

Astrofisica dei Raggi Cosmici

Fenomenologia e modelli

Nicola Tomassetti

Referenze utili

M. Kachelriess, Lecture notes on high energy cosmic rays, <https://arxiv.org/abs/0801.4376>

H. Moraal, Cosmic-Ray Modulation Equations, 2013, Space Sci Rev DOI 10.1007/s11214-011-9819-3

M. S. Longair, High Energy Astrophysics, ISBN:9780521756181

Generalità

Grandezze che misuriamo direttamente, per ogni particella

- ✓ Energia totale E_t , energia cinetica per nucleone $E=T/n$, o rigidità $R=p/Z$
- ✓ Direzione di arrivo (ϑ, ϕ) , o in coordinate Galattiche (l, b)
- ✓ Massa e/o carica: M, Z

Proprietà che determiniamo statisticamente

- ✓ Distribuzione di energia dN/dE
- ✓ Distribuzione angolare $dN/d\Omega$
- ✓ Composizione chimica o isotopica

Due grandezze fisicamente importanti

Rigidità magnetica $R= pc/Ze$

- ✓ Governa accelerazione / trasporto
- ✓ Misurata direttamente negli spettrometri

Energia cinetica per nucleone

- ✓ Conservata nella frammentazione nucleare
- ✓ Misurata in molti rivelatori (TOF/RICH/TRD)

Grandezze base

Flusso differenziale $J(E) = \frac{dN}{dE d\Omega d\Sigma dt} \quad (m^{-2} s^{-1} GeV^{-1} sr^{-1})$

Flusso integrato $I = \frac{dN}{d\Omega d\Sigma dt} = \int_0^\infty J(E) dE \quad (m^{-2} s^{-1} sr^{-1})$

$$J(> E) = \int_E^\infty J(E') dE' \quad (m^{-2} s^{-1} sr^{-1})$$

Densità numerica $n(E) = \frac{dN}{dV} = \frac{4\pi}{\beta c} J(E) \quad (m^{-3})$

Phase-space density $dN = f(p, x) d^3x d^3p$
 $n(p) dp = 4\pi p^2 f(p, x) dp$

Rigidità ed energia cinetica per nucleone

Rigidità magnetica $R = pc/Ze$

- ✓ Governa accelerazione e trasporto diffusivo
- ✓ Misurata direttamente in spettrometri magnetici

$$R = \frac{A}{Z} \sqrt{E^2 + 2M_p E}$$

$$E = \sqrt{R^2 \left(\frac{Z}{A}\right)^2 + M_p^2} - M_p$$

$$J(R) = J(E) \frac{dE}{dR} = \beta(E) J(E(R))$$

Energia cinetica per nucleone E

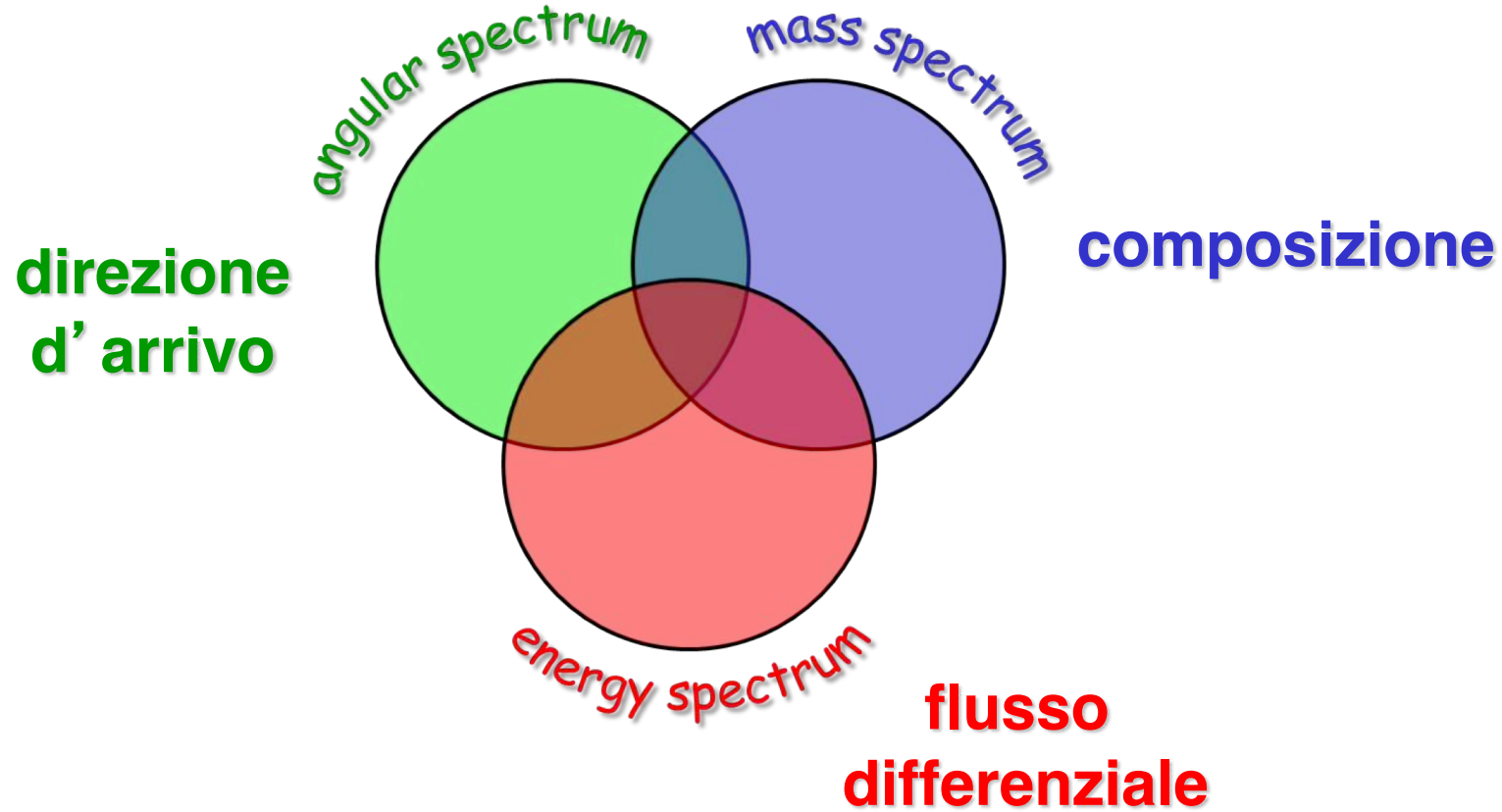
- ✓ Conservata nella frammentazione nucleare
- ✓ Misurata direttamente in rivelatori TOF/RICH/TRD

$$\frac{dE}{dR} = \frac{\left(\frac{Z}{A}\right)^2 R}{\sqrt{\left(\frac{Z}{A}\right)^2 R^2 + M_p^2}} = \beta(R)$$

$$\frac{dR}{dE} = \frac{M_p + E}{\sqrt{E^2 + 2M_p E}} = \frac{1}{\beta(E)}$$

$$J(E) = J(R) \frac{dR}{dE} = \frac{J(R(E))}{\beta(E)}$$

Tre osservabili fondamentali



Spettro Energetico

Flusso = #particelle / (tempo X energia X area X angolo solido)

$$J = \frac{dN}{dt \cdot dE \cdot dS \cdot d\Omega}$$

Energie >> GeV: Legge di potenza

$$J_{TOT}(E) \approx A \cdot E^{-\gamma}$$

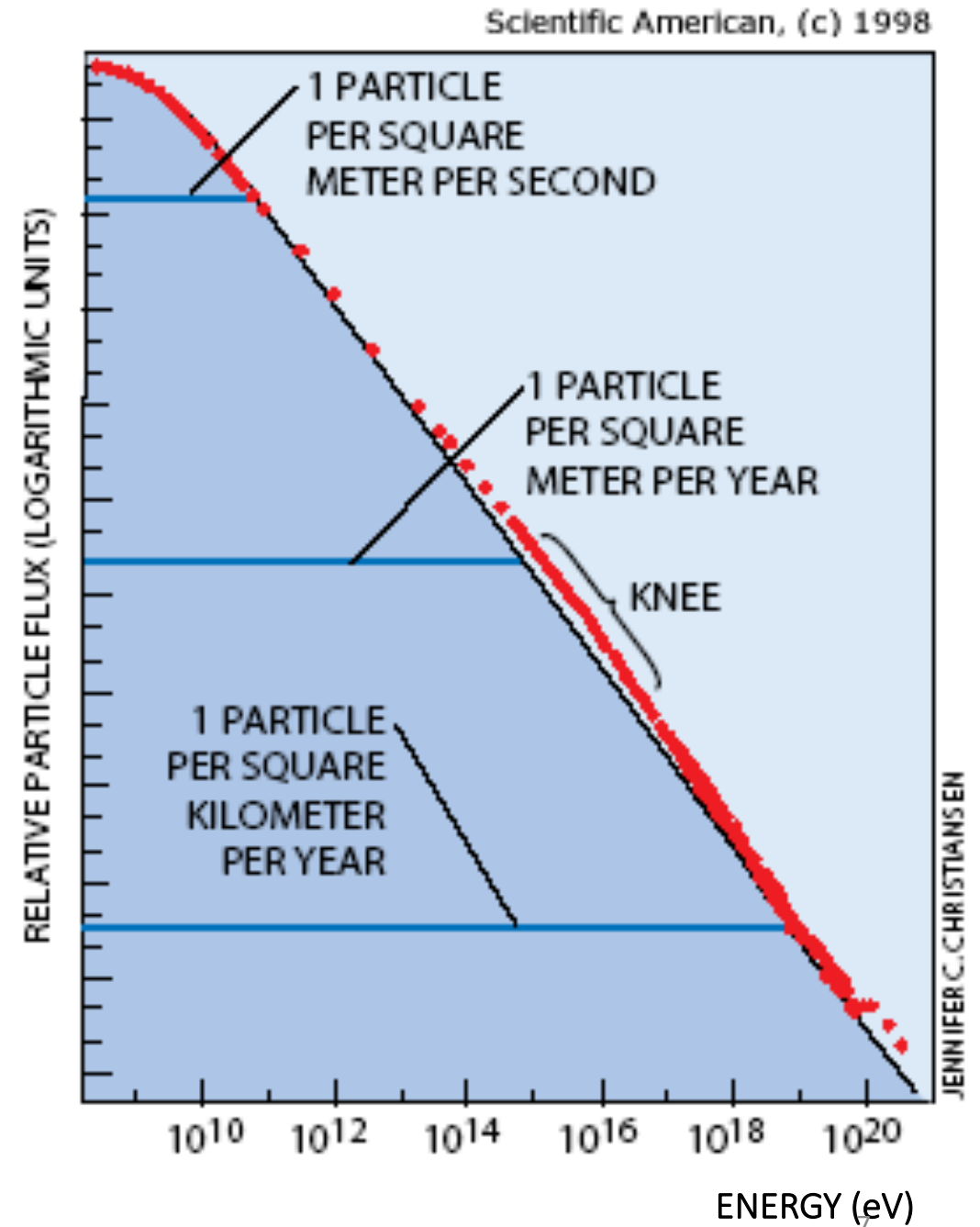
$$\gamma \approx 2.7$$

$$A \approx 2 \text{ (s GeV cm}^2 \text{ sr)}^{-1}$$

Basse energie –Modulato dal vento solare

Alte energie – Leggero cambio di indice spettrale

- ✓ Legge di potenza -> meccanismo NON termico -> E, B
- ✓ Intensità -> alta densità di energia eV/cm² -> CR galattici



Spettro Energetico

Flusso = #particelle / (tempo X energia X area X angolo solido)

$$J = \frac{dN}{dt \cdot dE \cdot dS \cdot d\Omega}$$

Energie >> GeV: Legge di potenza

$$J_{TOT}(E) \approx A \cdot E^{-\gamma}$$

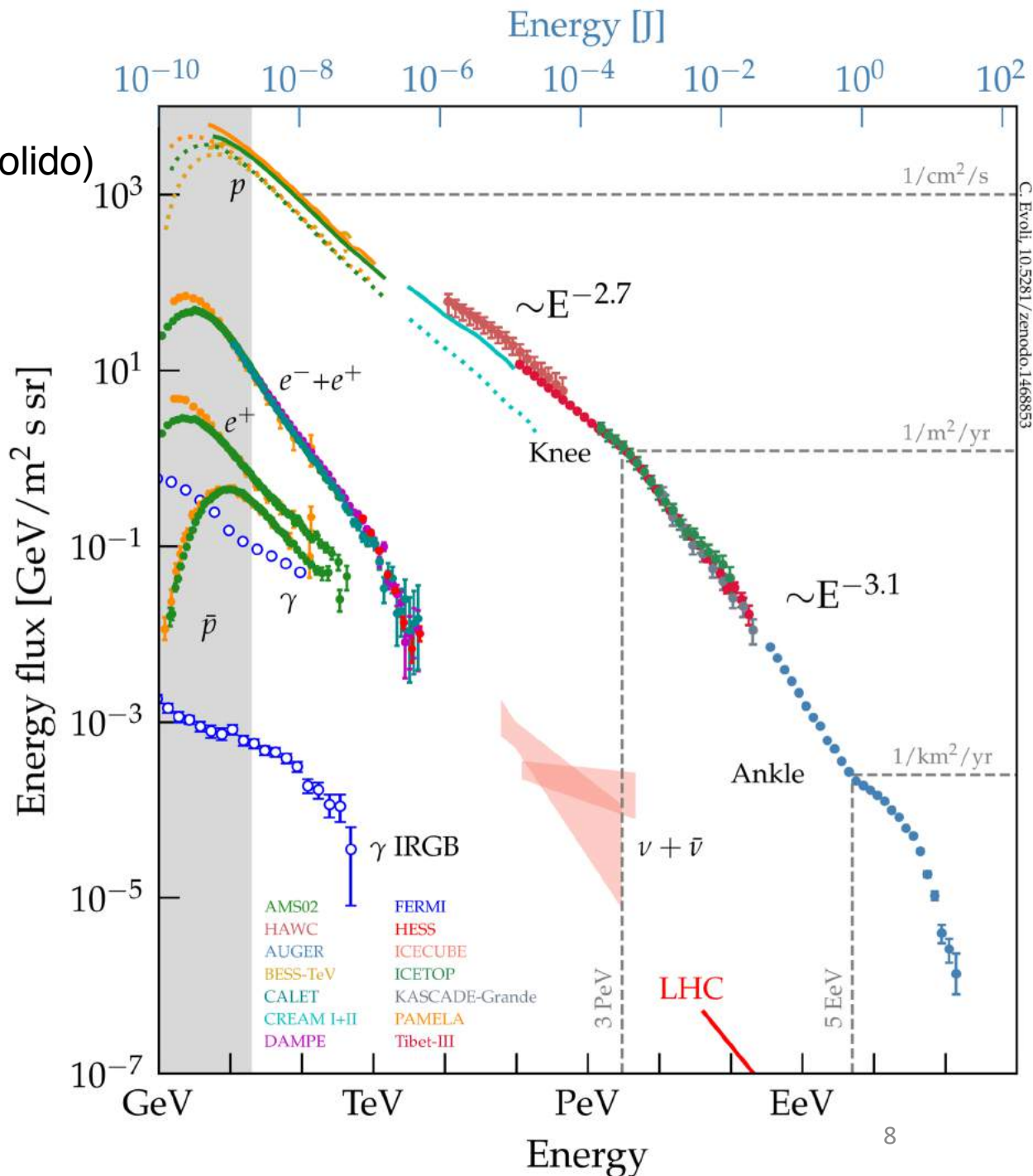
$$\gamma \approx 2.7$$

$$A \approx 2 \text{ (s GeV cm}^2 \text{ sr)}^{-1}$$

Basse energie –Modulato dal vento solare

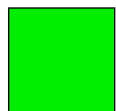
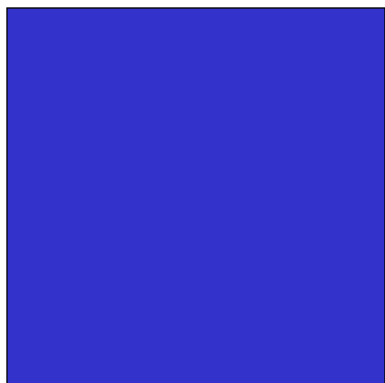
Alte energie – Leggero cambio di indice spettrale

- ✓ Legge di potenza -> meccanismo NON termico -> E, B
- ✓ Intensità -> alta densità di energia eV/cm2 -> CR galattici



Composizione

88 % of protons



10 % of He



<1% of heavy nuclei

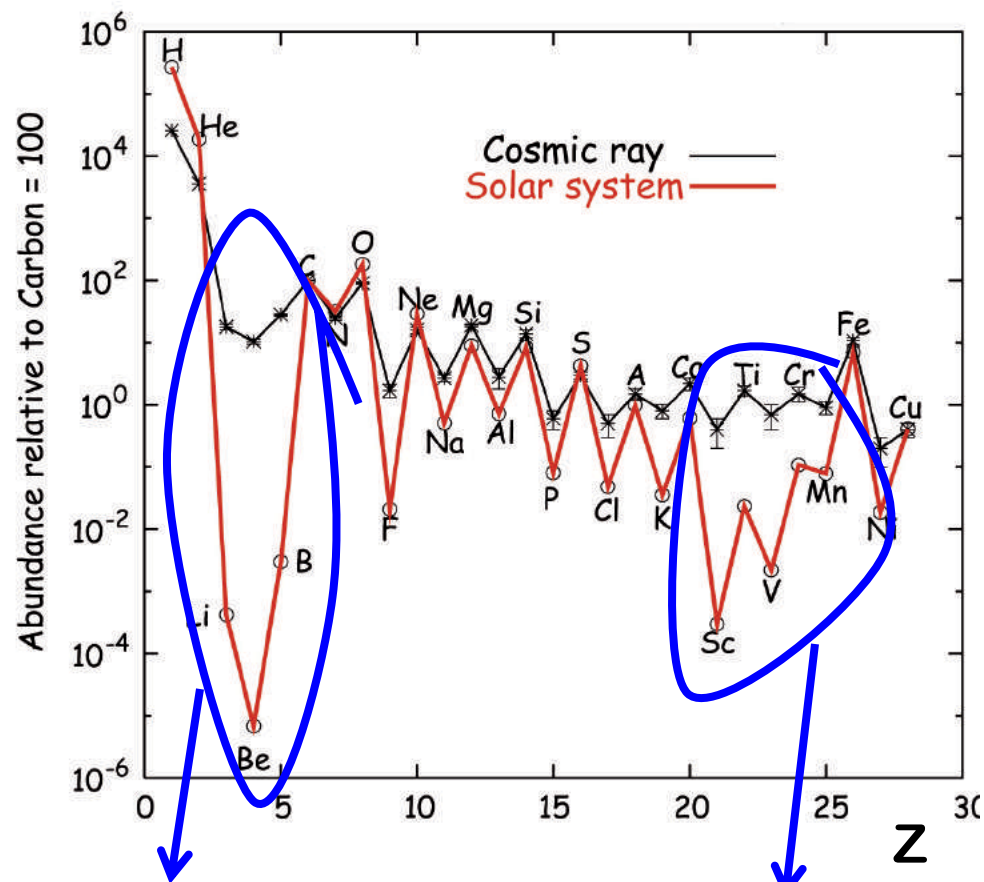
1% of electrons

rare components

$$\bar{p}/p \sim 10^{-4}$$

$$e^+/e^- \sim 10^{-1}$$

$$\bar{He}/He < 10^{-6}$$

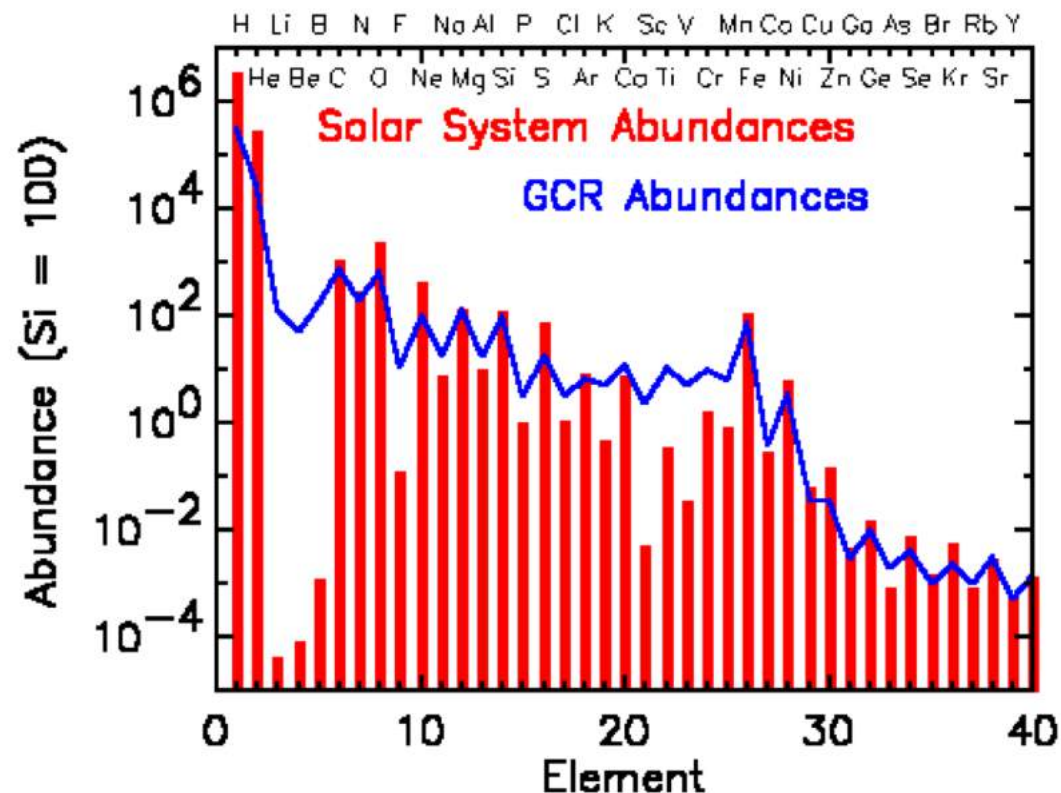
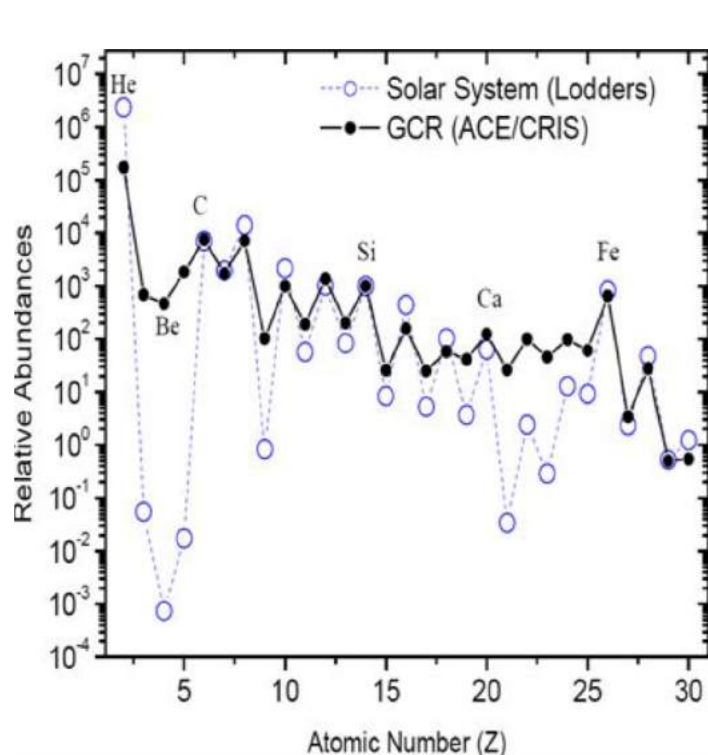


LiBeB

SubFe

non sono prodotti da esplosioni di supernovae

Composizione



Deuterio, Elio-2, Litio, Berillio, Boro, Fosforo, Scandio, Vanadio, Titanio, antiparticelle...

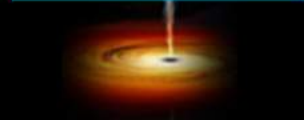
Questi elementi sono rari nel sistema solare, e nella Galassia, perché non vengono prodotti nei processi stellari. Se i raggi cosmici sono fatti di materiale galattico che viene accelerato, la loro composizione dovrebbe riflettere la composizione degli elementi nella galassia. E' in effetti così, ma nei raggi cosmici si osserva una sovra-abbondanza di elementi rari.

