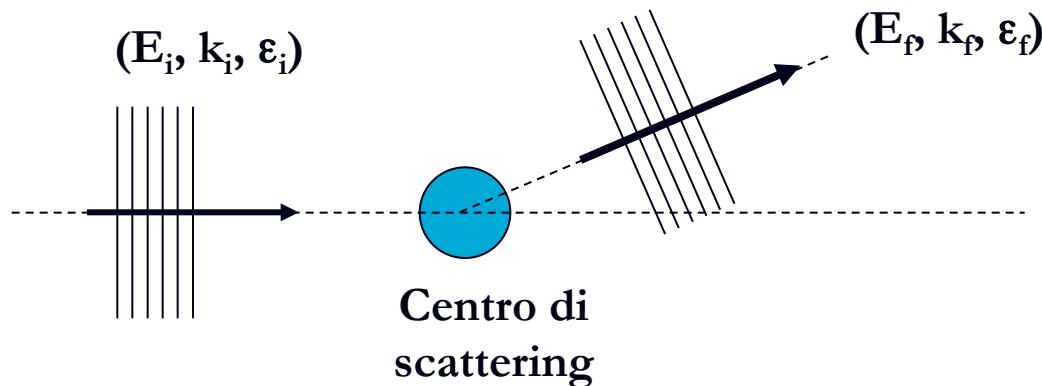
Diffusione Thomson/Compton

In astrofisica non e' tanto interessante l'effetto Compton quanto piuttosto il cosiddetto Compton inverso in cui l'elettrone perde energia a favore del campo di fotoni che vengono energizzati

- Tratteremo in dettaglio il processo nella parte dedicata ai processi di radiazione elettromagnetica
- In termini semplificati, si ha compton inverso quando un elettrone di alta energia urta un fotone di bassa energia: nell'urto l'e- cede energia al fotone in un urto relativistico inelastico
- Nel singolo urto l'energia max che un elettrone puo' cedere e'
t.c. $\epsilon_{\text{fotone dopo}}^{\text{fotone}} / \epsilon_{\text{fotone prima}}^{\text{fotone}} = 4\gamma^2$

Scattering di radiazione elm

Ogni volta che un'onda elm interagisce con una particella carica, le sue proprieta' (direzione, energia, polarizzazione,...) vengono alterate, insieme a quelle della particella colpita.



Diffusione di fotoni

Tradizionalmente si parla di diffusione Thomson e Compton a seconda dell'intervallo si energie in gioco:

Quando $(h/2\pi)\omega \ll mc^2$ si parla di diffusione Thomson,
mentre quando $(h/2\pi)\omega \gg mc^2$ si parla di diffusione Compton.

Tuttavia da un punto di vista fisico non c'e alcuna differenza poiche' il processo e' esattamente lo stesso.

Quello che cambia e' l'approccio: classico per Thomson, quantistico per Compton

Diffusione Thomson

Il problema e' seguente: data un'onda elm incidente su un elettrone, bisogna trovare l'intensita' della radiazione diffusa dalla particella.

Quando $h\omega \ll mc^2$ si puo' usare il formalismo semi-classico

Supponiamo che l'onda viaggi lungo la direzione positiva di z e che l'e- atomico sia posto in quiete nell'origine. In tal caso

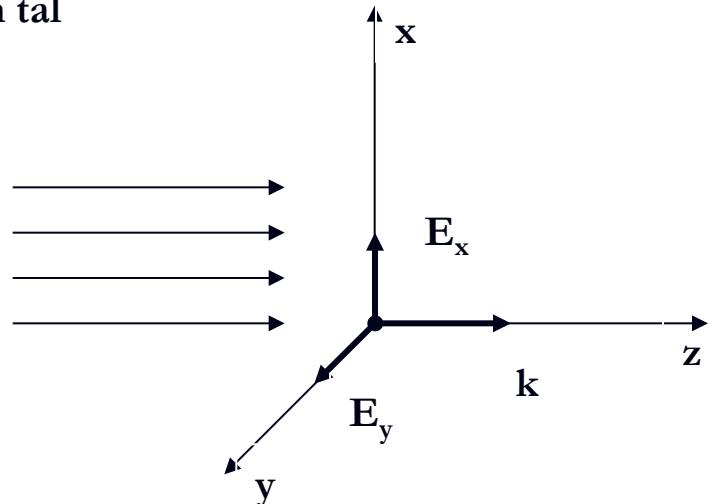
$$E = \hbar\omega \quad \vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u}_z \quad \vec{p} = \frac{\hbar\omega}{c} \vec{u}_z = \hbar\vec{k}$$

Supponiamo anche l'onda non sia polarizzata \rightarrow il campo oscilla nel piano x-y

$$E_x = E_{ox} e^{i(kz - \omega t)}$$

$$E_y = E_{oy} e^{i(kz - \omega t)}$$

Con $E_{xo} = E_{yo}$ dato che l'onda non e' polarizzata (in realta' dovrei aggiungere una fase arbitraria)



Diffusione Thomson

$$E_x = E_{ox} e^{i(kz - \omega t)}$$

Per semplificare la matematica, scegliamo la geometria dello scattering in modo tale che l'angolo di scattering α giaccia nel piano x-z

$$E_y = E_{oy} e^{i(kz - \omega t)}$$

La potenza emessa e' quella di Larmor nel limite non relativistico

Le componenti dell'accelerazione sono

$$a_x = \frac{e}{m} E_x \quad a_y = \frac{e}{m} E_y$$

I campi di radiazione e la potenza emessa sono

$$\vec{E}_a = \frac{e}{c} \left[\frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta})}{R} \right]$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \vec{S} \cdot \vec{n} R^2 = \frac{cE^2}{4\pi} R^2$$

