

Lecture 8 311019

Il pdf delle lezioni puo' essere scaricato da

http://www.fisgeo.unipg.it/~fiandrin/didattica_fisica/cosmic_rays1920/

Ref: Longair, vol. 2, Cap. 18, 19
Berenzinski, Astrophysics of cosmic
rays, cap. 5 (testo con dettagli dei
calcoli)

Propagazione degli elettroni nella Galassia

Electrons and positrons

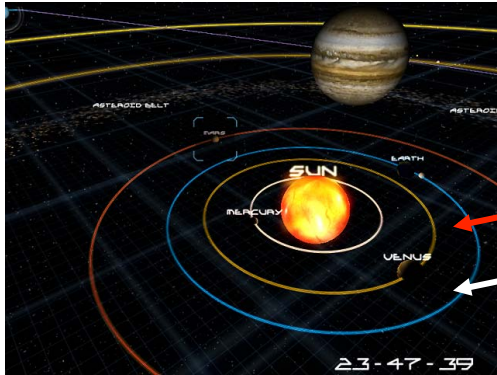
Electrons and positrons constitute about 1% of the CRs. This component provides additional information on the acceleration sites and CR propagation in the Galaxy.

High-energy electrons are subject to a number of electromagnetic energy loss processes already in proximity of the sources, where the matter density and the magnetic fields are large.

The accelerated electrons are the source of most of the non-thermal electromagnetic emission from radio to gamma-rays (photoemission, bremsstrahlung, inverse compton, synchrotron)

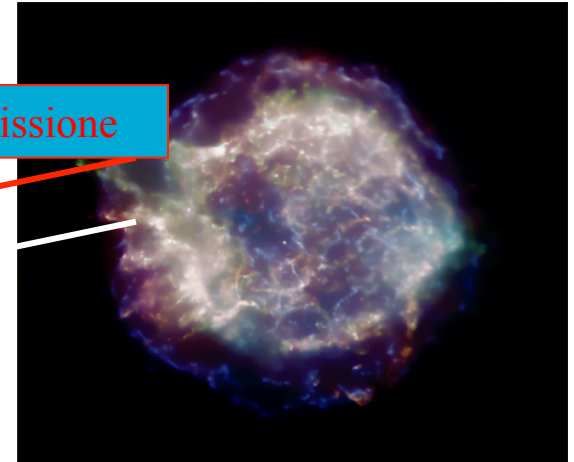
These processes cause distortions of e^- injection energy spectra as they propagate through the ISM from their sources and they potentially provide information on the propagation, confinement, and production mechanisms of high-energy particles. Electrons directly produced at accelerator sites are called *primary electrons*.

Elettroni di alta energia



Propagazione

e-

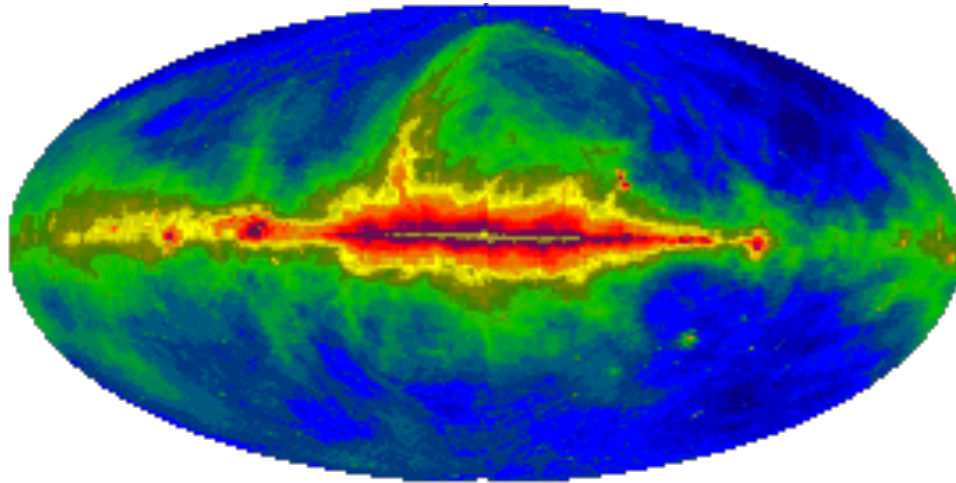


emissione

Source

Gli elettroni (e^- , e^+) offrono una possibilità in più rispetto alla componente nucleare: essi emettono radiazione elettromagnetica su tutte le frequenze dato che $\sigma \approx 1/M^2$ per tutti i processi rilevanti. E' possibile quindi misurare lo spettro alla sorgente tramite l'emissione elm e anche lo spettro delle particelle a Terra dopo la propagazione → si può studiare in dettaglio il mezzo interstellare.

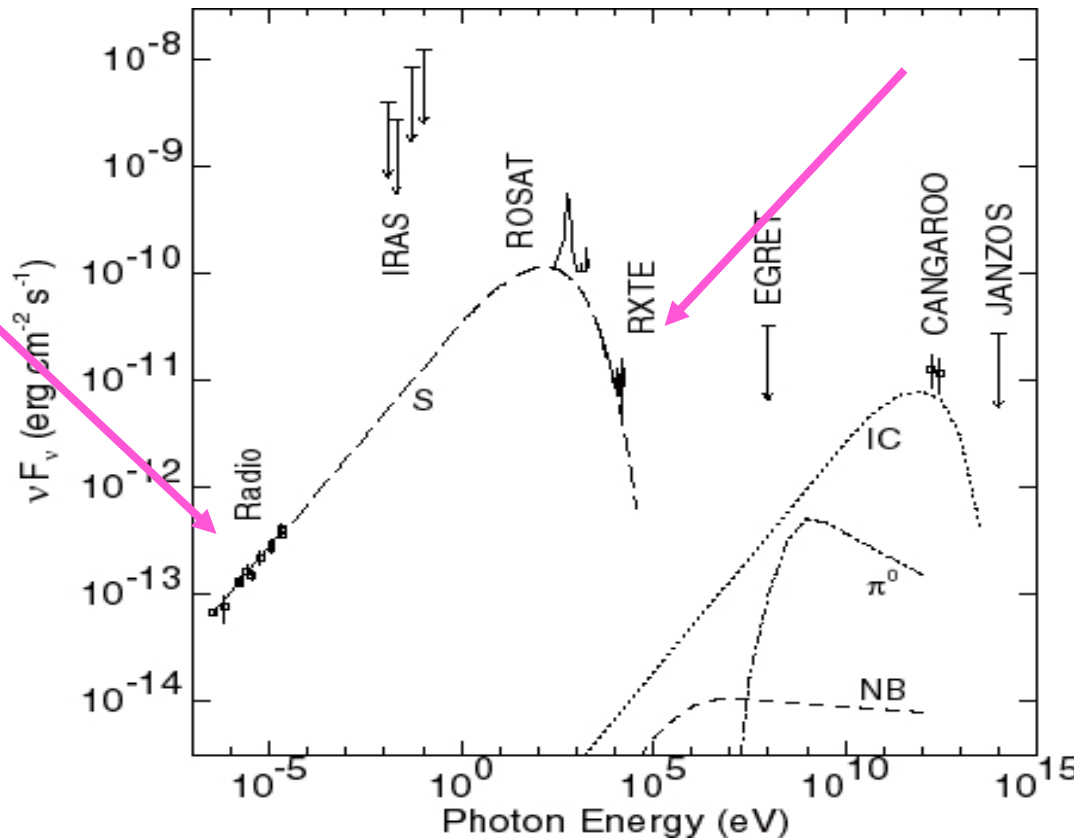
■ Most of our information about the Universe comes from the movement of electrons radiating photons



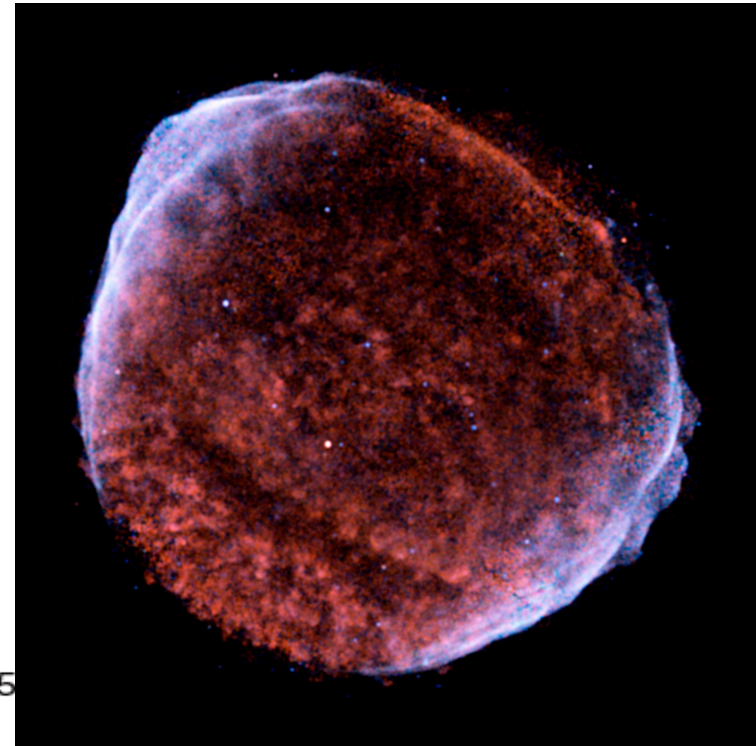
■ 408 MHz map of the sky : synchrotron emission of few GeV electrons in the galactic magnetic field

Most of our information about the Universe comes from particles producing photons

■ Chandra's image of SN 1006 shows X-rays from multimillion degree gas (red/green) and high-energy electrons (blue)

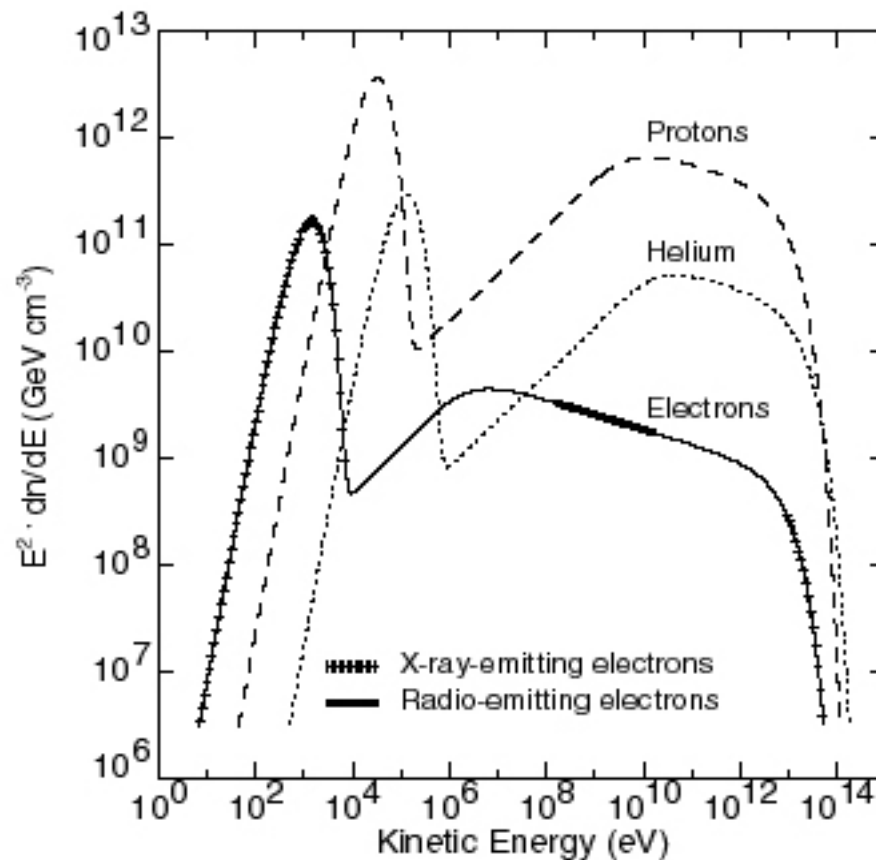


Radio to g-ray photon energy flux spectrum of SN 1006



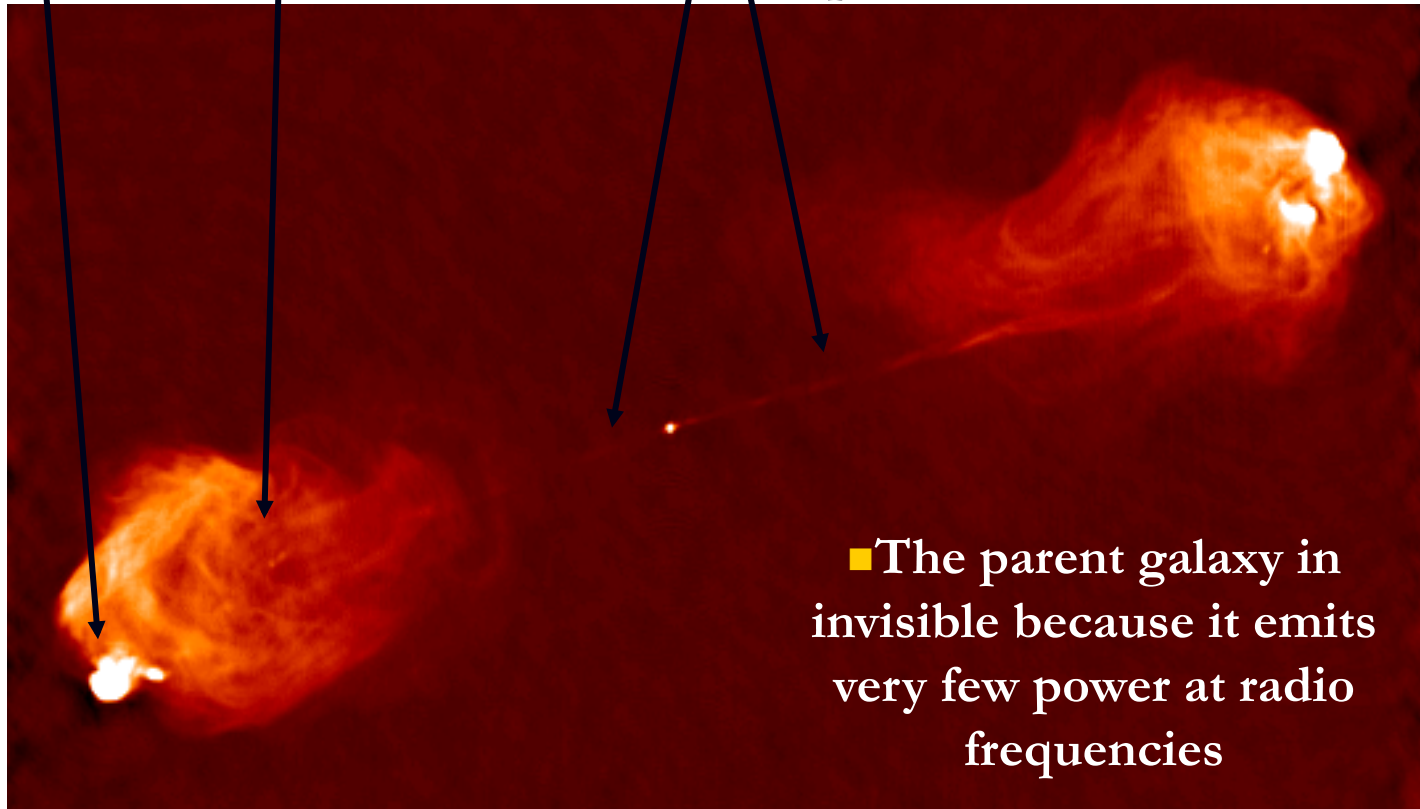
Direct evidence for acceleration of electrons in shocks of SNR comes from radio to gamma emission

Fitting the radio/X-ray spectra with a power law electron injection spectra



Radio galaxy Cignus A

- Relativistic electrons within the jets emit synchrotron radiation at the hot spots (shock wave) where the jet material hits the interstellar medium. Radiation is emitted also in the "cocoon" of the jet, where residual B field is present



- The parent galaxy is invisible because it emits very few power at radio frequencies

Dal punto di vista sperimentale, la situazione e' molto meno definita della componente nucleare

Perche':

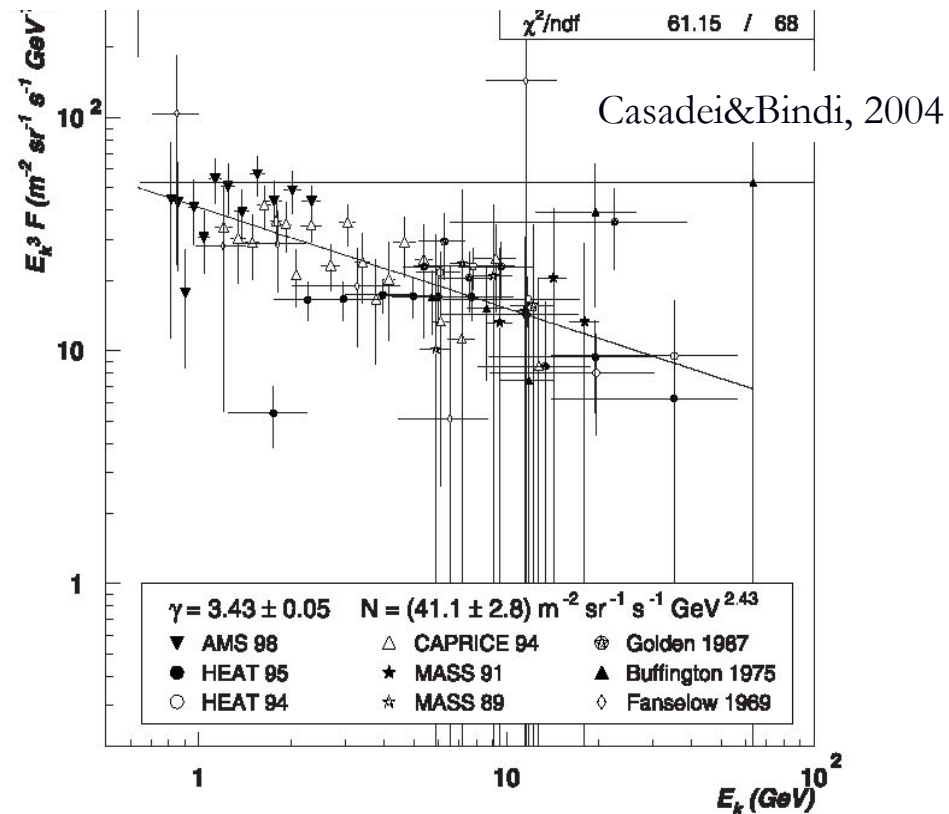
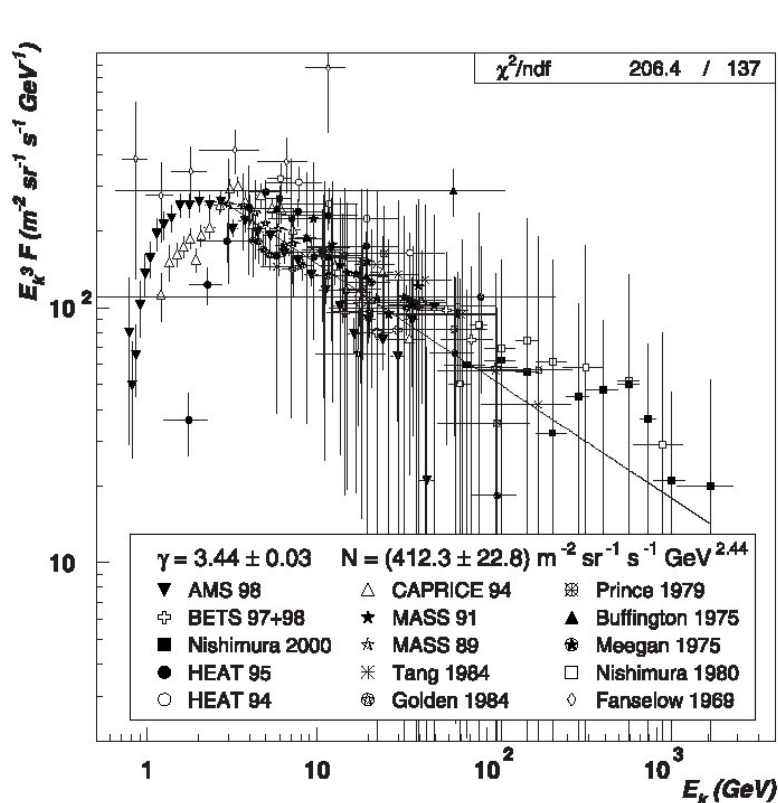
- i) i flussi sono molto meno intensi ($\phi_{\text{ele}} \approx 1\% \phi_{\text{nucl}}$) $\rightarrow$ grandi rivelatori
- ii) Difficile identificare e- ed e+ dal fondo di protoni $\rightarrow$ grande potere di reiezione
- iii) Se in atmosfera, grande fondo dovuto alla produzione di secondari nell'atmosfera $\rightarrow$ errori sistematici