H B	WHERE DO ELEMENTS COME FROM?																He B	
Li C	Be C											B C	C S L	N S L	O S L	F L	Ne S L	
Na L	Mg L											Al \$ L	Si \$ L	P L	S S L	Cl L	Ar L	
K L	Ca L	Sc L	Ti \$ L	V \$ L	Cr L	Mn L	Fe \$ L	Co \$	Ni \$	Cu L	Zn L	Ga \$	Ge \$	As L	Se \$	Br \$	Kr \$	
Rb \$	Sr L	Y L	Zr L	Nb L	Mo \$ L	Tc L	Ru \$ L	Rh \$	Pd \$ L	Ag \$ L	Cd \$ L	In \$ L	Sn \$ L	Sb \$	Te \$	I \$	Xe \$	
Cs \$	Ba L	.	Hf \$ L	Ta \$ L	W \$ L	Re \$	Os \$	Ir \$	Pt \$	Au \$	Hg \$ L	Tl \$ L	Pb \$	Bi \$	Po \$	At \$	Rn \$	
Fr \$	Ra \$																	
			La L	Ce L	Pr \$ L	Nd \$ L	Pm \$ L	Sm \$ L	Eu \$	Gd \$	Tb \$	Dy \$	Ho \$	Er \$	Tm \$	Yb \$ L	Lu \$	
			Ac \$	Th \$	Pa \$	U \$	Np \$	Pu \$	Am M	Cm M	Bk M	Cf M	Es M	Fm M	Md M	No M	Lr M	

BIG BANG



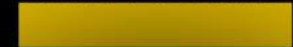
COSMIC RAYS



LARGE STARS



SMALL STARS



SUPERNOVAE

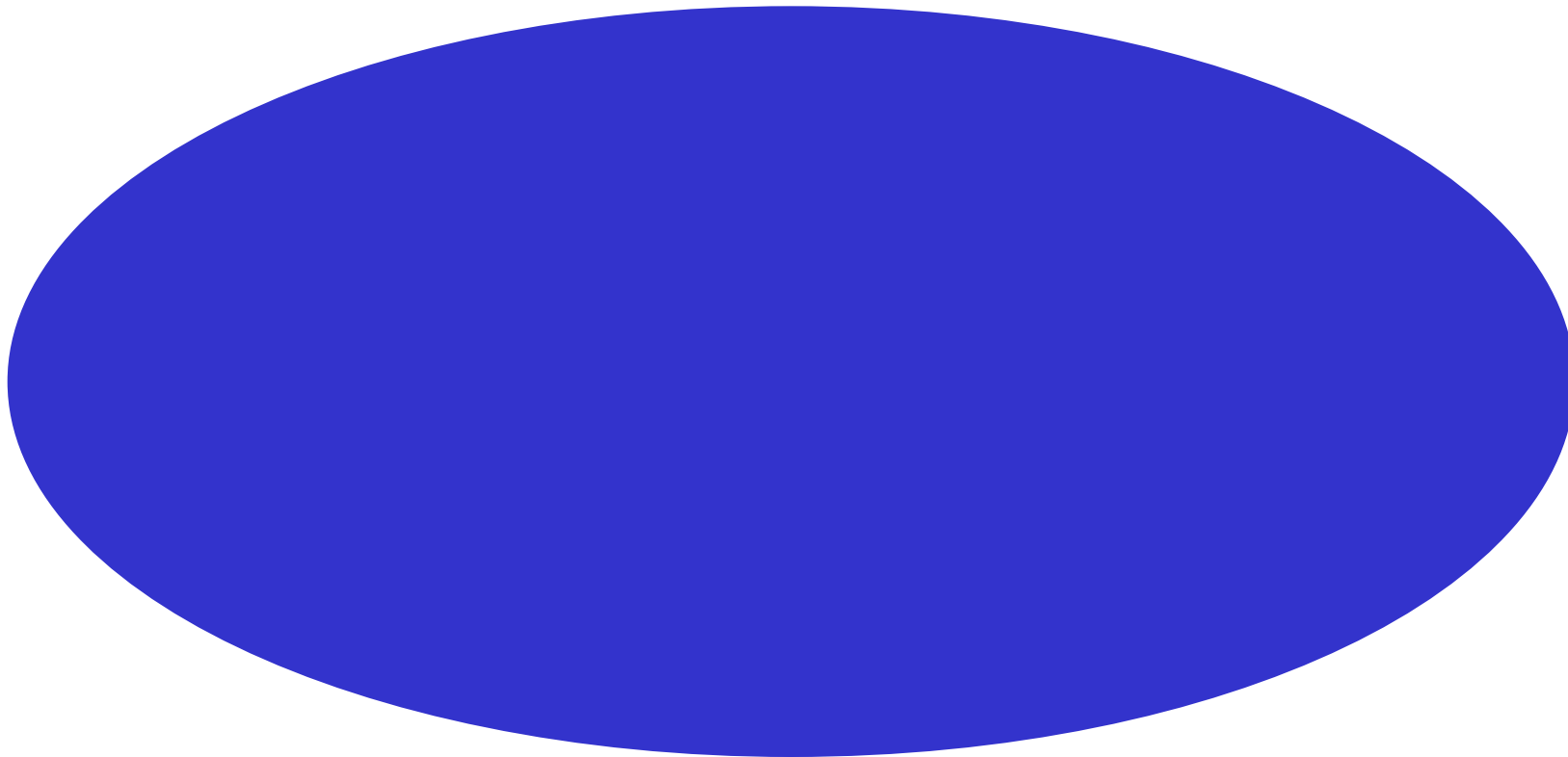


MAN MADE

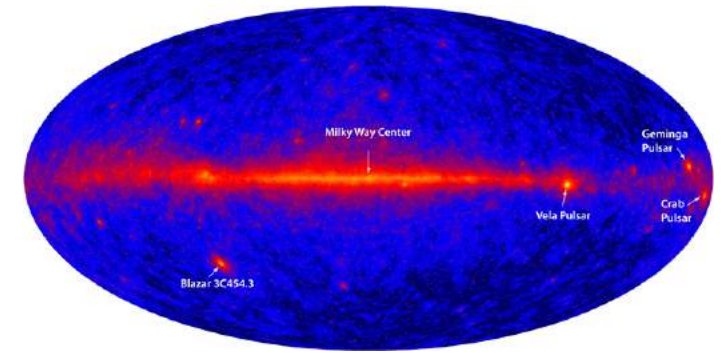


Distribuzione Angolare

Fortemente isotropa



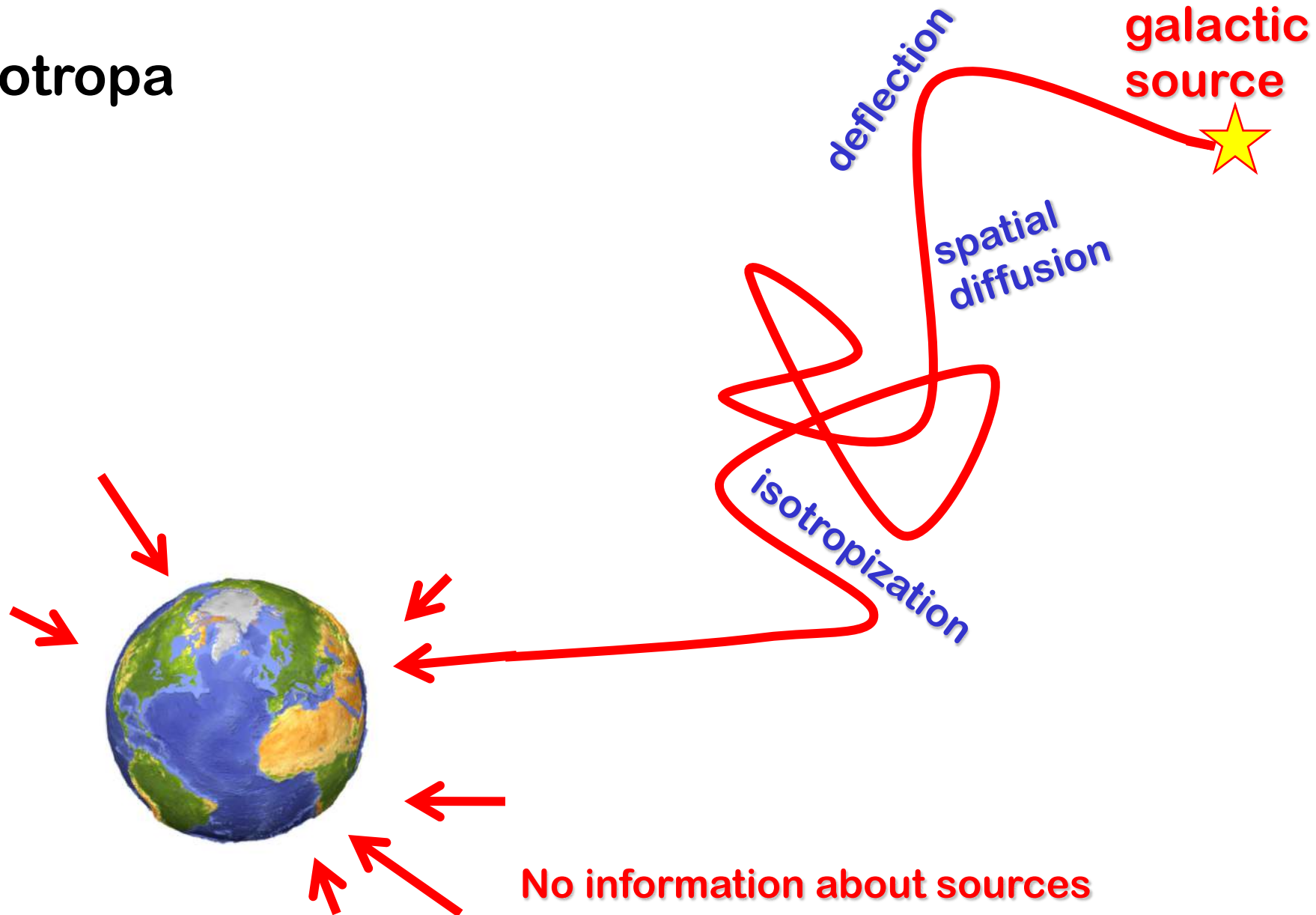
skymap with galactic cosmic rays
($E > 100 \text{ GeV/n}$)



Fermi Gamma-ray Space Telescope

Distribuzione Angolare

Isotropia



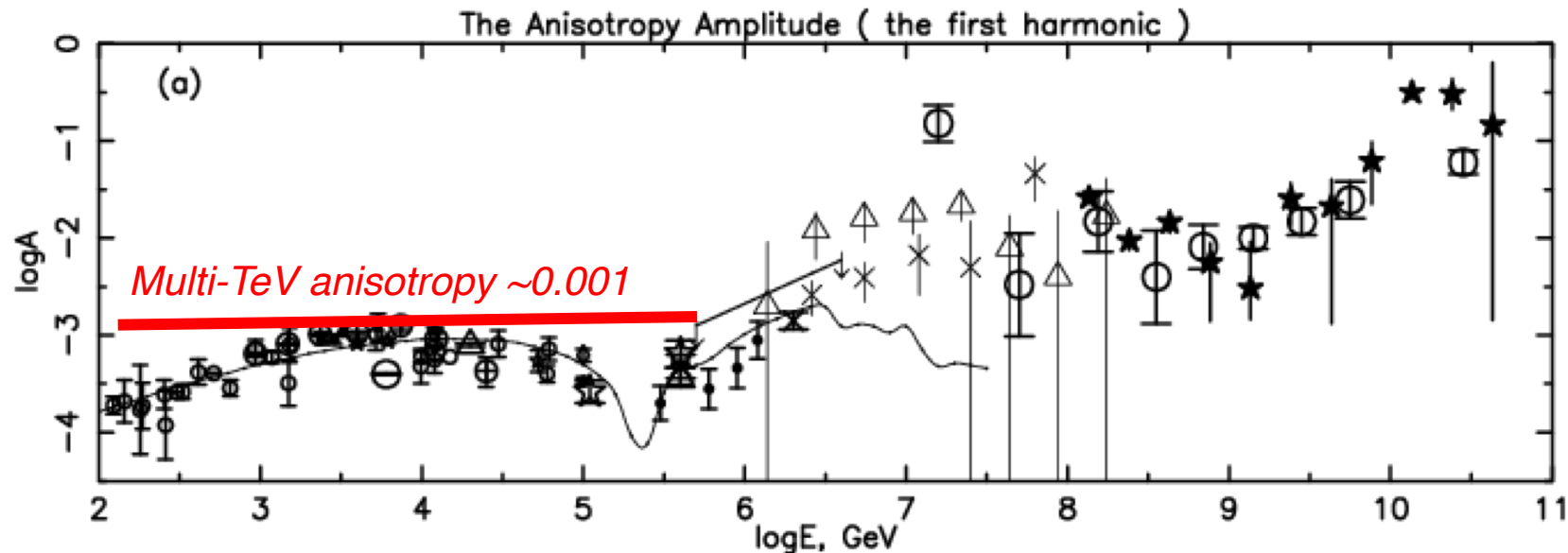
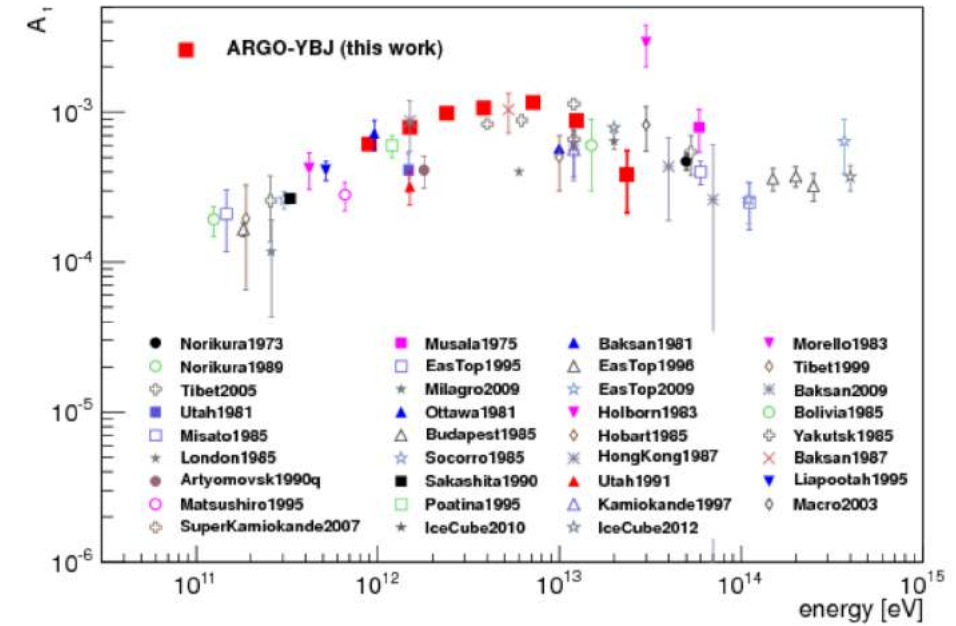
Distribuzione Angolare

Isotropa... quasi

Anisotropia di dipolo

$$J(\vartheta) \cong J_0 + J_1 \cos(\vartheta)$$

$$\eta = \frac{J_1}{J_0} = \frac{J_{Max} - J_{Min}}{J_{Max} + J_{Min}} \sim O(10^{-3})$$



Effetto Compton-Getting

$$J(\vartheta) \cong J_0 + J_1 \cos(\vartheta)$$

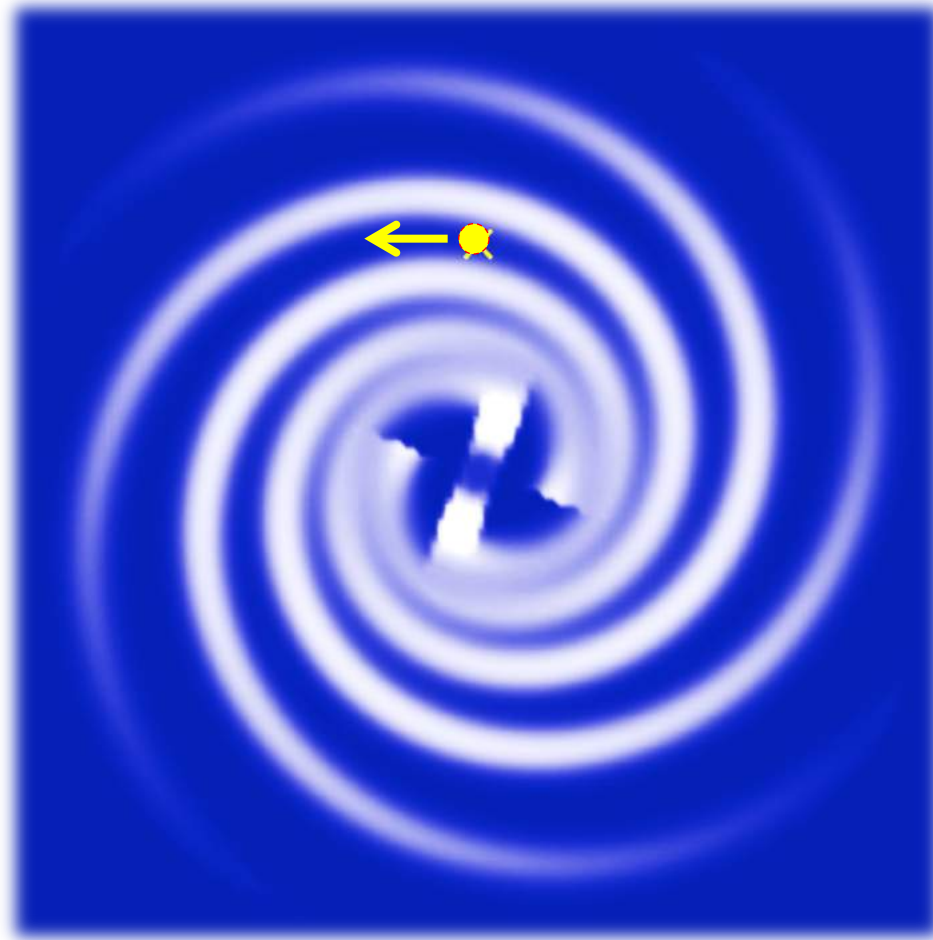
$$\eta = \frac{J_1}{J_0} = \frac{J_{Max} - J_{Min}}{J_{Max} + J_{Min}} \sim O(10^{-3})$$

Anisotropia Compton-Getting

$$\eta_{CG} = \left[2 - \frac{\partial \log(J)}{\partial \log(R)} \right] \beta_{\oplus} = (2 + \gamma) \beta_{\oplus}$$

Per $V \sim 220 \text{ km/s}$: $\eta_{CG} \sim 10^{-3}$

Ma ci aspettiamo che anche i raggi cosmici “ruotino” solidali alla Galassia, per cui 10^{-3} costituisce un limite superiore. Per il moto del sistema solare rispetto ai raggi cosmici, una velocità peculiare più ragionevole è $\sim 20 \text{ km/s}$. Per cui l’anisotropia CG attesa è di 10^{-4} o meno.



Sommario

Proprietà di base dei raggi cosmici:

- Alta densità di energia (troppo alta per essere costante in tutto l'Universo)
- Spettro di natura non termica (non maxwelliano)
- Sovra-abbondanza di elementi rari nella Galassia (Li-Be-B, antimateria...)
- Alto livello di isotropia (break della connessione RC-sorgenti)

Questo ci porta a pensare che i raggi cosmici sono

- ✓ Prodotti nella Galassia, accelerati da campi elettrici o magnetici fino a $E \sim \text{PeV}$
- ✓ Confinati nei campi magnetici della Galassia per milioni di anni.

- Accelerazione da sorgenti galattiche (ma quali?)
- Propagazione diffusiva nei campi magnetici galattici (ma come?)
- Produzione di particelle secondarie: Li-Be-B e antimateria (ma quanta?)

Supernovae come sorgenti di raggi cosmici

I RC alle energie GeV-TeV sono certamente di origine Galattica. Le SNe sono nella Galassia ed esplodono con una frequenza di ~ 1 ogni 30 anni

RC	{	Volume occupato dai RC nella Galassia	$V_{CR} \sim \pi L R_d^2 \sim 10^{66} \text{ cm}^3$
		Densità di energia dei RC	$\rho_{CR} = \int n(E) E dE \sim 0.8 \text{ eV/cm}^3$
		Potenza associata	$L_{CR} \sim \frac{V_{CR} \rho_{CR}}{\tau_{CR}} \sim 5 \cdot 10^{40} \text{ erg/s}$
SN	{	Massa SN	$M \sim 10^3 M_{\oplus}$
		Energia esplosione	$E \sim \frac{1}{2} M_{\oplus} v^2$ con $v \sim 5 \cdot 10^8 \text{ km/s}$
		Frequenza di eventi SN	$\Gamma_{SN} \sim 1/30 \text{ yr}^{-1}$
		Potenza erogata	$L_{SN} = E \cdot \Gamma_{SN} \sim 10^{42} \text{ erg/s}$

E' necessario che una frazione di energia dell'esplosione delle SN (dell'ordine del %) sia utilizzata per accelerare raggi cosmici.

Queste semplici considerazioni energetiche supportano l'idea delle supernovae come sorgenti di raggi cosmici Galattici.

Propagazione diffusiva

La diffusione dei raggi cosmici nella Galassia

- Rapporti secondari/primari (B/C)
 - Rapporti secondari instabili/stabili ($^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$)
 - Ampiezza dell'anisotropia di dipolo
-
- Tempo di residenza $T \sim 10 \text{ Myr}$
 - Dimensione regione di propagazione $L \sim \text{kpc}$
 - Coefficiente di diffusione $K \sim 10^{28} \text{ cm}^2/\text{s} \sim 0.01 \text{ kpc}^2/\text{Myr}$

$$\tau_{\text{int}} \approx \frac{1}{n_{\text{gas}} c \sigma_{\text{spall}}} \approx \text{few Myr}$$

$$\tau_{^{10}\text{Be}} = 1.5 \times 10^6 \text{ yr}$$

Età RC $\sim \text{few Myr}$

$$\eta \sim 10^{-4}$$
$$K \sim 10^{28} \text{ cm}^2 / \text{s}$$

L'equazione di diffusione

Il processo di diffusione dei RC da emessi da una sorgente generica $Q(E,r)$ (qualcosa che emette i RC) può essere descritto semplicemente da:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot [k(E, \vec{r}) \nabla n] = Q(E, \vec{r})$$

Analogia con la MQ:

$$\begin{array}{l} k \leftrightarrow \frac{\hbar^2}{2M} \\ t \leftrightarrow it \\ n \leftrightarrow \psi \end{array} \quad -\frac{\hbar^2}{2M} \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

L'equazione di diffusione

Il processo di diffusione dei RC da emessi da una sorgente generica $Q(E,r)$ (qualcosa che emette i RC) può essere descritto semplicemente da:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot [k(E, \vec{r}) \nabla n] = Q(E, \vec{r})$$

La densità è legata al flusso J da: $n(E) = \frac{4\pi}{\beta c} J(E)$

In un mezzo isotropo, la corrente di particelle è data da: $i = -k \nabla n$

La corrente soddisfa l'equazione di continuità: $\nabla \cdot i + \frac{\partial n}{\partial t} = 0$

L'equazione di diffusione

Il processo di diffusione dei RC da emessi da una sorgente generica $Q(E,r)$ (qualcosa che emette i RC) può essere descritto semplicemente da:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot [k(E, \vec{r}) \nabla n] = Q(E, \vec{r})$$

Per una sorgente localizzata nello spazio e nel tempo: $Q(E, \vec{r}) = Y \cdot \delta(\vec{r}) \cdot \delta(t)$
si può ottenere una soluzione “funzione di Green” (per $t > 0$) del tipo:

$$G(t, \vec{r}) = \frac{1}{[4\pi k(E)]^{\frac{3}{2}}} \exp \left[-\frac{r^2}{4kt} \right] \quad (t' = 0, \vec{r}' = 0)$$

Questa soluzione descrive diffusione gaussiana con larghezza $\sigma = \sqrt{kt}$
La funzione di Green qui scritta è per il caso semplice in cui $k(E,r)=k(E)$.