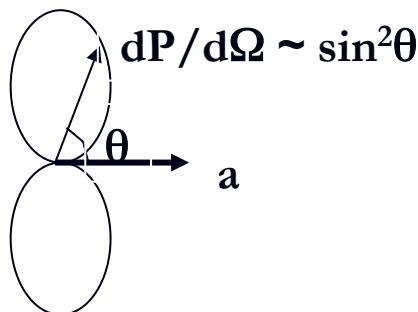
$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} |\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta})|^2$$

$$\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta}) = \vec{n} \cdot \vec{\beta} - \vec{\beta}$$

$$|\vec{\beta}_{\perp n}| = \beta \sin \theta$$

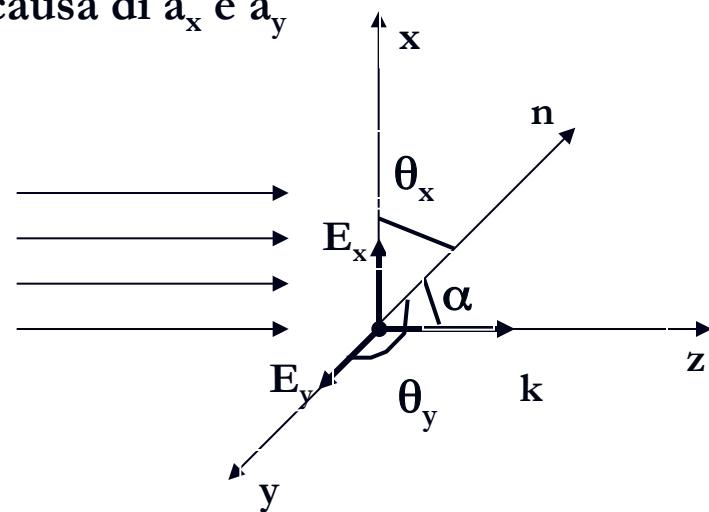
La potenza totale e' la somma delle potenza emessa a causa di a_x e a_y

$$\frac{dP_i}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \dot{\beta}_i^2 \sin^2 \theta = \frac{e^2}{4\pi c^3} a_i^2 \sin^2 \theta_i \quad i=x, y$$



$$dP/d\Omega \sim \sin^2 \theta$$

$$\frac{dP_{tot}}{d\Omega} = \frac{dP_x}{d\Omega} + \frac{dP_y}{d\Omega}$$



Diffusione Thomson

L'elettrone e' nell'origine \rightarrow

$$E_x(0, t) = E_{ox} e^{-i\omega t}$$

$$a_x = \frac{e}{m} E_x$$

$$E_y(0, t) = E_{oy} e^{-i\omega t}$$

$$a_y = \frac{e}{m} E_y$$

Per cui $\frac{dP_i}{d\Omega} = \frac{e^4}{4\pi c^3} \frac{E_i^2(0, t)}{m^2} \sin^2 \theta_i \quad i=x, y$

Usualmente si calcola la potenza media in un periodo $\rightarrow \langle E_i^2(0, t) \rangle_T = E_{oi}^2/2$

$$\langle \frac{dP_i}{d\Omega} \rangle = \frac{e^4}{4\pi m^2 c^3} \frac{E_{oi}^2}{2} \sin^2 \theta_i$$

L'intensita' incidente lungo le 2 dir coordinate e' data dai risp. vettori di Poynting S_i

$$\langle S_i \rangle = \frac{c}{4\pi} \frac{E_{oi}^2}{2}$$

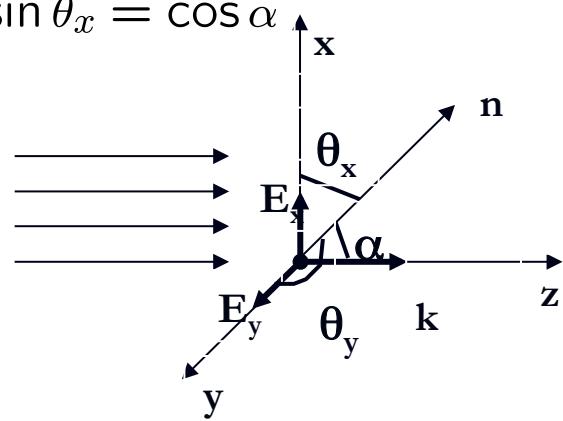
$$\langle \frac{dP_i}{d\Omega} \rangle = \frac{e^4}{m^2 c^4} \langle S_i \rangle \sin^2 \theta_i$$

Abbiamo espresso la potenza emessa in funzione dell'intensita' incidente S_i

θ e' l'angolo con a , ma noi vogliamo esprimere la potenza emessa rispetto alla direzione di propagazione della radiazione incidente $\rightarrow \sin \theta_x = \cos \alpha$

Con la scelta degli assi fatta $\theta_y = \pi/2 \rightarrow$

$$\langle \frac{dP_y}{d\Omega} \rangle = \frac{e^4}{m^2 c^4} \langle S_y \rangle \quad \langle \frac{dP_x}{d\Omega} \rangle = \frac{e^4}{m^2 c^4} \langle S_x \rangle \cos^2 \alpha$$



Diffusione Thomson

Come si e' visto prima

$$\frac{dP_{tot}}{d\Omega} = \frac{dP_x}{d\Omega} + \frac{dP_y}{d\Omega} = \frac{e^4}{m^2 c^4} (\langle S_y \rangle + \langle S_x \rangle \cos^2 \alpha)$$

Il raggio classico dell'elettrone e'

$$r_e = \frac{e^2}{mc^2} \rightarrow \frac{dP_{tot}}{d\Omega} = r_e^2 (\langle S_y \rangle + \langle S_x \rangle \cos^2 \alpha)$$

Dato che $|E_x| = |E_y|$, $S_x = S_y$ (l'onda incidente

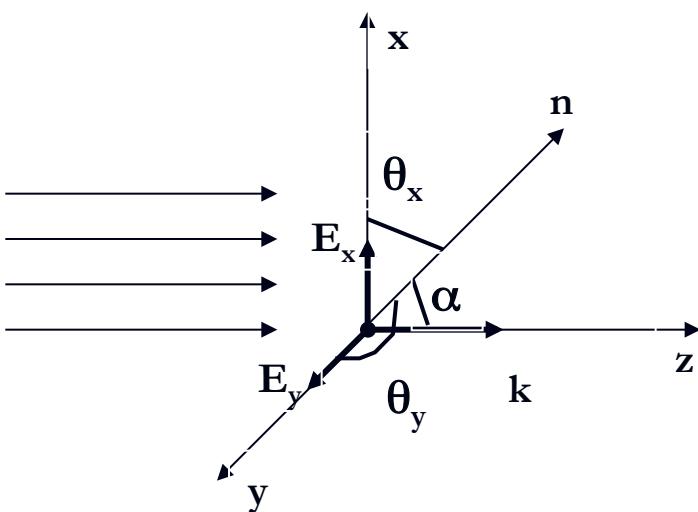
non e' polarizzata), $E_{tot} = E_x + E_y$ e $\vec{S} = \vec{S}_y + \vec{S}_x$

$$\Rightarrow \langle S \rangle = \langle S_y \rangle + \langle S_x \rangle \rightarrow \langle S \rangle / 2 = \langle S_i \rangle$$

quindi $\frac{dP_{tot}}{d\Omega} = r_e^2 (1 + \cos^2 \alpha) \frac{\langle S \rangle}{2}$

$$\frac{dP_{tot}}{d\Omega} = \frac{d}{d\Omega} \left(\frac{dE}{dt} \right)$$

= energia per unita' di tempo e di angolo solido



Diffusione Thomson

Per definizione la sezione d'urto differenziale e'

$$d\sigma = \frac{\text{energia per unita' di tempo nell'angolo solido } d\Omega}{\text{energia per unita' di tempo e superficie}}$$