In sintesi: misure estremamente difficili e limitate ad energie ≈ 1 TeV

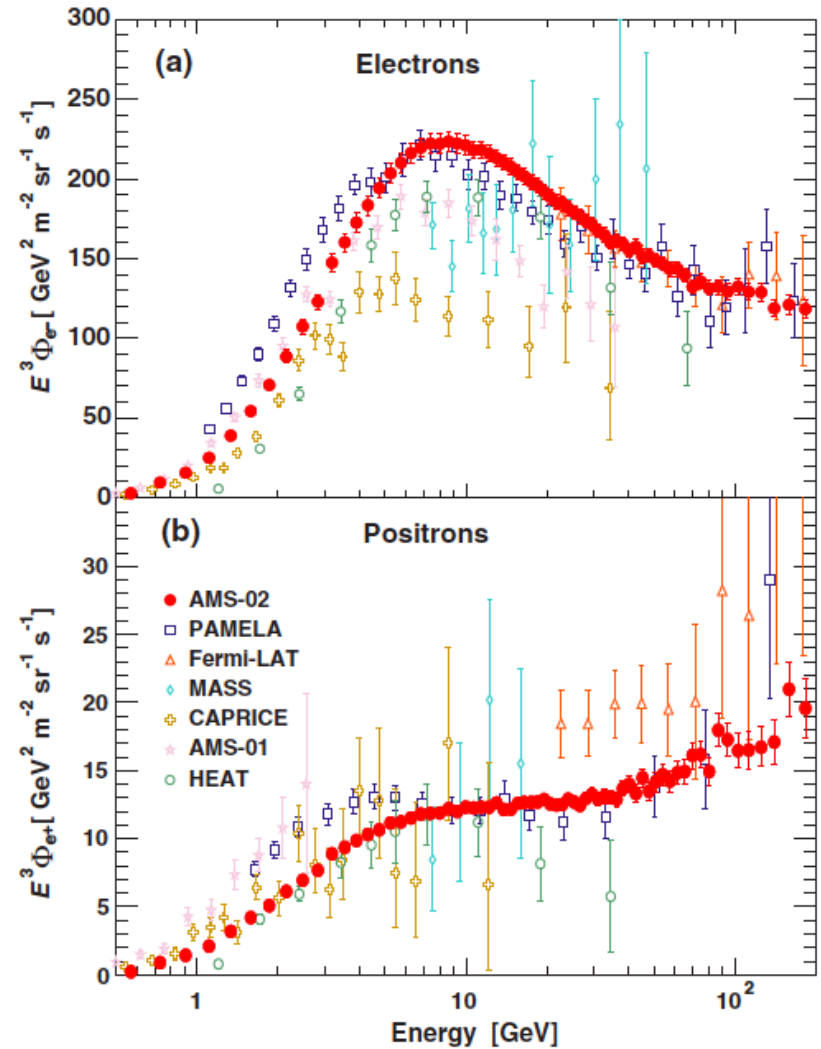
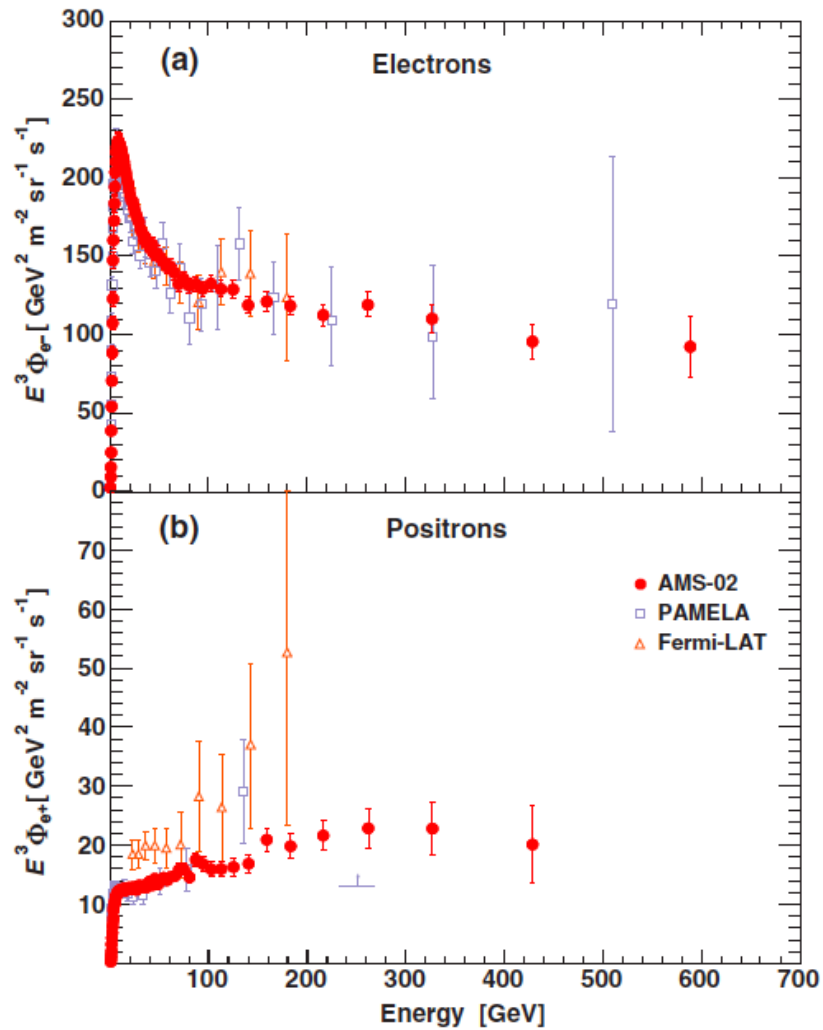
Qualche anno fa

- Gli elettroni e i positroni, ad $E >$ pochi GeV possono essere descritti da una legge di potenza $\Phi(E) = KE^{-\gamma}$ con $\gamma \approx 3.1$
- NB: nel caso dei nuclei $\gamma = 2.74$ fino a $\approx 10^{16}$ GeV

□ Densita' di energia $\sim 4 \times 10^3 \text{ eV m}^{-3}$ (per i RC $\sim 10^6 \text{ eV m}^{-3}$)



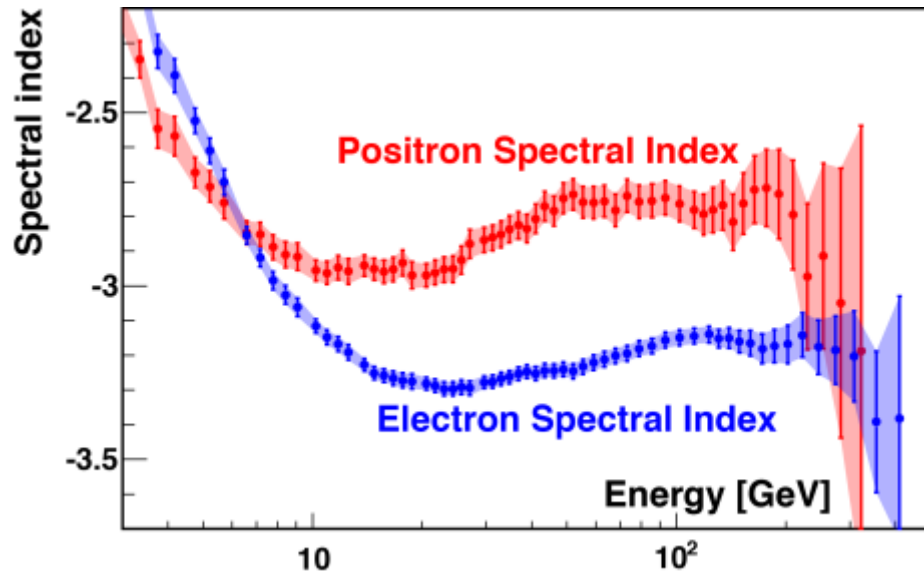
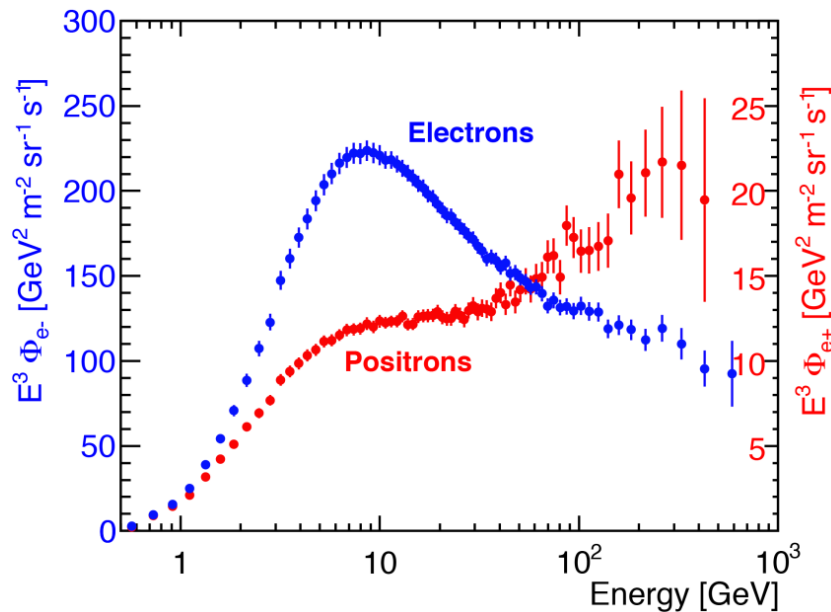
■ Oggi:



■ Electron/Positron fluxes:

- For the first time a detailed study of the spectral index variation with energy :

$$\gamma_{e^\pm} = d[\log(\Phi_{e^\pm})]/d[\log(E)]$$



- Hardening of the positron spectrum is at the origin of the positron fraction increase...

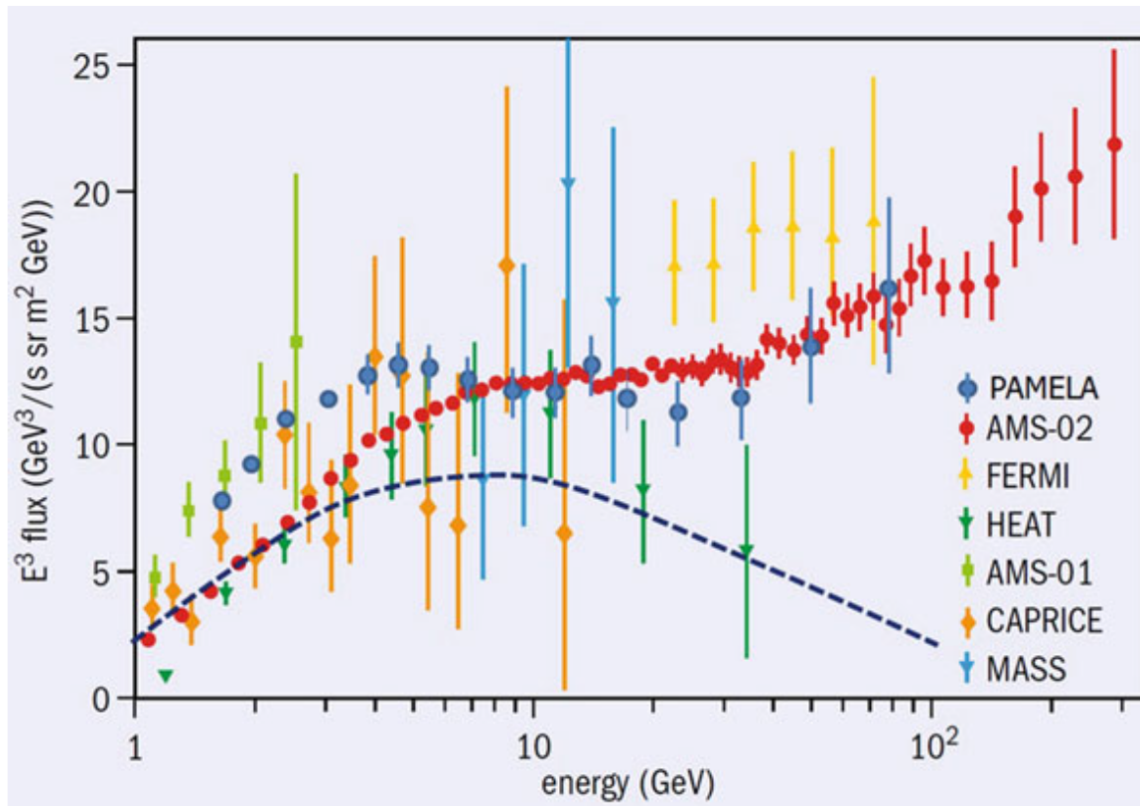


Fig. 3.13 The positron energy spectrum multiplies for E^3 measured by different balloon-borne (CAPRICE, HEAT, MASS) and space-borne (AMS-01, AMS-02, PAMELA, Fermi-LAT) experiments. The *dashed lines* show the calculation using the GALPROP program. Courtesy of prof. Manuel Aguilar Benítez. See Aguilar et al. (2013) and references therein

The positron energy spectrum $E^3\Phi_{e^+}(E)$ as a function of E . The dashed line shows the prediction from a propagation model of primaries in the ISM. Above few GeV, a significant excess with respect to the secondary production by CR propagation is observed.

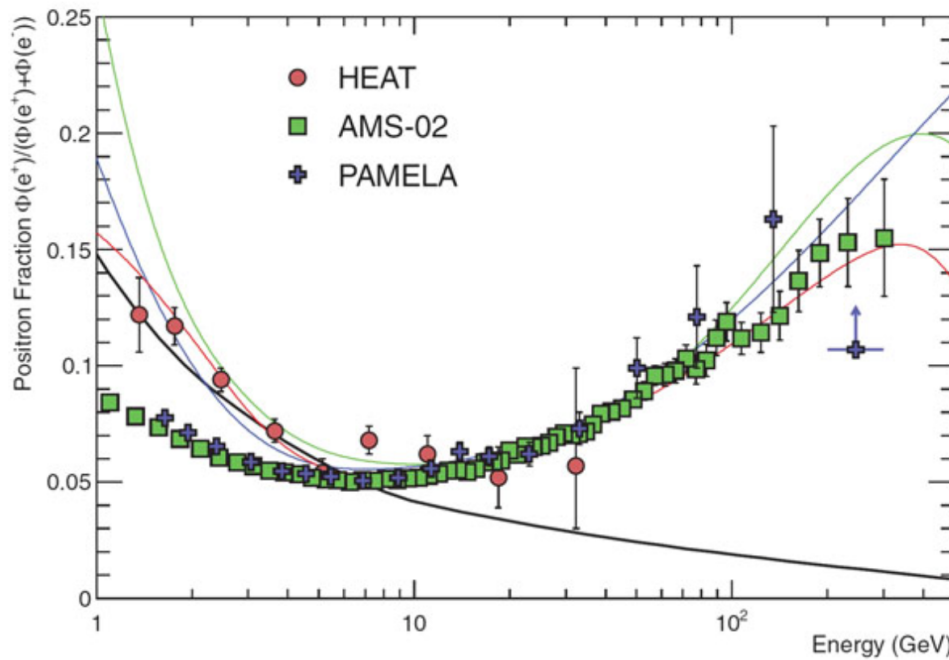


Fig. 3.14 The positron fraction (ratio of the flux of e^+ to the total flux of $e^+ + e^-$) as a function of the energy measured HEAT, PAMELA, and AMS-02. The heavy *black line* is a model of pure secondary production using a detailed propagation model of CRs (Sect. 5.4). The *three thin lines* show three representative attempts to model the positron excess with different phenomena discussed in Sect. 13.9.3: dark matter decay (*green*); propagation physics (*blue*); production in pulsars (*red*). The ratio below 10 GeV is dependent on the polarity of the solar magnetic field. Figure from the Sect. 27. Cosmic Rays of Beringer et al. (2012)

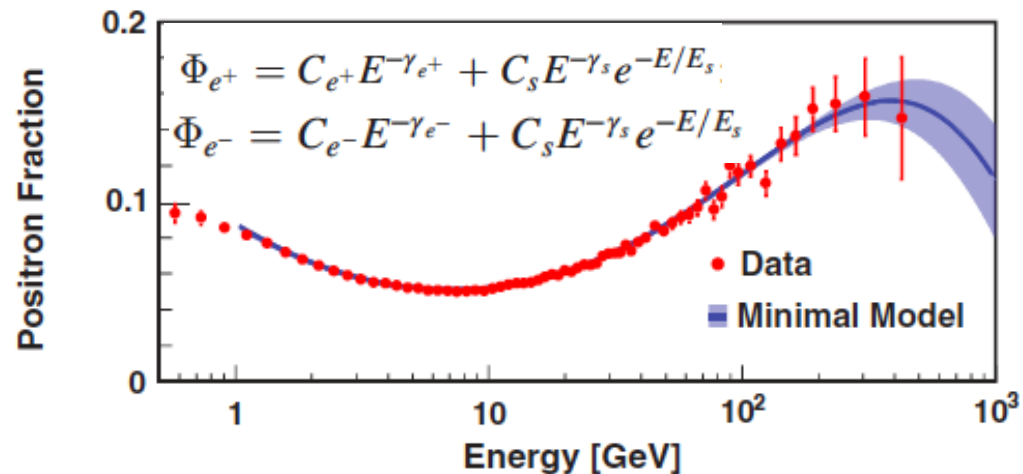
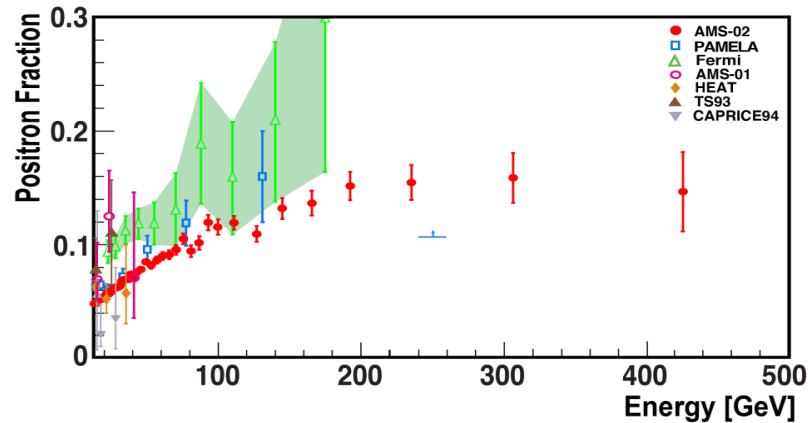
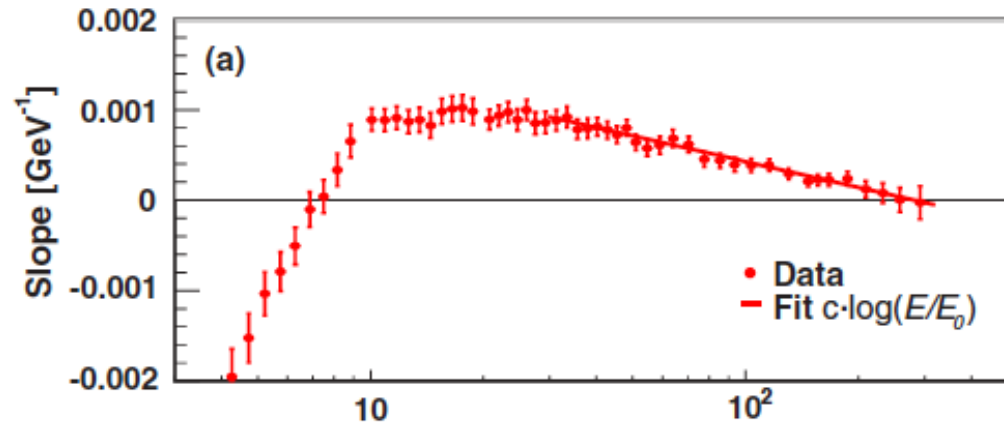
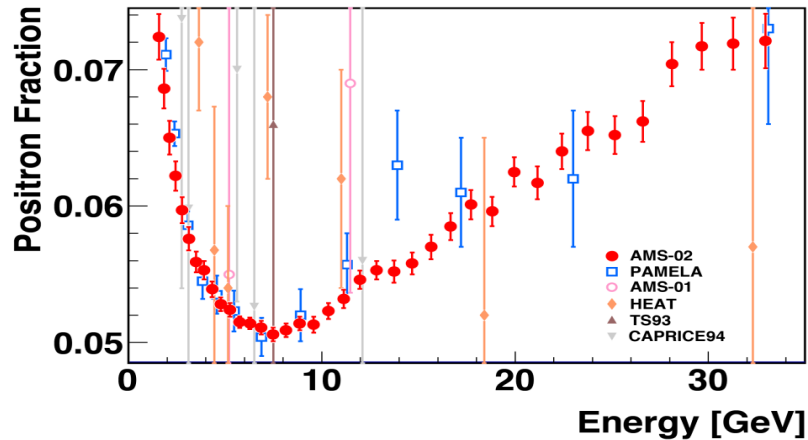
- The positron-fraction spectrum does not exhibit fine structures and steadily increases in the region between 10 and 250 GeV. In the high statistics AMS-02 sample the ratio is of the order of $\sim 10\%$ above a few tens of GeV. As a consequence, since positrons are always created in pair with an electron *about 90 % of the observed electrons must be of primary origin.*

■ Positron fraction :

✓ No sharp structures

✓ Steady increase of the positron content up to ≈ 275 GeV

Well described by an empirical model with a common source term for e^+/e^-



Equazione di propagazione (1)

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\hat{D}_i \vec{\nabla} N_i) + \frac{\partial}{\partial E} (b_i N_i) + m v \sigma_i N_i + \frac{N_i}{\tau_i} = q_i + \sum_{j < i} m v \sigma_{ij} N_j + \sum_j \frac{N_j}{\tau_{ji}}$$

- I CR non sono accelerati nell'ISM, sono accelerati da sorgenti puntiformi
- La loro potenza e distribuzione spazio-temp. e' descritta dalle funzioni $q_i(t, \vec{r}, E)$ (per la specie i)

- * $\hat{D}_i(\vec{r}, E)$ e' il tensore di diffusione
- * $b_i(\vec{r}, E)$ caratterizza le perdite continue di energia delle singole particelle
cosi' che $dE/dt = b_i$ ($\equiv$ ionizz. + brems + sincrotr + Compton inverso)
- * $\sigma_i(E)$ e' la sez. d'urto inelastica del nucleo i con i nuclei dell'ISM
- * $n(\vec{r})$ e' la densita' dell'ISM
- * σ_{ij} e' la sez. d'urto di prod. di nuclei di tipo i da nuclei piu' pesanti
- * τ_i e' la vita media rispetto a decad. radioatt.
- * N_j/τ_{ji} descrive l'apparizione di nuclei di tipo i a causa del decad. di altri nuclei

Perdite di energia

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\hat{D}_i \vec{\nabla} N_i) + \frac{\partial}{\partial E} (b_i N_i) + m v r_i N_i + \frac{N_i}{\tau_i} = q_i + \sum_{j < i} m v b_{ij} N_j + \sum_{j > i} \frac{N_j}{\tau_{ji}}$$

σ_i e' la sez d'urto per il processo $p_{\text{CRP}} p_{\text{ISM}} \rightarrow \pi^\pm \rightarrow \mu^\pm \rightarrow e^\pm$ ed n e' la densita' di p nell ISM, N_i e' la densita' di elettroni

Per gli elettroni, a differenza della componente nucleare, sono importanti i processi di perdita di energia durante la propagazione

Il termine che descrive le perdite di energia continue non puo' essere trascurato ma anzi diventa dominante

Perdite di energia

le perdite continue di energia $b(E) = dE/dt$ sono sostanzialmente:

Ionizzazione $\rightarrow$ part + nuclei

Bremsstrahlung $\rightarrow$ part + nuclei

Sincrotrone $\rightarrow$ particelle + campi magnetici

Compton inverso $\rightarrow$ part + fotoni di bassa E

Decelerazione adiabatica $\rightarrow$ diffusione in un gas in espansione

Le sezioni d'urto (tranne la decel adiab) sono tutte proporzionale $1/M^2 \rightarrow$
tali processi sono importanti per particelle leggere (a meno di andare ad energie elevatissime)

Ionizzazione

Particelle cariche che attraversano un mezzo vanno incontro a :

1. Perdite di energia continue → ionizzazione
2. Deflessione della direzione originaria → scattering multiplo

Questi effetti sono principalmente dovuti a due processi:

1. Collisioni inelastiche con gli elettroni atomici del materiale
2. Collisioni elastiche con i nuclei del materiale

Le perdite per ionizzazione comprendono:

- Ionizzazione di atomi o ioni
- Eccitazione di stati atomici o ionici
- L'interazione può essere distruttiva o no, a seconda dello spessore del materiale attraversato
- NB: non possiamo prevedere quante interazioni subirà la particella né quanta energia perde in ogni urto, ma possiamo calcolare la perdita media di energia e le sue fluttuazioni (ie deviazione standard)

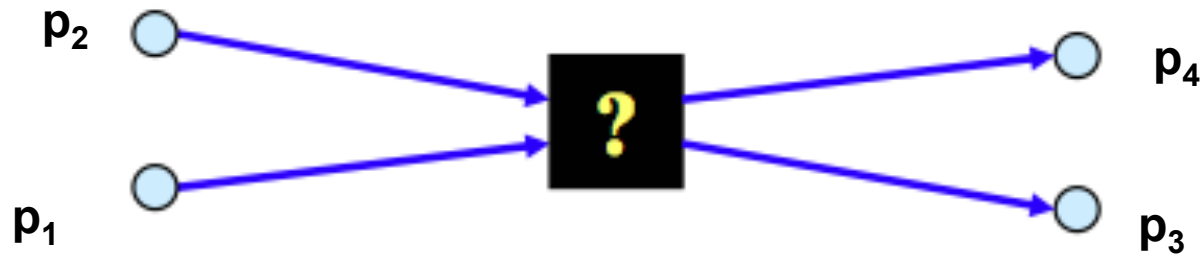
Largamente usata per rivelatori di particelle (misure di posizione, di carica elettrica)

In astrofisica, causa perdite di energia per le particelle di alta energia nel mezzo interstellare.