L'equazione di diffusione

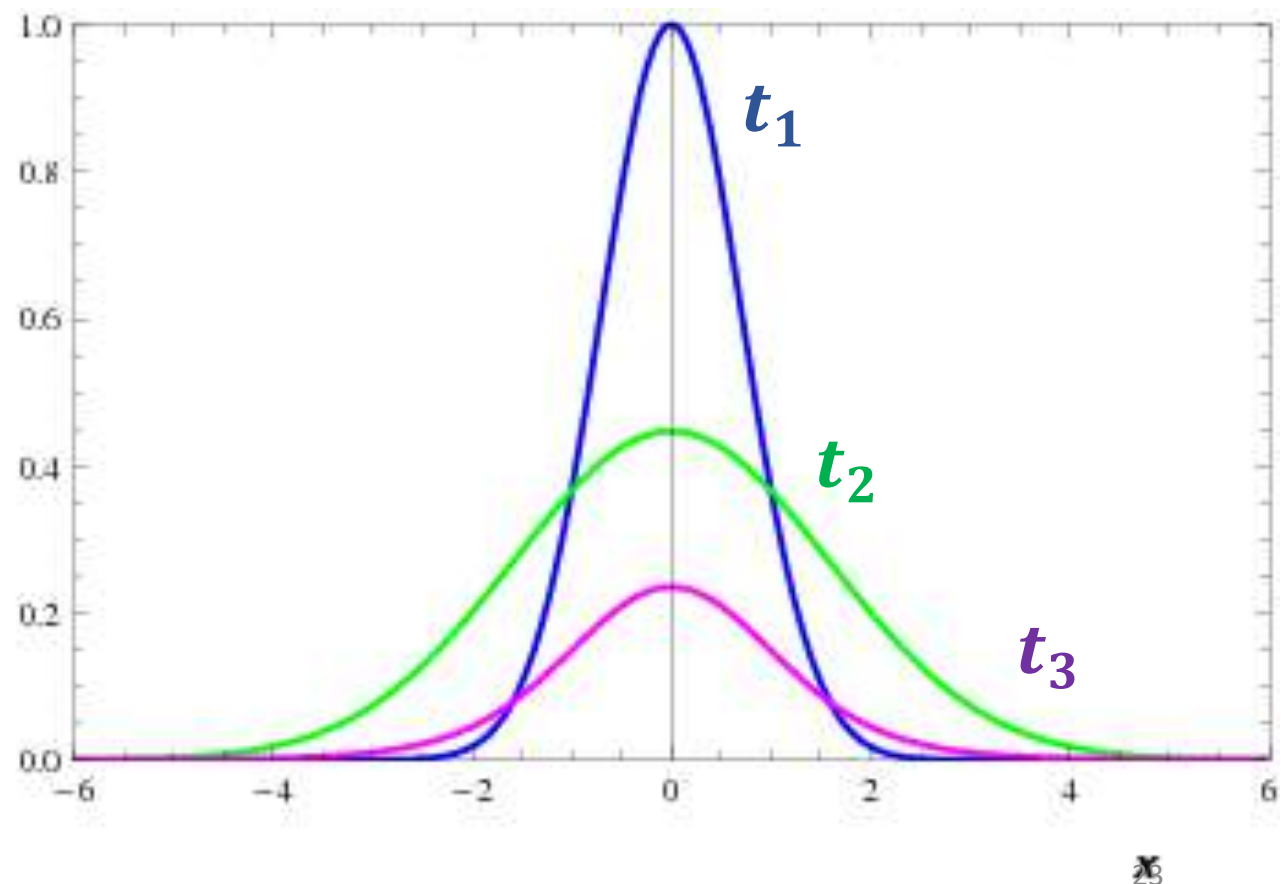
Il processo di diffusione dei RC da emessi da una sorgente generica $Q(E,r)$ (qualcosa che emette i RC) può essere descritto semplicemente da:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot [k \nabla n] = 1 \cdot \delta(x) \cdot \delta(t)$$

$$G(t, x) = \frac{1}{[4\pi k]^{1/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4kt}\right]$$

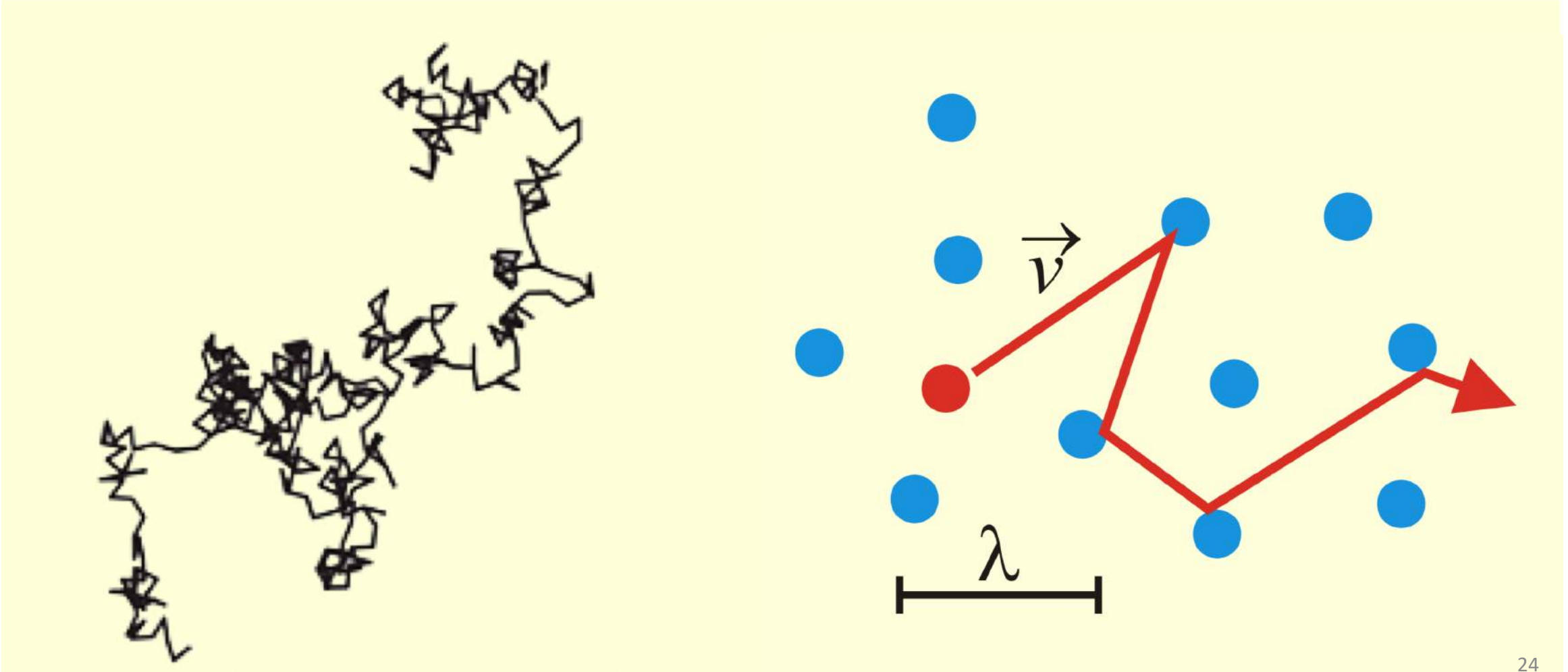
NB qui pero:

- Mancano le condizioni al contorno
- La sorgente è puntiforme e istantanea



Diffusione e random walk

A livello microscopico, il processo di diffusione è un moto browniano dovuto a irregolarità magnetiche che agiscono come centri di scattering, posti a distanza $\lambda \sim 1\text{pc}$, che randomizzano il moto.



Diffusione e random walk

A livello microscopico, il processo di diffusione è un moto browniano dovuto a irregolarità magnetiche che agiscono come centri di scattering, posti a distanza λ ($\sim 1\text{pc}$), che randomizzano il moto.

In un random walk 1D, la distanza media percorsa dopo N urti è:

$$\langle r^2 \rangle = N \times \lambda^2$$

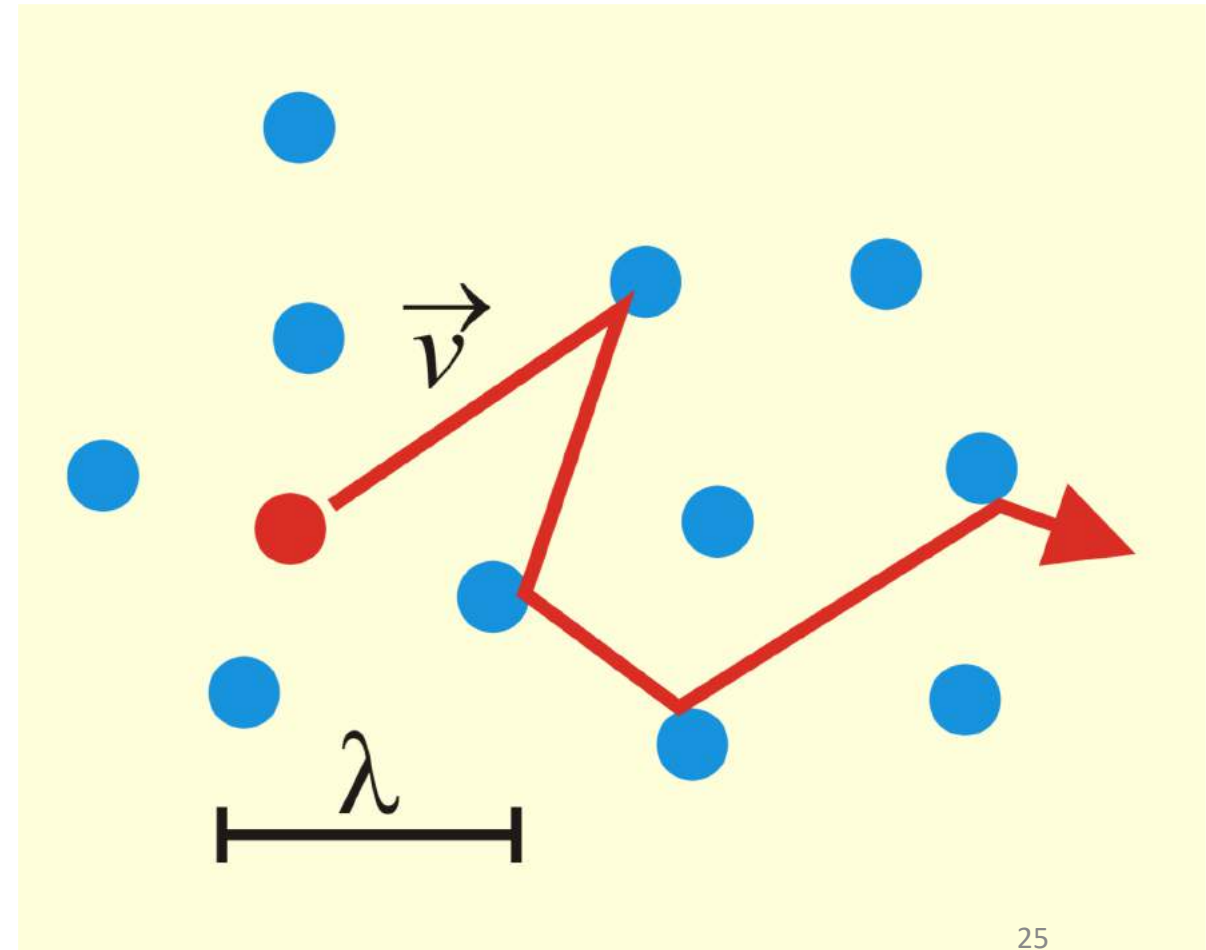
Nella descrizione macroscopica della diffusione, la distanza raggiunta al tempo t è:

$$r = \sqrt{kt} \rightarrow \langle r^2 \rangle \sim kt$$

Connettendo le due descrizioni otteniamo:

$$k = \frac{N\lambda^2}{t} = v\lambda$$

Nel caso 3D avremmo: $k = \frac{1}{3}v\lambda$

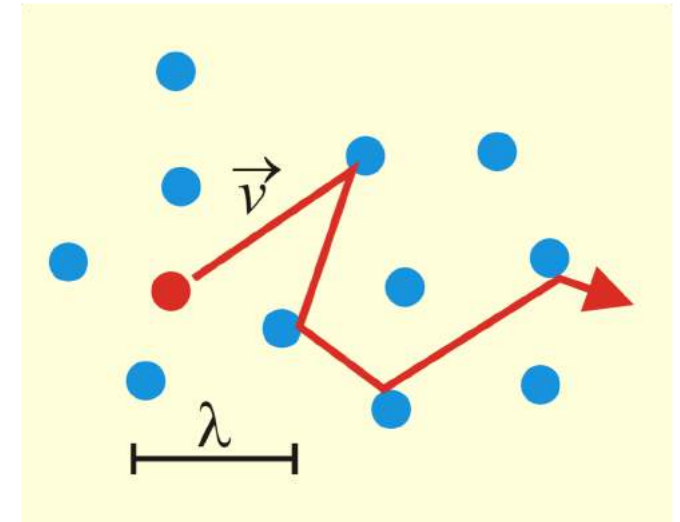


Diffusione e random walk

Un altro modo di vederlo è considerare il tempo impiegato da una particella nello spazio 3D per percorrere una distanza R:

$$\tau_{\text{diff}} = \left(\frac{\lambda}{c/3} \right) \left(\frac{R}{\lambda} \right)^2 = \frac{R^2}{\frac{1}{3} c \lambda}$$

← distanza media tra centri di scattering



Dalle abbondanze degli elementi Li-Be-B, e dal decadimento del berillio-10, sappiamo che il tempo di diffusione è di circa 5 milioni di anni in un percorso di circa 1 kpc. Segue che

$$\lambda \sim 1 \text{ pc} \Rightarrow$$

$$K = \frac{1}{3} c \lambda = (5-10) \times 10^{28} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$$

Coefficiente di diffusione

Nel seguito vediamo come stimare k dalle osservazioni...

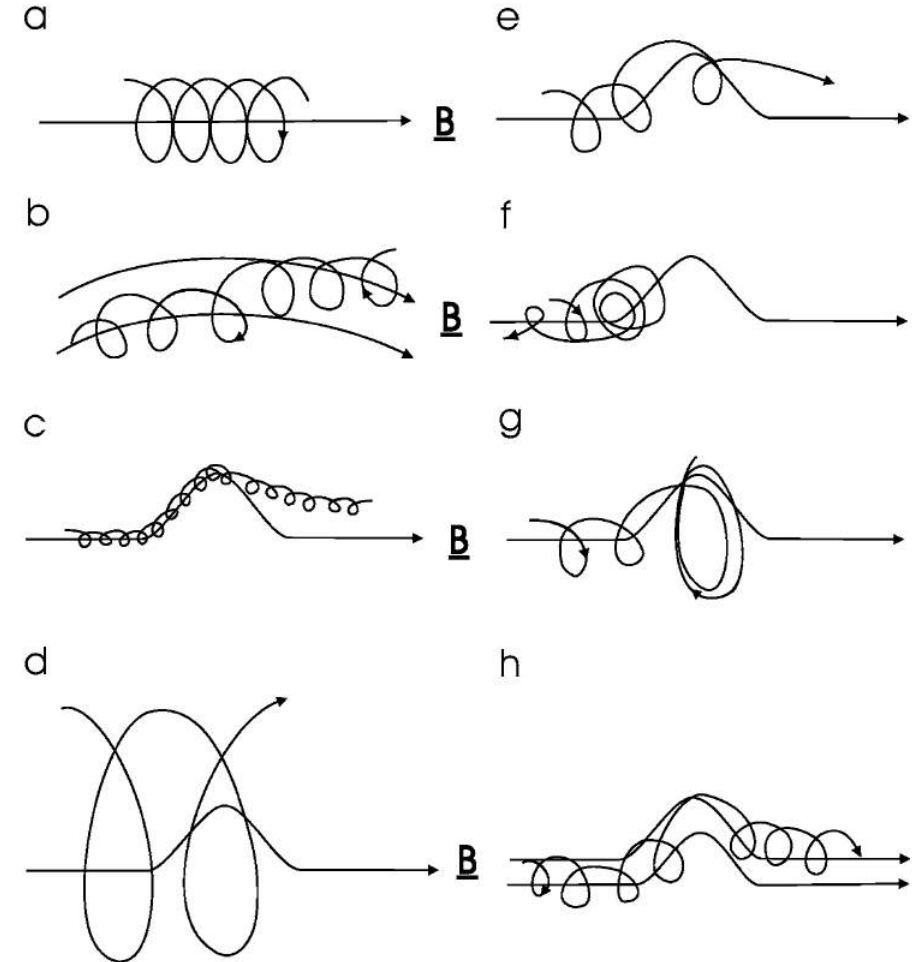
Diffusione e turbolenza

Nel caso dei RC nella galassia, il moto browniano delle particelle non è dovuto a vere “collisioni”, ma ai campi magnetici turbolenti che randomizzano le loro traiettorie.

In pratica si tratta di processi di scattering, ma gli urti avvengono con le irregolarità del campo magnetico.

La distanza tra “centri di scattering” è dell’ordine di 1 pc, ma in realtà sono presenti a tutte le scale, con un preciso spettro di irregolarità legato al meccanismo a cascata con cui si genera la turbolenza.

Il comportamento delle particelle in prossimità delle irregolarità magnetiche dipende dalla loro rigidità e dal campo B . Per esempio, particelle molto energetiche (rigide) sono insensibili ai campi magnetici, e ci aspettiamo che la loro propagazione diventi pressoché rettilinea



Diffusione e turbolenza

Nel caso dei RC nella galassia, il moto browniano delle particelle non è dovuto a vere “collisioni”, ma ai campi magnetici turbolenti che randomizzano le loro traiettorie.

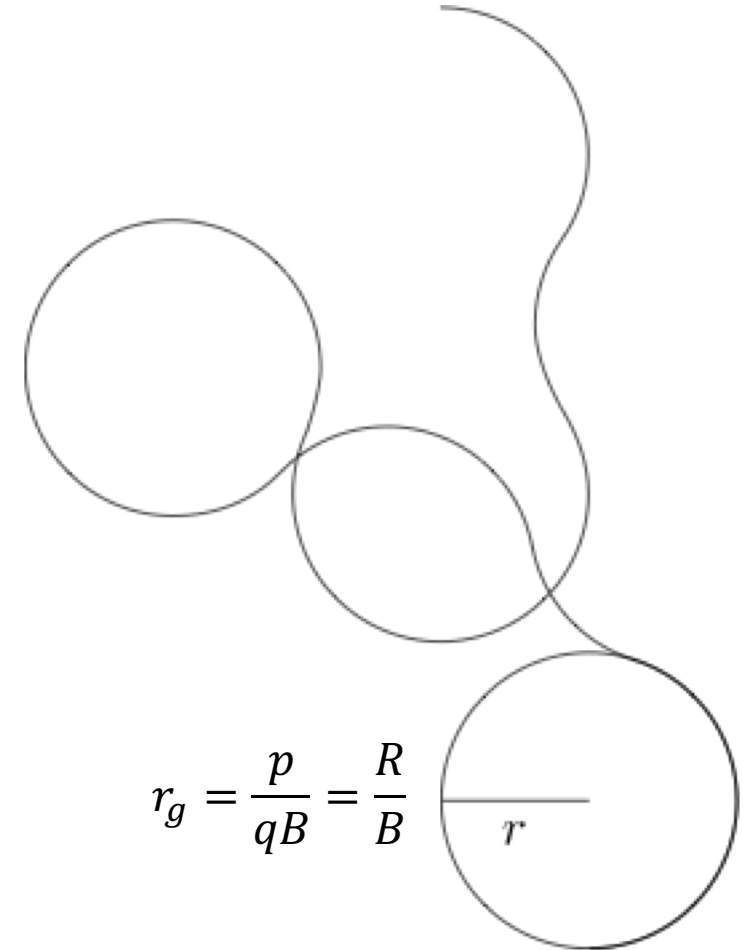
Nel 49 Bohm ipotizzò che, in un plasma magnetico, il coefficiente di diffusione $k = (1/3)v\lambda$ è determinato dal giro-raggio delle particelle $\lambda = r_g = R/B$ (Larmor radius):

$$k_B = \frac{1}{3}\beta c r_g = \frac{\beta c R}{3B} \quad (\text{coefficiente di diffusione di Bohm})$$

In alcuni plasmi magnetici la diffusione è effettivamente di tipo Bohm. Ma per i RC nella galassia è differente.

In base alla teoria quasilineare, ci si aspetta una relazione tra k e R che è spesso parametrizzata nella forma:

$$k(R) = \beta k_0 \left(\frac{R}{R_0} \right)^\delta$$



Diffusione e turbolenza

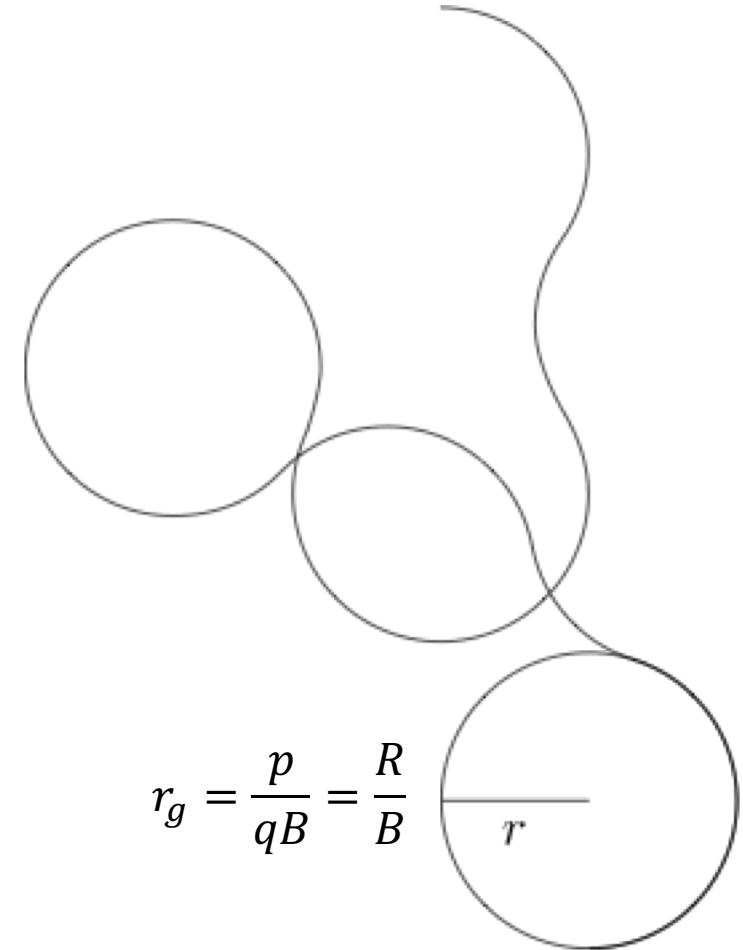
Nel caso dei RC nella galassia, il moto browniano delle particelle non è dovuto a vere “collisioni”, ma ai campi magnetici turbolenti che randomizzano le loro traiettorie.

Nel 49 Bohm ipotizzò che, in un plasma magnetico, il coefficiente di diffusione $k = (1/3)v\lambda$ è determinato dal giro-raggio delle particelle $\lambda = r_g = R/B$ (Larmor radius):

$$k_B = \frac{1}{3}\beta c r_g = \frac{\beta c R}{3B} \quad (\text{coefficiente di diffusione di Bohm})$$

In alcuni plasmi magnetici la diffusione è effettivamente di tipo Bohm, $k \propto R$. Ma per i RC nella galassia è differente.

In base alla teoria di Kolmogorov della turbolenza interstellare, ci si aspetta che k sia proporzionale a $R^{1/3}$. La teoria di Kraichnan invece prevede $k \propto R^{1/2}$.



Diffusione e turbolenza

Nel caso dei RC nella galassia, il moto browniano delle particelle non è dovuto a vere “collisioni”, ma ai campi magnetici turbolenti che randomizzano le loro traiettorie.

In generale si usa una forma parametrica (con parametri da determinare dai dati):

$$k(R) = \beta k_0 \left(\frac{R}{R_0} \right)^\delta$$

Dove:

- Il parametro δ è legato alla natura della turbolenza (allo spettro delle irregolarità);
- k_0 regola la normalizzazione, es. in base all'intensità di B o del livello di turbolenza.
- R_0 stabilisce l'unità di misura della rigidità (es. $R_0 \equiv 1 \text{ GV}$);

Inoltre k può anche variare con la posizione, cioè assumere valori diversi in varie regioni della galassia, dal momento che anche la turbolenza potrebbe variare.

Diffusione e turbolenza

La turbolenza interstellare è generata dalle esplosioni di supernove, a scale tipiche di $L \sim 10 - 100$ pc.