Cioe'

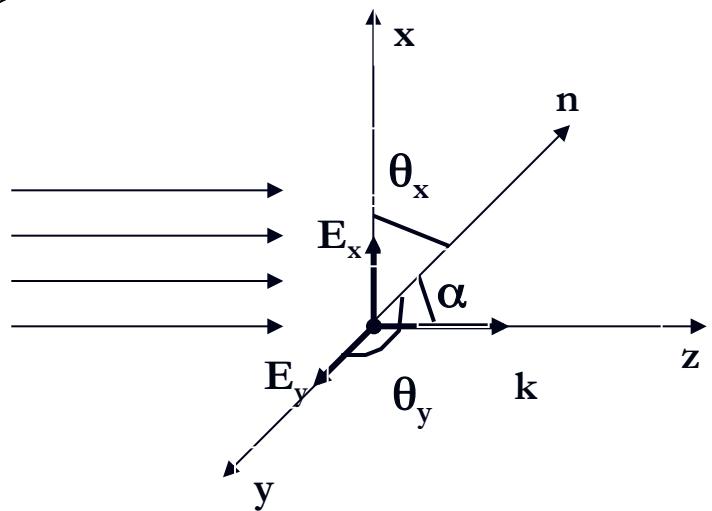
$$d\sigma = \frac{\frac{d}{d\Omega} \left(\frac{dE}{dt} \right) d\Omega}{I_{inc}} \quad r_e = \frac{e^2}{mc^2}$$

Ma I e' s \rightarrow

$$d\sigma = r_e^2 (1 + \cos^2 \alpha) \frac{< S >}{2 < S >} d\Omega$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_e^2 (1 + \cos^2 \alpha)$$

E' la sezione d'urto differenziale per la diffusione di Thomson di onde non polarizzate



Diffusione Thomson

La sezione d'urto totale si ottiene integrando sull'angolo solido

$$\begin{aligned}\sigma_T &= \int_{4\pi} \frac{1}{2} r_e^2 (1 + \cos^2 \alpha) d\Omega &= -\frac{1}{2} r_e^2 \int_1^{-1} (1 + \cos^2 \alpha) 2\pi d(\cos \alpha) \\ &= -\pi r_e^2 (x + x^3/3) \Big|_{-1}^{-1} &= \frac{8}{3} \pi r_e^2\end{aligned}$$

Sostituendo $r_e = \frac{e^2}{mc^2}$ **si ha** $\sigma_T = \frac{8}{3} \pi \frac{e^4}{m^2 c^4}$

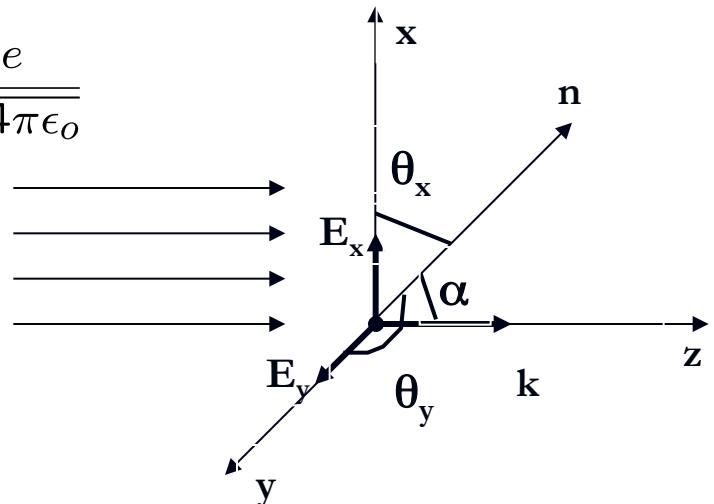
Per passare al sistema MKSA

$$\sigma_T = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0^2 m^2 c^4}$$

$$e \rightarrow \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$$

Numericamente $\sigma_T = 6.653 \times 10^{-29} \text{ m}^2$
 $= 0.6653 \text{ barn}$