Perdita di energia: cinematica

Coulomb interaction of charged particles is a “collision”: 4-momentum conservation determines uniquely the cinematic of the interaction.

- Force exchanged when they collide
- Free motion between collisions



- We don't know and we don't need to know what happens in the box: it is a “black box”
- Motion outside the box is determined by relativistic cinematics only
- Dynamics tells us what is the probability of a given final state, i.e. conservation of 4-momentum (or momentum and energy in classical collisions)

Esempio Classico: Urto centrale



La cinematica fissa momento ed energia dello stato finale

$$Mv = Mv' + m_e v_e$$

$$v' = (Mv - m_e v_e) / M$$

$$Mv^2 = Mv'^2 + m_e v_e^2$$

$$Mv^2 = M[(Mv - m_e v_e) / M]^2 + m_e v_e^2$$

~~$$Mv^2 = Mv^2 + m_e^2 v_e^2 / M - 2m_e v v_e + m_e v_e^2$$~~

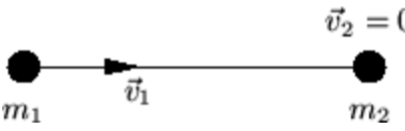
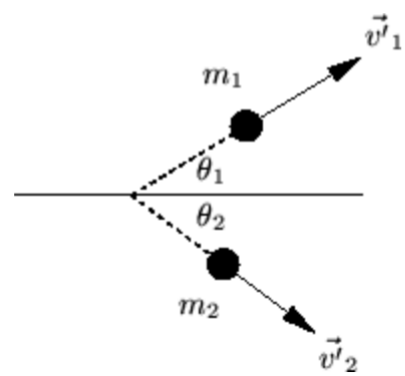
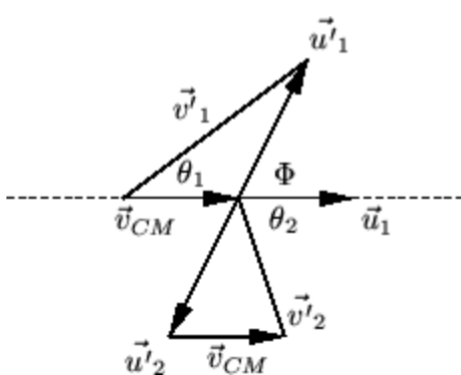
$$0 = m_e v_e / M - 2v + v_e$$

$$v_e = 2v / (1 + \frac{m_e}{M}) \simeq 2v \quad \text{La perdita di energia della particella incidente e'}$$

$$\Delta E_{inc} = (1/2) m_e v_e^2 = (1/2) m_e [2v / (1 + \frac{m_e}{M})]^2$$

$$\frac{\Delta E_{inc}}{E_{inc}} = \frac{(1/2) m_e [2v / (1 + \frac{m_e}{M})]^2}{(1/2) M v^2} = 4m_e \frac{M}{(m_e + M)^2} \simeq 4m_e / M$$

Se $m_e \ll M$, $E_{inc} \approx \text{costante} \rightarrow$ la particella incidente prosegue indisturbata ($\theta \approx \Delta p_t / p$) (trascurando il rinculo del nucleo), mentre l'e- riceve un kink a causa dell'interazione elettrostatica. Facciamolo vedere nelle prossime slides

Sistema di laboratorio	Sistema del centro di massa
Prima dell'urto  $\vec{v}_2 = 0$ $\vec{v}_{CM} = \frac{m_1}{M} \vec{v}_1$	Prima dell'urto  $\vec{u}_1 = \frac{m_2}{M} \vec{v}_1 \quad \vec{u}_2 = -\frac{m_1}{M} \vec{v}_1 = -\vec{v}_{CM}$ $M = m_1 + m_2$
Dopo l'urto 	Dopo l'urto  $\vec{v}_1 = \vec{v}_{CM} + \vec{u}_1 \quad \vec{v}'_1 = \vec{v}_{CM} + \vec{u}'_1$ $0 = \vec{v}_{CM} + \vec{u}_2 \quad \vec{v}'_2 = \vec{v}_{CM} + \vec{u}'_2$

L'angolo di scattering nel centro di massa non ha limitazioni mentre gli angoli e nel sistema di laboratorio subiscono restrizioni a causa delle leggi di conservazione. Consideriamo il diagramma dell'urto nel centro di massa:

$$\tan \theta_1 = \frac{u'_1 \sin \Phi}{v_{CM} + u'_1 \cos \Phi}$$

Poichè l'urto è elastico $u'_1 = u_1$ quindi, dividendo per u_1 otteniamo:

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \Phi}{\frac{v_{CM}}{u_1} + \cos \Phi}$$

ma $u_1 = \frac{m_2}{M} v_1 \quad v_{CM} = \frac{m_1}{M} v_1$

quindi $\frac{v_{CM}}{u_1} = \frac{m_1}{m_2}$

Da cui $\tan \theta_1 = \frac{\sin \Phi}{\frac{m_1}{m_2} + \cos \Phi}$

Φ ovviamente dipende dai dettagli dell'interazione e, in linea di principio può assumere qualsiasi valore. θ_1 invece a seconda del rapporto m_1/m_2 può o non può avere delle limitazioni.

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \Phi}{\frac{m_1}{m_2} + \cos \Phi}$$

Se $m_1 < m_2$, cioè $V_{cm} < u_1$, θ_1 non ha limitazioni, perchè il denominatore della frazione si può annullare.

Se $m_1 \ll m_2$, allora $\tan \theta_1 \approx \tan \Phi$ ovvero $\theta_1 \approx \Phi$. Il secondo corpo risente in questo caso molto poco dell'interazione. m_2 si comporta essenzialmente come un centro di scattering fisso.

Se $m_1 > m_2$, cioè $V_{cm} > u_1$, il denominatore non si può annullare e θ_1 ha un valore massimo θ_{max} , che si trova facilmente derivando ed imponendo la derivata uguale a zero

$$1 + \frac{m_1}{m_2} \cos \Phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan \theta_{MAX} = \frac{m_2}{\sqrt{m_1^2 - m_2^2}} \quad \Rightarrow \quad \sin \theta_{MAX} = \frac{m_2}{m_1}$$

Se $m_1 \gg m_2$ allora $\theta_{max} \approx 0$. Fisicamente ciò significa che una particella leggera non può deviare significativamente una particella molto più massiva.

Vi è poi il caso particolare $m_1 = m_2$

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \Phi}{\frac{m_1}{m_2} + \cos \Phi} = \frac{\sin \Phi}{1 + \cos \Phi} = \tan \left(\frac{\Phi}{2} \right) \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = \frac{\Phi}{2}$$

L'angolo di scattering di laboratorio è la metà dell'angolo di scattering dal centro di massa. Poichè il valore massimo di Φ è di 180° allora se $m_1 = m_2$ l'angolo massimo di scattering nel sistema di laboratorio non può essere altro che di 90°

Vediamo ora cosa si può dire su θ_2 . Dal diagramma per il moto nel riferimento del centro di massa vediamo subito che:

$$\begin{cases} u'_2 \sin \Phi = v'_2 \sin \theta_2 \\ v'_2 \cos \theta_2 = v_{CM} - u'_2 \cos \Phi \end{cases}$$

Procedendo in modo analogo a prima si ricava: $\tan \theta_2 = \frac{u'_2 \sin \Phi}{v_{CM} - u'_2 \cos \Phi} = \frac{\sin \Phi}{\frac{v_{CM}}{u'_2} - \cos \Phi}$

Nel caso del secondo corpo la semplificazione è ora ancora più banale perché $u'_2 = u_2 = V_{cm}$ per cui, dividendo per u_2

$$\tan \theta_2 = \frac{\sin \Phi}{1 - \cos \Phi} = \cot \frac{\Phi}{2} \quad \Rightarrow \quad \tan \theta_2 = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Phi}{2} \right) \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = \frac{\pi - \Phi}{2}$$

Se $m_1 = m_2 = m$, sappiamo già che $\theta_1 = \frac{\Phi}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$

Infine presentiamo le espressioni di v'_1 e v'_2 in funzione di v_1 e di Φ

$$\begin{cases} v'_1 &= \frac{v_1}{M} \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos \Phi} \\ v'_2 &= \frac{2m_1}{M} v_1 \sin \frac{\Phi}{2} \end{cases}$$

Perdita di energia: cinematica caso relativistico

- Local interactions conserve total 4-momentum
 - i.e., total energy and total 3-momentum are conserved

$$p^\mu = \sum_{s=1}^n p_s^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) \longleftrightarrow E = \sum_{s=1}^n E_s \quad \mathbf{p} = \sum_{s=1}^n \mathbf{p}_s$$

- We know how to Lorentz transform it

$$p'^\mu = \sum_s p_s'^\mu = \sum_s L^\mu_\nu p_s^\nu = L^\mu_\nu p^\nu$$

as usual

- Define the **center-of-momentum** frame in which $\mathbf{p} = 0$
 - It's the frame in which the total 3-momentum is zero
 - Or, the center of mass is at rest
 - Often called center-of-mass frame as well

Perdita di energia: cinematica

$$p^\mu = \sum_{s=1}^n p_s^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) \xrightarrow{\text{CoM frame}} p'^\mu = \left(\frac{E'}{c}, \mathbf{0} \right)$$

- There are two particularly useful quantities

- CoM energy E'

- Lorentz invariance $p^\mu p_\mu = p'^\mu p'_\mu \Rightarrow \frac{E'^2}{c^2} = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2$
 - E' is the smallest possible E

- Boost β of CoM frame relative to the lab. frame

- Lorentz transformation

$$p^\mu = L_\nu^\mu p'^\nu = \left(\frac{\gamma E'}{c}, \frac{\gamma \beta E'}{c} \right) \Rightarrow \beta = \frac{\mathbf{p}c}{E} \quad \gamma = \frac{E}{E'}$$

Perdita di energia: cinematica

- Consider collision of particle 1 on particle 2 at rest



$$p_1 = (E_1/c, \mathbf{p}_1)$$

$$p_2 = (m_2 c, \mathbf{0})$$

Fixed-target collision

- Total 4-momentum is $p = (E_1/c + m_2 c, \mathbf{p}_1)$
- Total CoM energy

$$E'^2 = p^\mu p_\mu c^2 = (m_1^2 + m_2^2)c^4 + 2E_1 m_2 c^2$$

- Boost of CoM frame is

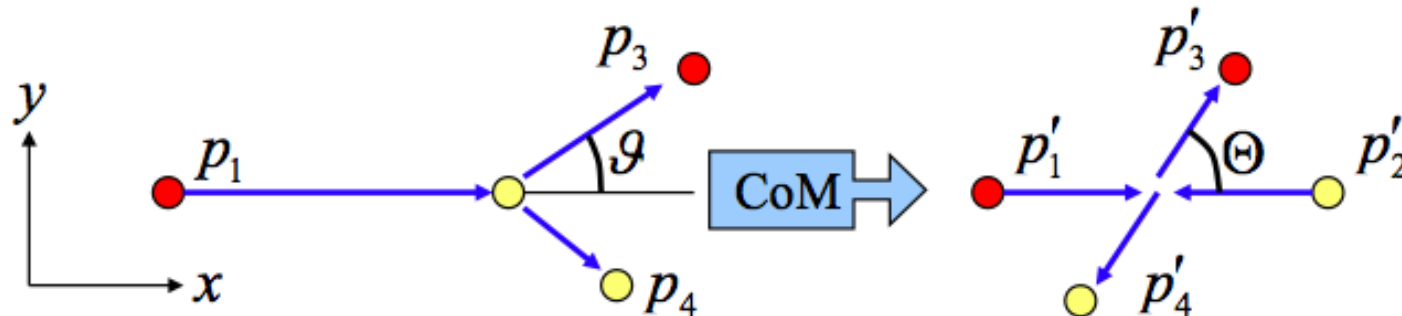
$$\beta = \frac{\mathbf{p}_1}{E_1/c + m_2 c} = \frac{m_1 \gamma_1 \mathbf{v}_1}{m_1 \gamma_1 c + m_2 c}$$

E' grows slowly with E_1

Approaches $\mathbf{v}_1/c$ for large E_1

Perdita di energia: cinematica max trasferimento di energia

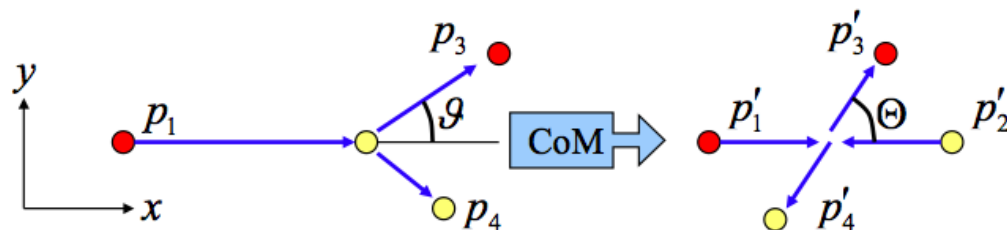
- Particle 1 hits particle 2 and get elastically scattered



- Cross section is calculated in CoM frame
 - By treating it as a central-force problem
- Experiment is done in the laboratory frame
- We need to learn how to translate between the CoM and the laboratory frames

It is more convenient to study the collision in the CM frame wrt the LAB frame since everything is symmetric and the particle momenta don't change length but only direction

Perdita di energia: cinematica



- Total momentum is $p^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu = (E_1/c + m_2c, \mathbf{p}_1)$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{p}}{p^0} = \frac{\mathbf{p}_1 c}{E_1 + m_2 c^2}$$

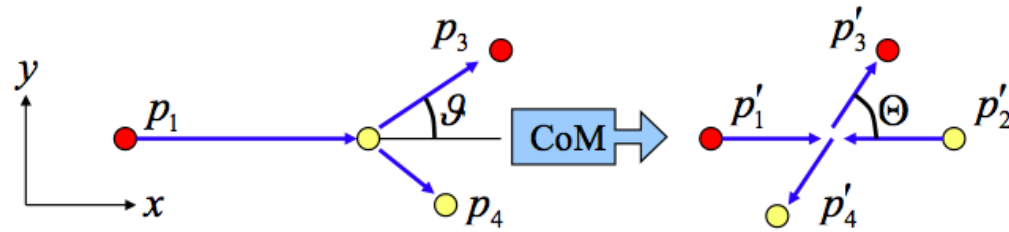
$$p^0 = E/c$$

- Let's get γ as well

$$E_{\text{cm}}^2/c^2 = (E_1/c + m_2c)^2 - \mathbf{p}_1^2 = m_1^2c^2 + m_2^2c^2 + 2E_1m_2$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{E_{\text{lab}}}{E_{\text{cm}}} = \frac{E_1 + m_2c^2}{\sqrt{m_1^2c^4 + m_2^2c^4 + 2E_1m_2c^2}}$$

Perdita di energia: cinematica



- Now we can boost p_1 to CoM

$$p_1^\mu = (E_1/c, p_1, 0, 0) \Rightarrow p_1'^\mu = (E'_1/c, p'_1, 0, 0)$$

$$\Rightarrow E'_1 = \gamma(E_1 - \beta p_1 c) \quad p'_1 = \gamma(p_1 - \beta E_1/c)$$

- p_3' is given by rotating p_1' by Θ

$$p_3'^\mu = (E'_1/c, p'_1 \cos \Theta, p'_1 \sin \Theta, 0) \quad \text{Since the collision is elastic}$$

- Boost this back to get p_3

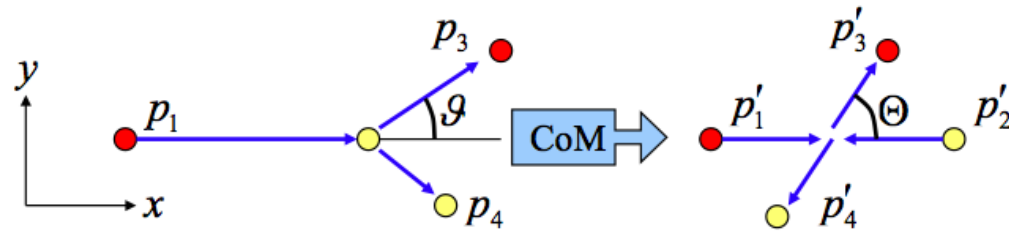
$$E_3 = \gamma(E'_1 + \beta p'_1 c \cos \Theta) \quad p_3^1 = \gamma(p'_1 \cos \Theta + \beta E'_1/c) \quad p_3^2 = p'_1 \sin \Theta$$

- Scattering angle in lab frame is

$$\tan \vartheta = \frac{p_3^2}{p_3^1} = \frac{\sin \Theta}{\gamma(\cos \Theta + \beta E'_1/(p'_1 c))} = \frac{\sin \Theta}{\gamma(\cos \Theta + \beta/\beta'_1)}$$

Velocity of
1 in CoM

Perdita di energia: cinematica



- What happens to the kinetic energy?

$$E_3 = \gamma^2 \left[(1 - \beta^2 \cos \Theta) E_1 - \beta (1 - \cos \Theta) p_1 c \right]$$

- At $\Theta = 0$ $E_3 = \gamma^2 (1 - \beta^2) E_1 = E_1$ Makes sense

- With a little bit of work

Kinetic energies	$\rightarrow T_3$	$= 1 - \frac{2\rho(1 + \mathcal{E}_1/2)}{(1 + \rho)^2 + 2\rho\mathcal{E}_1} (1 - \cos \Theta)$	$\mathcal{E}_1 = T_1 / m_1 c^2$
	$\rightarrow T_1$		$\rho = m_1 / m_2$

- Worst case is $\Theta = \pi$

$$\frac{(T_3)_{\min}}{T_1} = \frac{(1 - \rho)^2}{(1 + \rho)^2 + 2\rho\mathcal{E}_1}$$

This corresponds to the max energy transfer to the target $\Delta E_{\max} = T_1 - T_{3\min}$

The min energy transfer corresponds to $\cos \Theta = 1$ where $T_3 = T_1$ and therefore $\Delta E_{\min} = 0$

Perdita di energia: cinematica

$$\frac{(T_3)_{\min}}{T_1} = \frac{(1-\rho)^2}{(1+\rho)^2 + 2\rho\mathcal{E}_1}$$

■ Non-relativistic limit

$$T_1 \ll m_1 c^2, m_2 c^2$$

$$\frac{(T_3)_{\min}}{T_1} = \frac{(1-\rho)^2}{(1+\rho)^2}$$

If $m_1 \ll m_2$, almost no energy lost in the collision, as if $m_2 \ll m_1$, max loss for $m_1 = m_2$, ie $T_{3\min} = 0$

■ Ultra-relativistic limit

$$T_1 \gg m_1 c^2, m_2 c^2$$

$$\frac{(T_3)_{\min}}{T_1} = \frac{(1-\rho)^2}{2\rho\mathcal{E}_1} = \frac{(m_2 - m_1)^2 c^2}{2m_2 T_1}$$

$(T_3)_{\min}$ is independent of T_1

Perdita di energia: cinematica

We are interested to energy transferred to the target

The energy lost by the projectile is transferred to the target (initially at rest)

The max energy of the target after the collision is

$$T_{\max target} = T_1 - T_{1\min} = T_1(1 - T_{1\min}/T_1)$$

Making the substitution $T_1 = m_1 c^2(\gamma - 1)$, with very little algebra we get

$$T_{\min target} = 0 \quad \text{for} \quad \cos \Theta = 1, \Theta = 0 \quad \text{where} \quad m_1 \rightarrow m \text{ e } m_2 \rightarrow M$$

$$T_{\max target} = \frac{2m(\beta\gamma)^2}{\left[1 + \left(\frac{m}{M}\right)^2 + 2\gamma \frac{m}{M}\right]} \quad \text{for} \quad \cos \Theta = -1, \Theta = \pi$$

$$\text{e.g. protons on electrons} \quad \frac{m}{M} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \frac{\gamma m}{M} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow T_{\max target} \approx 2m(\beta\gamma)^2 = 2m\left(\frac{p_0}{M}\right)^2$$

Elastic scattering

- Conservation of momentum alone dictates some features of projectile-target elastic scattering
 - Target mass $\gg$ incoming energy implies momentum transfer but nearly no energy transfer to target; incoming particle can scatter at large angles
 - Target mass $\ll$ incoming energy implies potentially large energy transfer to target, but little change in direction of incoming particle
- As a result, scattering off electrons and off nuclei have very different characteristics

Collisions of charged particles

In a medium a particle with mass $\gg$ of e^- collides on:

- **Nuclei** $\rightarrow$ small energy transferred to the nucleus, but significative scattering angle.
- **Atomic Electrons** $\rightarrow$ incident particle loses energy on electrons, but get negligible deviation.