Spettro di turbolenza di Kolmogorov: $\propto k^{-5/3}$

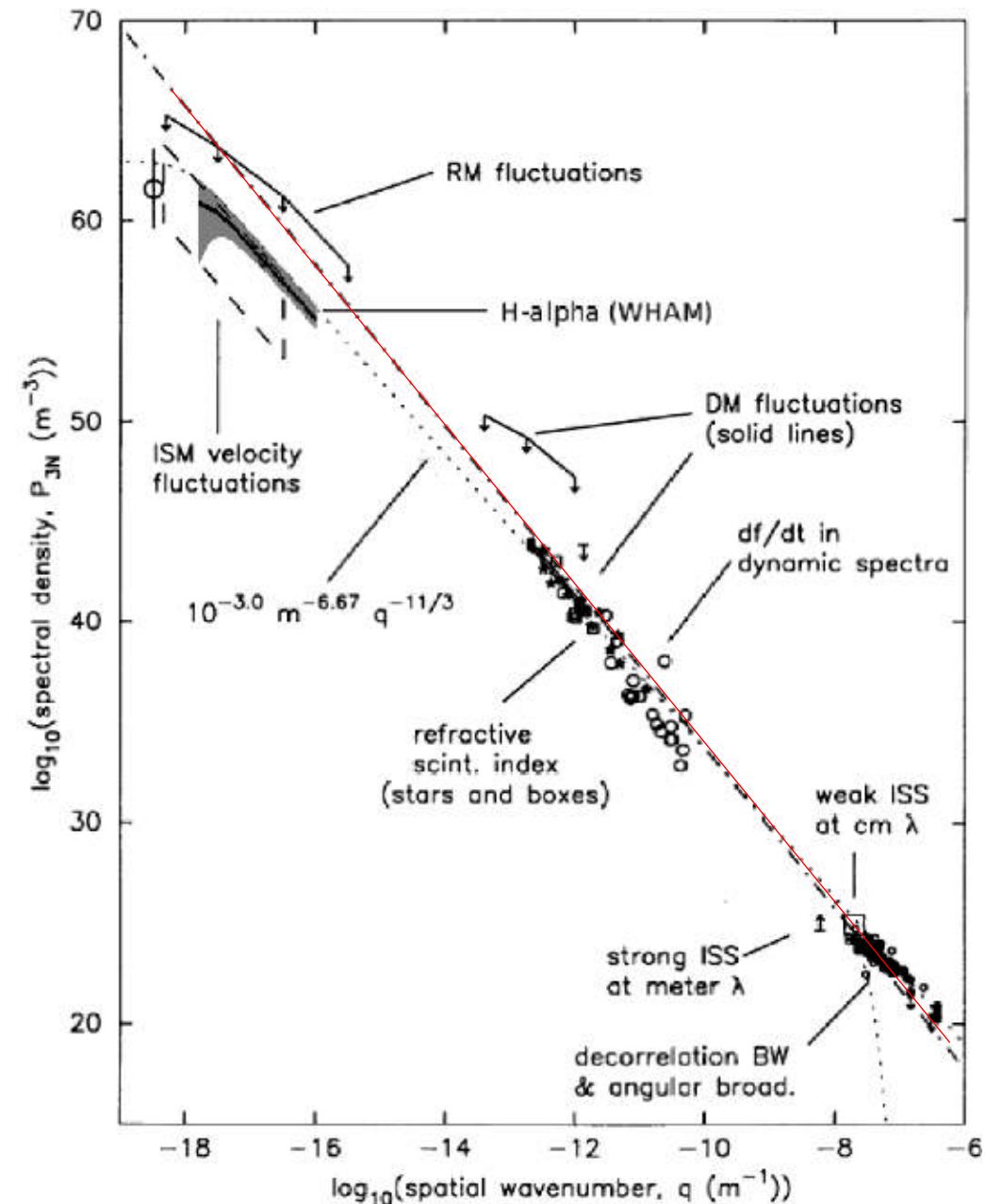
$$W(k)dk \equiv \frac{\langle \delta B \rangle^2}{B_0} = \frac{2 \eta_B}{3 k_0} \left(\frac{k}{k_0} \right)^{-5/3}$$

Dove qui k è il numero d'onda, $k_0 = L^{-1}$, e

$$\eta_B = \int_{k_0}^{\infty} W(k)dk \sim 0.1 - 0.01$$

rappresenta il livello totale di turbolenza.

Le osservazioni condotte sul piano galattico sono consistenti con lo spettro di Kolmogorov



Diffusione e turbolenza

Spettro di turbolenza di Kolmogorov: $\propto k^{-5/3}$

Nel caso in cui il campo B turbolento è piccolo rispetto alla componente regolare ($\delta B \ll B$), la diffusione origina dalla risonanza tra la frequenza giro-moto e quella dello spettro di turbolenza. O in termini di numero d'onda:

$$k_{res}^{-1} \sim r_g(R)$$

Dove il raggio di Larmor dipende dalla rigidità, $r_g = R/B$

Per il coefficiente di diffusione (chiamiamolo D per evitare confusione), segue:

$$D(R) = \frac{\beta c}{3} r_g \frac{1}{k_{res} W(k)} \propto \beta R^{2-5/3} \propto \beta R^{1/3}$$

Mettendo i numeri ci si aspetta:

$$D(R) \approx (10^{28} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1})(R/GV)^{1/3}$$

Diffusione e isotropia

Anisotropia di dipolo: $J(\vartheta) \cong J_0 + J_1 \cos(\vartheta)$

L'ampiezza è data dal flusso nella direzione del dipolo: $\eta = \frac{J_1}{J_0} = \frac{J_{Max} - J_{Min}}{J_{Max} + J_{Min}} \sim O(10^{-3})$

Nel caso in cui ho diffusione con coefficiente K, la corrente è data da:

$$i = K \nabla n = \frac{4\pi}{c} K \nabla J(\vartheta)$$

Possiamo calcolare la corrente nella direzione dell'asse di dipolo (diciamo asse z):

$$i_z = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi J(\vartheta) \cos \vartheta d \cos \vartheta = \frac{4\pi}{c} K \frac{\partial}{\partial z} [J_0 + J_1 \cos \vartheta]$$

La corrente risulta: $i_z = (2\pi) \int J_1(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{4\pi}{3} J_1(E)$

Diffusione e isotropia

La corrente dunque risulta: $i_z = \frac{4\pi}{3} J_1(E)$

Dalla definizione avevamo: $i_z = -k \frac{\partial n}{\partial z}$

Dall'uguaglianza delle due: $-k \frac{\partial n}{\partial z} = \frac{4\pi}{3} J_1(E) \longrightarrow J_1(E) = -\frac{3}{4\pi} k \left(\frac{\partial n}{\partial z} \right)$

L'ampiezza di anisotropia è quindi: $\eta_z = \frac{J_1}{J_0} = -\frac{1}{J_0} \frac{3}{4\pi} k \left(\frac{\partial n}{\partial z} \right)$

Usando $J_0 = \frac{\beta c}{4\pi} n$, e tralasciando il segno, otteniamo infine: $\eta_z = \frac{3k}{c} \frac{1}{n} \left| \frac{\partial n}{\partial z} \right|$

Più in generale possiamo scrivere: $\eta = \frac{3k}{c} \frac{|\nabla n|}{n}$

Diffusione e isotropia

L'ampiezza di anisotropia di dipolo associata alla diffusione è: $\eta = \frac{3k}{c} \frac{|\nabla n|}{n}$

Per i raggi cosmici galattici, come visto, le osservazioni indicano $\eta \sim 10^{-4}$

La loro variazione di flusso avviene su scale del kpc. Quindi, alla buona: $\frac{\nabla n}{n} \sim \frac{n}{kpc}$

Queste considerazioni ci portano a stimare un coefficiente di diffusione

$$k \sim kpc^2 Myr^{-1} \qquad k \sim 10^{28} cm^2 s^{-1}$$

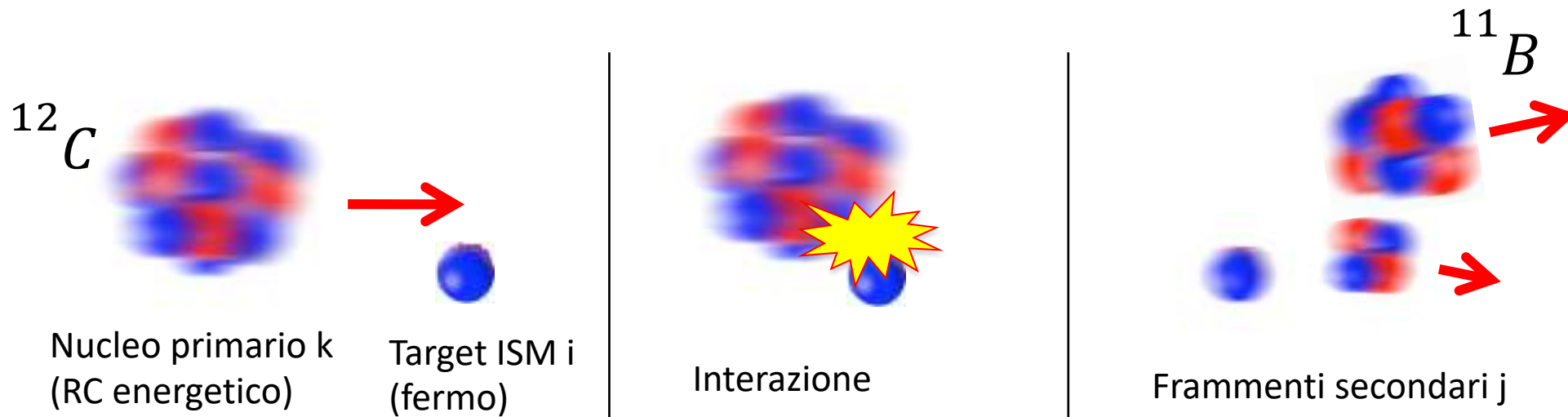
L'osservazione dell'alto livello di isotropia dei RC osservati (al livello $\eta \sim 10^{-4}$) costituisce una prima evidenza del fatto che la loro propagazione è diffusive, e ci permette di stimare l'ordine di grandezza del coefficient di diffusione medio nella Galassia

Diffusione e abbondanze di elementi rari: Li-Be-B

Vedremo più avanti un modello ben formulato. Ma alla buona, possiamo dire che

- 1) Nella Galassia gli elementi Li-Be-B sono quasi assenti. In particolare $B/C \sim 0$
- 2) Nei raggi cosmici osserviamo sovra-abbondanza di Li-Be-B, con $B/C \sim 0.1$

Questi elementi possono essere prodotti da processi di frammentazione di nuclei primari C-N-O con il gas interstellare (ISM). Ad esempio:



Diffusione e abbondanze di elementi rari: Li-Be-B

Vedremo più avanti un modello ben formulato. Ma alla buona, possiamo dire che

- 1) Nella Galassia gli elementi Li-Be-B sono quasi assenti. In particolare $B/C \sim 0$
- 2) Nei raggi cosmici osserviamo sovra-abbondanza di Li-Be-B, con $B/C \sim 0.1$

Questi elementi possono essere prodotti da processi di frammentazione di nuclei primari C-N-O con il gas interstellare (ISM). Ad esempio:



Se c'è diffusione, i raggi cosmici passano tanto tempo nella galassia, possono frammentare e produrre Li-Be-B in grande abbondanza.

Abbiamo visto che in un processo di diffusione con coefficiente k , la distanza tipica è data da $\sim \sqrt{kt}$. Viceversa, se H è la dimensione tipica della regione occupata dai raggi cosmici, il tempo di residenza caratteristico è $\tau_d \sim H^2/k$.

Diffusione e abbondanze di elementi rari: Li-Be-B

Se H è la dimensione tipica della regione occupata dai raggi cosmici, il tempo di residenza caratteristico è $\tau_d \sim H^2/k$.

Consideriamo il caso semplice di nuclei di carbonio confinati nella galassia, che ogni tanto collidono con il gas producendo nuclei di boro (processi $C+ISM \rightarrow B$):



L'abbondanza di nuclei di boro B è data dall'abbondanza del carbonio C , dal tasso di produzione di boro (per processi $C+ISM \rightarrow B$), e dal tempo speso dal C nella Galassia:

$$N_B \approx N_C \times \Gamma_{C \rightarrow B} \times \tau_d$$

Dove il tasso di interazioni è dato da: $\Gamma_{C \rightarrow B} = \langle n_{ISM} \rangle \cdot \sigma_{C \rightarrow B} \cdot \beta c$

Il tempo di confinamento è $\tau_d \sim H^2/k$

Il rapporto B/C risulta quindi dato da:

$$\frac{N_B}{N_C} \approx \Gamma_{C \rightarrow B} \times \tau_d = \frac{\langle n_{ISM} \rangle \sigma_{C \rightarrow B} c}{H^2} \frac{H^2}{k}$$

Diffusione e abbondanze di elementi rari: Li-Be-B

Il rapporto B/C è legato al coefficiente di diffusione da: $\frac{N_B}{N_C} \approx \frac{\langle n_{ISM} \rangle \sigma_{C \rightarrow B} c}{H^2 k}$

Mettiamoci i numeri:

- La dimensione del «sistema» H è dell'ordine di qualche kpc: $H \sim kpc$
- La densità del gas interstellare nella regione di diffusione è $\langle n_{ISM} \rangle \sim 0.01 \text{ cm}^{-3}$
- La sezione d'urto di frammentazione per urti C+H è $\sigma_{C \rightarrow B} \sim 100 \text{ mb} \sim 10^{-24} \text{ cm}^2$

Ne risulta, per un rapporto B/C dell'ordine del 10%, un tempo di residenza $\tau_d \sim Myr$, e un coefficiente di diffusione dell'ordine di $k \sim 10^{28} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$

→ Questa stima è in buon accordo con quanto stimato dal livello di anisotropia

E' importante la relazione tra coefficiente di diffusione e rapporto secondari/primari:

$$B/C \propto k^{-1}$$

Fisicamente: più la diffusione è efficace nel tenere confinati i RC nella Galassia (k piccolo), e più questi hanno tempo per produrre particelle secondari (t grande).

Diffusione e abbondanze di elementi radioattivi: ^{10}Be

Nelle collisioni C-N-O con il gas viene prodotto anche il berillio. In particolare:

- L'isotopo radioattivo ^{10}Be , che decade beta con vita media $\tau_0 \sim 1.5 \text{ Myr}$:



- L'isotopo ^9Be che invece è stabile, così come lo è ad esempio il boro.

Entrambi gli isotopi sono prodotti dalla frammentazione di B-C-N-O, cioè hanno (circa) gli stessi progenitori, e le stesse sezioni d'urto di produzione. Se fossero entrambi stabili, ci aspetteremmo un rapporto di abbondanze: $R \equiv ^{10}\text{Be} / ^9\text{Be} \sim 1$

Siccome ^{10}Be è instabile (e segue la legge del decadimento) il rapporto è dato da:

$$R \equiv ^{10}\text{Be} / ^9\text{Be} \approx e^{-\frac{\tau_d}{\gamma \tau_0}}$$

Dalle misure a bassa energia ($\gamma \approx 1$) si osserva $R \approx 0.1$. Da ciò si deduce, ancora, che il tempo di confinamento τ_d deve essere dell'ordine di «qualche Myr», e analogamente un coefficiente di diffusione dell'ordine di $k \sim 10^{28} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$

Trasporto diffusivo dei raggi cosmici nella galassia

Abbiamo visto tre osservazioni di base che supportano l'idea che il trasporto dei raggi cosmici nella galassia (dalle sorgenti fino a noi) sia di natura diffusiva:

- Ampiezza dell'anisotropia di dipolo
- Rapporti secondari/primari (B/C)
- Rapporti secondari instabili/stabili ($^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$)

Queste osservazioni permettono di farci un'idea degli ordini di grandezza:

- Tempo di residenza (o confinamento) dei RC: $T \sim 10$ Myr
- Dimensione della regione di propagazione: $H \sim \text{kpc}$
- Coefficiente di diffusione $K \sim 10^{28} \text{ cm}^2/\text{s} \sim 0.01 \text{ kpc}^2/\text{Myr}$

$$\tau_{\text{int}} \approx \frac{1}{n_{\text{gas}} c \sigma_{\text{spall}}} \approx \text{few Myr}$$

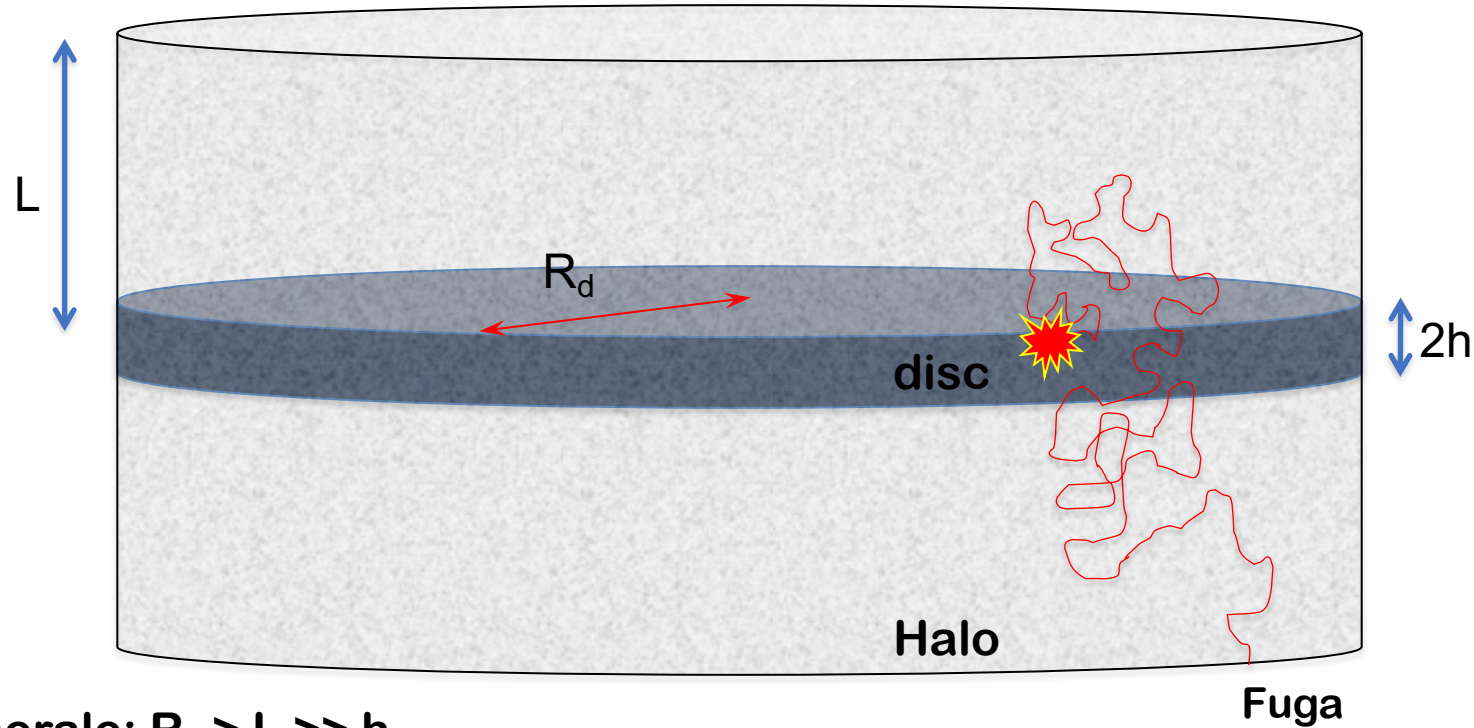
$$\tau_{^{10}\text{Be}} = 1.5 \times 10^6 \text{ yr}$$

Età RC $\sim \text{few Myr}$

$$\eta \sim 10^{-4}$$
$$K \sim 10^{28} \text{ cm}^2 / \text{s}$$

Il prossimo passo è fornire una descrizione più accurata della fisica dei RC galattici

Setup e geometria della Galassia



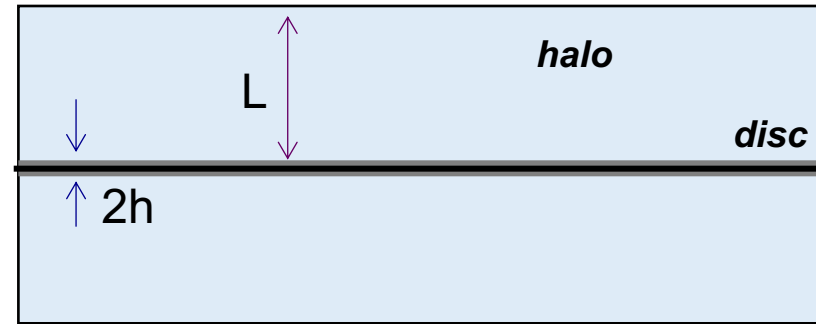
In generale: $R_d > L \gg h$

Assunzioni

1. Iniezione continua di particelle dalle sorgenti Q , distribuite nel disco.
2. Disco sottile ($h \sim 0$) ed esteso radialmente ($R_d \sim \infty$) contenente gas e sorgenti
3. Alone magnetico cilindrico esteso ($L \gg h$), con fuga di particelle per $n(z = \pm L) = 0$ ⁴²

Equazione di trasporto in una dimensione spaziale

Approssimazione 1D: $R \gg L$.



La galassia è un disco sottile di semi-altezza h . Contiene gas interstellare e sorgenti di RC

L'alone galattico è un disco spesso $2L$, con $L \gg h$. E' la regione in cui i RC sono confinati.

L'approssimazione 1D assume $R \gg L$: raggio infinito, o comunque molto grande rispetto a L .

I originano solo nel disco. Si propagano sia nel disco che nell'alone. Le interazioni (distruzione e creazione di secondari) avvengono solo nel disco. I decadimenti avvengono anche nell'alone.

La coordinata spaziale utilizzata è quella verticale, z . Le dipendenze radiali sono trascurate.

Le predizioni si confrontano con le osservazioni condotte nel sistema solare, cioè nel disco $z=0$.

Equazione di trasporto in una dimensione spaziale

$$\frac{\partial N_j}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(z) \frac{\partial N_j}{\partial z} \right] - 2h\delta(z)\Gamma_j^{int} N_j + 2h\delta(z) \left[Q_j^{pri} + Q_j^{sec} \right]$$

$$\Gamma_{int} = \beta c n_I \sigma_{int} \text{ Tasso di distruzione}$$

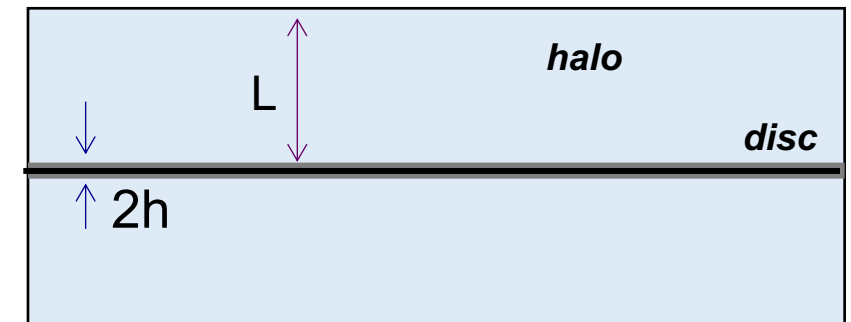
$$Q_j^{pri} \approx Y_j R^{-\nu} \text{ Termine di sorgenti primarie (SNR)}$$

$$Q_j^{sec} \approx \sum_{k>j} \Gamma_{k \rightarrow j} N_k \text{ Termine di "sorgenti" secondarie}$$

$$K \approx K_0 R^\delta \text{ Coefficiente di diffusione}$$

$$\partial N / \partial t = 0 \quad \text{Soluz. stazionaria}$$

$$N(z = \pm L) = 0 \quad \text{cond. contorno}$$



Prima di procedere vediamo meglio l'origine dei termini di sorgente Q, sia secondari e primari

Equazione di trasporto in una dimensione spaziale

$$\frac{\partial N_j}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(z) \frac{\partial N_j}{\partial z} \right] - 2h\delta(z)\Gamma_j^{int} N_j + 2h\delta(z) \left[Q_j^{pri} + Q_j^{sec} \right]$$

Dipendenze in energia (o rigidità)

Le varie grandezze contenute nell'equazione dipendono anche dall'energia (K , Q , Γ). Tuttavia questa dipendenza è solo implicita e non gioca un ruolo nella soluzione. Questo perché nell'equazione abbiamo ignorato i processi di perdita continua (o guadagno) di energia, che coinvolgerebbero termini $\partial/\partial E$.

Le perdite di energie, per i nuclei, possono avvenire per processi di ionizzazione o urti coulombiani nel gas. Questi processi sono rilevanti solo alle basse energie ($E \leq GeV$). Trascurando le perdite, a rigore l'equazione è applicabile nel limite di alte energie ($E \gg GeV$).

Considerando i processi di perdita o guadagno di energia, la soluzione può essere trovata solo per via numerica.

Equazione di trasporto in una dimensione spaziale

$$\frac{\partial N_j}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left[K(z) \frac{\partial N_j}{\partial z} \right]}_{\text{Termine di Diffusione}} - 2h\delta(z)\Gamma_j^{int} N_j + 2h\delta(z) \left[Q_j^{pri} + Q_j^{sec} \right]$$

Termine di Diffusione

Descrive il processo diffusivo attraverso un coefficiente di diffusione scalare $K(z, E)$. In generale il coefficiente di diffusione dipende dalla rigidità (o energia) e dalle coordinate spaziali. Se facciamo l'assunzione che la diffusione sia omogenea in tutto l'alone (K non dipendente da z) abbiamo un'ulteriore semplificazione:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[K \frac{\partial N_j}{\partial z} \right] = K \frac{\partial^2 N_j}{\partial z^2}$$

La dipendenza in rigidità (o energia) è cruciale e non può essere ignorata. Tipicamente si assume una forma:

$$K(R) \equiv \beta K_0 \left(\frac{R}{R_0} \right)^\delta$$

Dove K_0 (normalizzazione) e δ sono parametri liberi del modello e li determiniamo usando i dati.