53 1 barn = 10^{-28} m^2

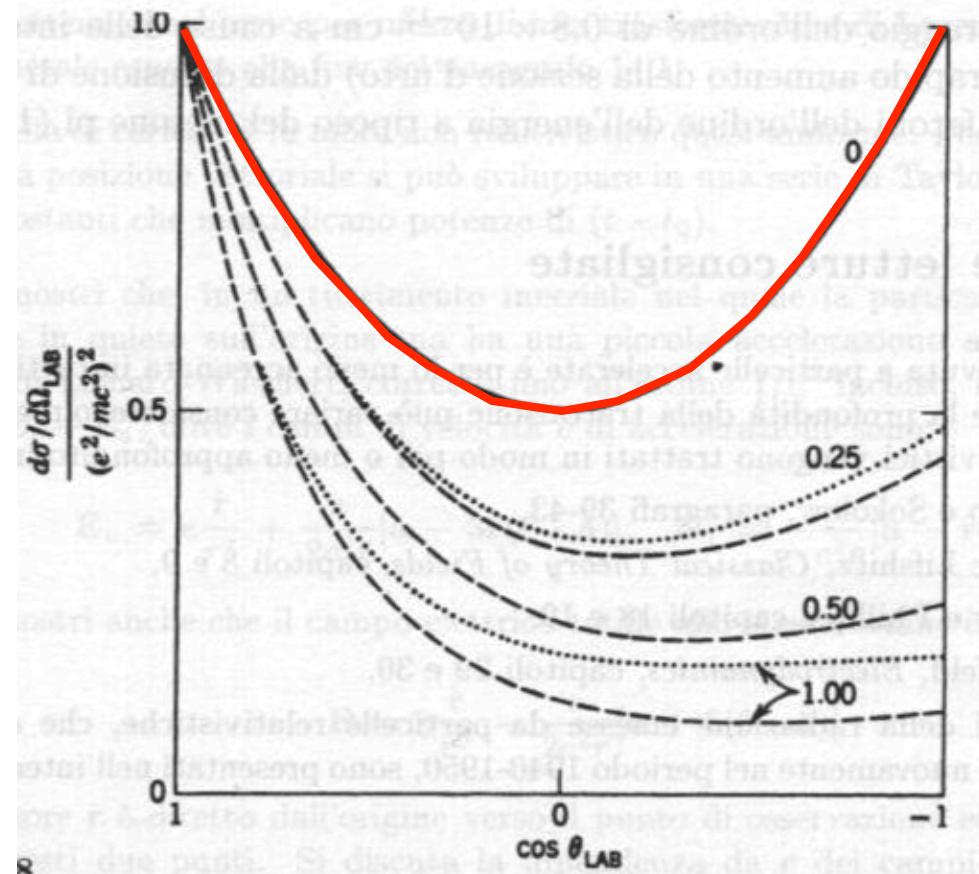
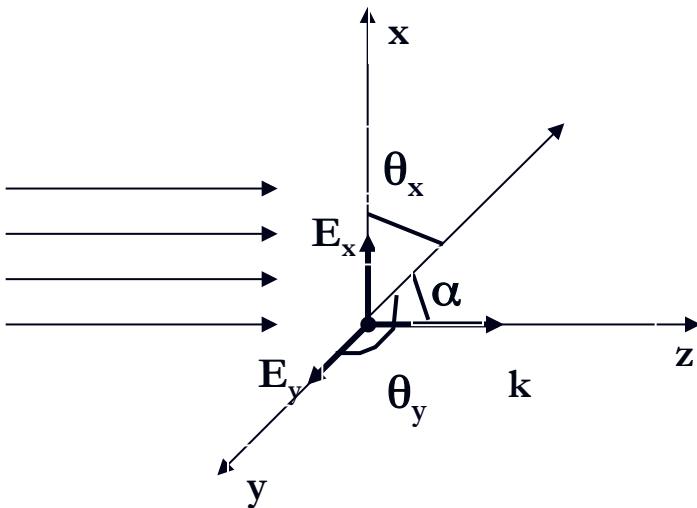


Diffusione Thomson

► La sezione d'urto Thomson compare in tutti i processi di radiazione

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_e^2 (1 + \cos^2 \alpha) \quad \sigma_T = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0^2 m^2 c^4} = \frac{8\pi}{3} r_e^2 = 0.6653 \text{ barn} \quad 1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2$$

► L'emissione e' simmetrica rispetto alla direzione di incidenza dato che $d\sigma/d\Omega \approx \cos^2\alpha$ e la frequenza della radiazione emessa e' la stessa di quella incidente, dato che $a \approx E$



Diffusione Thomson

- La potenza totale emessa puo' essere espressa in termini della densita' di energia elettromagnetica incidente
- Integrando la distribuzione angolare di potenza trovata prima si ha la potenza totale

$$\frac{dP_{tot}}{d\Omega} = r_e^2 (1 + \cos^2 \alpha) \frac{\langle S \rangle}{2} \quad \frac{dE_{tot}}{dt} = \int_{4\pi} \frac{dP_{tot}}{d\Omega} d\Omega$$

$$\frac{dE_{tot}}{dt} = 2\pi r_e^2 \frac{\langle S \rangle}{2} \int (1 + \cos^2 \alpha) d(\cos \alpha) = 2\pi r_e^2 \frac{\langle S \rangle}{2} \frac{8}{3} = \sigma_T \langle S \rangle$$

- con $S = \frac{c}{4\pi} E^2$ $u_{rad} = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) = \frac{1}{4\pi} E^2$ ■ Perche' $E=B$

- quindi $S = c u_{rad}$

$$\frac{dE_{tot}}{dt} = \sigma_T c u_{rad}$$

Diffusione Thomson: spessore ottico

Dal punto di vista di un fascio di radiazione che attraversa un mezzo con un plasma di elettroni si ha attenuazione dell'intensità poiché ciascun elettrone si comporta come un re-radiatore che diffonde la radiazione in tutte le direzioni senza che vi sia trasferimento di energia dalla radiazione alle particelle

Dal punto di vista dei fotoni, essi urtano elasticamente gli elettroni e vengono deviati casualmente come "normali" particelle prive di massa di riposo e seguono quindi un random walk

Dalla definizione di sezione d'urto, il # di fotoni rimossi, n , (i.e. diffusi) da un fascio di densità N incidente su un singolo elettrone e'

$$dn = -N\sigma_T c dt$$

Così' nel caso di un plasma con densità N_e si ha un rate di interazione per unità di volume

$$dN = -N_e N \sigma_T c dt \quad \longrightarrow \quad dN/dt = -N_e N \sigma_T c$$

Diffusione Thomson: spessore ottico

$$dN/dt = -N_e N \sigma_T c \quad dN/N = -N_e \sigma_T c dt \quad dN/N = -N_e \sigma_T ds \quad ds = c dt$$

Per cui $N(s) = N_o e^{-\int N_e \sigma_T ds}$

Dalla definizione di spessore ottico $\tau = \int N_e \sigma_T ds$ si ha $N(s) = N_o e^{-\tau}$

Si puo' definire anche un coeff di scattering $\chi_s = N_e \sigma_T$

L'attenuazione del fascio dipende dallo spessore ottico Thomson del plasma

Il libero cammino medio λ_T tra due interazioni di un fotone e' $\lambda_T = 1/N_e \sigma_T$

la probabilita' di interazione di un fotone e' proporzionale a $dp \propto ds/\lambda_T$

ma $d\tau = ds/\lambda_T$  $dp \propto d\tau$

Ad ogni interazione il fotone viene diffuso. Se N_e e' suff. alto ovvero τ grande, i fotoni seguono un random walk nel mezzo

La diffusione Thomson e' responsabile dell'opacita' dell'interno delle stelle (e causa p.es. del fatto che un fotone prodotto nel nucleo del impiega circa 10^5 anni prima di raggiungere la fotosfera ed essere irraggiato nello spazio)

Compton inverso

Tradizionalmente si parla di diffusione Thomson e Compton a seconda dell'intervallo di energie in gioco:

quando $h\omega/2\pi \ll mc^2$ si parla di diffusione Thomson,
mentre quando $h\omega/2\pi \gg mc^2$ si parla di diffusione Compton.

Tuttavia da un punto di vista fisico non c'e alcuna differenza poiche' il processo e' esattamente lo stesso.