Collisioni fra particelle cariche.

- Quando una particella attraversa un mezzo continuo siamo interessati a conoscere:
 - quanta E deposita
 - che deviazione subisce
- Tratteremo i due processi in maniera indipendente (anche se perdite di energia e deviazione NON sono in realta' indipendenti)

Perdite di energia: Ionizzazione

Dei due processi elettromagnetici, le collisioni inelastiche con gli e⁻ atomici sono praticamente le sole responsabili delle perdite continue di energia di particelle pesanti nella materia.

In queste collisioni ($\sigma \approx 10^{-17} - 10^{-16} \text{ m}^2$), la particella proiettile cede E all'atomo.

Le perdite nelle singole collisioni sono piccole, ma il # e' grande per unita' di lunghezza → effetto cumulativo osservabile anche nel caso di spessori sottili (e.g. Un p di 10 MeV perde tutta la sua energia in 0.25 mm di Cu).

Le perdite per ionizzazione comprendono:

- Collisioni *soft* $\leftrightarrow$ Eccitazione di stati atomici o ionici, $\Delta E < E_{\text{ionizz}}$
- Collisioni *hard* $\leftrightarrow$ Ionizzazione di atomi o ioni, $\Delta E > E_{\text{ionizz}}$
se $E \gg E_{\text{ionizz}} \rightarrow e^-$ energetici, raggi δ

lo scattering elastico su nucleo avviene frequentemente ma le perdite di energia sono trascurabili se la massa del bersaglio e' $\ll$ di quella del proiettile.

Energy loss

La perdita totale di energia per una particella che attraversa un mezzo e'

$$-\Delta E = \sum_{i=1}^N \delta E_i$$

dove N e' il numero di collisioni e δE_i e' la perdita di energia nello i'esimo urto

Il processo di perdita e' stocastico: il numero di urti e la perdita di energia in ciascun urto non sono note a priori. Cioe' facendo attraversare ad N particelle lo stesso spessore di materiale in generale la perdita di energia sara' differente in ciascun evento, poiche' il # di urti e' diverso per ogni particella e in ciascun urto la particella perde energie diverse.

Tuttavia, se N e' grande, e' possibile calcolare la perdita MEDIA di energia e la sua deviazione standard ("fluttuazioni")

- we want to know the energy lost by a particle when crossing a medium:
 - correct approach: get diff cross section as a function of E $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}d\varepsilon$
 - calculate the average energy loss

$$-dE = nZdx \int_{\varepsilon_{cut}}^{\varepsilon_{max}} \varepsilon \frac{d\sigma}{d\varepsilon} d\varepsilon$$

- This is the Bethe-Bloch approach
- We can get most of results from a classical calculation of energy loss in a medium

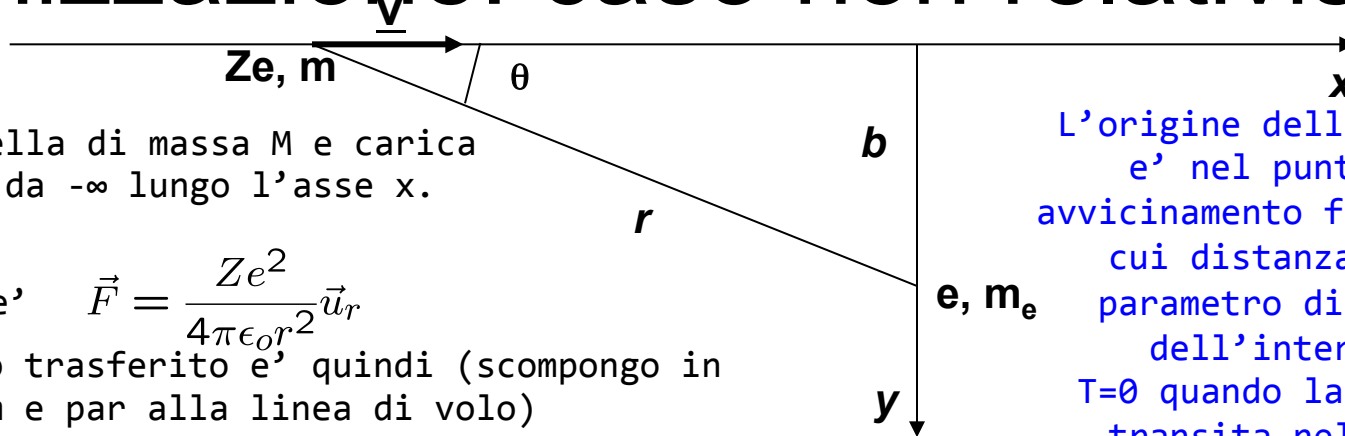
Energy loss – classical approach

La trattazione rigorosa richiede l'uso della meccanica quantistica ma e' possibile ottenere le caratteristiche principali con una trattazione semiclassica

Useremo l'approssimazione $M \text{ proiettile} \gg M \text{ bersaglio}$, cosi' che nell'interazione il proiettile (veloce) non viene deviato (in maniera apprezzabile) e prosegue indisturbato.

Quello che vogliamo fare e' ottenere la perdita di energia per unita' di lunghezza percorsa ("perdita specifica") in un mezzo dE/dx

Ionizzazione: caso non relativistico



La particella di massa M e carica Ze arriva da $-\infty$ lungo l'asse x .

La forza e' $\vec{F} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$

L'impulso trasferito e' quindi (scompongo in comp norm e par alla linea di volo)

$$\vec{p}_t = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}_p dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}_n dt$$

$$\vec{p}_t = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\theta dx}{r^2} \frac{1}{v} \right) \vec{u}_x + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\theta dx}{r^2} \frac{1}{v} \right) \vec{u}_y \right]$$

Elimino r : $b = r \sin\theta \rightarrow r = b / \sin\theta$

$$x = r \cos\theta \rightarrow x = b \cos\theta / \sin\theta \rightarrow dx = -b d\theta / \sin^2\theta$$

$$\vec{p}_t = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_0^\pi \frac{\cos\theta \sin^2\theta}{b^2} \frac{-bd\theta}{v \sin^2\theta} \vec{u}_x + \int_0^\pi \frac{-b}{\sin^2\theta} \frac{d\theta \sin^3\theta}{v b^2} \vec{u}_y \right]$$

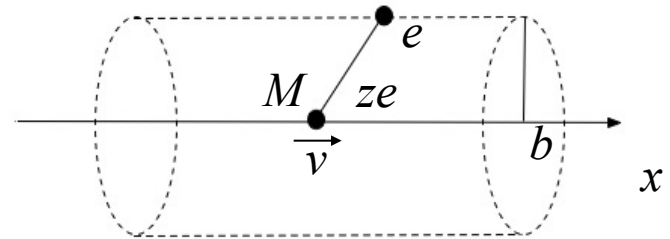
Il primo integrale e' zero per simmetria

$$\vec{p}_t = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 b v} \left[\int_0^\pi \sin\theta d\theta \vec{u}_y \right] = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 b v} \vec{u}_y$$

E' l'impulso trasferito dalla particella incidente all'e-

Another way to get p_t

- Consider heavy particle, mass M , charge ze , velocity v .
- Atomic electron at distance b from particle trajectory:



- Impulse transferred to the electron:

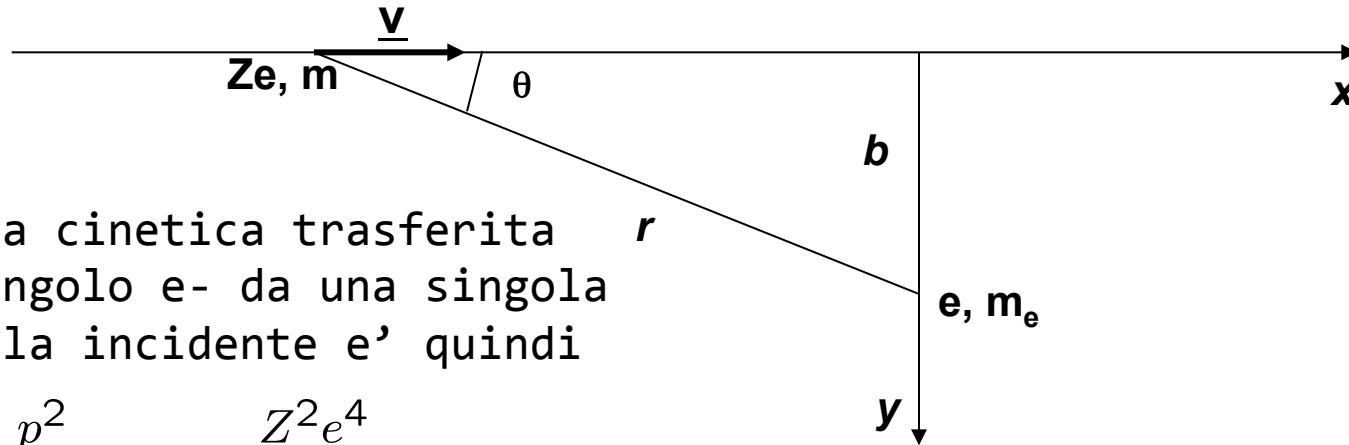
$$p_t = \int \mathbf{F} dt = e \int E_{\perp} dt = e \int E_{\perp} \frac{dt}{dx} dx = e \int E_{\perp} \frac{dx}{v}$$

- by symmetry only the component $\perp$ to line of flight contributes

- Gauss Law: $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$ $\int E_{\perp} 2\pi b dx = \frac{ze}{\epsilon_0} \Rightarrow \int E_{\perp} dx = \frac{2ze}{4\pi\epsilon_0 b}$

$$\Rightarrow p_t = \frac{2ze^2}{4\pi\epsilon_0 bv}$$

Ionizzazione: caso non relativistico



L'energia cinetica trasferita ad un singolo e- da una singola particella incidente e' quindi

$$\Delta E_{cin} = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{Z^2 e^4}{8\pi^2 \epsilon_0^2 b^2 v^2 m_e}$$

Se abbiamo una densita' di volume di e- N_e , allora l'energia trasferita per unita' di volume e'

$$U_{cin} = N_e \Delta E_{cin} = \frac{N_e Z^2 e^4}{8\pi^2 \epsilon_0^2 b^2 v^2 m_e} = \left(\frac{e^4 N_e}{8\pi^2 \epsilon_0^2 m_e} \right) \frac{Z^2}{b^2 v^2}$$

L'energia trasferita dipende dal parametro d'impatto b, dalla velocita' e dalla carica della particella incidente

NB: questa e' l'energia trasferita all'elettone (positiva), che corrisponde a quella persa dalla particella incidente (negativa): $E_{e,fin} = \Delta E$, $E_{fin,M} = E_{inc,M} - \Delta E$

Ionizzazione: caso non relativistico

Nel percorrere un tratto dx , particella cede energia a tutti gli e^- con parametro di impatto fra b e $b+db$, contenuti nel volume $dV=2\pi b db dx$ quindi

$$-dE = U_{cin} \times dV = U_{cin} \times 2\pi b db dx$$

$$\downarrow$$

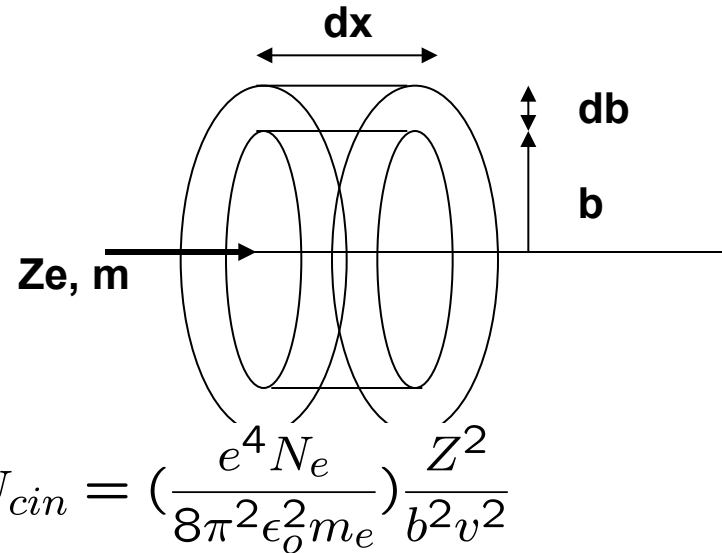
$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi U_{cin} b db$$

La perdita totale media di energia si ottiene integrando sui parametri d'impatto (NB: b non e' un osservabile).

Si potrebbe pensare che $b_{min}=0$ e $b_{max}=+\infty$, ma ci sono argomenti che suggeriscono che non sia cosi'

$$-\frac{dE}{dx} = \int_{b_{min}}^{b_{max}} 2\pi \left(\frac{e^4 N_e}{8\pi^2 \epsilon_0^2 m_e} \right) \frac{Z^2}{b^2 v^2} b db$$

Argomenti: $b > \lambda_{DeBroglie}$, i.e. principio di indeterminazione, $b < \infty$ a causa dello screening della carica

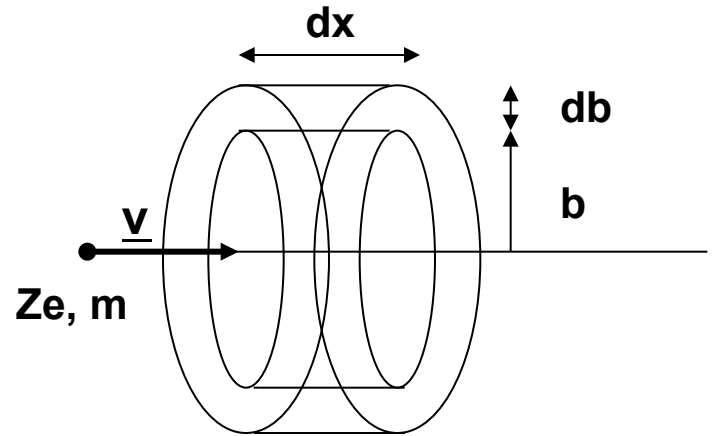


Ionizzazione: caso non relativistico

Quindi occorre stabilire valori finiti degli estremi con qualche argomento fisico

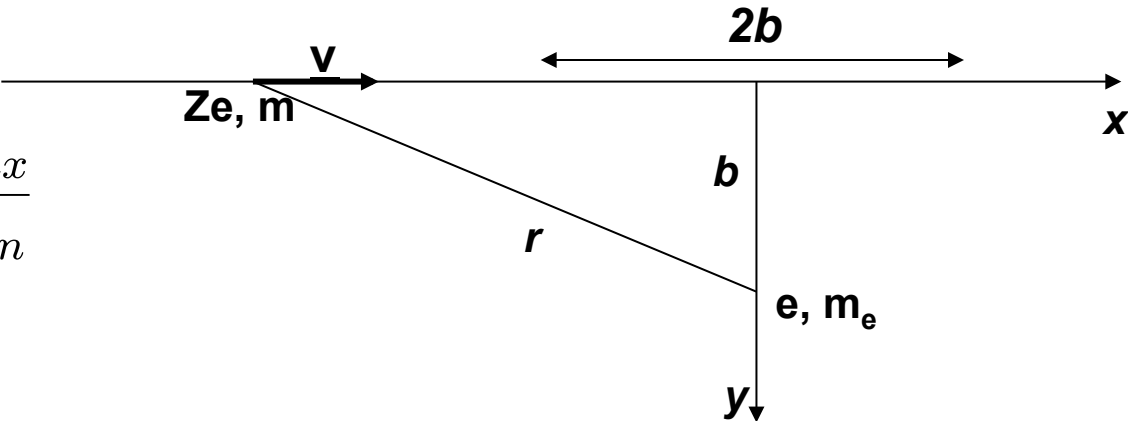
$$-\frac{dE}{dx} = \int_{b_{min}}^{b_{max}} 2\pi \left(\frac{e^4 N_e}{8\pi^2 \epsilon_0^2 m_e} \right) \frac{Z^2}{b^2 v^2} b db$$

$$-\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi \epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{b_{max}}{b_{min}}$$



La dipendenza log viene dal fatto che $p \propto b^{-2}$, ma $dN \propto N_e b db$, quindi per piccoli b , p e' grande ma dN e' piccolo e viceversa. Dato che la dipendenza da b (inosservabile) e' solo log, non e' necessario conoscere con grande precisione il loro rapporto

Ionizzazione: caso non relativistico

$$-\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{b_{max}}{b_{min}}$$


Il limite superiore b_{max} puo' essere ottenuto considerando il limite superiore alla durata dell'interazione, oltre il quale l'e⁻ non puo' piu' essere considerato in quiete, cioe' quando la durata dell'interazione τ e' dello stesso ordine del periodo orbitale dell'e⁻.

La durata dell'interazione puo' essere calcolata nel seguente modo:

La forza elettrostatica alla distanza di max avvicinamento e'

$$F = \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 b^2}$$

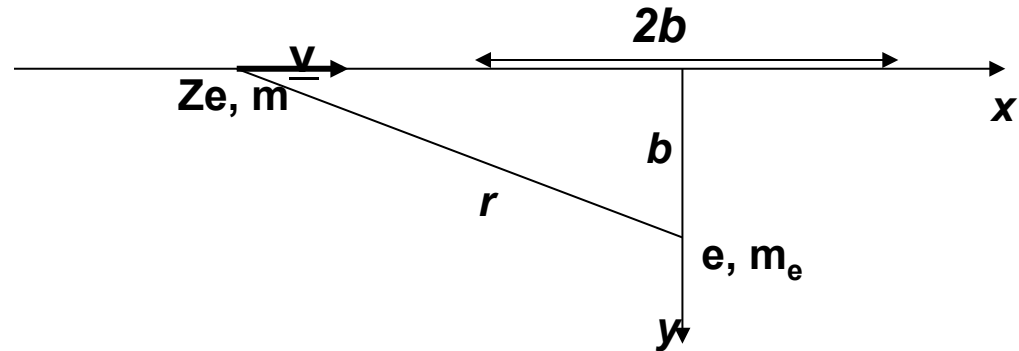
Se la durata dell'interazione e' τ , allora $\Delta p \sim F(b)\tau$
 confrontando con $\Delta p = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 bv}$ si vede che e' "come se" l'interazione durasse
 $\tau = 2b/v$

$$\text{Così } \tau_{max} \sim 1/\nu_0 \rightarrow 2b_{max}/v \sim 2\pi/\omega_0 \rightarrow b_{max} = \pi v/\omega_0$$

Per durate maggiori, l'interazione e' adiabatica $\rightarrow$ non c'e' trasferimento netto di energia

Ionizzazione: caso non relativistico

$$-\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{b_{max}}{b_{min}}$$



Per il limite inferiore b_{min} ci sono due possibilita' a seconda che sia valido un approccio classico o quantistico.

Classicamente, b e' minimo quando e' max il trasferimento di energia, che, come si e' visto, e', per urti centrali:

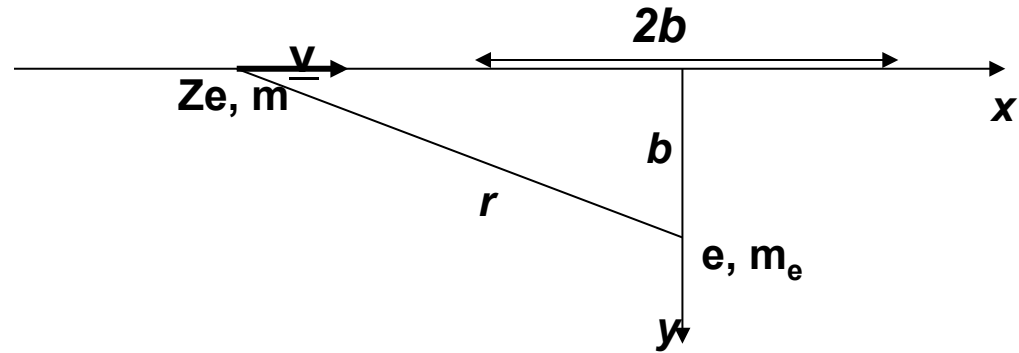
$$\Delta E_{inc} = (1/2)m_e v_e^2 \simeq (1/2)m_e (2v)^2 = 2m_e v^2$$

La distanza di minimo avvicinamento e' quella per cui l'energia potenziale elettrostatica di interazione e' uguale alla energia cinetica trasferita:

$$\frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 b_{min}} \simeq 2m_e v^2 \quad \Longrightarrow \quad b_{min} \simeq \frac{e^2 Z}{8\pi\epsilon_0 m_e v^2}$$

Ionizzazione: caso non relativistico

$$-\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{b_{max}}{b_{min}}$$



L'altra possibilità viene dal fatto che dovremmo usare la meccanica quantistica per descrivere le interazioni a piccole distanze.