Ci aspettiamo $K_0 \sim kpc/Myr$ e $\delta = 1/3$ (diffusione Kolmogorov), oppure $\delta = 1/2$ (diffusione Kraichnan)

Equazione di trasporto in una dimensione spaziale

$$\frac{\partial N_j}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(z) \frac{\partial N_j}{\partial z} \right] - \underbrace{2h\delta(z)\Gamma_j^{int} N_j}_{\text{Termine di distruzione}} + 2h\delta(z) \left[Q_j^{pri} + Q_j^{sec} \right]$$

Termine di Distruzione

Descrive la scomparsa delle particelle della specie dovuta a collisioni con il gas. Queste avvengono nel disco.

Per una specie k che si disintegra nel gas producendo una specie secondaria j, il termine di sorgente di j è:

$$\Gamma_j^{int} = \beta_k c n_{gas} \sigma_j^{gas}(E)$$

Dipende dalla densità del gas nel disco sottile n_{gas} , e dalla sezione d'urto totale inelastica $\sigma_j^{gas}(E)$.

Anche qui, possiamo considerare il fatto che il gas sia composto da più componenti (90% H + 10% He)

$$\Gamma_j^{int} = \beta_k c \sum_{gas} n_{gas} \sigma_j^{gas}(E)$$

NB il parametro $2h$ (altezza del disco) che entra nelle equazioni appare moltiplicato per la densità n_{gas} .

Possiamo considerare il prodotto $2h \cdot n_{gas}$ come densità superficiale di particelle, che è il parametro fisicamente rilevante. E' ben misurato (meglio dei singoli h e n_{gas}) e si considera come input noto del modello.

Equazione di trasporto in una dimensione spaziale

$$\frac{\partial N_j}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(z) \frac{\partial N_j}{\partial z} \right] - 2h\delta(z)\Gamma_j^{int} N_j + \underbrace{2h\delta(z) \left[Q_j^{pri} + Q_j^{sec} \right]}$$

Sorgenti primarie

Le sorgenti galattiche sono le supernova remnants (SNR). Accelerano RC negli shock prodotti a seguito delle esplosioni, attraverso il meccanismo di Fermi, e li rilasciano nell'ambiente circostante. Dalla teoria di Fermi ci aspettiamo una legge di potenza:

$$Q_j^{pri}(R) = q_0^j \beta \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-\nu}$$

- q_0^j abbondanza della specie j-esima (protoni, elio, C, N, O), parametro libero
- ν indice spettrale di accelerazione. Nella teoria di Fermi è $\nu = 2$.
- R_0 rigidità di riferimento (definisce le unità), es. $R_0 = 1 \text{ GV}$.

L'equazione di trasporto va scritta per ogni specie carica. Non tutte le specie hanno sorgenti primarie. Ad esempio, per Li-Be-B e antiparticelle, si può assumere $q_0^j=0$ (cioè $Q_j^{pri}(R) = 0$).

Equazione di trasporto in una dimensione spaziale

$$\frac{\partial N_j}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(z) \frac{\partial N_j}{\partial z} \right] - 2h\delta(z)\Gamma_j^{int} N_j + \underbrace{2h\delta(z) \left[Q_j^{pri} + Q_j^{sec} \right]}$$

Sorgenti secondarie

Le particelle secondarie sono prodotte dalle interazioni dei RC nel gas del disco (principalmente idrogeno). Ad esempio, i nuclei di carbonio si disintegrano e producono Li-Be-B; i protoni producono antiprotoni, etc.

Per una specie k che si disintegra nel gas producendo una specie secondaria j , il termine di sorgente di j è:

$$Q_j^{sec}(E) = N_k \cdot \Gamma_{k \rightarrow j} = N_k(E) \beta_k c n_{gas} \sigma_{k \rightarrow j}^{gas}(E)$$

Il termine di sorgente secondaria per la specie j dipende dal flusso della specie k , dalla densità del gas nel disco ($n_{gas} \approx 1 \text{ cm}^{-3}$) e dalla sezione d'urto di produzione $\sigma_{k \rightarrow j}^{gas}(E)$ (in pratica circa costante con l'energia)

Una data specie j può essere prodotta da più nuclei k . Inoltre il gas è composto da varie specie i (90% H + 10% He).

$$Q_j^{sec}(E) = \sum_{gas} \sum_{i, k > j} N_k \beta_k c n_i \sigma_{k \rightarrow j}^i(E)$$

Frammentazione nucleare e produzione secondaria di RC



Termine di produzione secondaria k->j $Q_j^{sec}(E) = N_k(E)\beta_k c n_i \sigma_{k \rightarrow j}^i(E)$

Questa espressione implicitamente assume la conservazione dell'energia cinetica per nucleone ($E_k = E_j$).

Nel caso più generale ($E_k \neq E_j$) dobbiamo utilizzare la sezione d'urto differenziale e integrare sulle energie di k:

$$Q_j^{sec}(E) = n_i \beta_k c \int_{E_k} N_k(E_k) \frac{d\sigma_{k \rightarrow j}^i}{dE}(E, E_k) dE_k$$

Per la produzione di antimateria è necessario usare questa formula generale. Per la frammentazione dei nuclei invece si assume sempre l'approssimazione $E_k = E_j$ (*straight-ahead approximation*). Cioè equivale ad assumere:

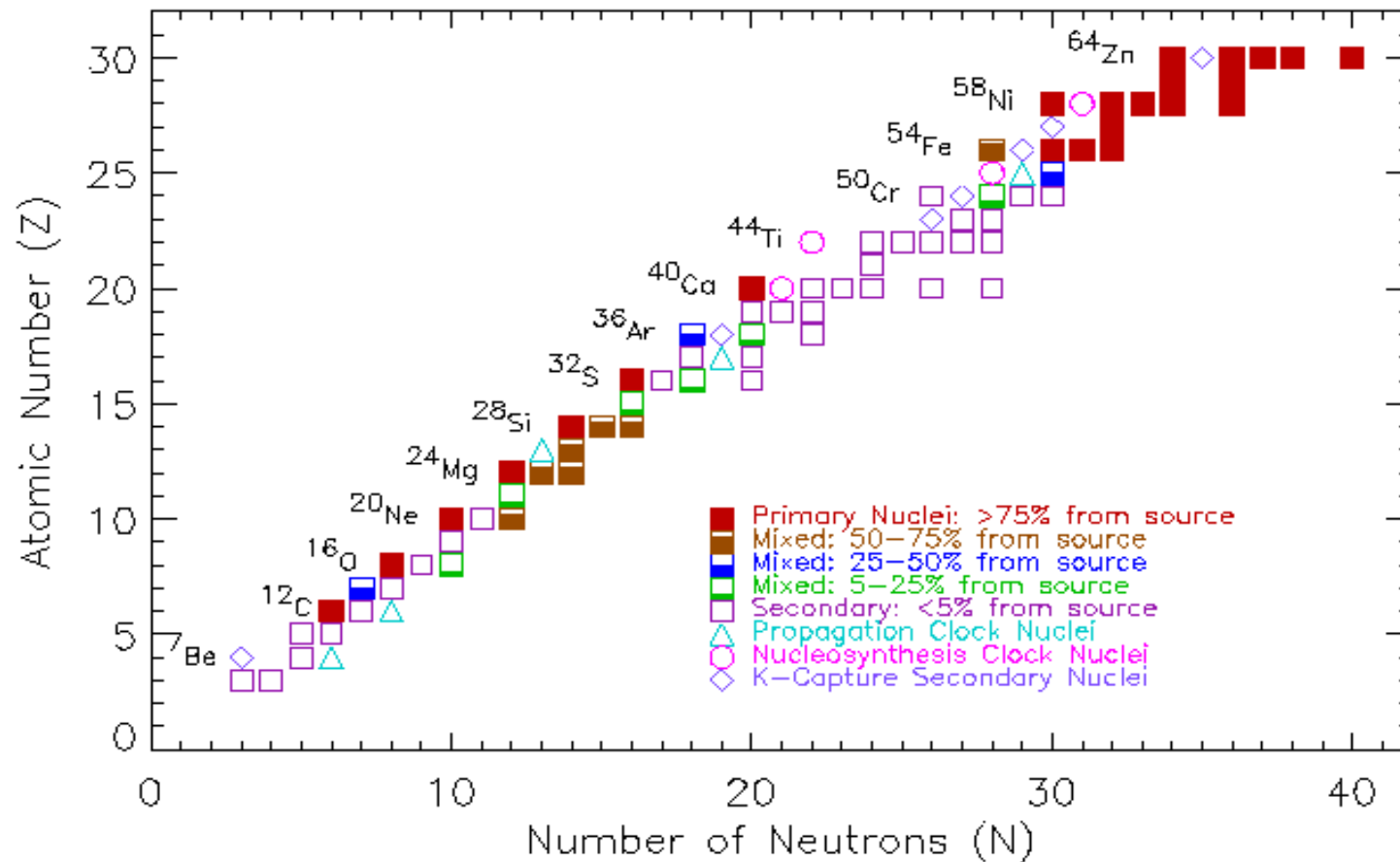
$$\frac{d\sigma_{k \rightarrow j}^i}{dE}(E, E_k) \equiv \sigma_{k \rightarrow j}^i(E) \cdot \delta(E - E_k) \quad \text{Cioè i frammenti j hanno le stesse energie dei progenitori k.}$$

Frammentazione nucleare e produzione secondaria di RC

La frammentazione **accoppia** le equazioni di trasporto delle varie specie nucleare.

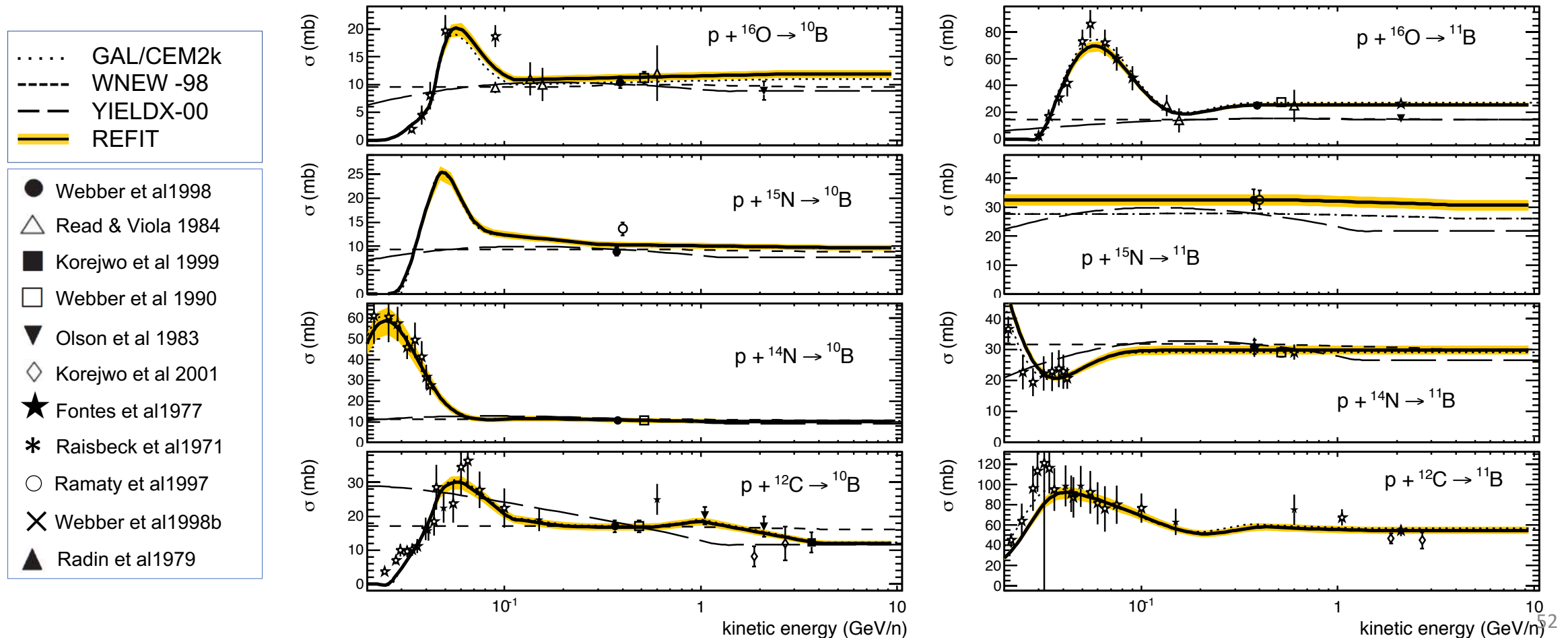
Il frammento secondario è in genere più leggero del nucleo progenitore.

→ Disaccoppiamento “a cascata”: si parte a risolvere l’equazione del nucleo più pesante (assumendo che sia primario) e si procede fino al più leggero.



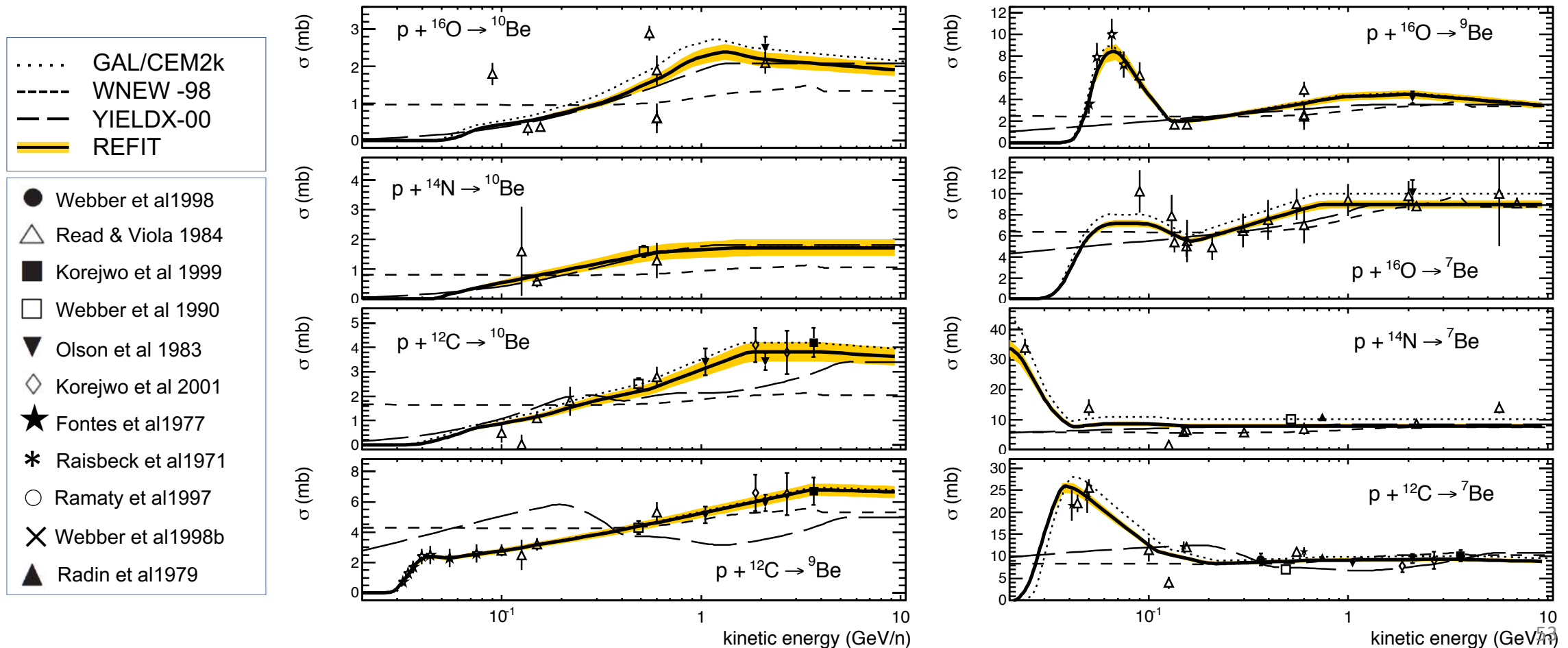
Sezioni d'urto di produzione C-N-O+ gas --> B +X

- Sezioni d'urto per le reazioni CNO(p,X)B tra 20MeV/n e 10GeV/n
- Dai di vari esperimenti condotti agli acceleratori tra il 1970 e il 2000.
- Parametrizzazioni: Webber 98-2003. Sielberberg & Tsao 2000. GALPROP (CEM2k)



Sezioni d'urto di produzione C-N-O+ gas --> Be + X

- Sezioni d'urto per le reazioni CNO(p,X)Be tra 20MeV/n e 10GeV/n
- Dai di vari esperimenti condotti agli acceleratori tra il 1970 e il 2000.
- Parametrizzazioni: Webber 98-2003. Sielberberg & Tsao 2000. GALPROP (CEM2k)



Soluzione stazionaria

Equazione di diffusione: $\frac{\partial N_j}{\partial t} = K \frac{\partial^2 N_j}{\partial z^2} - 2h\delta(z)\Gamma_j^{int} N_j + 2h\delta(z)Q_j^{pri} = 0 \rightarrow \text{steady state}$

Dividiamo per K, e definiamo le variabili alfa:

$$\alpha_1 = K' / K = 0$$
$$\alpha_2 = -(2h / K)\Gamma^{int}$$
$$\alpha_3 = (2h / K)Q^{tot}$$

Otteniamo l'equazione seguente (se K è omogeneo, $dK/dz=0$ e la derivata prima di N è assente):

$$N_j'' + \alpha_2 \delta(z) N_j + \alpha_3 \delta(z) = 0$$

Se ci mettiamo nell'alone ($z>0$ o $z<0$), l'equazione è semplicemente: $N'' = 0$

La soluzione nell'alone è quindi del tipo: $N = p + u_{\pm} z$

Per trovare u, applichiamo la condizione al contorno $N(-L)=N(+L)=0$ $u_{\pm} = \mp L / p$ Cioè: $N_j = p \left(1 - \frac{|z|}{L} \right)$

Per trovare p, imponiamo la continuità attraverso il disco:

$$N(\varepsilon) - N(-\varepsilon) + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(z) \alpha_2 N(z) dz + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(z) \alpha_3 dz = 0 \rightarrow \text{Si ottiene } p = \frac{\alpha_3}{2 / L - \alpha_2}$$

Soluzione stazionaria

Equazione di diffusione:

$$K \frac{\partial^2 N_j}{\partial z^2} - 2h\delta(z)\Gamma_j^{int} N_j + 2h\delta(z)Q_j^{pri} = 0$$

$$\left(\begin{array}{l} \alpha_1 = K' / K = 0 \\ \alpha_2 = -(2h / K)\Gamma^{int} \\ \alpha_3 = (2h / K)Q^{tot} \end{array} \right)$$

→ $N_j'' + \alpha_2 \delta(z) N_j + \alpha_3 \delta(z) = 0$

Soluzione del tipo:

$$N_j = \frac{\alpha_3}{2/L - \alpha_2} \left[1 - \frac{|z|}{L} \right]$$

*Tornando alle variabili originali, otteniamo
La densità dei RC all'equilibrio nella galassia:*

$$N_j(z, E) = \frac{hQ_j^{tot}(E)}{K(E)/L + h\Gamma_j^{int}(E)} \left[1 - \frac{|z|}{L} \right]$$

La soluzione appare in forma fattorizzata nelle variabili spaziali e energia: $N_j(z, E) = N_j^0(E) \cdot T(z)$

Qui $N_j^0(E)$ rappresenta la soluzione nel disco ($z=0$). E' quella che ci interessa per confrontarci con le osservazioni.

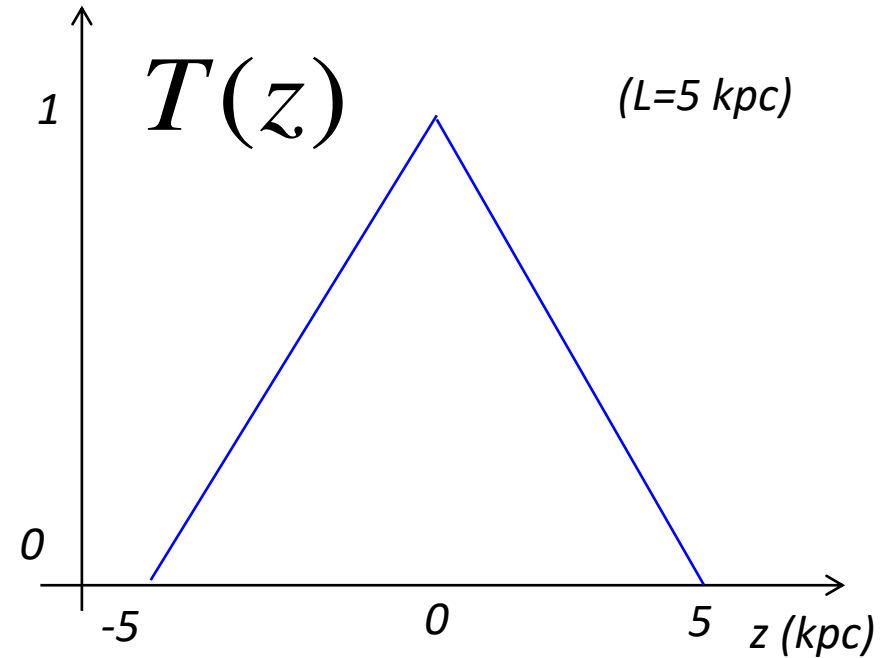
La dipendenza in energia $N_j^0(E)$ riflette quella della sorgente $Q_j^{tot}(E)$ e del coefficient di diffusione $K_j(E)$

Le particelle primarie e secondarie hanno spettri differenti perché prodotte da sorgenti Q_j differenti.

Soluzione stazionaria: il profilo longitudinale

$$N_j(z, E) = \frac{hQ_j^{tot}(E)}{K(E)/L + h\Gamma_j^{int}(E)} \left[1 - \frac{|z|}{L} \right]$$

$$N_j(z, E) = N_j^0(E) \cdot T(z)$$



*Dipendenza spaziale: è un profilo triangolare che picca a $z=0$ (nel disco).
Questa dipendenza è universale: vale per tutte le particelle a tutte le energie.*

Soluzione nel disco ($z=0$)

$$N_j(z, E) = N_j^0(E) \cdot T(z)$$

Distribuzione dello spettro dei RC in energia:

$$N_j^0(E) = \frac{hQ_j^{\text{tot}}(E)}{K(E)/L + h\Gamma_j^{\text{int}}(E)}$$

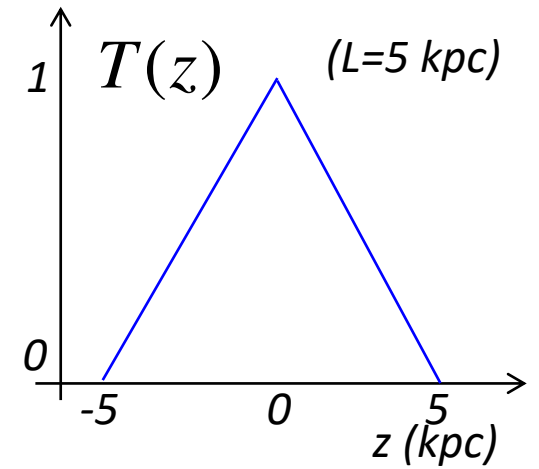
Dipende dallo spettro di sorgente $Q(E)$, dalla diffusione $K(E)$ e dalle interazioni.

- *La diffusione diventa sempre più rapida al crescere dell'energia: $K \propto E^\delta$*
- *Il termine di distruzione è quasi indipendente dall'energia, perché le sezioni d'urto sono circa costanti*

Ad energie sufficientemente alte ($E > \text{GeV}$), la diffusione domina sulla distruzione:

$$N_j^0(E) \approx \frac{hLQ_j^{\text{tot}}(E)}{K(E)}$$

Ad energie basse ($E < \text{GeV}$), sono le interazioni dominare, per cui si avrebbe $N_j^0(E) \propto Q_j/\Gamma_j^{\text{int}}$, ma in pratica questo regime non viene raggiunto. Infatti a $E < \text{GeV}$ le approssimazioni fatte non sono valide. Ad esempio abbiamo trascurato le perdite continue di energia (es. per ionizzazione), che diventano rilevanti a basse energie.