Quello che cambia e' l'approccio: classico per Thomson, quantistico per Compton

Diffusione Thomson/Compton

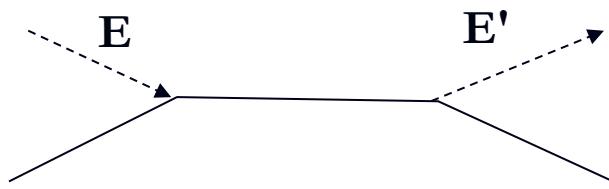
La sezione d'urto Thomson descrive bene la diffusione della radiazione nel laboratorio in cui l'e- e' stazionario finche' l'energia del fotone e' $h\omega \ll mc^2$

Piu' in generale σ_T descrive bene la diffusione della radiazione finche' l'energia del fotone e' $h\omega \ll mc^2$ nel sistema di riferimento di quiete dell'elettrone

Quando questa condizione non e' piu' verificata, il formalismo classico non si puo' piu' usare poiche' c'e' trasferimento di energia fra fotone e particella carica, l'aspetto corpuscolare del fotone diventa importante e si parla di effetto Compton

Diffusione Compton: Klein-Nishina

Nel caso in cui l'energia del fotone e' dell'ordine dell'energia di riposo dell'e- la sezione d'urto Thomson non vale piu', ma occorre usare la QED



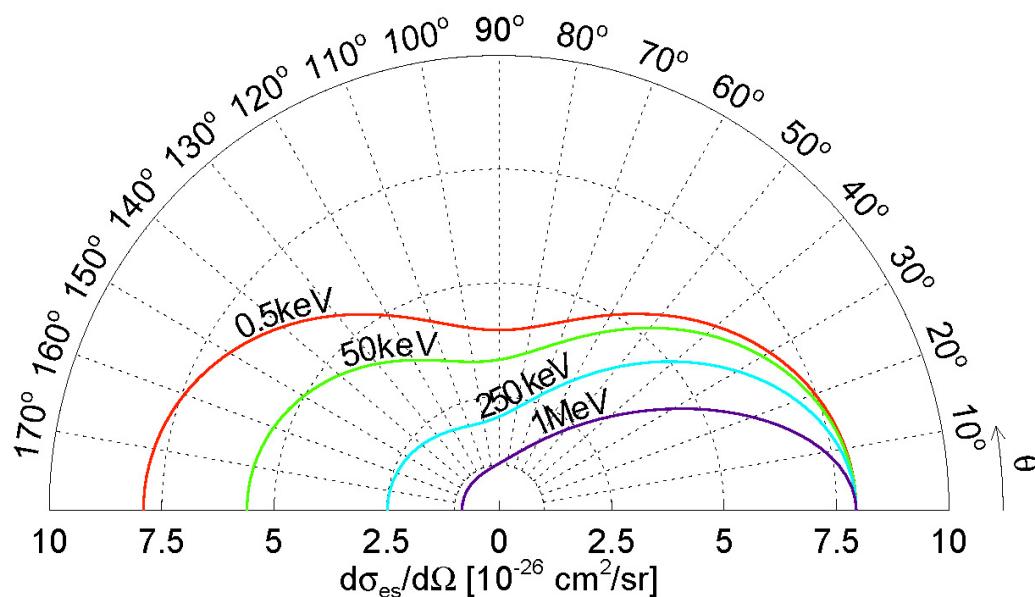
Con la condizione che

$$E' = \frac{E}{[\frac{E}{mc^2}(1 - \cos \alpha) + 1]}$$

Per fotoni non polarizzati incidenti su e- stazionari la sezione d'urto differenziale e':

$$\frac{d\sigma_{KN}}{d\Omega} = \frac{3}{16\pi} \sigma_T \left(\frac{E'}{E} \right)^2 \left(\frac{E'}{E} + \frac{E}{E'} - \sin^2 \alpha \right)$$

Per la conservazione del 4-impulso



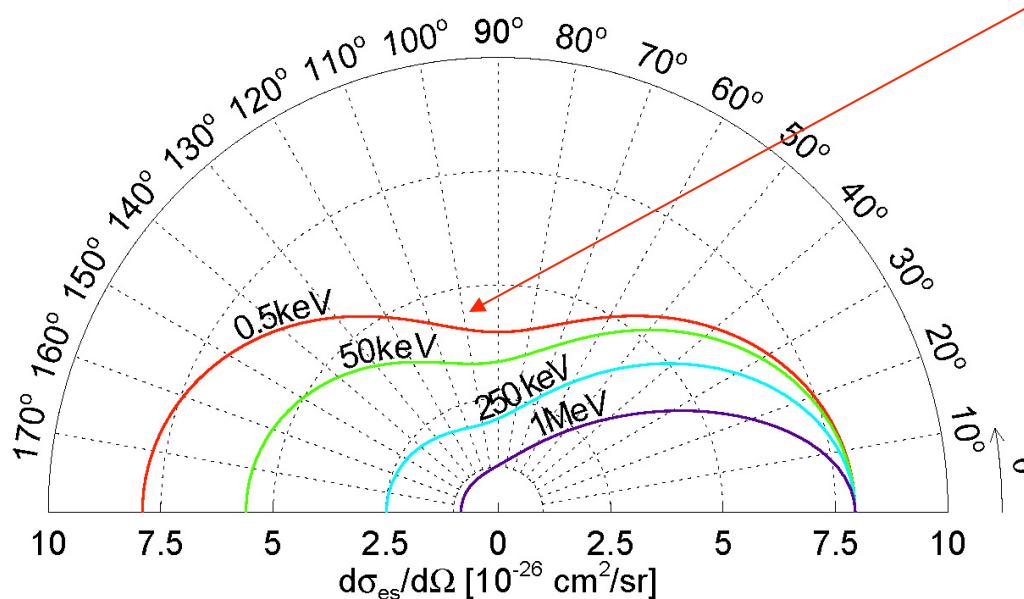
La distribuzione angolare viene piccata in avanti al crescere dell'energia del fotone incidente