La max velocità dell'e⁻ è $v_e \approx 2v$ per cui la variazione di impulso è $\Delta p \approx 2m_e v$ e quindi dal principio di indeterminazione $\Delta x \approx h/2m_e v \rightarrow b_{min} = h/2m_e v$

Se b_{min} è quello quantistico, dovremmo calcolare propriamente dE/dx con la meccanica quantistica. Fatto salvo questo, b_{min} ci dice il minimo valore per il quale i calcoli fatti fanno *senso*

Bisogna avere un criterio per la scelta di b_{min}

Ionizzazione: caso non relativistico

Il criterio di scelta e' quello di prendere il piu' grande $b_{\min}$ fra quello classico e quello quantistico per il problema in questione

$$\frac{b_{\min}(QU)}{b_{\min}(CL)} \simeq \frac{\hbar}{2m_e v} \frac{8\pi\epsilon_0 m_e v^2}{e^2 Z} = \frac{4\pi\hbar\epsilon_0 v}{e^2 Z}$$

Ponendo $\alpha = \frac{e^2}{4\pi c \epsilon_0 \hbar} \approx \frac{1}{137}$ Si ottiene

$$a \equiv \frac{b_{\min}(QU)}{b_{\min}(CL)} = \left(\frac{1}{\alpha Z}\right) \frac{v}{c} \simeq \left(\frac{137}{Z}\right) \frac{v}{c}$$

Se $v/c < Z/137 \rightarrow a < 1 \rightarrow$ limite classico

Se $v/c > Z/137 \rightarrow a > 1 \rightarrow$ limite quantistico

Per particelle con $v/c \approx 0.012$, occorre usare il limite QU, ma ci sono casi in cui si puo' applicare il caso classico, p. es. nel caso di nubi di H caldo nella galassia

Ionizzazione: caso non relativistico

Assumendo che si applichi il limite quantistico si ha

$$-\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{2\pi m_e v^2}{\hbar\omega_0}$$

La frequenza può essere espressa come potenziale di ionizzazione I :
L'energia dello stato fondamentale (in un modello naïve alla Bohr) è
 $E = (1/2) \hbar\omega_0$, che è anche l'energia minima per liberare l'e- $\rightarrow \hbar\omega_0 = 2I$

$$-\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{\pi m_e v^2}{I}$$

Tenendo conto che in un atomo ci sono Z elettroni, I è in realtà una media pesata sui vari livelli di E degli e- che possono essere espulsi dall'atomo (difficile da calcolare eccetto che per gli atomi più semplici e va trovata empiricamente): $I \rightarrow \bar{I}$ $\pi/2$ per convenzione $\rightarrow$

$$-\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{2m_e v^2}{\bar{I}} \quad \Longrightarrow \quad -\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{E_{max}}{\bar{I}}$$

Ionizzazione: spettro degli e-

Gli elettroni di rinculo hanno una distribuzione di energia caratteristica. Può essere facilmente calcolata

Il # di e⁻ con b fra b e b+db e' $dN=2\pi N_e b db dx$
 → devo esprimere b in funzione di E

$$E_{cin} = \left(\frac{e^4 Z^2}{8\pi^2 \epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \frac{1}{b^2} = \frac{k}{b^2}$$

Quindi $dE = -\frac{2kdb}{b^3} \Rightarrow db = -\frac{b^3 dE}{2k}$

$dN = 2\pi N_e b db dx \Rightarrow dN = -2\pi N_e dx \frac{b^4 dE}{2k}$

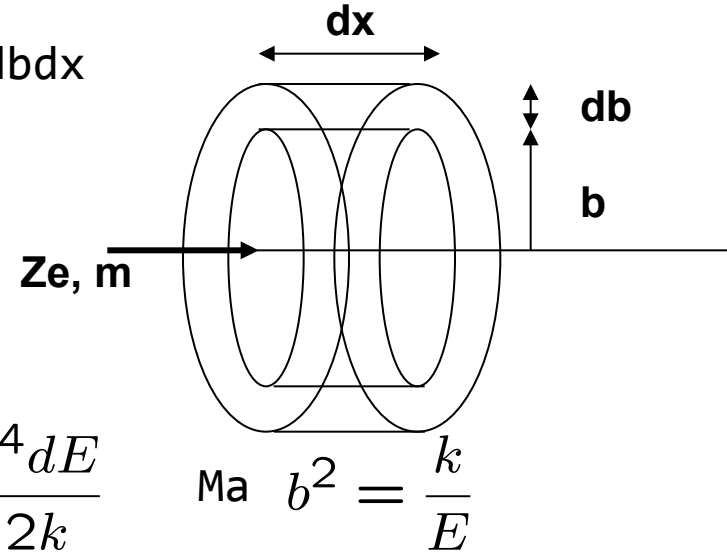
$dN = -\pi N_e dx \left(\frac{k}{E} \right)^2 \frac{dE}{E^2}$ $dN = -\pi N_e \frac{k}{E^2} dE dx$

$dN = -\pi N_e \left(\frac{e^4 Z^2}{8\pi^2 \epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \frac{1}{E^2} dE dx$

$n(E) = -\frac{dN}{dE dx} = \pi N_e \left(\frac{e^4 Z^2}{8\pi^2 \epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \frac{1}{E^2}$

E' il # di e- emessi con E fra E ed E + dE nel tratto di lunghezza dx

Lo spettro degli e- emessi segue una legge di potenza E^{-2}
 $[n(E)] = [E^{-1} L^{-1}]$



Con $I < E < E_{max}$

Gli elettroni emessi con $E \approx E_{max}$ vengono detti **raggi δ**

Ionizzazione: caso non relativistico

La perdita media di energia per unita' di lunghezza si ottiene da

$$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle = \int_{E_{min}=\bar{I}}^{E_{max}} E n(E) dE \quad \longrightarrow \quad \frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{E_{max}}{\bar{I}}$$

Questa e' la formula **classica**, in cui ci sono le dipendenze corrette dalle variabili e costanti fondamentali:

- ❖ la perdita specifica non dipende dalla massa della particella incidente,

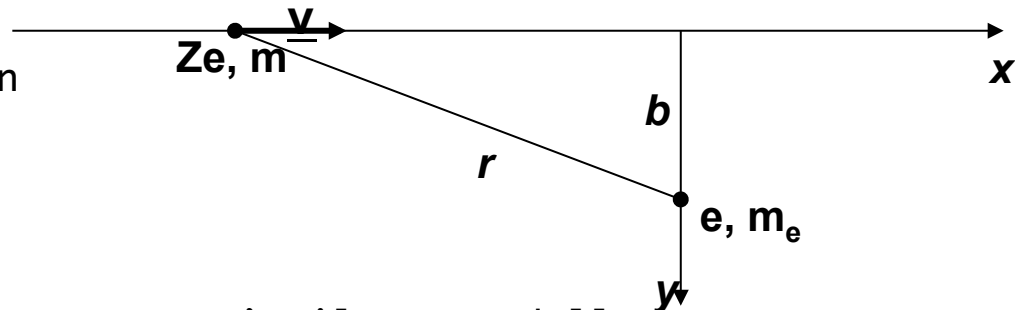
- ❖ dipende dalla m^{-1} della particella bersaglio $\rightarrow$ perdite per ionizzazione trascurabili per interazione di ionizzazione con particelle pesanti (i.e. su nuclei),

- ❖ dipende da v^{-2} della particella incidente $\rightarrow$ particelle "lente" perdono piu' energia

Ionizzazione: caso relativistico

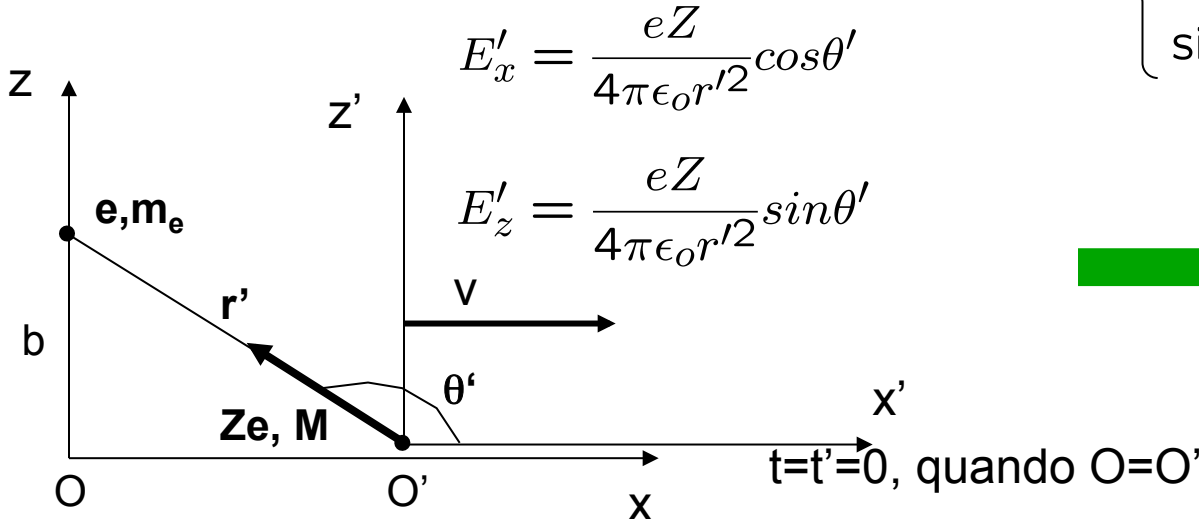
L'estensione al caso relativistico e' semplice.

In questo caso, il campo della particella incidente che viene misurato alla posizione dell'e- e' un campo relativistico, ma se ci mettiamo nel riferimento in cui la particella incidente e' quiete, il campo e' quello elettrostatico di Coulomb → facciamo una trasformazione di Lorentz dal riferimento del "laboratorio" S, in cui l'e- e' in quiete, a quello di quiete della particella incidente, S'



In S', il campo della particella incidente sull'elettrone e' $\vec{E}' = \frac{eZ}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \vec{u}_r'$

$$\begin{cases} \cos \theta' = -x'/r' \\ \sin \theta' = z'/r' \end{cases}$$



$$E'_x = \frac{eZ}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \cos \theta'$$

$$E'_z = \frac{eZ}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \sin \theta'$$



$$E'_x = -\frac{eZ}{4\pi\epsilon_0 r'^3} x'$$

$$E'_z = \frac{eZ}{4\pi\epsilon_0 r'^3} z'$$

Ionizzazione: caso relativistico

In S' , l'e- ha coordinate $(-vt', 0, b, t')$ $\rightarrow r' = \sqrt{b^2 + (vt')^2}$

I tempi misurati in S' e da un osservatore in S sono connessi dalla trasformazione

$$t' = \gamma(t - \frac{vx}{c^2}) \quad \text{Ma in } S, \text{ le coordinate dell'e- sono } (0, 0, b, t) \quad t' = \gamma t$$

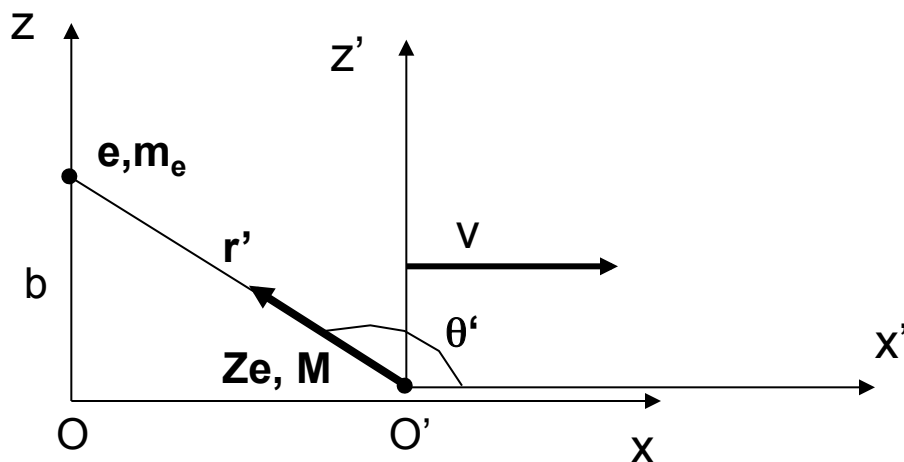
$$r' = \sqrt{b^2 + (v\gamma t)^2}$$

e' la distanza in S' tra M ed l'e- espressa in funzione delle coordinate in S



$$E'_x = -\frac{eZ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma vt}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}}$$

$$E'_z = \frac{eZ}{4\pi\epsilon_0} \frac{b}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}}$$



In questo modo abbiamo espresso i campi in S' in funzione delle coordinate misurate in S , ma questi NON sono i campi in S . Per trovarli dobbiamo trasformare i campi da S' ad S

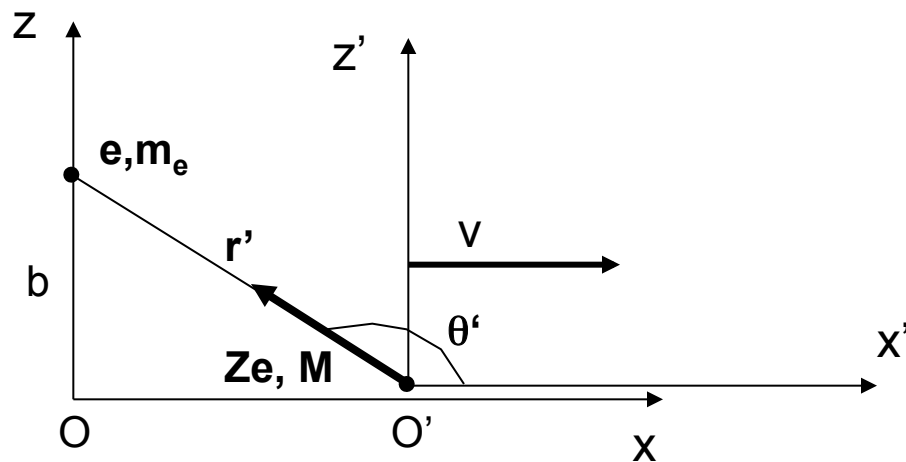
Ionizzazione: caso relativistico

Per ottenere i campi in S, dobbiamo fare le trasformazioni da S' ad S, cioè' dobbiamo trovare i campi misurati in un rif in moto con velocità -v lungo x'

I campi trasformano come le componenti del tensore doppio di Maxwell

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F'_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta} F_{\alpha\beta}$$



$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} \quad \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}$$

$$\vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} + \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}_{\perp})$$

$$\vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} - \vec{v} \times \vec{B}_{\perp})$$

Queste sono le trasformazioni standard che danno i campi in S', noti quelli in S

Ionizzazione: caso relativistico

A noi servono le trasf inverse, che si ottengono semplicemente scambiando gli apici e trasformando $\mathbf{v}$ in $-\mathbf{v}$

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel} \quad \vec{E}_{\perp} = \gamma(\vec{E}'_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}'_{\perp})$$

$$\vec{B}_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel} \quad \vec{B}_{\perp} = \gamma(\vec{B}'_{\perp} - \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}'_{\perp})$$

$$B_x = B'_{x'} = 0$$

$$B_z = -(\gamma \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}'_{\perp})_z = -\gamma v E'_y = 0$$

$$B_y = -(\gamma \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}'_{\perp})_y = -\frac{eZ}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\gamma b v}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}}$$

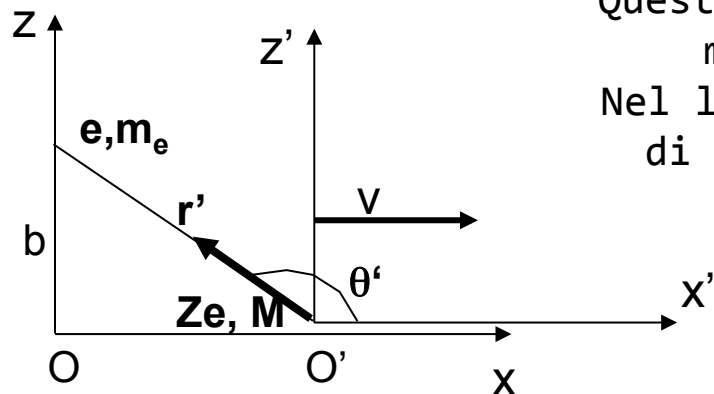
In S' , $\mathbf{B}' = 0 \rightarrow$

$$E_x = E'_{x'} \quad E_z = \gamma E'_z \quad E_y = \gamma E'_y = 0$$

$$E_x = -\frac{eZ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma v t}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}}$$

$$E_z = \frac{eZ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma b}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}}$$

$$B_y = -\frac{v}{c^2} E_z$$



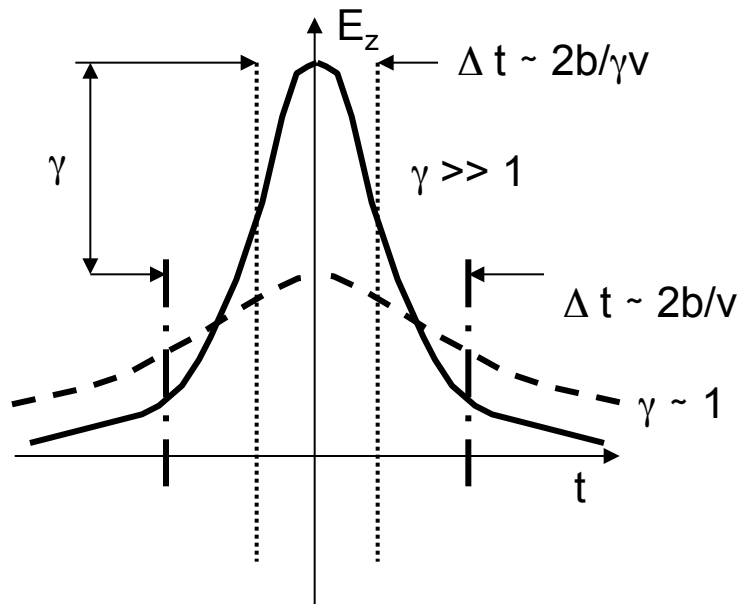
Questi sono i campi dovuti ad una particella in moto, misurati in una posizione fissa nello spazio
Nel limite $v \rightarrow c$, $E_z = -cB_y$, indistinguibile da quello di un'onda polarizzata linearmente che si propaga lungo x

Ionizzazione: caso relativistico

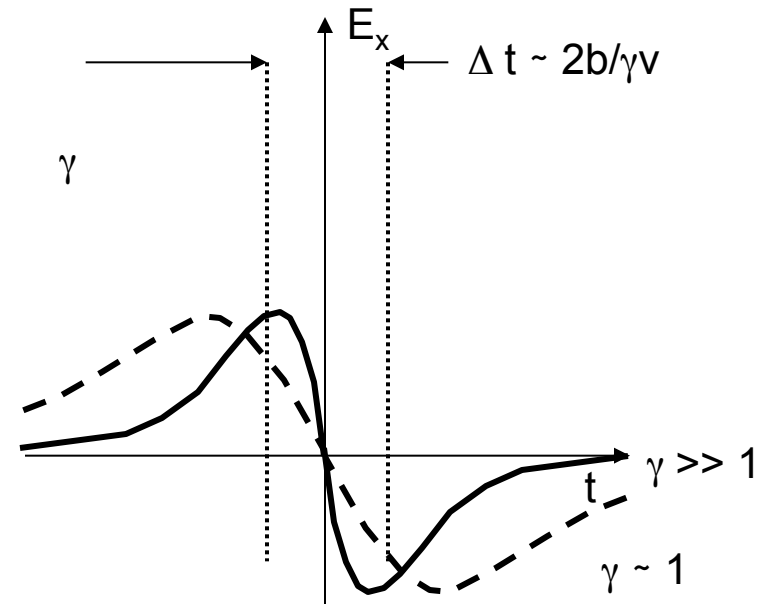
$$E_z = \frac{eZ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma b}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}}$$

$$E_x = -\frac{eZ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma vt}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}}$$

Alla distanza di max avvicinamento a $t=0$, $E_z = \gamma E_z(\text{NR})$, ma la durata dell'interazione $2b/v$ in S' e' contratta di un fattore γ (contrazione di Lorentz per b lungo x) in S



Alla distanza di max avvicinamento a $t=0$, $E_x = 0$



Ionizzazione: caso relativistico

Ora si procede esattamente come nel caso non rel. p trasferito e'

$$\vec{p}_t = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}_{\parallel} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}_{\perp} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}_x dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}_z dt$$

Come prima la comp. $\parallel$ da contributo nullo perche' dispari in t

$$\vec{p}_t = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e E_z dt \right) \vec{u}_z \quad \vec{p}_t = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^2 Z \gamma b dt}{4\pi\epsilon_0 [b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}} \right) \vec{u}_z$$

$$\vec{p}_t = \frac{e^2 Z \gamma b}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}} \right) \vec{u}_z = \frac{e^2 Z \gamma b}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{b^3 [1 + (v\gamma t/b)^2]^{3/2}} \right) \vec{u}_z$$

$$\text{Pongo } x = \gamma v t / b \rightarrow dx = (\gamma v / b) dt \rightarrow dt = (b / \gamma v) dx$$

$$= \frac{e^2 Z \gamma}{4\pi\epsilon_0 b^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(b/\gamma v) dx}{[1 + x^2]^{3/2}} \right) \vec{u}_z = \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 b v} \left(\int_0^{+\infty} \frac{dx}{[1 + x^2]^{3/2}} \right) \vec{u}_z$$

$$= \frac{e^2 Z}{2\pi\epsilon_0 b v} \cdot 1 \cdot \vec{u}_z$$

L'impulso trasferito e' $\perp$ alla traiettoria di volo

Ionizzazione: caso relativistico

$$p_t = \frac{e^2 Z}{2\pi\epsilon_0 b v} \quad \text{Il risultato e' esattamente lo stesso del caso non relativistico, dato che } E_z \rightarrow \gamma E_z \text{ ma } \tau \rightarrow \tau/\gamma \text{ e } \mathbf{p} = \mathbf{F}(\mathbf{b})\tau$$

Procedo come prima e ottengo

$$-\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{b_{\max}}{b_{\min}}$$

Nel caso relativistico $\tau_{\max} = 2b_{\max}/\gamma v$

Così, $\tau_{\max} \sim 1/v_0 \rightarrow 2b_{\max}/\gamma v \sim 2\pi/\omega_0 \rightarrow b_{\max} = \pi v \gamma / \omega_0 = \gamma b_{\max}(\text{NR}) = \pi \hbar v \gamma / 2I$

Per $b_{\min}$, dal principio di indeterminazione di Heisenberg, si ha

$$\Delta x = \hbar / \Delta p = \hbar / \gamma \Delta p \text{ (NR)} \rightarrow b_{\min} = b_{\min}(\text{NR}) / \gamma$$

$$\text{Quindi } b_{\max}/b_{\min} = \gamma^2 \frac{2m_e v^2}{I}$$

$$-\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{2\gamma^2 m_e v^2}{I}$$

Bethe-Bloch

Il calcolo corretto e' quello quantistico, che non faremo (ma per i soliti entusiasti e' disponibile, se lo chiedete).