La corrispondenza con il modello Leaky-Box

$$N_j(z, E) = N_j^0(E) \cdot T(z)$$

Soluzione del Modello di diffusione [1DIM]

$$N_j^0(E) = \frac{hQ_j^{tot}(E)}{K(E)/L + h\Gamma_j^{int}(E)}$$

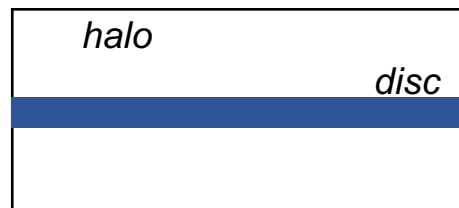
Soluzione del Modello leaky-box [0DIM]

$$N_j^{LB}(E) = \frac{\langle q_j^{tot} \rangle}{\tau_{esc}^{-1} + \tau_{int}^{-1}}$$

Corrispondenza DIFF-LB

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle n \rangle_{LB} = \frac{h}{L} n_I \\ \langle q_j^{tot} \rangle_{LB} = \frac{h}{L} Q_j^{tot} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \tau_{esc} = L^2 / K \\ \tau_j^{int} = \langle n \rangle \beta_j c \sigma_j^{int} \end{array} \right.$$

Modello di diffusione (1D)



Modello leaky box (0D)



Il modello Leaky-Box non contiene informazione spaziale. Possiamo interpretarlo come un modello di diffusione in cui il gas e sorgenti sono “spalmati” in tutta la regione di propagazione. Il fattore di diluizione è h/L , rapporto tra dimensioni di disco e alone.

$$\langle n \rangle_{LB} = \frac{h}{L} n_I$$

$$\langle q_j^{tot} \rangle_{LB} = \frac{h}{L} Q_j^{tot}$$

Predizioni di base

Predizioni per le osservabili fondamentali

- Spettri dei nuclei primari (protoni, He, C-N-O, Fe)
- Spettri secondari e rapporti secondari/primari (Li/O, B/C, Ti/Fe, antiparticelle)
- Abbondanze dei nuclei radioattivi, rapporto $^{10}\text{Be}/^{9}\text{Be}$
- Ampiezza dell'anisotropia di dipolo

Parametri liberi del modello (da determinare usando i dati)

- Y : fattori di normalizzazione Y = abbondanze primarie nelle SNR
- ν : Indice spettrale dello spettro di accelerazione
- δ : Indice spettrale del coefficiente di diffusione
- K_0 : Normalizzazione del coefficiente di diffusione K
- L : Estensione verticale dell'alone diffusivo

Ingredienti del modello che consideriamo “noti” (determinati indipendentemente)

- Distribuzione spaziale delle sorgenti e della materia interstellare. Composizione ISM.
- *Sezioni d'urto di frammentazione nucleare (distruzione e produzione secondaria)*

Predizioni di base: spettri primari (p, He, C-N-O, Fe)

$$J_j^{pri}(E) = \left(\frac{\beta_j c}{4\pi} \right) \frac{h Q_j^{pri}(E)}{K(E)/L + h \Gamma_j^{int}(E)}$$

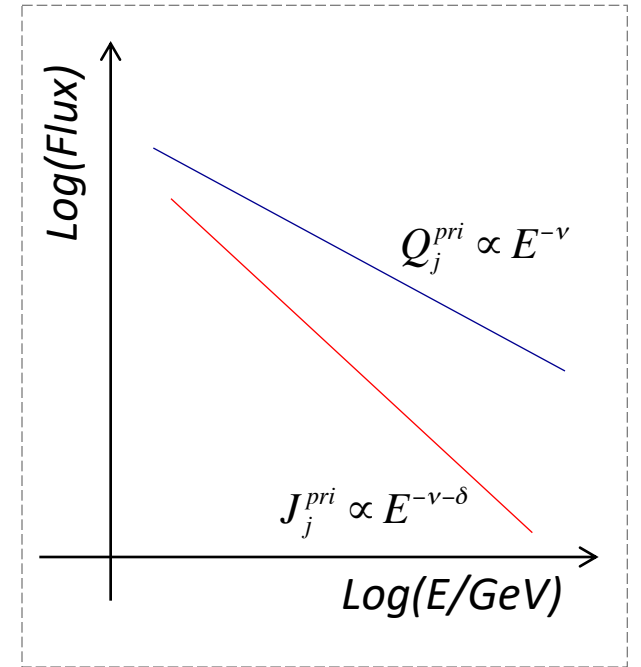
$$\left\{ \begin{array}{ll} Q_j^{pri} = Y_j (R / R_0)^{-\nu} \propto E^{-\nu} & \text{termine di sorgente primario: accelerazione DSA con } \nu \sim 2 \\ K = K_0 (R / R_0)^{\delta} \propto E^{\delta} & \text{diffusione galattica, con } \delta \sim 0.3-0.6 \text{ e } K_0 \sim 10^{28} \text{ cm}^2/\text{s} \end{array} \right.$$

Ad alte energie, $E \gg \text{GeV}/n$ (diffusione domina)

$$K / L \gg h \Gamma^{int}$$

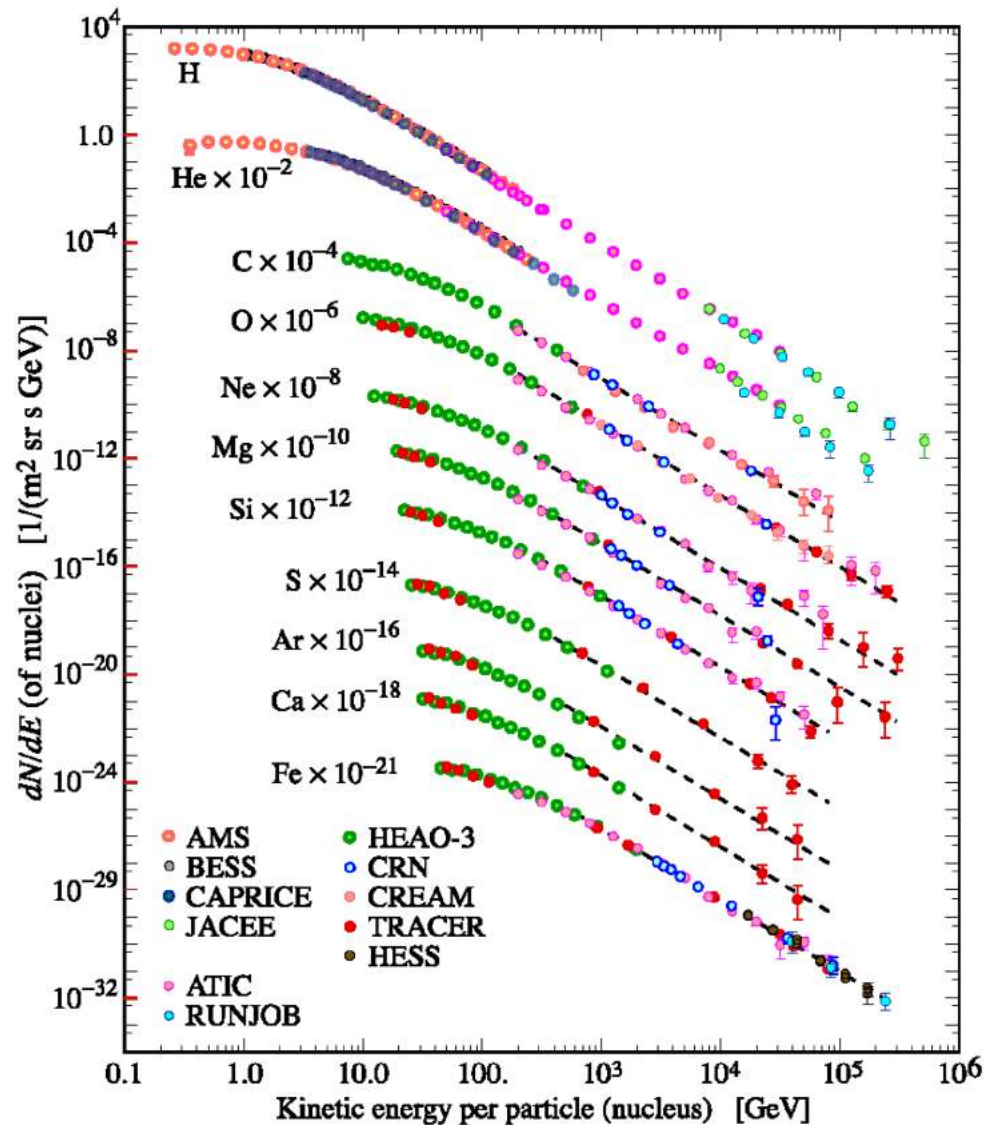
$$J(E) \propto \frac{Q(E)}{K(E) / L}$$

$$J^{pri}(E) \cong \frac{Y}{K_0 / L} E^{-(\nu+\delta)}$$



- ✓ Il flusso all'equilibrio è una legge di potenza.
- ✓ A causa della diffusione, $J(E)$ decresce più rapidamente dello spettro di sorgente $Q(E)$
- ✓ Dai **dati** di RC primari: otteniamo abbondanze relative Y e somma $\delta + \nu$ (non δ e ν)

Predizioni di base: spettri primari (p, He, C-N-O, Fe)

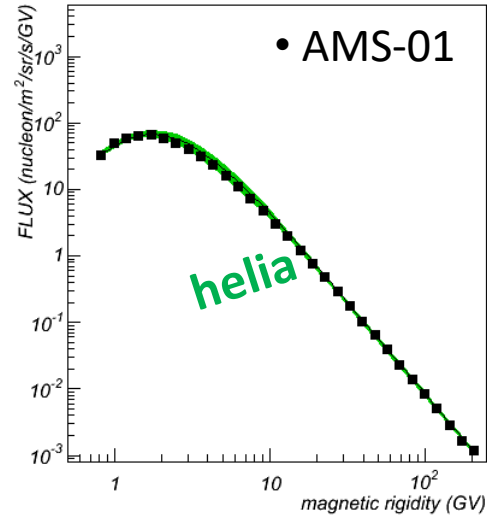
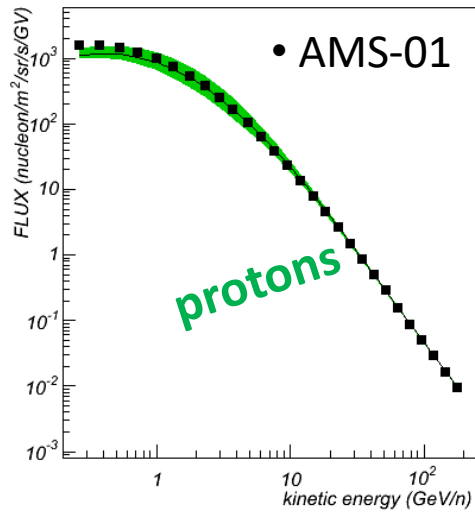


Applicando il modello agli spettri energetici dei nuclei si possono determinare la somma $\delta + \nu \sim 2.7$ e i fattori Y di abbondanza relativa di RC nelle sorgenti.

$$J^{pri}(E) \cong \frac{Y}{K_0 / L} E^{-(\nu + \delta)}$$

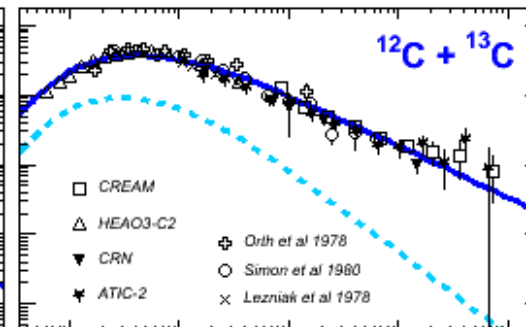
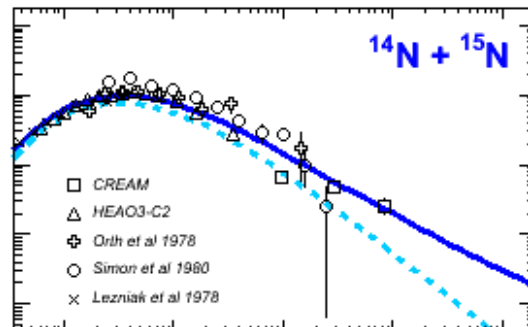
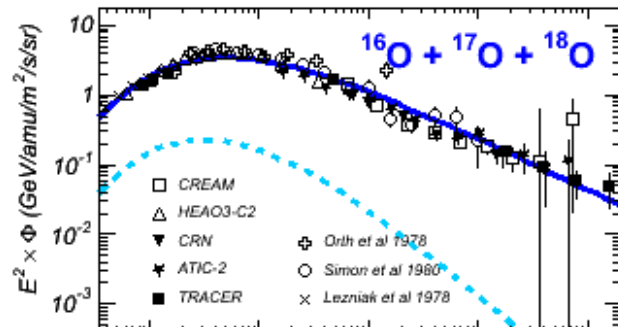
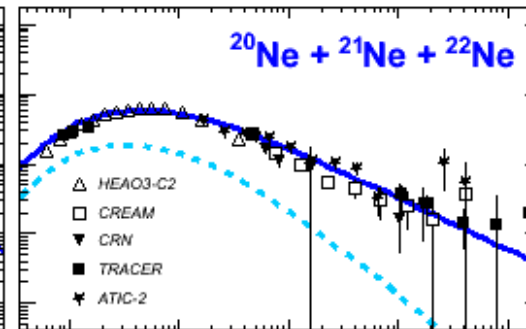
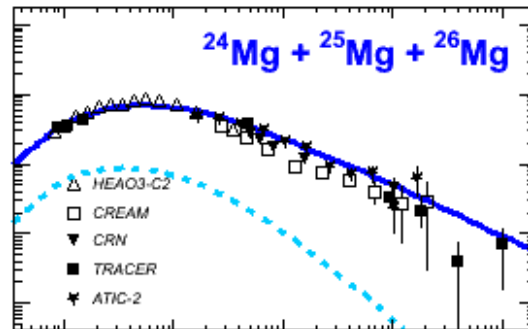
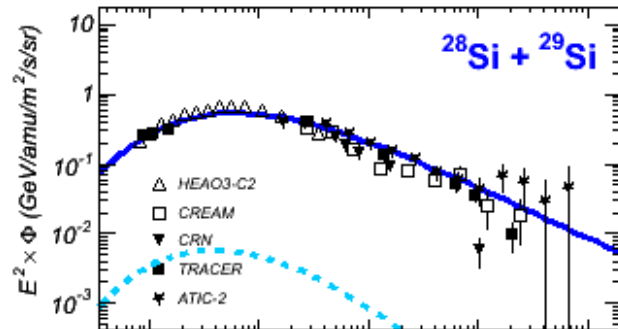
*Gli spettri dei nuclei primari **non** permettono la determinazione dei singoli parametri δ e ν , i quali risultano infatti in degenerazione. (Source-transport degeneracy).*

Predizioni di base: spettri primari (p, He, C-N-O, Fe)



NB: chiamiamo “primari” quelle Specie che hanno termine di sorgente Q non nullo (Y>0). Tuttavia il loro flusso è composto *anche* da contributi minori di natura secondaria. Nessuna specie è interamente primaria.

Blue: total elemental spectra
Cyan: secondary component



Predizioni di base: secondari e rapporti S/P (B/C, Li/O, F/Ne, Ti/Fe)

$$J_j^{sec}(E) = \left(\frac{\beta_j c}{4\pi} \right) \frac{h Q_j^{sec}(E)}{K(E)/L + h \Gamma_j^{int}(E)}$$

$$con \quad Q_j^{sec}(E) = N_{pri} \cdot \Gamma_{pri \rightarrow j}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_j^{sec} = \sum_k \Gamma_{k \rightarrow j} N_k \sim \Gamma_{p \rightarrow j} N_p \quad \text{termine di sorgente primario: accelerazione DSA con } v \sim 2 \\ K = K_0 (R / R_0)^\delta \propto E^\delta \quad \text{diffusione galattica, con } \delta \sim 0.3-0.6 \text{ e } K_0 \sim 10^{28} \text{ cm}^2/\text{s} \end{array} \right.$$

Ad alte energie, $E \gg \text{GeV}/n$

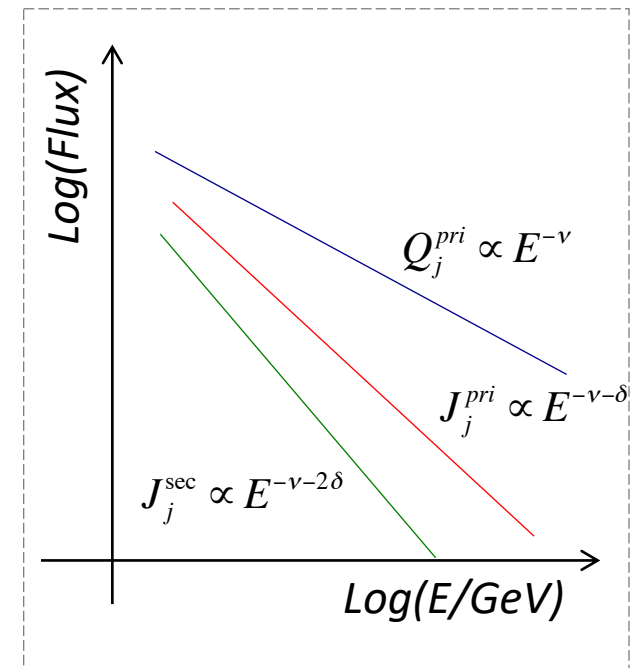
$$K / L \gg h \Gamma^{int}$$

$$J_s / J_p \propto \frac{Q^{sec}(E)}{K(E) / L}$$

$$J_s / J_p \cong \frac{\Gamma_{p \rightarrow s}}{K_0 / L} E^{-\delta}$$

- ✓ Gli spettri dei nuclei secondari decrescono più rapidamente dei primari
- ✓ I rapporti S/P (es. B/C) permettono di determinare direttamente il parametro δ
- ✓ Rapporto B/C: vede l'effetto "netto" della propagazione diffusiva
- ✓ **Dalla combinazione di dati RC primari e rapporti S/P otteniamo:**

- Le composizioni (abbondanze relative) alla sorgente Y
- L'indice spettrale δ del coefficiente di diffusione
- L'indice dello spettro di accelerazione v
- Rapporto tra K_0/L (normalizzazione diffusione / dimensione alone)



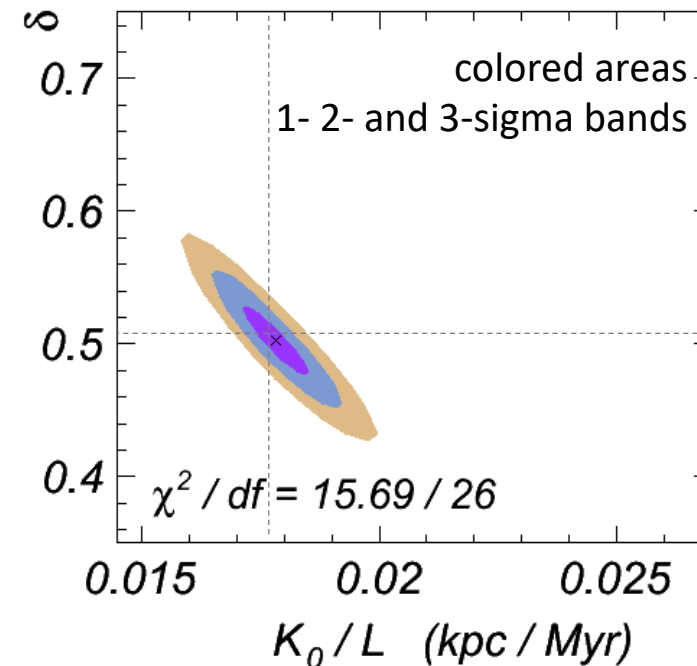
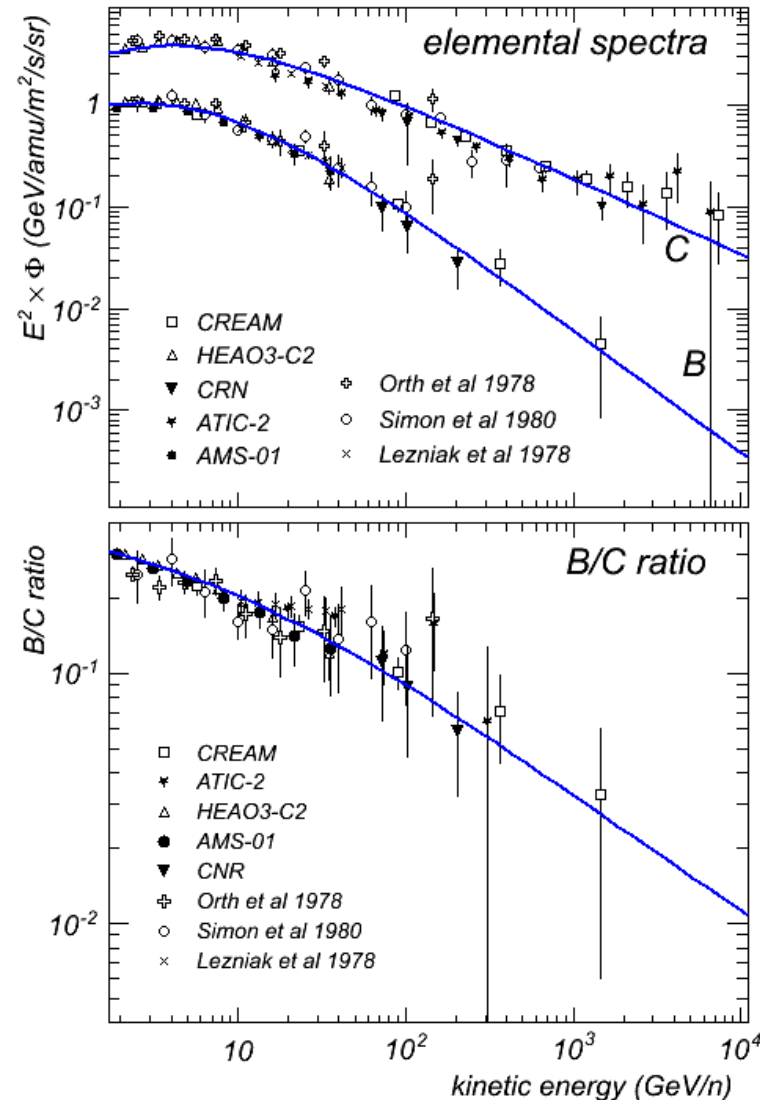
I parametri K_0 e L non sono vengono risolti singolarmente usando P ed S/P

Predizioni di base: secondari e rapporti S/P (B/C, Li/O, F/Ne, Ti/Fe)

$E > 2 \text{ GeV/n}$

Usiamo i dati per determinare i parametri del modello

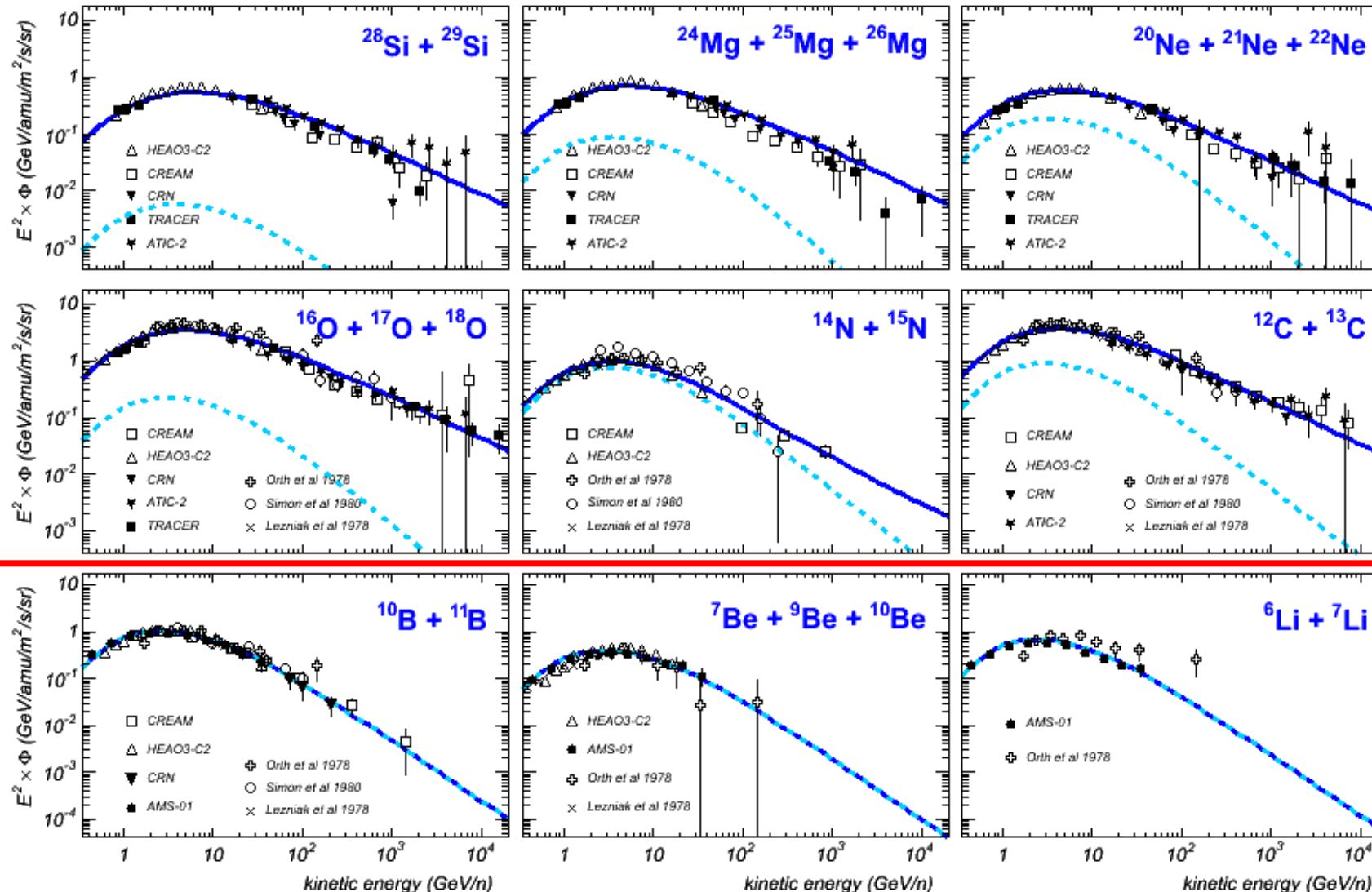
- δ , indice spettrale del coefficiente di diffusione K
- K_0/L , rapporto tra normalizzazione del coefficiente di diffusione e estensione verticale dell'alone
best fit parameters