Diffusione Compton: Klein-Nishina

- La sezione d'urto di KN si riduce a quella thomson quando $E' \rightarrow E$, cioe' quando $E \ll mc^2$

$$\frac{d\sigma_{KN}}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_e^2 \left(\frac{E'}{E}\right)^2 \left(\frac{E}{E'} + \frac{E}{E'} - \sin^2 \alpha\right) \rightarrow \frac{d\sigma_{KN}}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_e^2 (1 + 1 - \sin^2 \alpha)$$

$$= \frac{1}{2} r_e^2 (1 + \cos^2 \alpha)$$



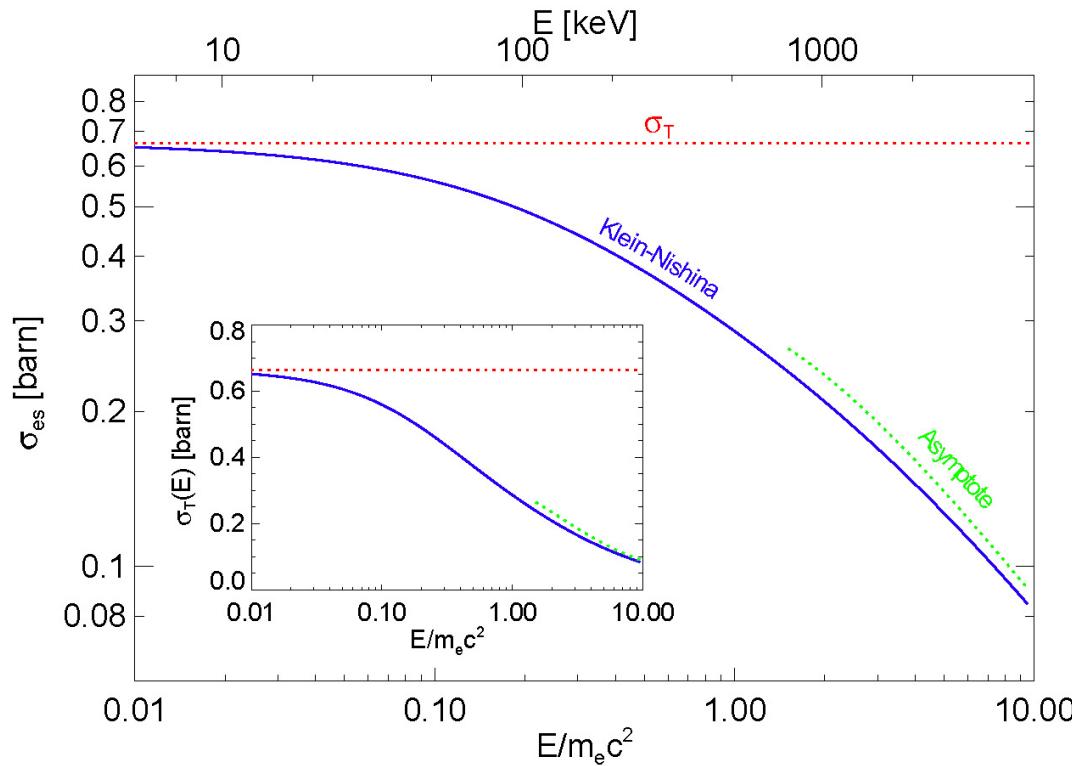
Diffusione Compton: Klein-Nishina

■ La sezione d'urto totale si ottiene integrando sull'angolo solido $d\Omega$, tenendo conto della condizione

$$E' = \frac{E}{[\frac{E}{mc^2}(1 - \cos \alpha) + 1]}$$

$$\sigma_{KN} = \int_{4\pi} \frac{1}{2} r_e^2 \left(\frac{E'}{E}\right)^2 \left(\frac{E'}{E} + \frac{E}{E'} - \sin^2 \alpha\right) \delta(E' - \frac{E}{[\frac{E}{mc^2}(1 - \cos \alpha) + 1]}) d\Omega$$

$$\sigma_{KN} = \frac{3}{4} \sigma_T \left\{ \frac{1+x}{x^3} \left[\frac{2x(1+x)}{1+2x} - \ln(1+2x) \right] + \frac{1}{2x} \ln(1+2x) - \frac{1+3x}{(1+2x)^2} \right\} \quad ■ X = \hbar\omega / mc^2$$



Diffusione Compton: Klein-Nishina

$$\sigma_{KN} = \frac{3}{4} \sigma_T \left\{ \frac{1+x}{x^3} \left[\frac{2x(1+x)}{1+2x} - \ln(1+2x) \right] + \frac{1}{2x} \ln(1+2x) - \frac{1+3x}{(1+2x)^2} \right\}$$

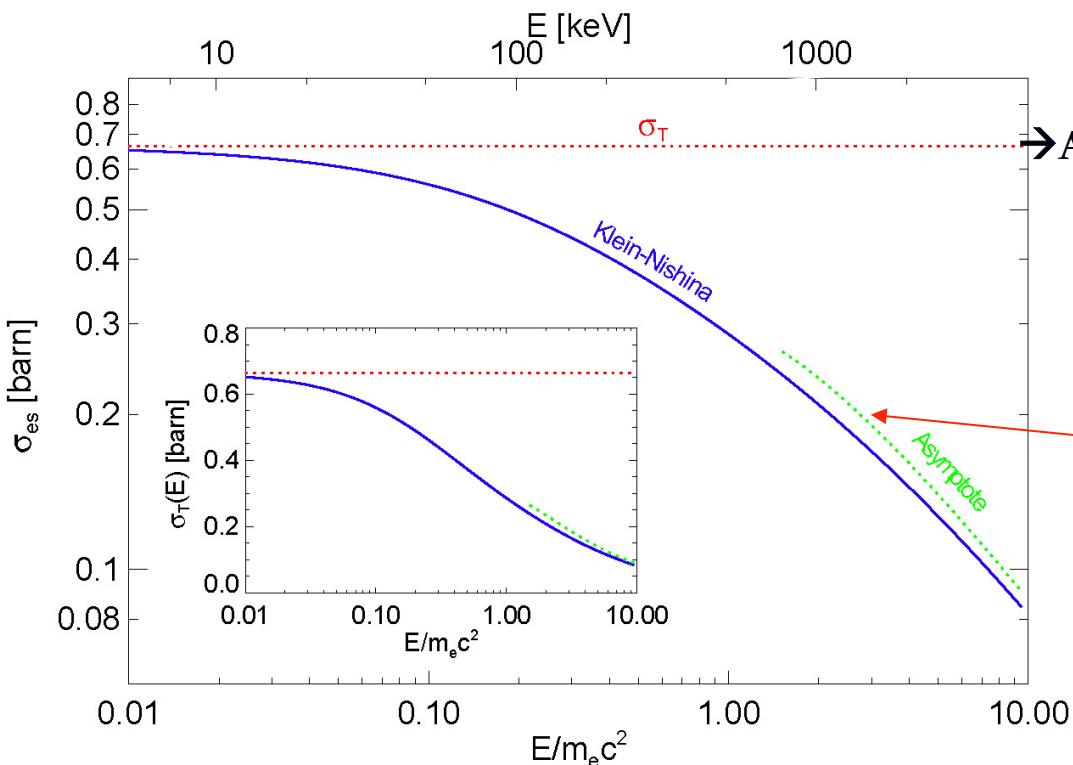
$$E' = \frac{E}{\left[\frac{E}{mc^2} (1 - \cos \alpha) + 1 \right]}$$