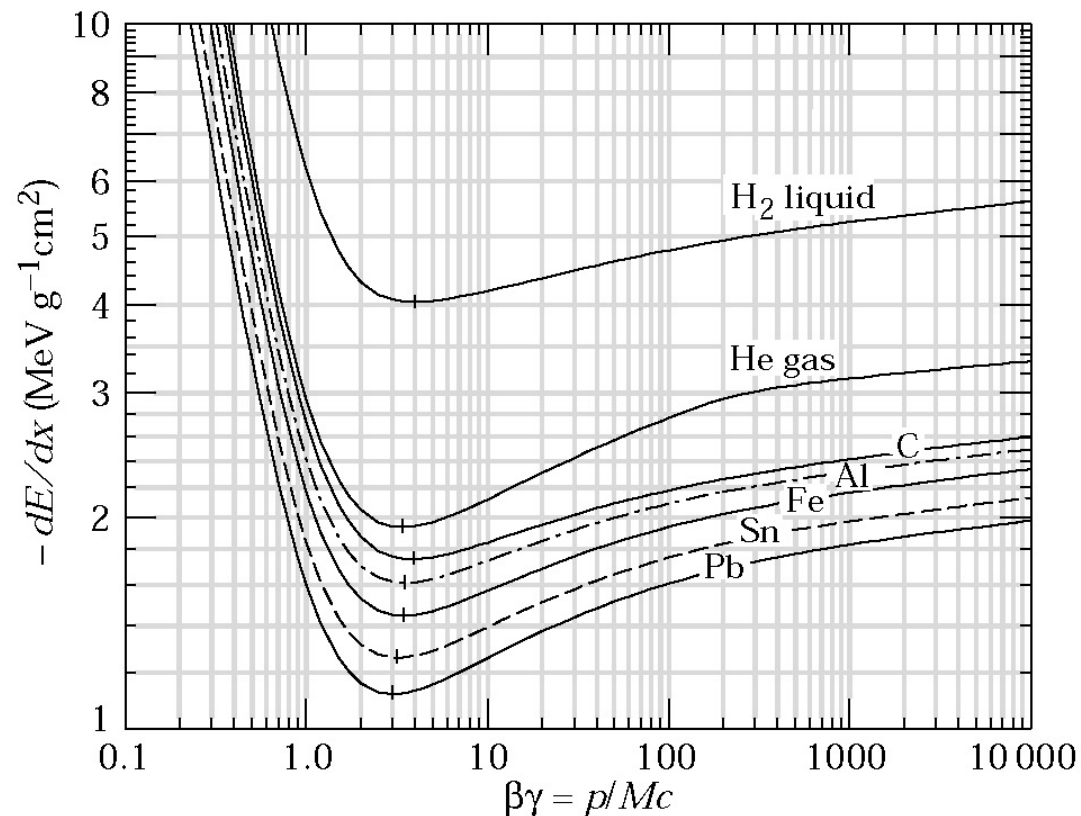
Il risultato ottenuto da Bethe e Bloch e'

$$\frac{dE}{dx} = \frac{z^2 e^4 N_e}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \left[\ln\left(\frac{2\gamma^2 m_e v^2}{I}\right) - \frac{v^2}{c^2} \right]$$

La relazione corretta e' molto simile a quella ricavata, con solo un termine di ordine $O(1)$ che non c'e' in quella "classica". Compare quando si tiene conto dello spin dell'elettrone: la sez d'urto non e' quella di Rutherford ma quella di Mott

$$d\sigma/d\Omega = (d\sigma/d\Omega)_R (1 - \beta^2 \sin^2(\theta/2))$$

Valida per particelle non troppo relativistiche in mezzi non troppo densi



Ionizzazione: Bethe-Bloch

$$\frac{dE}{dx} = \frac{z^2 e^4 N_e}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \left[\ln\left(\frac{2\gamma^2 m_e v^2}{I}\right) - \frac{v^2}{c^2} \right] \quad [\text{E/cm}]$$

Eliminiamo la densita' di elettroni. La densita' di numero di atomi del mezzo e' $n = \rho/m_{\text{mezzo}}$

La massa m_{mezzo} si ottiene dalla

relazione $m_{\text{mezzo}} = M_{\text{mol}}/N_A = A/N_A$, M_{mol} = massa molare (Kg/mol) = A kg/mol $\rightarrow$

$n_{\text{mezzo}} = \rho N_A/A$,

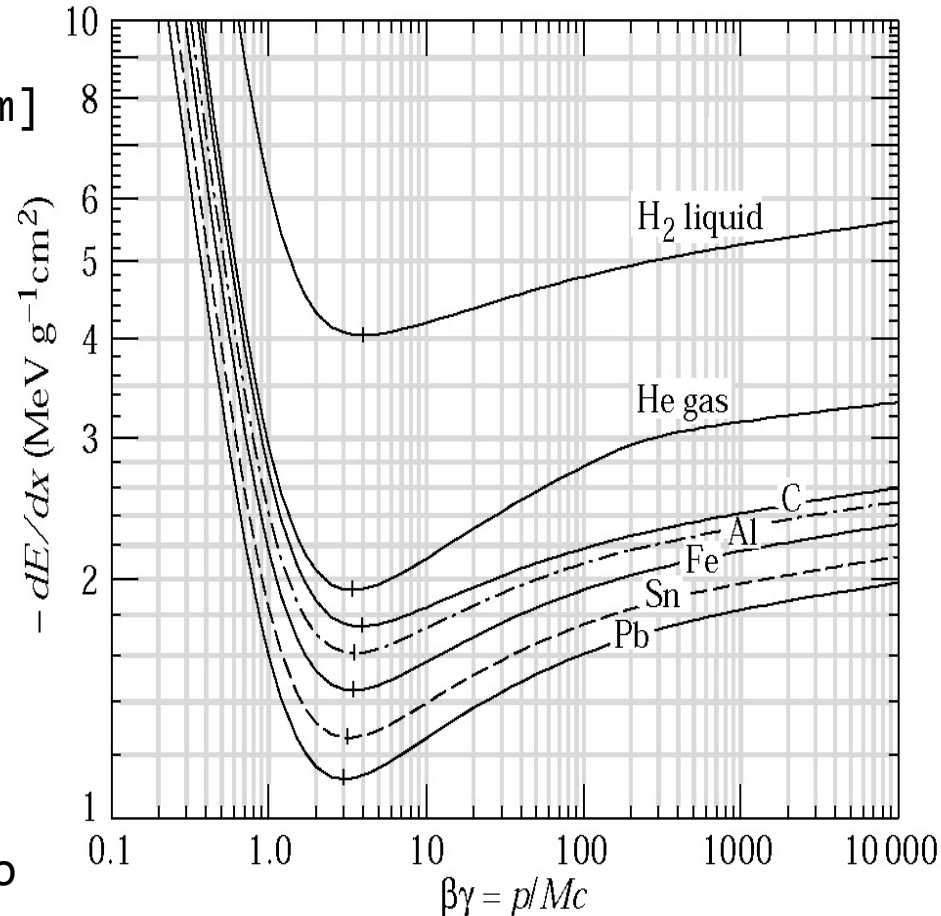
Il numero atomico e' Z quindi ci sono

$N_e = Z n_{\text{Be}} = \rho N_A (Z/A)$ elettroni

$$\frac{dE}{dx} = \frac{N_A e^4 z^2}{4\pi\epsilon_0 m_e v^2} \frac{Z}{A} \rho \left\{ \ln\left[\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I}\right] - \beta^2 \right\}$$

La perdita dE non dipende SOLO dallo spessore, ma dal prodotto ρdx (gcm^{-2}). Posto quindi $X = \rho x$ si ha

$$\frac{dE}{dX} = \frac{N_A e^4 z^2}{4\pi\epsilon_0 m_e v^2} \frac{Z}{A} \rho \left\{ \ln\left[\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I}\right] - \beta^2 \right\} \quad [\text{E}/(\text{g}/\text{cm}^{-2})]$$



Per cui dE/dX **NON** dipende dalla densita' del mezzo ed e' "universale". Le differenze osservate sono legate al potenziale di ionizzazione I , che varia da elemento ad elemento

Material thickness

- Thickness of material (x) is usually measured in gm/cm^2
- Related to distance (y) traversed via density:
- $x = y \rho$
- Used because relevant issue in determining interaction in matter is **how many scattering centres are traversed**
- Benchmark values for traversing 1 cm of material:
 - Lead: $x = 11.4 \text{ gm}/\text{cm}^2$
 - Iron: $x = 7.9 \text{ gm}/\text{cm}^2$
 - Water: $x = 1.0 \text{ gm}/\text{cm}^2$
 - Liquid H_2 $x = 0.07 \text{ gm}/\text{cm}^2$
 - Air: $x \sim 0.001 \text{ gm}/\text{cm}^2$

Ionizzazione: Bethe-Bloch

$$\frac{dE}{d\xi} = K \frac{z^2 Z}{\beta^2 A} \left[\ln \left(\frac{2m_e c^2 \gamma^2 \beta^2}{I} \right) - \beta^2 \right]$$

Misurando $\gamma = E/Mc^2$
e contemporaneamente
 $dE/d\xi$ si misura z

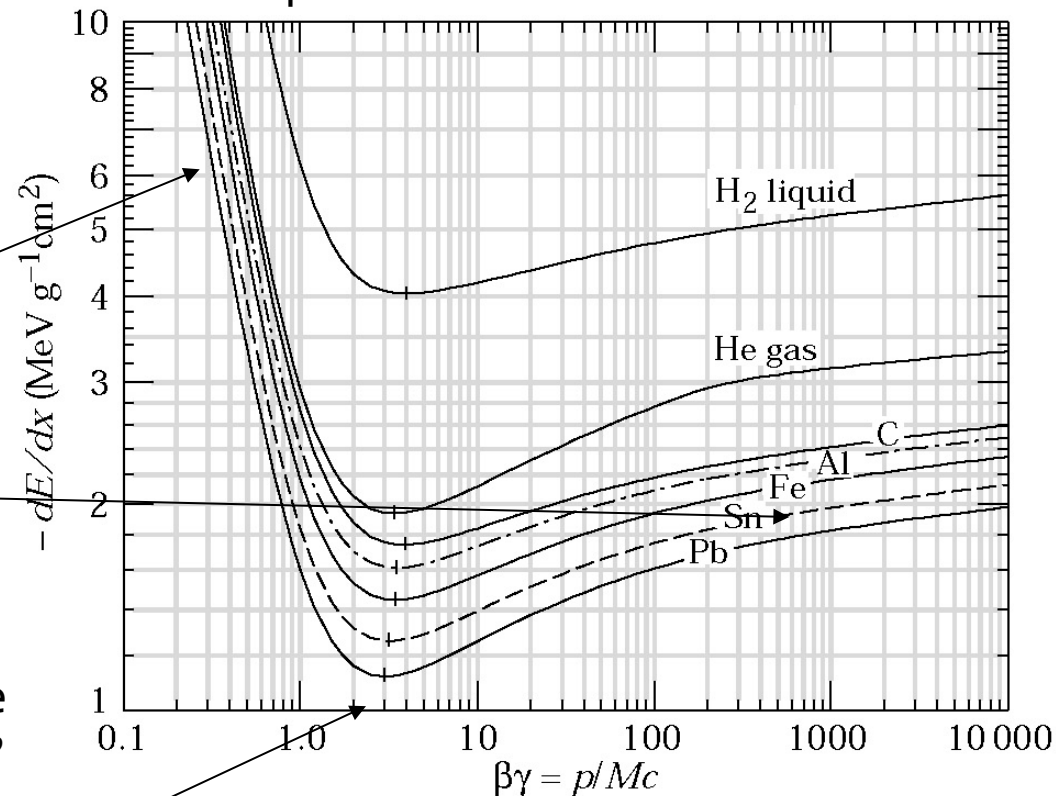
A bassa energia $\propto \beta^{-2}$

Ad alta energia $\propto \ln \gamma^2$

Minimo a $\beta\gamma \approx 2-3$,
corrispondente a $E \approx Mc^2$, oltre
questo limite la particella e'
relativistica

(Minimum Ionizing Particle=MIP).

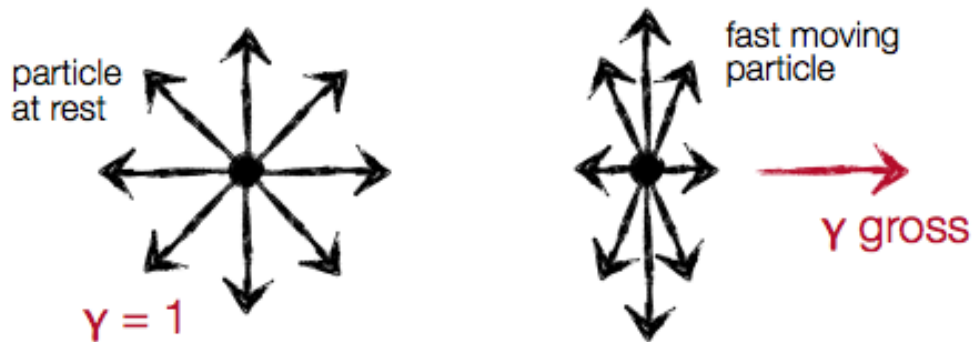
- Non dipende dalla massa della particella incidente
- Dipende dal quadrato della carica della particella incidente



Relativistic rise for $\beta\gamma > 4$

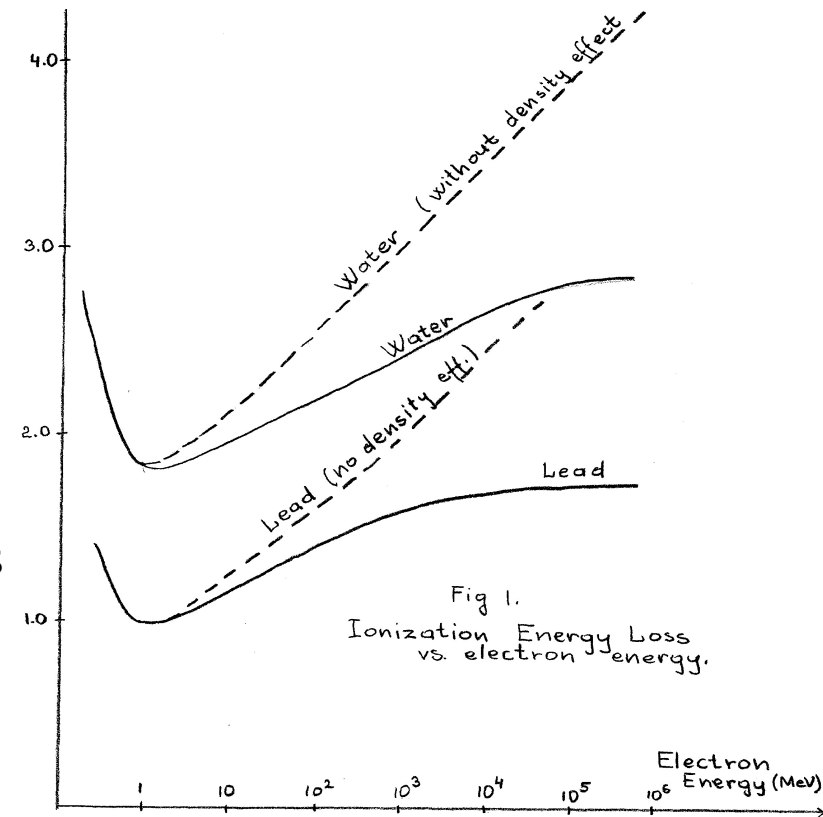
Important at high energies. BB over-estimates the energy loss at high momentum of the incident particle.

High energy particle: transversal electric field increases due to Lorentz transform; $E_y \rightarrow \gamma E_y$. Thus interaction cross section increases ...



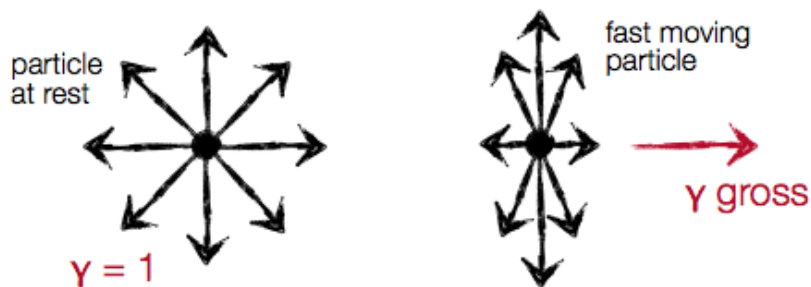
Experimental curve increases less rapidly than $\ln \gamma^2$

But rather as $\sim \ln \gamma$ and then it reaches a plateau, named "Fermi plateau"

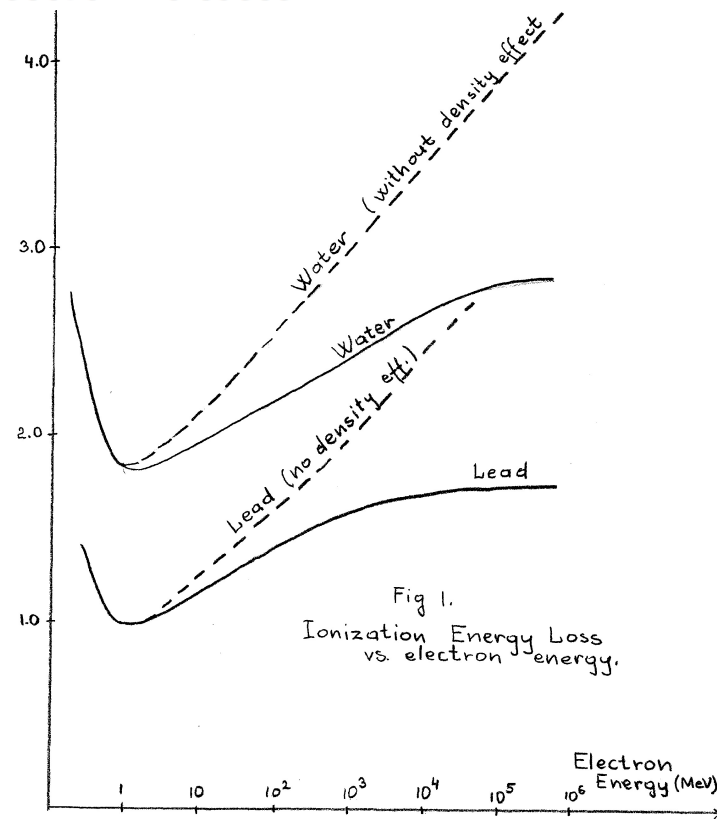


effetto densita'

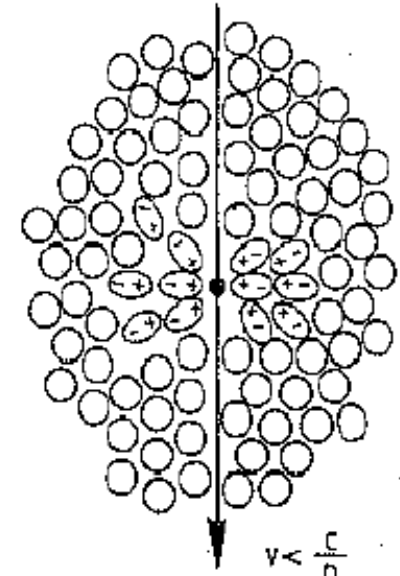
High energy particle: transversal electric field increases due to Lorentz transform; $E_y \rightarrow \gamma E_y$. Thus interaction cross section increases ...