Predizioni di base: secondari e rapporti S/P (B/C, Li/O, F/Ne, Ti/Fe)

Blue: total elemental spectra

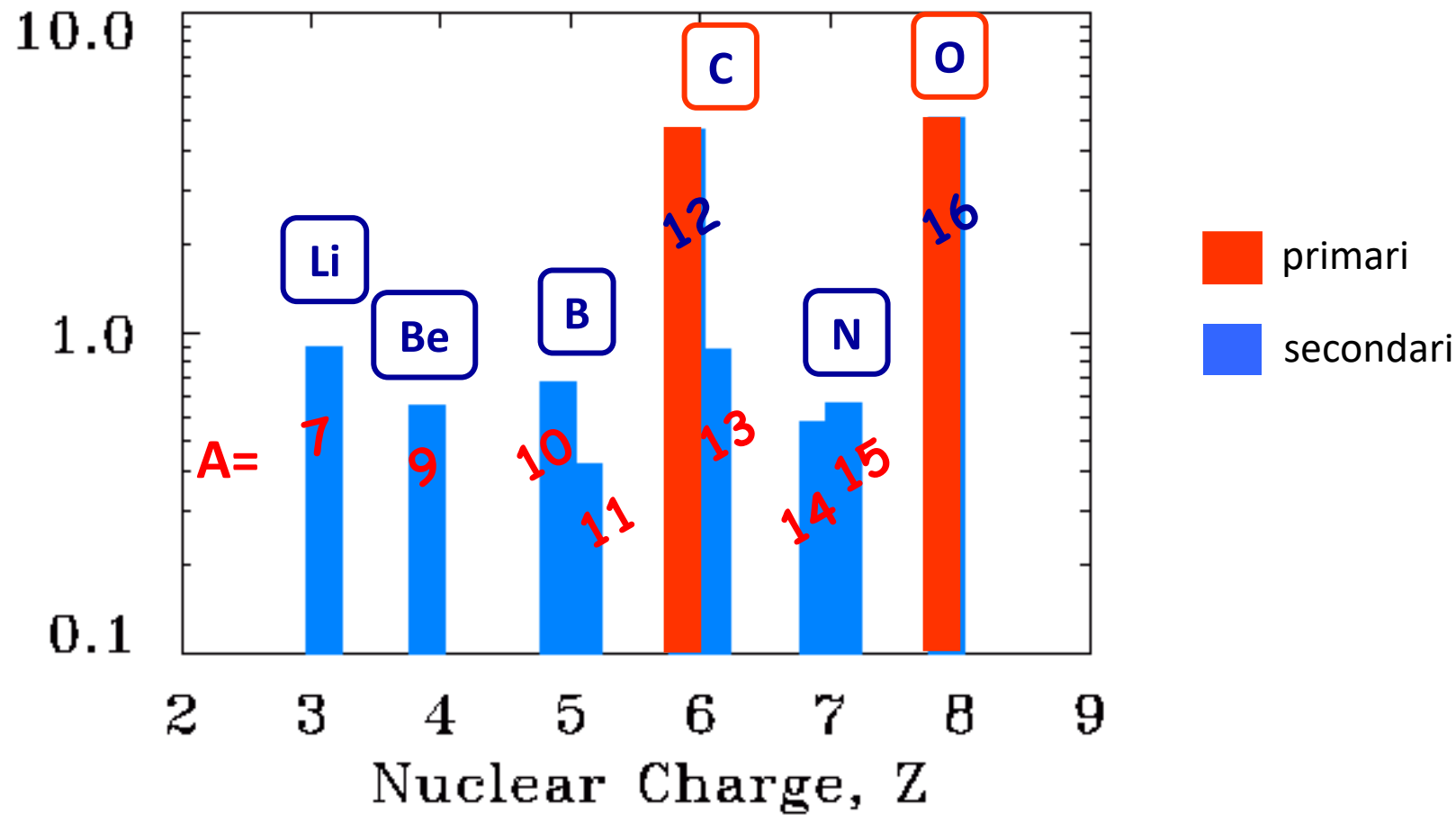
Cyan: secondary component



Fit ai dati Li-Be-B
assumendo che siano
interamente secondari

Predizioni di base: composizione primaria e secondaria

La [sovra]abbondanza dei nuclei secondari Li-Be-B osservate nei raggi cosmici è ben riprodotta dal modello



Se partiamo dalla propagazione di nuclei primari C e O e li facciamo frammentare, come risultato otteniamo le abbondanze in figura

Predizioni di base: nuclei radioattivi (rapporto $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$)

$$^{10}\text{Be} \rightarrow ^{10}\text{B} + e^- + \bar{\nu}$$

$$\tau_{10} \sim 1.5 \text{ Myr}$$

$$\lambda_{10} \sim \sqrt{\gamma \tau_{10} K}$$

Ci mettiamo a basse energie $E < \text{GeV}/n$, nel limite:

$$\lambda_{10}(E) \ll L$$

A basse energie, la propagazione del berillio-10 non è più sensibile alla dimensione della regione L (cioè ai “bordi”), ma dipende solo dal coefficiente di diffusione.

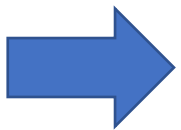
Trascurando le interazioni di distruzione (anche se non dovremmo), scriviamo:

$$N_{10}(E) \sim \frac{Q_{10}^{\text{sec}}}{K / \lambda_{10}} \quad \text{10Be, secondario instabile}$$

$$N_9(E) \sim \frac{Q_9^{\text{sec}}}{K / L} \quad \text{9Be, secondario stabile}$$

10Be e 9Be sono prodotti per frammentazione dagli stessi progenitori o quasi (C-N-O), e le sezioni d'urto sono molto simili

$$F \equiv Q_{10}^{\text{sec}} / Q_9^{\text{sec}} \sim 1$$



$$\left(^{10}\text{Be} / ^9\text{Be} \right) \propto \frac{\lambda_{10}}{L} \propto \frac{\sqrt{K_0}}{L}$$

Avevamo visto che i dati sul rapporto B/C sono sensibili alla combinazione K_0/L .

Il rapporto $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$ invece è sensibile alla combinazione $\text{sqrt}(K_0)/L$.

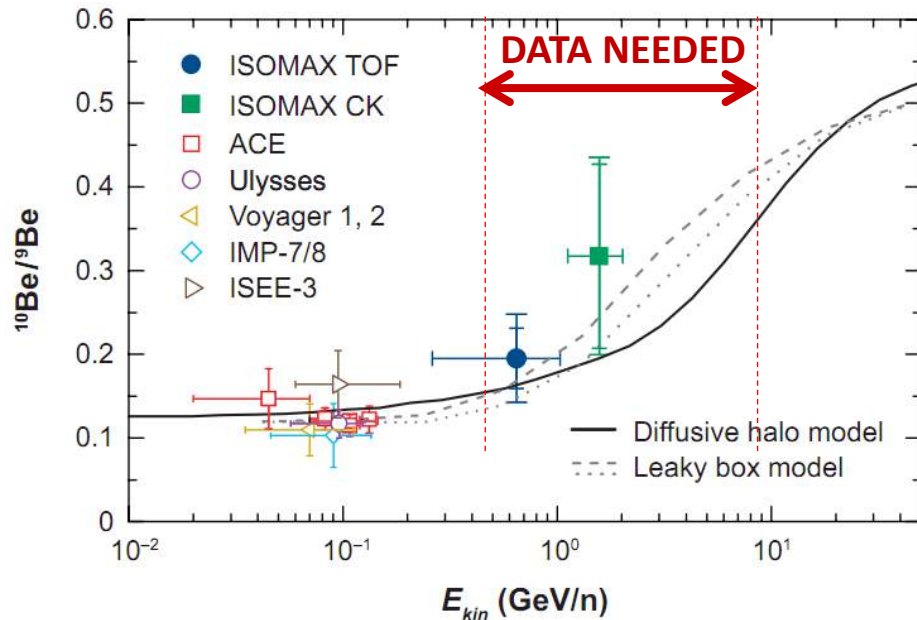
→ L'uso simultaneo dei due rapporti permette la determinazione dei singoli parametri e K_0 e L .

Predizioni di base: nuclei radioattivi (rapporto $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$)

In base ai dati si stima $L \sim 4$ kpc

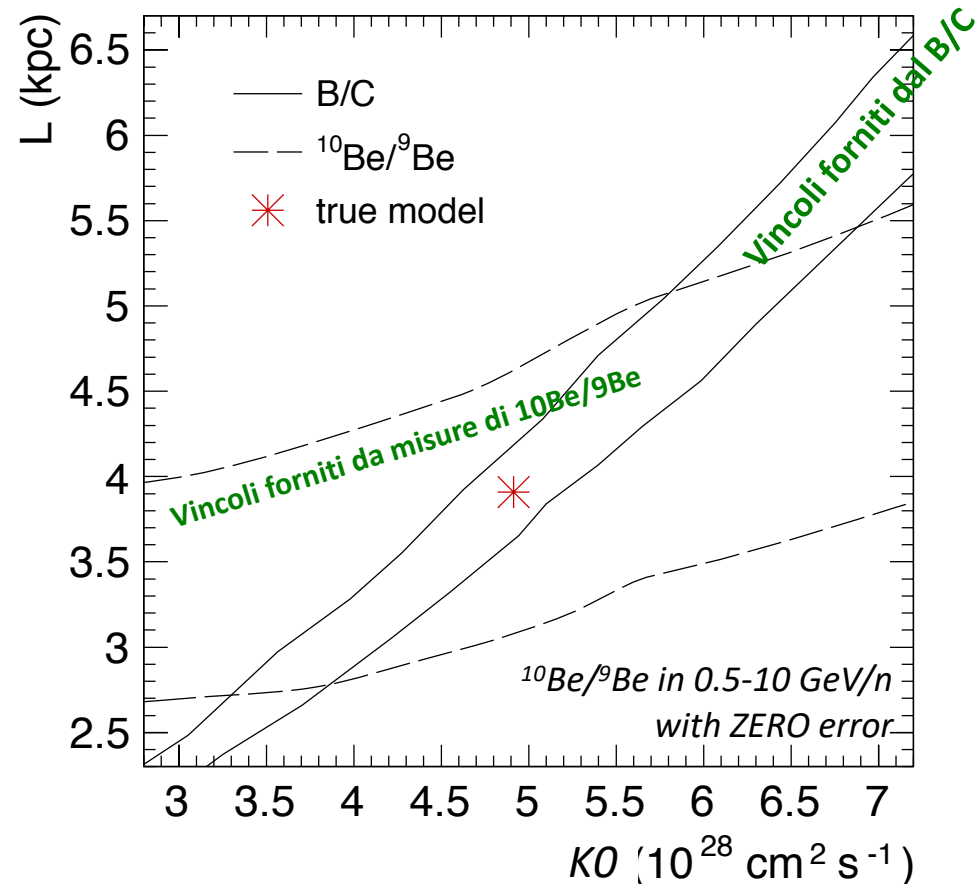
Tuttavia le misure esistenti sugli isotopi del berillio sono al momento molto scarse.

→ L'estensione dell'alone è poco nota.



$$\left(^{10}\text{Be} / ^9\text{Be} \right) \propto \frac{\sqrt{K_0}}{L}$$

$$(B / C) \propto \frac{L}{K_0}$$



Predizioni di base: anisotropia

La formulazione 1D *non* ci fornisce informazioni utili sull'anisotropia. Possiamo solo fare valutazioni qualitative. Per l'anisotropia di dipolo (da pag. 33):

$$J(\vartheta) \cong J_0 + J_1 \cos(\vartheta) \quad \eta = \frac{J_1}{J_0} = \frac{J_{Max} - J_{Min}}{J_{Max} + J_{Min}} \sim O(10^{-3})$$

$$i = K \nabla n = \frac{4\pi}{c} K \nabla J(\vartheta) \quad i_z = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi J(\vartheta) \cos \vartheta d \cos \vartheta = \frac{4\pi}{c} K \frac{\partial}{\partial z} [J_0 + J_1 \cos \vartheta] \rightarrow i_z = \frac{4\pi}{3} J_1(E)$$

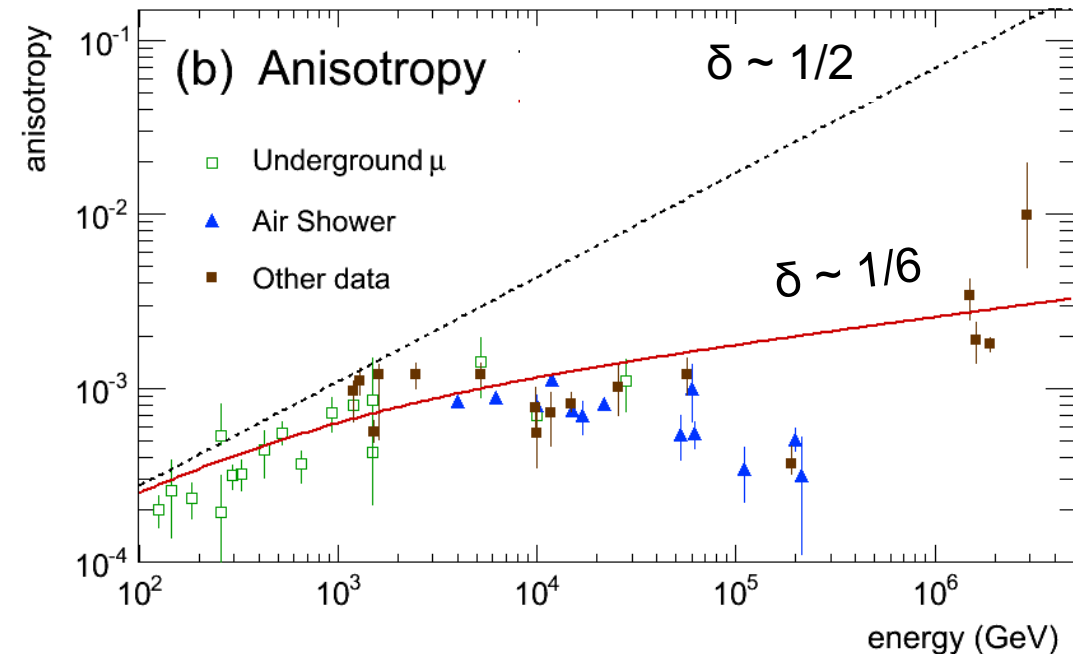
Anisotropia risultante da diffusione vertical (lungo z):

$$\eta_z = \frac{3}{c} \frac{K}{n} \left| \frac{\partial n}{\partial z} \right|$$

Esattamente nel disco (z=0) non c'è anisotropia lungo z. Ma noi siamo "vicini" al disco (z₀~20pc). Si può stimare:

$$\eta_z(E) \sim \frac{3K(E)}{cL} \frac{z_0}{h} \propto E^\delta$$

Alla buona, $\eta(E)$ cresce con il crescere di E come il coefficiente di diffusione $K(E)$. Similmente a come il rapporto B/C decresce con $1/K(E)$



Problema aperto: le misure di anisotropia suggeriscono valori di δ più bassi di quelli ottenuti dal B/C

Modulazione solare

Il fenomeno della modulazione solare

A basse energie ($E < \text{qualche GeV/n}$), il flusso misurato di RC cambia gradualmente nel tempo

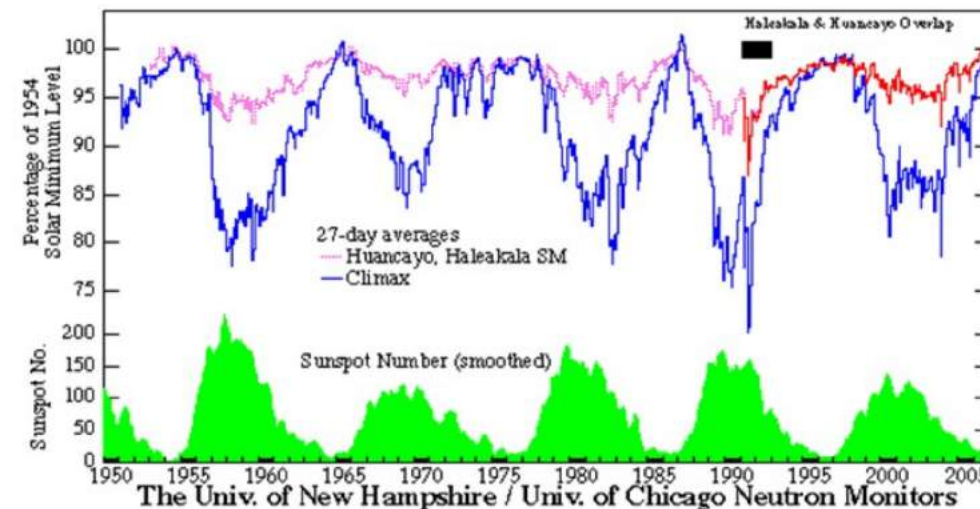
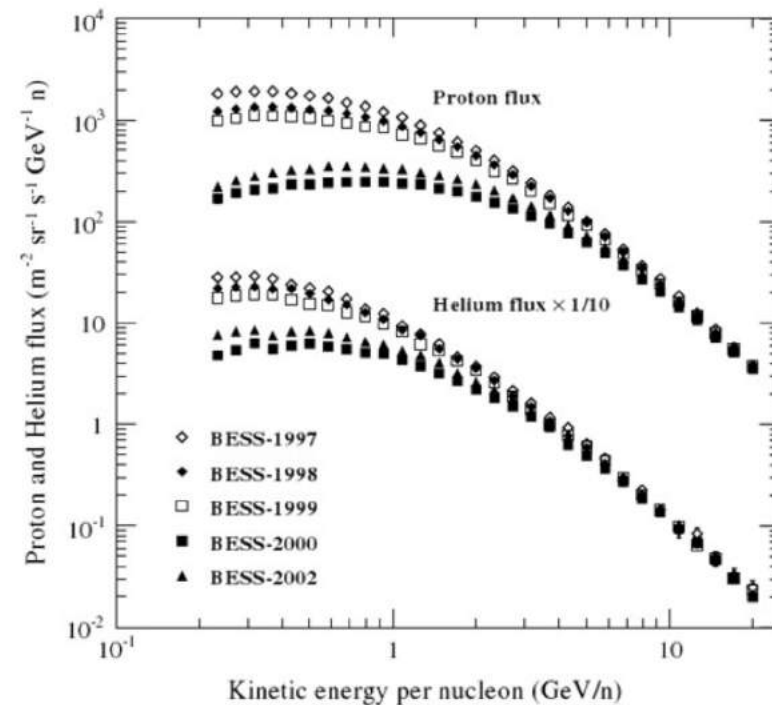
Questa variazione di flusso è anti-correlata all'attività solare, con un periodo di circa 11 anni

I RC osservati a terra, dopo aver viaggiato nella Galassia, si propagano nell'eliosfera, che è un plasma magnetizzato in continua espansione idrodinamica.

Il trasporto dei RC nell'eliosfera è differente dal resto della Galassia.

- Diffusione con coefficiente K proprio dell'eliosfera
- Trasporto convettivo dovuto al vento solare V

Il modello di propagazione visto prima fornisce la predizione del flusso di RC *interstellare*, cioè esterno all'eliosfera. Per descrivere i dati, occorre anche modellizzare l'effetto della modulazione solare



Il fenomeno della modulazione solare

Time dependent

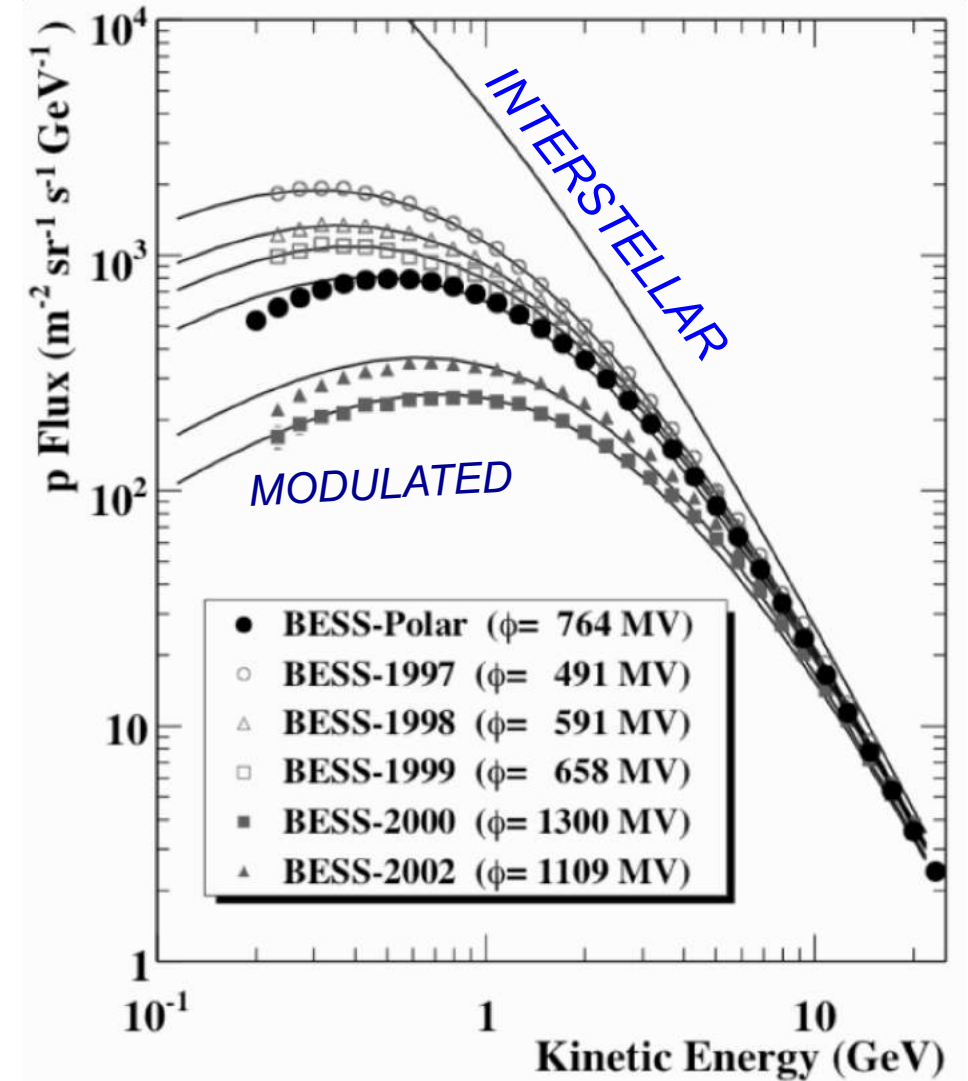
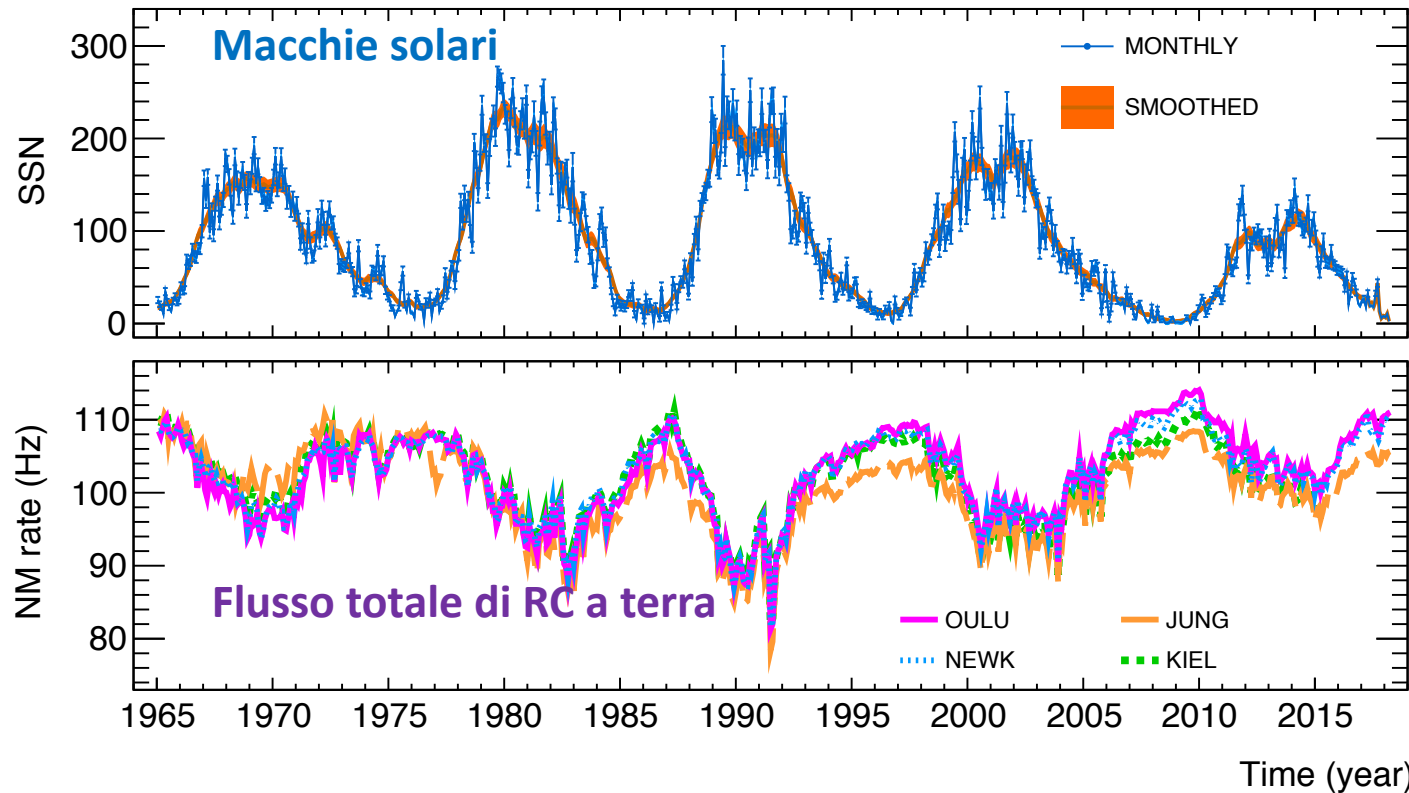
Space dependent