I valori asintotici sono

Limite non relativistico per $x \ll 1$

$$\sigma_{KN} \approx \sigma_T \left(1 - 2x + \frac{26x^2}{5} \right)$$

→ A basse energie si ha scattering Thomson



Limite ultra-relativistico per $x \gg 1$

$$\sigma_{KN} \approx \frac{3}{8} \sigma_T \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2} + \ln 2x \right)$$

Ad alte energie la sezione d'urto → 0, quindi gli elettroni diventano centri di scattering meno efficienti per fotoni di alta energia

Diffusione Compton: cinematica

Tralasciando per ora la dinamica del processo, i.e. la probabilita' che avvenga, dal punto di vista semi-classico, la cinematica dell'interazione fra un fotone ed un elettrone puo' essere descritta come l'urto relativistico fra due particelle materiali

E' sufficiente quindi considerare la conservazione del 4-impulso

$$P + K = P' + K' \quad (\text{a})$$

$$P_\mu = (m\gamma c^2/c, m\gamma \vec{v}) \quad P'_\mu = (m\gamma' c^2/c, m\gamma' \vec{v}')$$

Devo risolvere rispetto a \mathbf{K}'

$$K_\mu = (\hbar\omega/c, (\hbar\omega/c)\vec{i}_k) \quad K'_\mu = (\hbar\omega'/c, (\hbar\omega'/c)\vec{i}'_k)$$

Elevando al quadrato $(P + K)^2 = (P' + K')^2 \rightarrow P^2 + K^2 + 2K \cdot P = P'^2 + K'^2 + 2K' \cdot P'$

Ma $P^2 = P'^2 = m^2 c^2 \quad K^2 = K'^2 = 0 \rightarrow K \cdot P = K' \cdot P' \quad (\text{b})$

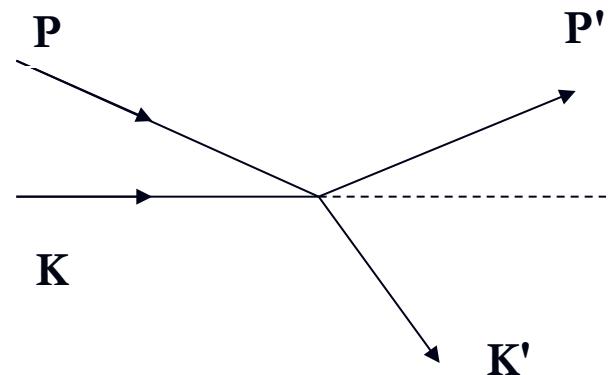
Moltiplico (a) scalarmente per \mathbf{K}'

$$K' \cdot (P + K) = K' \cdot (P' + K')$$

$$K' \cdot P + K' \cdot K = K' \cdot P' + K' \cdot K'$$

$$K' \cdot P + K' \cdot K = K' \cdot P' \quad \text{Perche' } \mathbf{K}'^2=0$$

$$K' \cdot P + K' \cdot K = K \cdot P \quad \text{Da (b)}$$



Diffusione Compton: cinematica

$$K' \cdot P + K' \cdot K = K \cdot P$$

Sviluppiamo il 4-prodotto scalare

$$K \cdot K' = \frac{\hbar\omega}{c} \cdot \frac{\hbar\omega'}{c} - \frac{\hbar\omega}{c} \cdot \frac{\hbar\omega'}{c} \vec{i}_k \cdot \vec{i}'_k = \frac{\hbar^2}{c^2} \omega\omega' (1 - \vec{i}_k \cdot \vec{i}'_k) = \frac{\hbar^2}{c^2} \omega\omega' (1 - \cos\alpha)$$

$$K' \cdot P = \frac{\hbar\omega'}{c} \cdot mc\gamma - \hbar\omega' \gamma m \vec{i}'_k \cdot \frac{\vec{v}}{c} = m\gamma \hbar\omega' (1 - \frac{v}{c} \cos\theta')$$

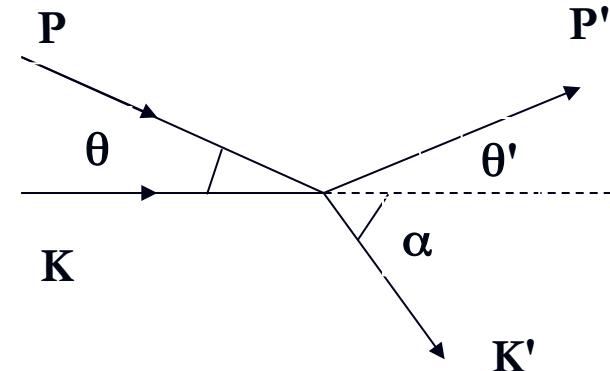
$$K \cdot P = \frac{\hbar\omega}{c} \cdot mc\gamma - \hbar\omega \gamma m \vec{i}_k \cdot \frac{\vec{v}}{c} = m\gamma \hbar\omega (1 - \frac{v}{c} \cos\theta)$$

$$\frac{\hbar^2}{c^2} \omega\omega' (1 - \cos\alpha) + m\gamma \hbar\omega' (1 - \frac{v}{c} \cos\theta') = m\gamma \hbar\omega (1 - \frac{v}{c} \cos\theta)$$

Divido per $m\gamma$

$$\frac{\hbar \omega \omega'}{c^2 m \gamma} (1 - \cos\alpha) + \omega' (1 - \frac{v}{c} \cos\theta') = \omega (1 - \frac{v}{c} \cos\theta)$$

$$\omega' \left[\frac{\hbar}{c^2} \frac{\omega}{m \gamma} (1 - \cos\alpha) + (1 - \frac{v}{c} \cos\theta') \right] = \omega (1 - \frac{v}{c} \cos\theta)$$



Diffusione Compton

$$\omega' \left[\frac{\hbar}{c^2 m \gamma} \left(1 - \cos \alpha \right) + \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta' \right) \right] = \omega \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right)$$

$$\omega' = \frac{\omega \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right)}{\left[\frac{\hbar}{c^2 m \gamma} \left(1 - \cos \alpha \right) + \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta' \right) \right]} \quad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right)}{\left[\frac{\hbar}{c^2 m \gamma} \left(1 - \cos \alpha \right) + \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta' \right) \right]}$$