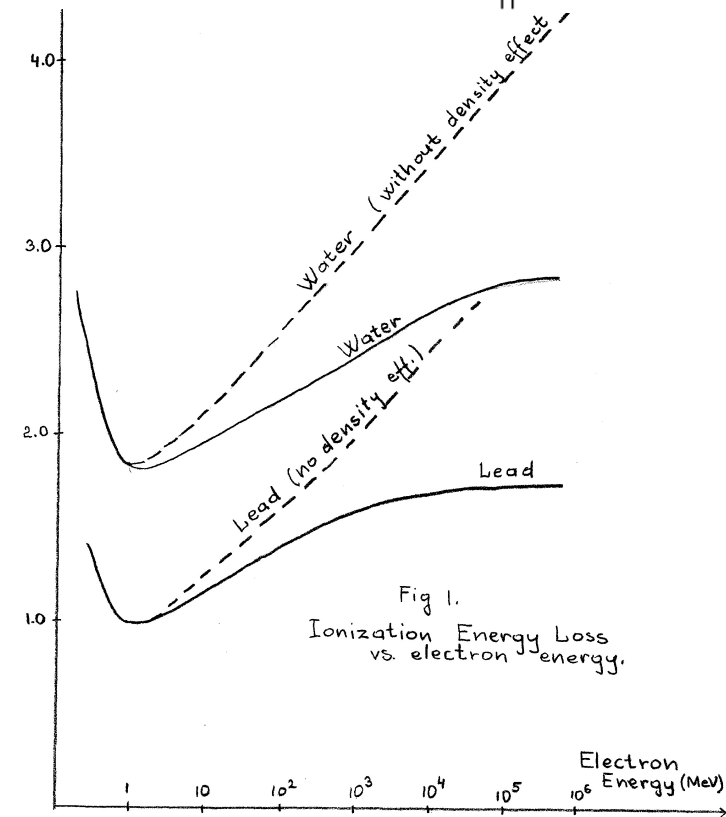
- per part relativistiche, la dE/dX tende al cosiddetto plateau di Fermi, mentre la BB prevede che dE/dX cresca
- Per part incidenti ad alta E viene meno una delle ipotesi (sottintese) fatte per la BB, cioè che fosse possibile calcolare l'effetto dei campi elm della part incidente su ciascun e- di ciascun atomo e quindi sommare in modo incoerente le E cedute a tutti gli e- di tutti gli atomi per i quali $b_{\min} < b < b_{\max}$



Effetto densita'

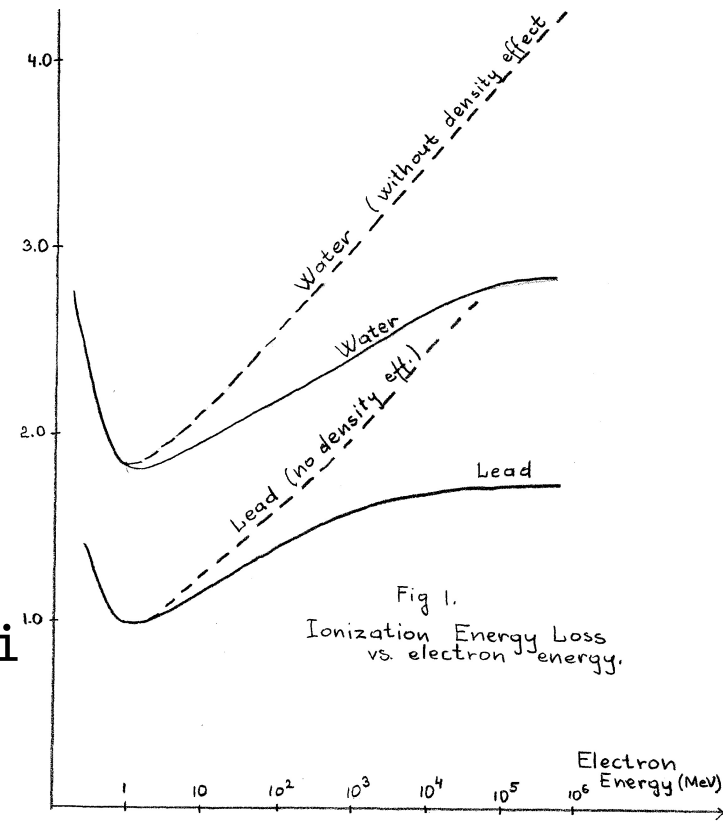


- Ora $b_{\max} = \pi v \gamma / \omega_0 \gg R_{\text{atomo}}$, specie quando $\gamma \gg 1$
- Percio' in un mezzo denso ci saranno molti atomi interposti fra la part incidente e l'atomo preso in considerazione, per $b \sim b_{\max}$
- Questi atomi, perturbati dai campi della part incidente, produrranno campi perturbanti nella posizione occupata dall'atomo, modificando la risposta ai campi della part veloce
- In altre parole, nei mezzi densi la polarizzazione dielettrica del materiale altera i campi della particella veloce rispetto al valore che avrebbero nello spazio vuoto ai valori caratteristici dei campi macroscopici entro un dielettrico



Effetto densita'

- Nel calcolo delle energia trasferite negli urti lontani ($b \gg R_{\text{atomo}}$) occorre tenere conto di tali modificazioni, dovute alla polarizzazione del mezzo: negli urti stretti ($b \ll R_{\text{atomo}}$) la particella interagisce soltanto con atomo alla volta e si puo' usare l'approssimazione di e- liberi, senza polarizzazione
- Per urti lontani assumiamo che i campi nel mezzo si possano calcolare nell'approx del continuo, nella quale le proprieta' dielettriche si possono descrivere mediante una costante dielettrica $\epsilon(\omega)$
- Calcolo complicato (gli entusiasti dei conti lo possono trovare in "Elettrodinamica classica", Jackson, 2° edition, cap. 13)



NB: la polarizzazione si oppone al campo perturbante, cioe' lo diminuisce

Correzioni di densita'

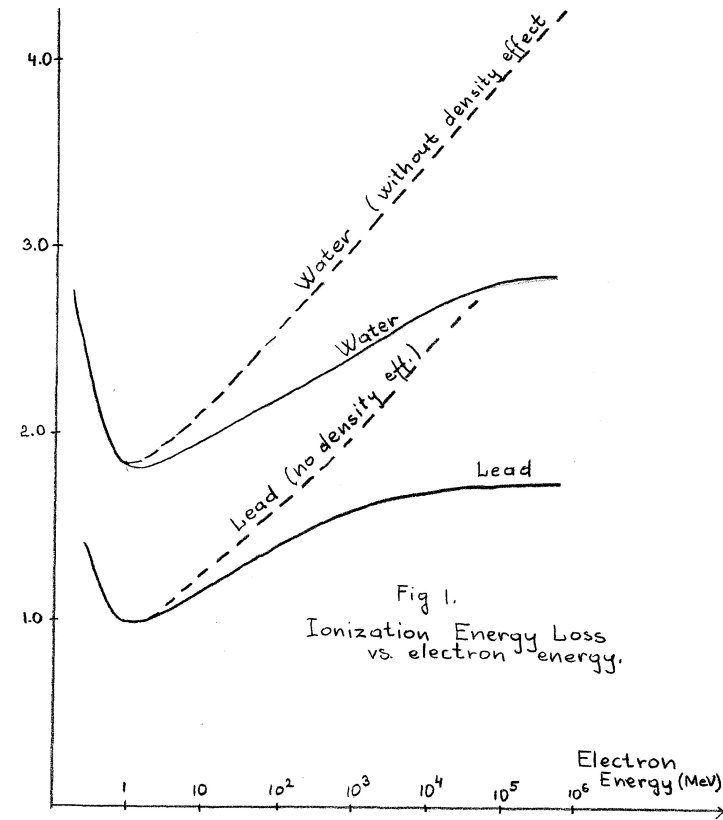
Fermi ha calcolato le perdite di energia dovute a urti lontani per particelle ultrarelativistiche ($\beta \approx 1$)

$$\left(\frac{dE}{dX}\right)_{b>a} = \frac{(ze)^2 \omega_p^2}{c^2} \ln\left(\frac{1.123c}{a\omega_p}\right)$$

con $\omega_p = (4\pi NZe^2/m)^{1/2}$ frequenza di plasma elettronico con N = densita' degli e- e a = raggio atomico

senza le correzioni di densita' si avrebbe

$$\left(\frac{dE}{dX}\right)_{b>a} = \frac{(ze)^2 \omega_p^2}{c^2} \ln\left(\frac{1.123\gamma c}{a\langle\omega\rangle}\right)$$



- ❑ La perdita di energia non dipende piu' dai dettagli della struttura atomica attraverso $\langle\omega\rangle = 2\langle I\rangle/h$, ma solo dalla densita' di elettroni.
- ❑ Nel limite ultrarelativistico diventa costante.
- ❑ Due materiali con strutture atomiche molto diverse avranno la stessa perdita di energia per particelle ultrarelativistiche se le loro densita' sono tali che la densita' di elettroni e' la stessa.

Correzioni di densita'

Per mantenere la forma della bethe bloch, calcolata senza l'effetto di schermo, ed eliminare il raggio atomico a , si parametrizza l'effetto della polarizzazione con un parametro δ che e' pari alla differenza tra la perdita di energia calcolata con effetto di polarizzazione e quello che si ha senza la polarizzazione
 $\delta/2 = (dE/dX)_{pol} - (dE/dX)_{nopol}$ cosi' che nel limite di alte energie

$$\delta/2 \rightarrow \ln(\hbar\omega/I) + \ln \beta\gamma - 1/2$$

$\beta \approx 1$

E La perdita di energia diventa

$$-\frac{dE}{dx} = \rho K z^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\ln \frac{2mc^2 \beta^2 \gamma^2}{I} - \beta^2 - \frac{\delta(\gamma)}{2} \right]$$

NB: la forma di δ e' complicata. Solo nel limite asintotico di $\beta\gamma \gg 1$ assume questa forma semplice.

Nella pratica si usano formule parametriche con costanti che dipendono dal materiale (es. formula di Sternheimer)

Con queste correzioni si vede subito che ad alti $\beta\gamma$ dE/dX cresce come $\ln(\beta\gamma/\hbar\omega_p)$ piuttosto che come $\ln((\beta\gamma)^2/I)$ (ie risalita relativistica) $\rightarrow$ Dato che ω_p dipende da $N_e^{1/2}$, materiali con la stessa densita' di e- hanno la stessa perdita indipendentemente dal potenziale di ionizzazione.

Dato che $N_e = \rho N_A (Z/A)$, la risalita e' piu' rapida per materiali meno densi, p. es. gas rispetto a liquidi e solidi e da cui il nome "effetto densita'"

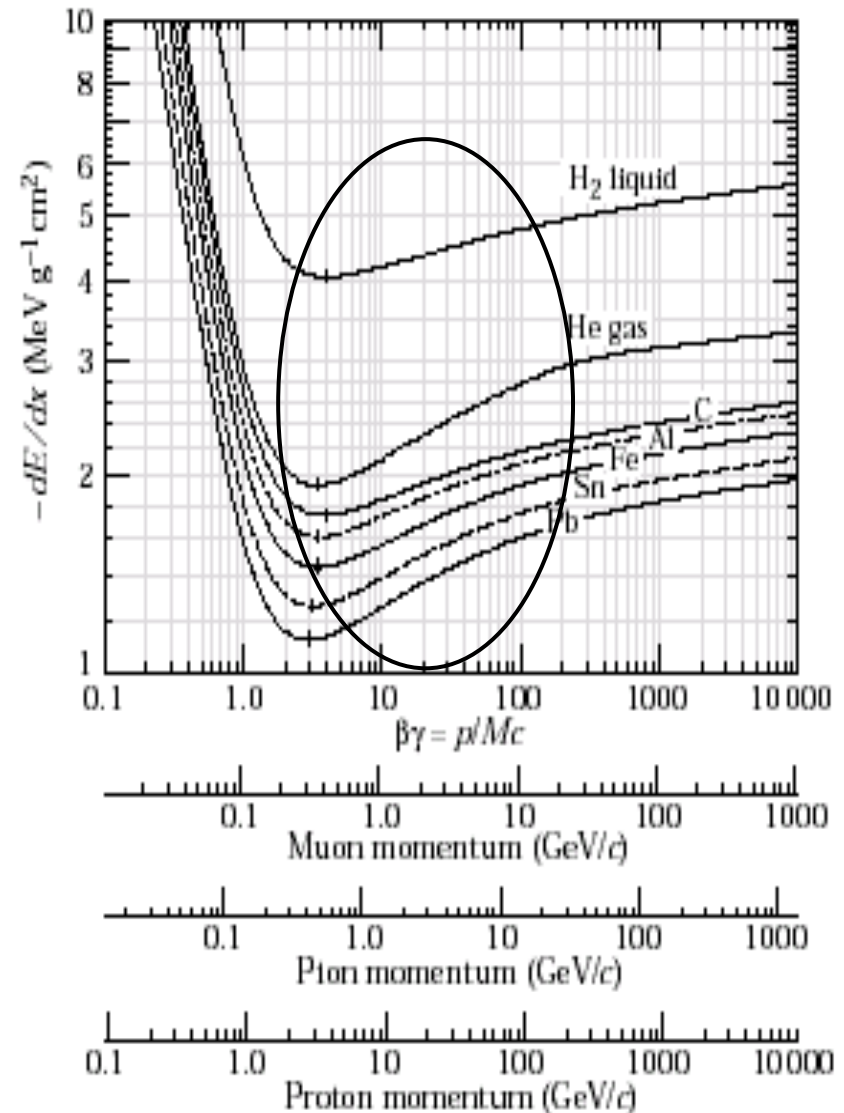
Bethe Bloch: effetto densita'

$$-\frac{dE}{dx} = \rho K Z^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\ln \frac{2mc^2 \beta^2 \gamma^2}{I} - \beta^2 - \frac{\delta(\gamma)}{2} \right]$$

La salita relativistica satura crescendo $\gamma \rightarrow$ **plateau di Fermi**.

Più denso è il mezzo tanto prima si raggiunge il plateau di Fermi $\rightarrow$ la salita relativistica è più importante nei gas che nei liquidi e nei solidi.

Funziona fino al % per particelle fino al nucleo di α per β 0.1 - 1.0. Per basse velocità ($\beta \sim 0.05$) non è più valida in quanto non sono più valide molte delle assunzioni di Bethe Block (ie non posso più trascurare l'energia di legame degli e-).



Bethe Bloch: effetto densita'-formule pratiche

Nella pratica δ viene tabulato in funzione di $\beta\gamma$ per differenti materiali

$$-\frac{dE}{dx} = \rho K z^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\ln \frac{2mc^2 \beta^2 \gamma^2}{I} - \beta^2 - \frac{\delta(\gamma)}{2} \right]$$

Al plateau di Fermi,

- $(dE/dX)_{\text{plateau}} \approx 1.05-1.1 (dE/dX)_{\text{MIP}}$ per i solidi
- $(dE/dX)_{\text{plateau}} \approx 1.5-1.1 (dE/dX)_{\text{MIP}}$ per i gas

$$\delta = \begin{cases} 0 & X < X_0 \\ 4.0652X + C + a(X_1 - X)^m & X_0 < X < X_1 \\ 4.0652X + C & X > X_1 \end{cases}$$

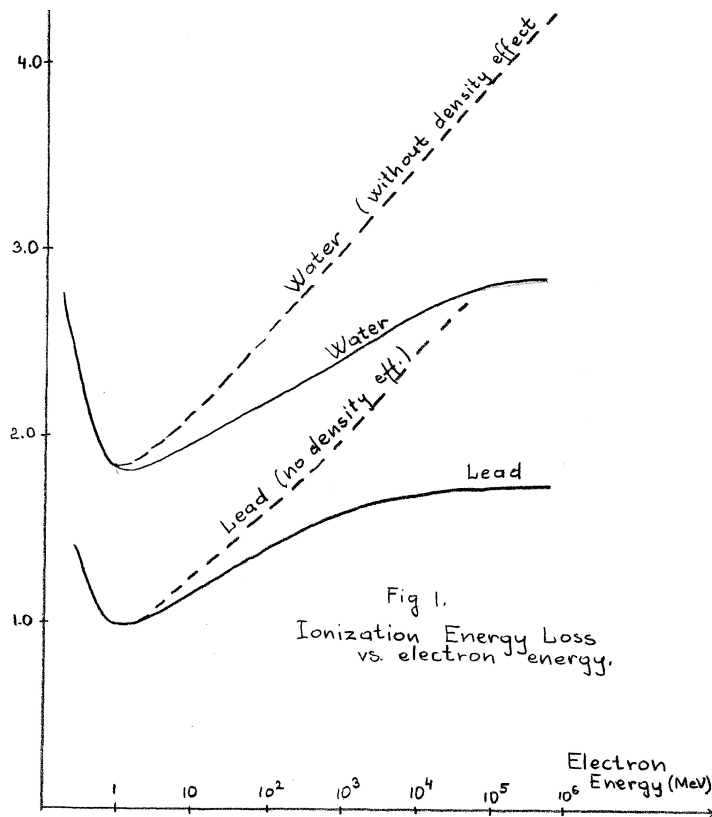


Table 2.1. Constants for the density effect correction

$X = \ln(\beta\gamma)$

Material	I [eV]	$-C$	a	m	X_1	X_0
Graphite density = 2	78	2.99	0.2024	3.00	2.486	-0.0351
Mg	156	4.53	0.0816	3.62	3.07	0.1499
Cu	322	4.42	0.1434	2.90	3.28	-0.0254
Al	166	4.24	0.0802	3.63	3.01	0.1708
Fe	286	4.29	0.1468	2.96	3.15	-0.0012
Au	790	5.57	0.0976	3.11	3.70	0.2021
Pb	823	6.20	0.0936	3.16	3.81	0.3776
Si	173	4.44	0.1492	3.25	2.87	0.2014
NaI	452	6.06	0.1252	3.04	3.59	0.1203
N ₂	82	10.5	0.1534	3.21	4.13	1.738
O ₂	95	10.7	0.1178	3.29	4.32	1.754
H ₂ O	75	3.50	0.0911	3.48	2.80	0.2400
Lucite	74	3.30	0.1143	3.38	2.67	0.1824
Air	85.7	10.6	0.1091	3.40	4.28	1.742
BGO	534	5.74	0.0957	3.08	3.78	0.0456
Plastic Scint.	64.7	3.20	0.1610	3.24	2.49	0.1464

Bethe Bloch Formula

■ Bethe-Bloch law for “stopping power”:

NB: it has a slightly different but equivalent form

$$-\frac{dE}{dX} = 4\pi N_A r_e^2 m_e c^2 z^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{2m_e c^2 \gamma^2 \beta^2 T_{\max}}{I^2} - \beta^2 - \frac{\delta}{2} \right] \text{Units: MeV g}^{-1} \text{ cm}^2$$

■ Where:

constant $4\pi N_A r_e^2 m_e c^2 = 0.31 \text{ MeV g}^{-1} \text{ cm}^2$

■ $X = \rho x$, where ρ is the density of the absorber material

■ $N_A =$ Avagadro no.

■ $r_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e c^2} = \text{classical electron radius} = 2.82 \times 10^{-13} \text{ cm}$

■ $z =$ charge of incident particle in units of e

■ $Z, A =$ atomic no. and atomic weight of the absorber

■ $T_{\max} =$ maximum kinetic energy which can be imparted to a free electron in a single collision. For heavy particles ($m \gg m_e$), $T_{\max} = 2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2$

Ionizzazione: tempo scala

Se mettiamo dentro i numeri otteniamo

$$-\frac{dE}{dt} \approx 7.64 \times 10^{-15} N (3 \ln \gamma + 19.8) [eV s^{-1}]$$

NB: $\gamma = E_{\text{cin}}/mc^2 + 1 \rightarrow$ le perdite per ionizz dipendono debolmente da E

Un e- perde tutta la sua energia per ionizzazione in un tempo scala

$$\tau \sim \frac{E}{(dE/dt)_i}$$

cioe' $\tau \sim \frac{E}{7.64 \times 10^{-15} N (3 \ln \gamma + 19.8)} \quad [s]$

Per esempio, un e⁻ di 3 GeV ($\gamma \approx 6000$), perde tutta la sua energia in $3 \times 10^{14}/N$ anni

Assumendo $N \approx 10^6$ protoni m⁻³, $\tau \approx 10^8$ anni

Emissione di radiazione (richiamo)

Larmor (3): potenza totale

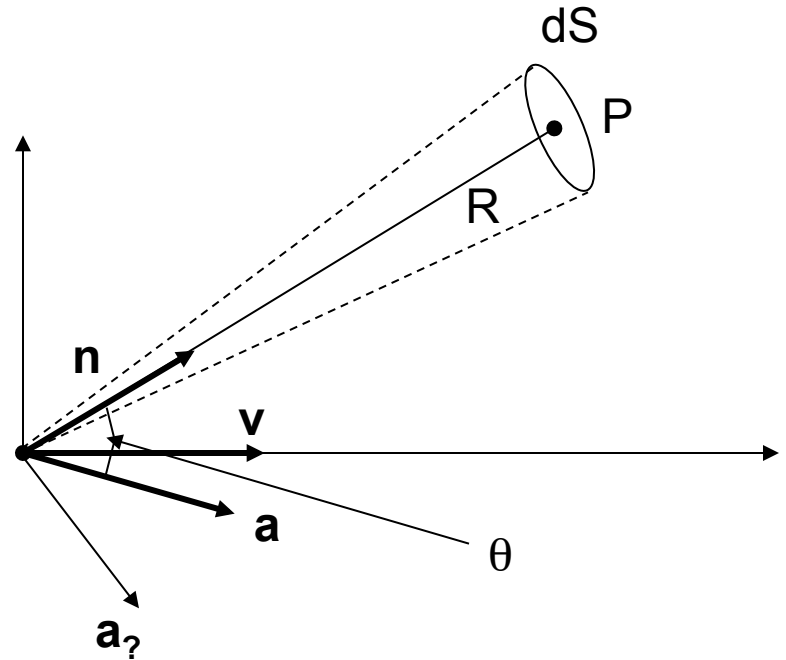
La potenza totale emessa si ottiene integrando sull'angolo solido $\frac{dE}{dt} = \int \frac{dP}{d\Omega} d\Omega$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q^2}{4\pi c^3} a^2 \int \sin^2 \theta d\Omega = \frac{q^2}{4\pi c^3} a^2 \int_{-1}^{+1} (1 - \cos^2 \theta) 2\pi d(\cos \theta)$$

$$= \frac{q^2}{4\pi c^3} a^2 2\pi (4/3) = \frac{2q^2}{3c^3} a^2$$

Formula di Larmor per la potenza emessa da una carica accelerata in moto non relativistico.

E' valida in tutti i casi in cui $\mathbf{v} \ll \mathbf{c}$



Generalizz. relativistica

Per ottenere la generalizzazione relativistica, potremmo prendere i campi nel caso generale e applicare la formula per la potenza

Ma e' piu' facile ed elegante usare le trasformazioni relativistiche per trovare la potenza emessa da un particella in moto relativistico

L'idea e' di lavorare nel sistema di quiete istantanea della particella, in cui $\beta=0$. La particella non rimane ferma in tale riferimento poiche' puo' accelerare, ma almeno per intervalli di tempo infinitesimi intorno a t essa si muove a velocita' non relativistiche e quindi si puo' applicare la formula di Larmor classica

Generalizz. relat.

Supponiamo che nel rif. di quiete istant. K' la particella emetta un'energia dE' in un tempo $d\tau$

Se l'emissione e' isotropa nel riferimento di quiete, l'impulso della radiazione emessa e' $d\mathbf{p}'=0$, poiche' l'emissione e' simmetrica rispetto ad una qualsiasi direzione e a quella opposta (e' l'impulso ist. della particella che e' sempre nullo, NON quello della radiazione) e lo spostamento della particella e' $d\mathbf{x}'=0$ perche' $\beta_{\text{ist}}=0$

Nel "laboratorio", che si muove a velocita' $-\mathbf{v}$ rispetto alla particella (i.e. visto dal riferimento di quiete della particella), si ha per la radiazione emessa

$$dt = \gamma(d\tau + \beta dx'/c) = \gamma d\tau$$

$$\frac{dE}{c} = \gamma\left(\frac{dE'}{c} + \beta dp'_x\right) = \gamma \frac{dE'}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{dE'}{dt'} = \frac{dE}{dt}$$

La potenza totale emessa e' un invariante relativistico per ogni emettitore con simmetria backward-forward nel suo rif. di quiete istantaneo

Nel caso di un riferimento in moto con velocita' β rispetto a quello in cui la particella si muove con velocita' β_p

$$\frac{dE'}{c} = \gamma\left(\frac{dE}{c} - \beta dp_x\right)$$

$$dt' = \gamma(dt - \beta dx/c)$$

ma

$$dx = c\beta_p dt$$

$$dp_x = \beta_p dE/c$$

perche' si tratta di "fotoni"

$$\left. \begin{aligned} \frac{dE'}{c} &= \gamma\left(\frac{dE}{c} - \beta\beta_p dE/c\right) = \gamma \frac{dE}{c} (1 - \beta\beta_p) \\ dt' &= \gamma(dt - \beta\beta_p dt) = \gamma dt (1 - \beta\beta_p) \end{aligned} \right\}$$



$$\frac{dE'}{dt'} = \frac{dE}{dt}$$

Generalizz. Relativ.