E' il rapporto delle frequenze prima e dopo l'urto

Usualmente si considera $v=0$ per l'e-



$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{\left[\frac{\hbar \omega}{mc^2} \left(1 - \cos \alpha \right) + 1 \right]}$$

In termini di λ si ha

$$\frac{2\pi c}{\lambda} = \omega$$



$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\lambda}{\lambda'}$$

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{2\pi c}{\lambda} \frac{\hbar}{mc^2} \left(1 - \cos \alpha \right) + 1$$

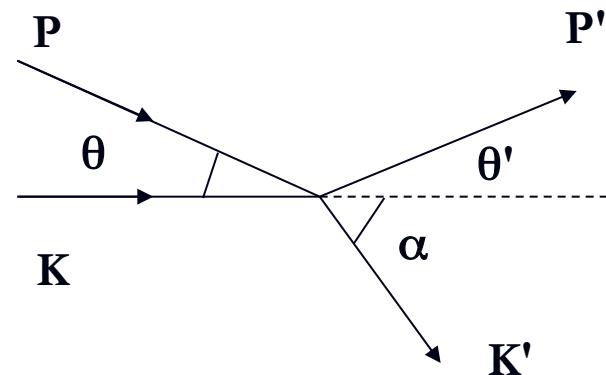
$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{h}{mc\lambda} \left(1 - \cos \alpha \right) + 1 = \frac{\lambda_c}{\lambda} \left(1 - \cos \alpha \right) + 1$$

$$\lambda_c = \frac{h}{mc} = 3.86 \times 10^{-13} \text{ m}$$

Lunghezza d'onda Compton

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{\lambda'}{\lambda} - 1 = \frac{\lambda_c}{\lambda} \left(1 - \cos \alpha \right)$$

La variazione assoluta di lunghezza d'onda e' al max $2\lambda_c \rightarrow$ se $\lambda \gg \lambda_c$, lo scattering e' elastico



Diffusione Compton

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{\left[\frac{\hbar\omega}{mc^2} (1 - \cos \alpha) + 1 \right]}$$

Nel caso di elettrone stazionario l'energia del fotone dopo l'urto e' sempre minore di quella iniziale dato che il denominatore e' sempre > 1

In questo caso, la radiazione cede energia all'elettrone che rincula, acquistandone così la radiazione si "raffredda" e l'elettrone si "scalda"

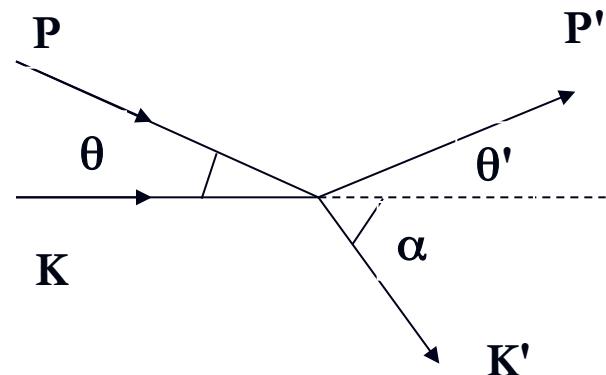
La situazione cambia se l'elettrone **NON** e' stazionario

$$\begin{aligned} \frac{\omega' - \omega}{\omega} &= \frac{\omega'}{\omega} - 1 = \frac{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)}{\left[\frac{\hbar}{c^2 m \gamma} \omega (1 - \cos \alpha) + \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta'\right)\right]} - 1 \\ &= \frac{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right) - \left[\frac{\hbar}{c^2 m \gamma} \omega (1 - \cos \alpha) + 1 - \frac{v}{c} \cos \theta'\right]}{\left[\frac{\hbar}{c^2 m \gamma} \omega (1 - \cos \alpha) + \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta'\right)\right]} = \frac{-\frac{v}{c} \cos \theta - \frac{\hbar}{c^2 m \gamma} \omega (1 - \cos \alpha) + \frac{v}{c} \cos \theta'}{\left[\frac{\hbar}{c^2 m \gamma} \omega (1 - \cos \alpha) + \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta'\right)\right]} \\ &= \frac{\frac{v}{c}(-\cos \theta + \cos \theta') - \frac{\hbar}{c^2 m \gamma} \omega (1 - \cos \alpha)}{\left[\frac{\hbar}{c^2 m \gamma} \omega (1 - \cos \alpha) + \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta'\right)\right]} \end{aligned}$$

Diffusione Compton

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\frac{v}{c}(-\cos\theta + \cos\theta') - \frac{\hbar}{c^2 m\gamma}(\mathbf{1} - \cos\alpha)}{\left[\frac{\hbar}{c^2 m\gamma}(\mathbf{1} - \cos\alpha) + (1 - \frac{v}{c}\cos\theta')\right]}$$

Se $\hbar\omega/2\pi \ll mc^2\gamma$ $\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx \frac{v}{c} \frac{(-\cos\theta + \cos\theta')}{(1 - \frac{v}{c}\cos\theta')}$



La variazione relativa di frequenza del fotone in un singolo urto e' del primo ordine in v/c

D'altra parte, se gli angoli di scattering θ e θ' sono distribuiti casualmente, la variazione media di frequenza e' zero poiche' il fotone ha la stessa probabilita' di avere $\Delta\omega > 0 < 0$, come accade nel caso di una popolazione di elettroni in un plasma

$$\langle \frac{\Delta\omega}{\omega} \rangle_{\theta, \theta'} = 0$$

Per avere un guadagno netto di energia da parte del fotone in un plasma di elettroni occorre andare al secondo ordine in v/c (come nel caso del Compton inverso che vedremo tra poco)

Compton Inverso

Nel sistema di quiete dell'elettrone

$$E' = \frac{E}{[\frac{E}{mc^2}(1 - \cos \alpha) + 1]}$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{-\frac{E}{mc^2}(1 - \cos \alpha)}{[\frac{E}{mc^2}(1 - \cos \alpha) + 1]}$$

Se $E \ll mc^2$

$$\frac{\Delta E}{E} \approx -\frac{E}{mc^2}(1 - \cos \alpha)$$

Mediando sugli angoli del fotone $\langle \frac{\Delta E}{E} \rangle \approx -\frac{E}{mc^2}$

Il fotone perde sempre energia urtando e- stazionari