Nel sist di quiete la potenza e' $\frac{dE}{dt} = \frac{2q^2}{3c^3} |\vec{a}|^2$

La 4-vel. della particella e' $v_\mu = (c\gamma, \gamma\mathbf{v})$, cosi' in K' $v'_\mu = (c, 0)$ e quindi il modulo e' $v_\mu^2 = c^2$

$$\longrightarrow \frac{dv_\mu^2}{d\tau} = 0 \quad \longrightarrow \quad v^\mu \frac{dv_\mu}{d\tau} = 0 \quad \longrightarrow \quad v^\mu a_\mu = 0 \quad (\text{somma sottintesa})$$

Nello spazio-tempo 4-velocita' e 4-accelerazione sono sempre "perpendicolari"

Da questa condizione applicata nel riferimento K' di quiete istantanea si ha

$$ca'_0 = 0 \quad \longrightarrow \quad a'_0 = 0 \quad \text{Percio' in } K' \quad a^\mu a_\mu = |\vec{a}'|^2$$

Cosi' possiamo scrivere la potenza in forma manifestamente covariante in K' e generalizzare ad ogni riferimento

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2q^2}{3c^3} a^\mu a_\mu$$

Generalizz. relat.

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2q^2}{3c^3} a^2 \quad \text{Puo' essere generalizzata al caso relativistico sostituendo ad } a \text{ la 4-accelerazione } \mathbf{a}_\mu \quad a \rightarrow \frac{1}{m} \frac{dp_\mu}{d\tau}$$

Con $\mathbf{p}_\mu = (E/c, \mathbf{p}) = (mc\gamma, m\gamma\mathbf{v})$ e $d\tau = dt/\gamma$ tempo proprio della particella

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2q^2}{3m^2c^3} \frac{dp_\mu}{d\tau} \frac{dp^\mu}{d\tau} = -\frac{2q^2}{3c^3} \frac{dv_\mu}{d\tau} \frac{dv^\mu}{d\tau}$$

Calcolo la derivata in τ $\frac{dv_\mu}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}(\gamma c, \gamma \vec{v}) \quad \frac{dv_\mu}{d\tau} = \gamma \left(c \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \vec{v} + \gamma \frac{d\vec{v}}{dt} \right)$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - (\vec{v} \cdot \vec{v} / c^2)}} = \gamma^3 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2}$$

$$\frac{dv_\mu}{d\tau} = \left(c\gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2}, \gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{v} + \gamma^2 \vec{a} \right)$$

E' la 4-accelerazione della particella in un riferimento generico

Larmor (5)

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2q^2}{3c^3} \frac{dv_\mu}{d\tau} \frac{dv^\mu}{d\tau}$$

$$\frac{dv_\mu}{d\tau} = (c\gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2}, \gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{v} + \gamma^2 \vec{a})$$

$$\begin{aligned} a_\mu a^\mu &= a_o^2 - \vec{a}^2 = (c\gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2})^2 - [\gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{v} + \gamma^2 \vec{a}]^2 = (c\gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2})^2 - [\gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{v} + \gamma^2 \vec{a}]^2 \\ &= c^2 \gamma^8 (\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2})^2 - \gamma^8 (\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2})^2 \vec{v}^2 \frac{c^2}{c^2} - 2\gamma^6 (\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2}) (\vec{v} \cdot \vec{a}) - \gamma^4 \vec{a}^2 \\ &= c^2 \gamma^8 (\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2})^2 (1 - \frac{v^2}{c^2}) - 2\gamma^6 (\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2}) (\vec{v} \cdot \vec{a}) - \gamma^4 \vec{a}^2 \\ &= c^2 \gamma^8 (\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2})^2 \frac{1}{\gamma^2} - 2\gamma^6 (\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2}) (\vec{v} \cdot \vec{a}) \frac{c^2}{c^2} - \gamma^4 \vec{a}^2 \\ &= -c^2 \gamma^6 (\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2}) (\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2}) - \gamma^4 \vec{a}^2 = -\gamma^6 \frac{(\vec{v} \cdot \vec{a})^2}{c^2} - \gamma^4 \vec{a}^2 = -\gamma^4 [\gamma^2 \frac{(\vec{v} \cdot \vec{a})^2}{c^2} + \vec{a}^2] \end{aligned}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2q^2}{3c^3} \gamma^4 [\gamma^2 \frac{(\vec{v} \cdot \vec{a})^2}{c^2} + \vec{a}^2]$$

E' la formula di Larmor relativistica per la
potenza totale emessa

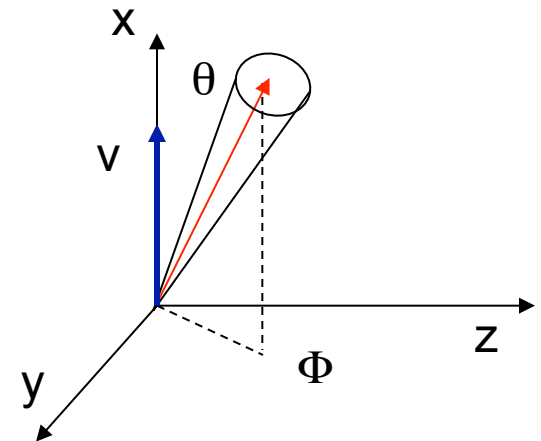
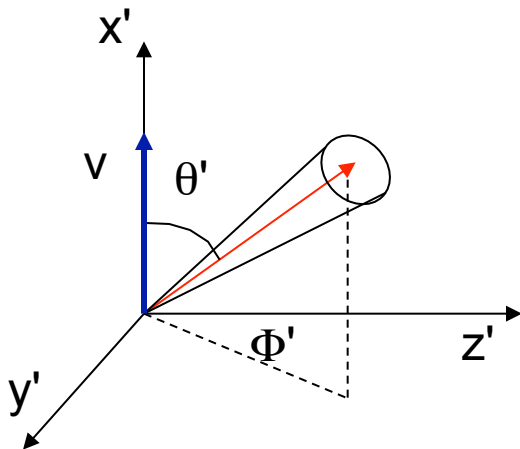
Distr. Angolare

La distribuzione angolare della potenza emessa si può ottenere a partire da quella nel rif. K' di quiete istantanea utilizzando le proprietà di trasformazione relativistiche delle direzioni

Consideriamo in K' l'emissione di un'energia dE' in un angolo solido $d\Omega' = \sin\theta' d\theta' d\Phi' = d\cos\theta' d\Phi' = d\mu' d\Phi'$ con $\mu' = \cos\theta'$, intorno a θ' , angolo con l'asse x' , diretto come la velocità della particella nel sistema K del labo

Nel laboratorio l'energia è emessa dE e emessa in un angolo solido $d\Omega = d\mu d\Phi$

Nota la distribuzione in K' possiamo calcolare la distribuzione in K , conoscendo le proprietà di trasformazione dell'energia e dell'angolo solido



Distr. Angolare

L'energia emessa (i.e. i fotoni) trasforma come la comp. temp. del 4-impulso $p_\mu = (E/c, \mathbf{p})$

$$dE/c = \gamma(dE'/c + \beta dp'_x) \quad (\text{il segno + compare perche' il labo si muove con vel } -v \text{ rispetto alla particella})$$

Nel caso della rad elm $dE'/c = dp'$ $dp'_x = \cos \theta' dp' = \mu' dp'$ (a)



$$dE = dE' \gamma(1 + \beta \mu')$$

Per l'angolo solido basta vedere come trasformano le direzioni

La quantita' di moto dei fotoni trasforma come

$$(b) \begin{cases} dp_z = dp'_z \\ dp_y = dp'_y \end{cases}$$

$$(c) dp_x = \gamma(dp'_x + \beta dE'/c)$$

Da (b) segue che $d\Phi' = d\Phi$

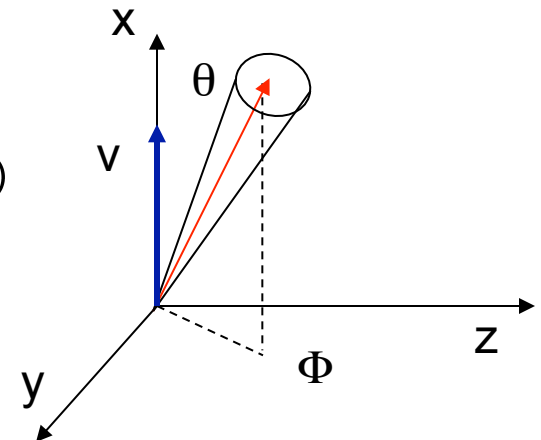
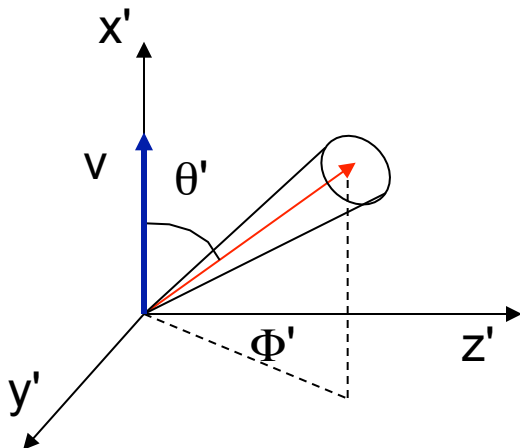
Sostituendo (a) in (c) $\mu dp = \gamma(\mu' + \beta) dp'$

$$\mu = \gamma(\mu' + \beta)(dp'/dp)$$

$$dp'/dp = dE'/dE = 1/\gamma(1 + \beta \mu')$$

$$\mu = (\mu' + \beta)/(1 + \beta \mu')$$

E' l'aberrazione relativistica delle direzioni



Distr. Angolare

$$dE = dE' \gamma (1 + \beta \mu')$$

$$\mu = (\mu' + \beta) / (1 + \beta \mu')$$

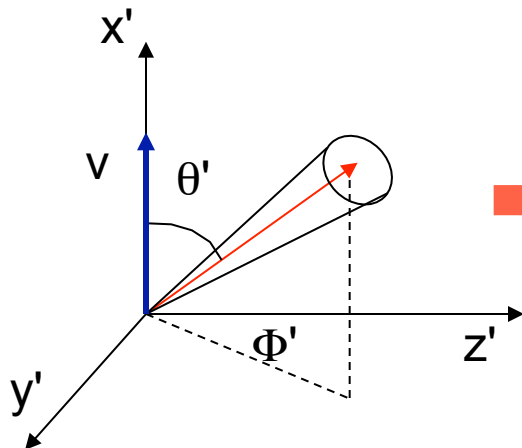
Calcolo $d\Omega = d\mu d\Phi$

$$d\mu = [(1 + \beta \mu' - \beta \mu' - \beta^2) / (1 + \beta \mu')^2] d\mu'$$

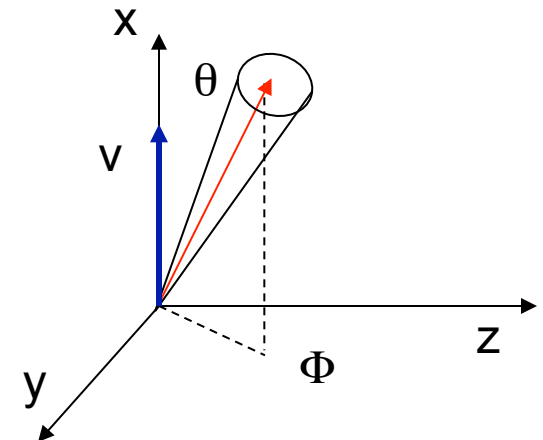
$$= [(1 - \beta^2) / (1 + \beta \mu')^2] d\mu' = \frac{d\mu'}{\gamma^2 (1 + \beta \mu')^2}$$

$$d\Phi = d\Phi'$$

➔ $d\Omega = d\mu d\Phi = \frac{d\mu' d\Phi'}{\gamma^2 (1 + \beta \mu')^2} = \frac{d\Omega'}{\gamma^2 (1 + \beta \mu')^2}$



$$\frac{dE}{d\Omega} = \gamma^3 (1 + \beta \mu')^3 \frac{dE'}{d\Omega'}$$



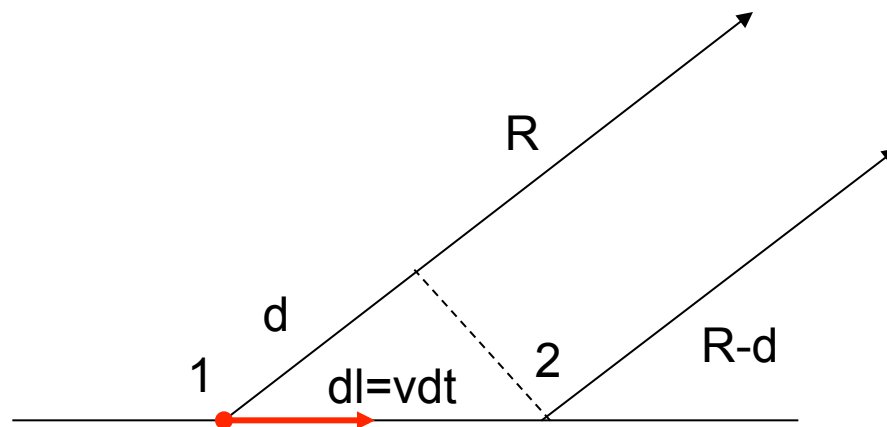
Distr. Angolare

$$\frac{dE}{d\Omega} = \gamma^3 (1 + \beta \mu')^3 \frac{dE'}{d\Omega'}$$

Per ottenere la distribuzione angolare della potenza occorre calcolare la relazione fra la durata dt' e dt dell'emissione in K' e K

Supponiamo che ci sia un osservatore stazionario in K posto a grande distanza così che la direzione della radiazione emessa sia costante

La particella in K comincia ad emettere in 1 e cessa in 2, qual'è la durata dell'emissione misurata dall'osservatore distante in K ?



$$\frac{dE}{d\Omega} = \gamma^3 (1 + \beta\mu')^3 \frac{dE'}{d\Omega'}$$

Distr. Angolare

L'osserv. comincia a ricevere la radiazione a $t_1 = R/c + t$ dall'inizio dell' emissione

Nel tempo dt la particella viaggia una distanza $l = vdt$

→ la radiazione emessa a $t+dt$ deve percorrere una distanza $R-d$

→ viene ricevuta dopo un tempo $t_2 = t + dt + (R-d)/c$

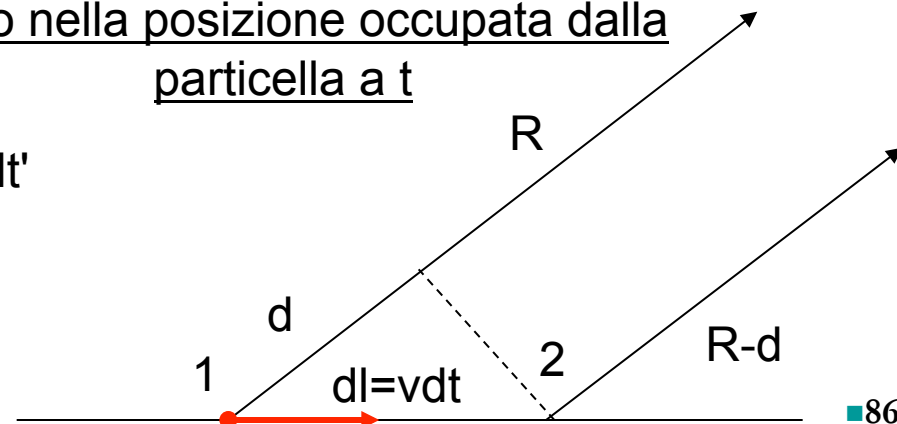
La durata misurata dall'osservatore distante e' quindi $dt_o = t_2 - t_1$

$$= t + dt + (R - d)/c - R/c - t = dt - d/c \quad \text{ma } d = dl \cos \theta = vdt \cos \theta$$

➡ $dt_o = dt[1 - (v/c) \cos \theta]$ dt e' l'intervallo misurato da un orologio in K
posto nella posizione occupata dalla
particella a t

→ la relazione con il tempo proprio della
particella (i.e. quello misurato in K') e' $dt = \gamma dt'$

$$dt_o = \gamma[1 - (v/c) \cos \theta] dt' = \gamma(1 - \beta\mu) dt'$$



$$\frac{dE}{d\Omega} = \gamma^3(1 + \beta\mu')^3 \frac{dE'}{d\Omega'}$$

Distr. Angolare

$$dt_o = \gamma(1 - \beta\mu)dt'$$

L'inversa e' semplicemente (le trasf di Lorentz sono reciproche)

$$dt' = \gamma(1 + \beta\mu')dt_o$$

Per ottenere la potenza bisogna derivare rispetto al tempo misurato in K da O

$$\frac{d}{dt_o} \frac{dE}{d\Omega} = \frac{d}{dt_o} \left[\gamma^3(1 + \beta\mu')^3 \frac{dE'}{d\Omega'} \right] = \gamma^3(1 + \beta\mu')^3 \left(\frac{dt'}{dt_o} \right) \frac{d}{dt'} \frac{dE'}{d\Omega'} = \gamma^4(1 + \beta\mu')^4 \frac{d}{dt'} \frac{dE'}{d\Omega'}$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \gamma^4(1 + \beta\mu')^4 \frac{dP'}{d\Omega'}$$

Per esprimere tutto in funzione delle quantita' misurate in K (i.e. Labo) basta considerare le trasformazioni inverse

$$\frac{dP'}{d\Omega'} = \gamma^4(1 - \beta\mu)^4 \frac{dP}{d\Omega}$$

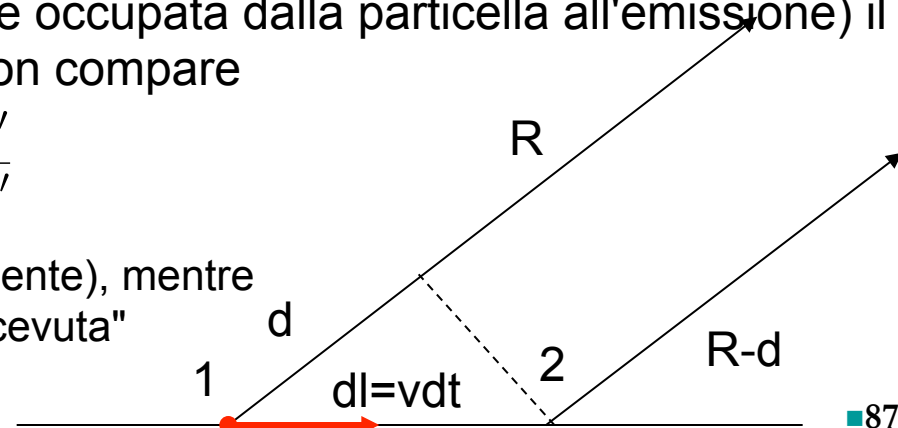


$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{\gamma^4(1 - \beta\mu)^4} \frac{dP'}{d\Omega'}$$

Se l'osservatore e' "vicino" (ie nella posizione occupata dalla particella all'emissione) il fattore di ritardo dovuto alla propagazione non compare

$$dt_o = \gamma dt' \quad \longrightarrow \quad \frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{\gamma^4(1 - \beta\mu)^3} \frac{dP'}{d\Omega'}$$

Si parla in tal caso di potenza "emessa" (alla sorgente), mentre nel caso precedente si parla di potenza "ricevuta" dall'osservatore distante



Distr. Angolare

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{\gamma^4(1 - \beta\mu)^4} \frac{dP'}{d\Omega'}$$

Se la radiazione e' isotropa in K', la distribuzione angolare nel labo e' fortemente piccata in avanti per particelle relativistiche ($\beta \sim 1$) a causa del fattore al denom.

Infatti $\gamma^2 = \frac{1}{(1 - \beta)(1 + \beta)} \approx \frac{1}{2(1 - \beta)}$ perche' $1 + \beta \approx 2$ se $\beta \sim 1$

 $\beta \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$

Per piccoli angoli $\mu = \cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$$\frac{1}{\gamma^4(1 - \beta\mu)^4} \approx \frac{1}{\gamma^4[1 - (1 - 1/2\gamma^2)(1 - \theta^2/2)]^4} = \frac{1}{\gamma^4[\theta^2/\gamma^2 - \theta^2/2 - 1/2\gamma^2]^4}$$

$$= \frac{1}{\gamma^4[(2\theta^2 - \theta^2\gamma^2 - 1)/2\gamma^2]^4} \approx \frac{2\gamma^4}{[(\theta^2\gamma^2 + 1)]^4}$$

Il fattore e' fortemente piccato a $\theta \sim 0$, con una scala angolare $\sim 1/\gamma$

Distr. Angolare

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{\gamma^4(1 - \beta\mu)^4} \frac{dP'}{d\Omega'}$$

Nel sistema di quiete ist. K' , la potenza emessa e' quella di Larmor

$$\frac{dP'}{d\Omega'} = \frac{q^2}{4\pi c^3} |\vec{a}'|^2 \sin^2 \Theta'$$

Bisogna esprimere solo a' e Θ' in funzione di quantita' misurate nel labo

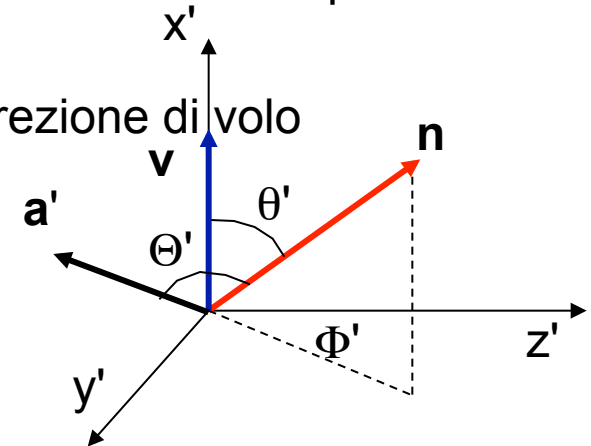
Scrivo l'accel. a in termini di componente perp e par alla direzione di volo

$$|\vec{a}'|^2 = |\vec{a}'_{\parallel}|^2 + |\vec{a}'_{\perp}|^2$$

La relazione fra le componenti di a' ed a e'

$$|\vec{a}'_{\parallel}| = \gamma^3 |\vec{a}_{\parallel}| \quad |\vec{a}'_{\perp}| = \gamma^2 |\vec{a}_{\perp}|$$

come conseguenza delle trasf di Lorentz



$$|\vec{a}'|^2 = \gamma^6 |\vec{a}_{\parallel}|^2 + \gamma^4 |\vec{a}_{\perp}|^2$$