Energy dependent

Particle dependent

→ Connessione con l'attività solare

→ Connessione con varie tipologie di dati

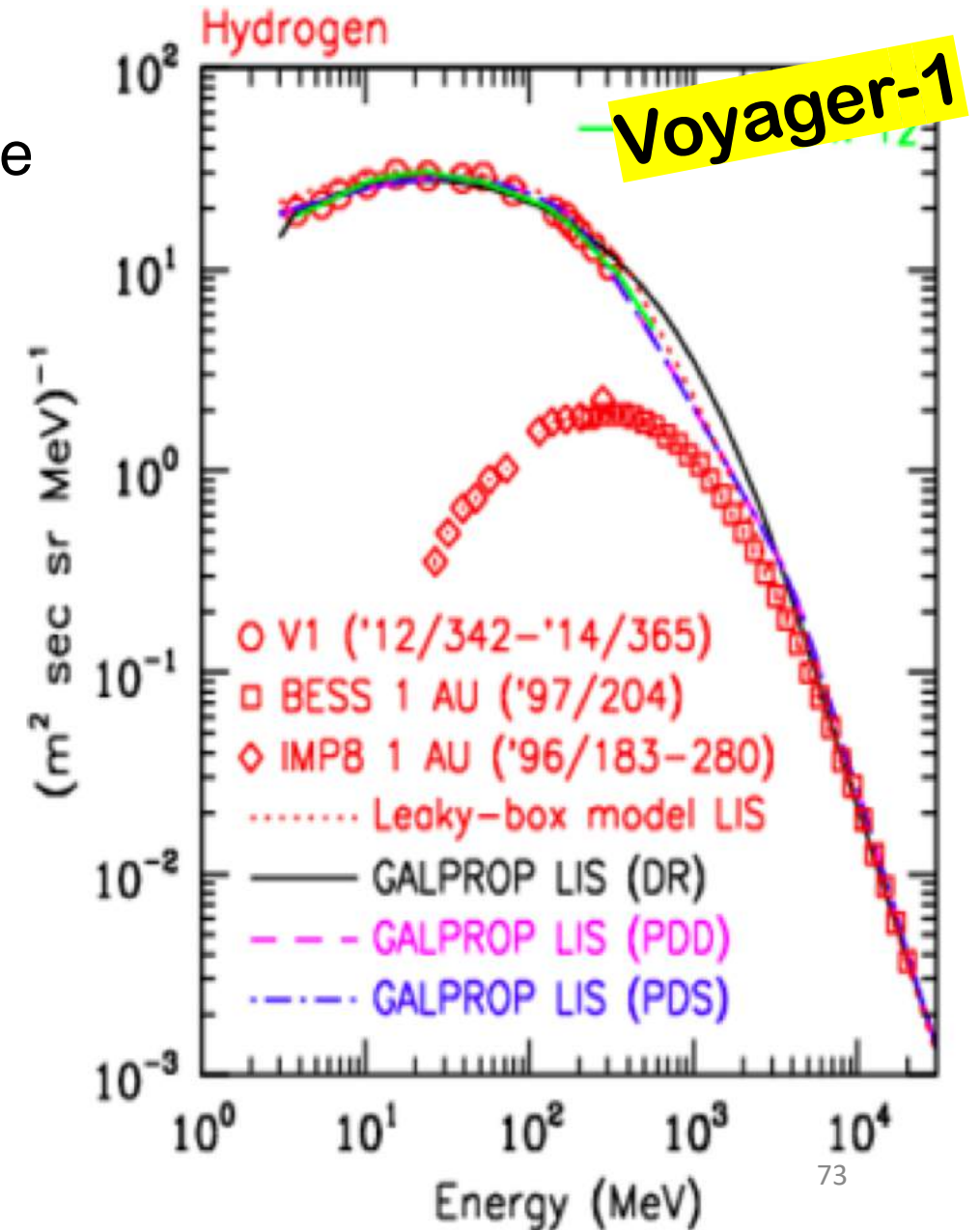
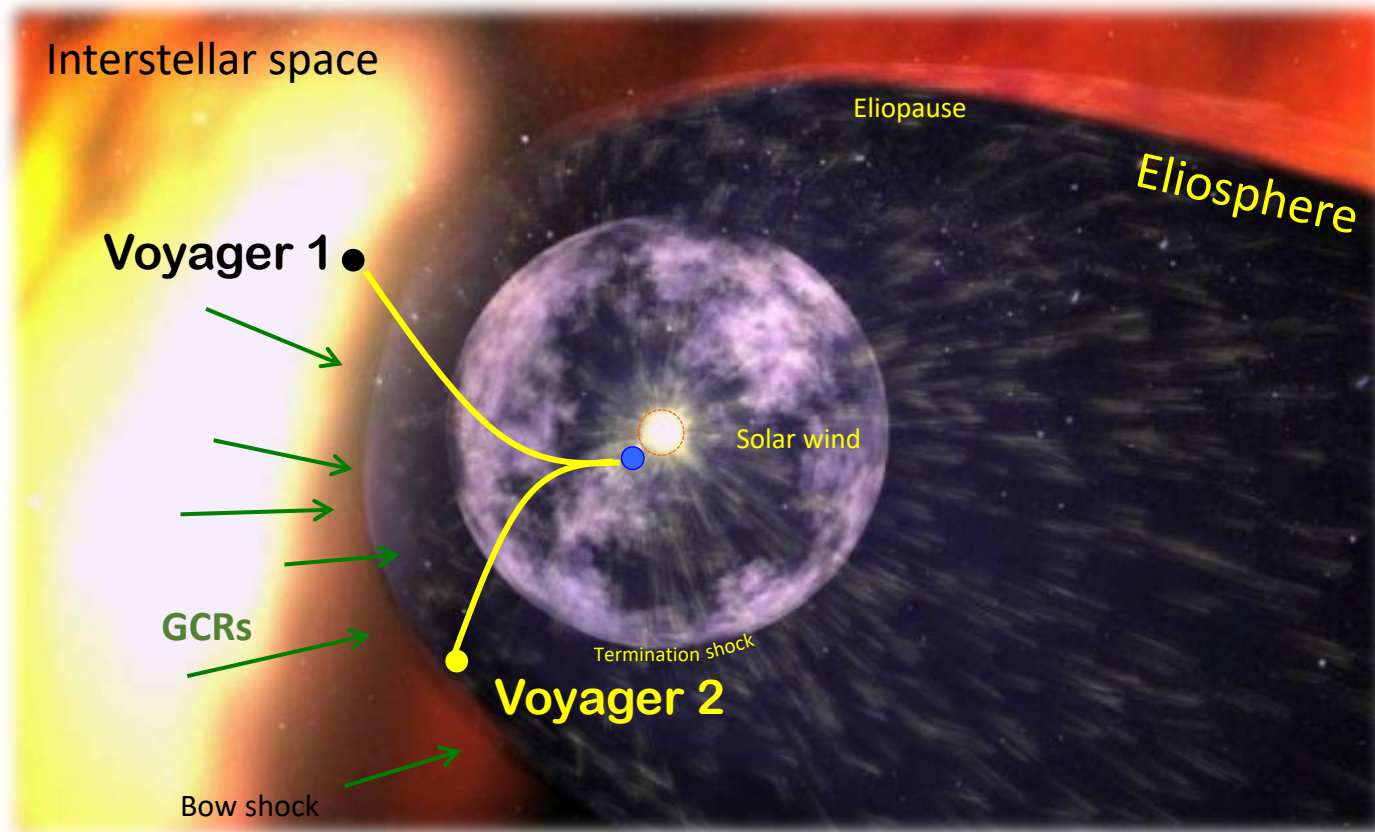


Il fenomeno della modulazione solare

Voyager-1: I primi dati dallo spazio interstellare

Voyager-2: dicembre 2018 nello spazio interstellare

Cummings et al. ApJ 831, 18, 2016



Trasporto di particelle nell'eliosfera

L'equazione del trasporto origina dall'equazione di continuità:

Il tasso di cambiamento di particelle in un dato volume deve essere uguale al tasso di particelle che attraversano una superficie chiusa attorno a quell volume, più il tasso di produzione e distruzione di particelle dovute a processi fisici che avvengono all'interno del volume

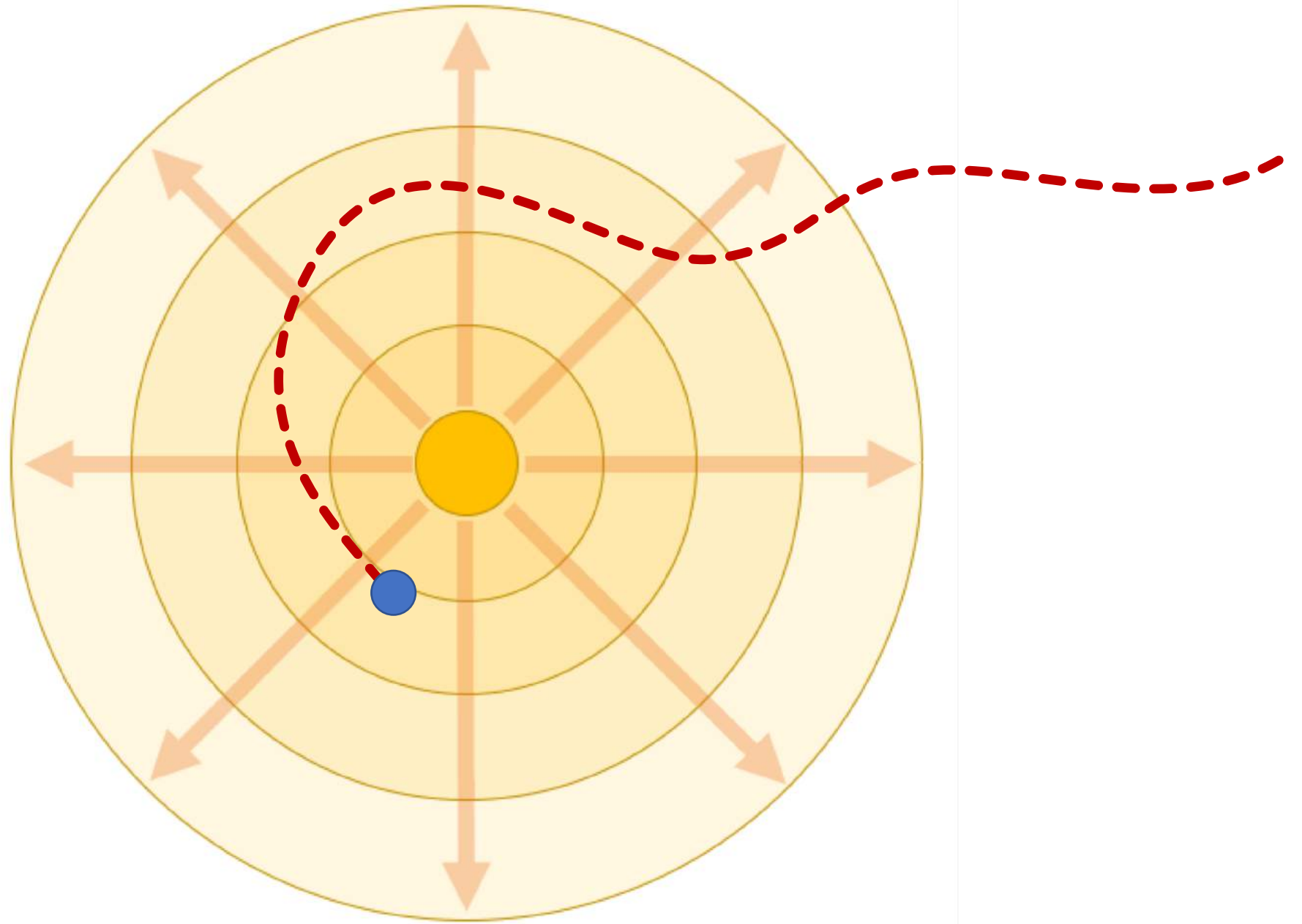
$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot S = q$$

La fisica del problema è contenuta nei processi che determinano il flusso (la corrente) S . Nel vento solare, la corrente di particelle è composta da due parti:

- una **corrente diffusiva**, legata allo scattering delle particelle sulle irregolarità a piccola scala del campo magnetico solare turbolento (HMF);
- una **corrente convettiva**, diretto radialmente verso l'esterno, che rappresenta l'effetto del vento solare che agisce a velocità V .

La corrente convettiva è semplicemente $S_c = nV$.

La corrente diffusiva dipende dal meccanismo di diffusione. In generale sappiamo che $S_d = -k\nabla n$



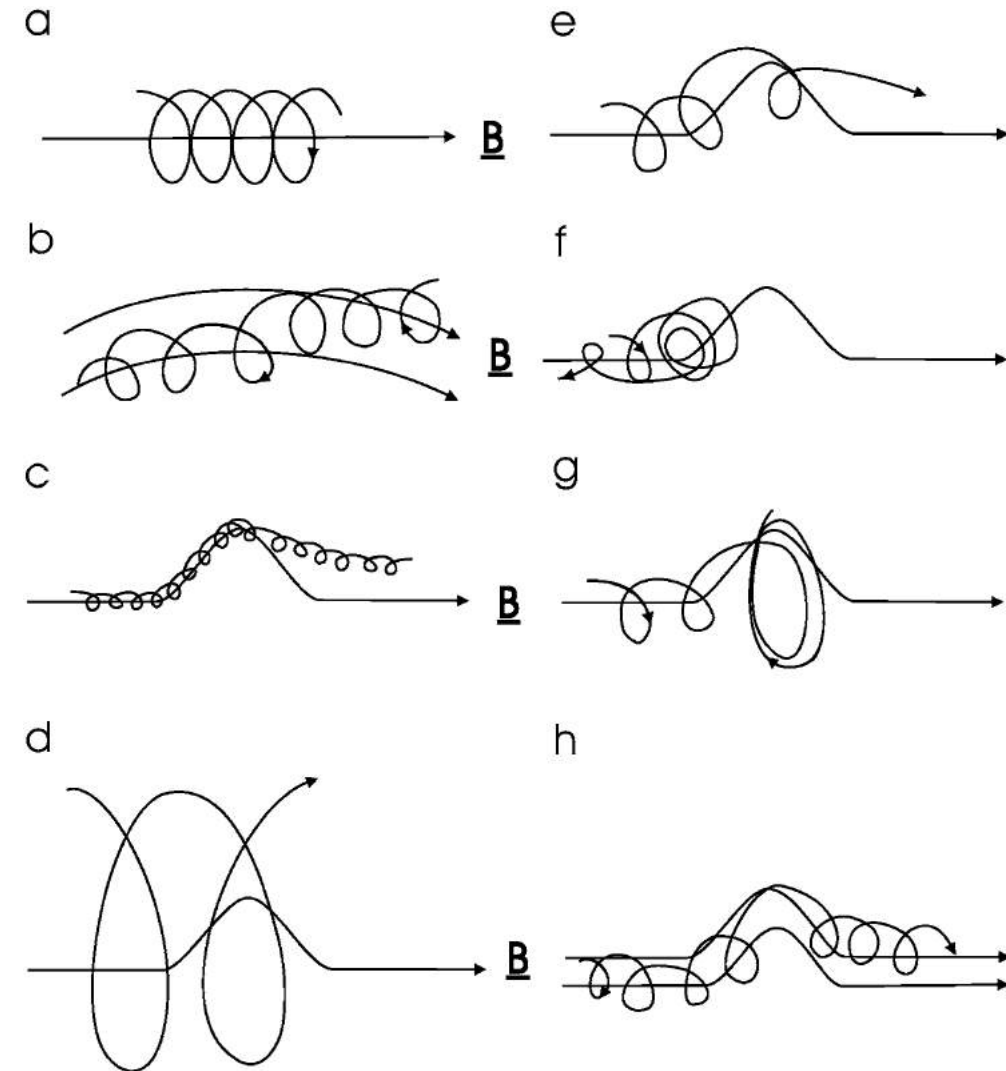
Trasporto di particelle nell'eliosfera

Nelle figure (c), (d), (e), (f) e (g): moto delle particelle lungo **un'irregolarità** di una linea di campo **B**.

Se la l'irregolarità è della stessa dimensione del giroraggio delle particelle, allora la traiettoria della particella dipende fortemente dalla fase del moto nel momento in cui la particella inizia a sentire l'irregolarità, e si possono anche avere riflessioni (f) o confinamenti (g). Se il campo magnetico è noto, le traiettorie possono essere calcolate dall'espressione della forza di Lorentz $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$.

Le irregolarità magnetiche fanno parte della componente **turbolenta** del campo magnetico, in contrasto a quella **regolare** che può essere modellizzata in maniera parametrica. In queste irregolarità, le particelle vengono diffuse con un angolo di pitch in maniera casuale.

Se la densità di particelle lungo la linea di campo è costante, ciò non produce un flusso netto. Se vi è un gradiente di densità, allora lo scattering produce una corrente diffusiva, per la legge di Fick: $\mathbf{S}_d = -k\nabla n$.



Trasporto di particelle nell'eliosfera: diffusione

Le particelle vengono tendenzialmente guidate dalle linee di campo, ma ci sono delle eccezioni dovute alla componente turbolenta.

Quando incontrano una irregolarità, possono cambiare sia il loro angolo di pitch sia la loro giro-fase, e tornare indietro. Possono anche spostarsi sulle linee di campo “vicine” e poi proseguire il loro moto (Fig. h). Questo processo è stocastico (random) e causa una corrente di particelle perpendicolare alla direzione del campo. In generale la corrente diffusa ha due componenti, parallela e perpendicolare:

$$S_d = k_{\parallel} \nabla n_{\parallel} + k_{\perp} \nabla n_{\perp}$$

Dove il coefficiente di diffusione \mathbf{k} viene scomposto in componenti parallela e perpendicolare. Per l'eliosfera, la prima componente è in assoluto dominante, e la seconda viene spesso trascurata.

La diffusione perpendicolare può essere amplificata dalle fluttuazioni magnetiche, se la turbolenza è molto forte e la componente random δB del campo B è grande quanto il valore medio della sua intensità. In questo caso la nozione di campo magnetico ordinato scompare, e la diffusione diventa isotropa ($k_{\parallel} \approx k_{\perp} \equiv k$).

Trasporto di particelle nell'eliosfera: drift

Nel campo magnetico eliosferico è importante anche il moto di deriva (drift). Per una distribuzione di particelle isotropa, o quasi isotropa, gli effetti combinati di gradiente e curvatura magnetica provocano una velocità netta di deriva (vettoriale) data da:

$$\langle v_D \rangle = \frac{\beta R}{3} \nabla \times \frac{\vec{B}}{B^2}$$

Le parentesi $\langle \rangle$ indicano il fatto che la velocità è una media della distribuzione delle particelle. Questa espressione è esatta in condizioni di anisotropia debole (quasi-isotropia). A questa velocità di deriva è associata una corrente netta di drift, data da:

$$S_D = \frac{\beta R}{3B^2} \vec{B} \times \nabla n$$

Una maniera utile di includere formalmente il drift nella diffusione è di associarlo agli elementi antisimmetrici del *tensore di diffusione* \hat{K} .

$$\hat{K} = k_{ij} = \begin{bmatrix} k_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & k_{\perp} & -k_T \\ 0 & k_T & k_{\perp} \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad k_T = \frac{\beta R}{3B}$$

Trasporto di RC nell'eliosfera: equazione di diffusione (e convezione)

Quindi, gli effetti di diffusione anisotropa (k_{\parallel} e k_{\perp}) e di drift (k_T) possono venire compresi in un singolo termine $\hat{K} \cdot \nabla n$, dove \hat{K} è il tensore di diffusione (cioè facendo a meno di calcolare esplicitamente la velocità o il flusso di deriva).

La corrente convettiva è Vn , dove il vettore V è diretto *radialmente* (in prima approssimazione). Ciò descrive il fatto che il campo magnetico eliosferico e i suoi centri di scattering (le irregolarità magnetiche) vengono **trasportati** dal sole verso i confini dell'eliosfera. La densità totale dei raggi cosmici nell'eliosfera evolve quindi come:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (Vn - K \cdot \nabla n) = q$$

Questa equazione descrive la densità totale dei raggi cosmici, ed è legata alla funzione di distribuzione f da:

$$n(p)dp = 4\pi p^2 f(p)dp$$

Per ora non abbiamo descritto il fatto che le particelle possono guadagnare o perdere energia (o momento), e quindi muoversi fuori dall'intervallo $[p, p + dp]$.

Però il vento solare **rallenta** le particelle, e quindi ci aspettiamo **perdite di energia**.

Trasporto di RC nell'eliosfera: perdite adiabatiche

La forma che descrive cambiamenti in energia (o momento) può essere derivata per analogia alla diffusione spaziale (come una diffusione nello spazio dei momenti). In coordinate sferiche la divergenza del flusso è data da:

$$\nabla \cdot S = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 \langle v \rangle_r f] + \dots$$

Dove i termini addizionali (angolari) sono nulli nel caso isotropo (e $\langle v \rangle_r$ è v totale). Nello spazio dei momenti, dove è il momento a cambiare invece della posizione, analogamente scriviamo:

$$\nabla \cdot S = \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} [p^2 \langle \dot{p} \rangle f]$$

La funzione di distribuzione nell'intervallo $[p, p + dp]$ si scrive: $\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot S + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} [p^2 \langle \dot{p} \rangle f] = q$

O anche:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (Vf - K \cdot \nabla f) + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} [p^2 \langle \dot{p} \rangle f] = q$$

Questa equazione di trasporto fu derivata da Parker e Krymsky nel 1965. La perdite \dot{p} sono dovute a **decelerazione adiabatica** causata dall'espansione del vento solare.

Trasporto di RC nell'eliosfera: l'equazione di Parker

La perdita di energia \dot{p} sono dovute a decelerazione adiabatiche causate dall'espansione del vento solare, cioè alla divergenza di V . Il tasso di perdita adiabatica è dato da:

$$\frac{\langle \dot{p} \rangle}{p} = -\frac{1}{3} \nabla \cdot V$$

Quindi inseriamo questa espressione nell'equazione di Parker-Krymsky:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (Vf - K \cdot \nabla f) + \frac{1}{p^2} (\nabla \cdot V) \frac{\partial}{\partial p} [p^3 f] = q$$

Un'altra forma equivalente (e spesso usata) è la seguente:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + V \cdot \nabla f - \nabla(K \cdot \nabla f) + \frac{1}{3} (\nabla \cdot V) \frac{\partial f}{\partial \log(p)} = q$$

Si tratta di una equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine, di tipo parabolico (simile all'equazione del calore). L'equazione è 5-dimensionale: la densità di RC nello spazio delle fasi dipende da tre coordinate spaziali, momento (o energia, o rigidità), e tempo.

Anche assumendo simmetria radiale, l'equazione non ha soluzioni analitiche. Però possiamo fare approssimazioni

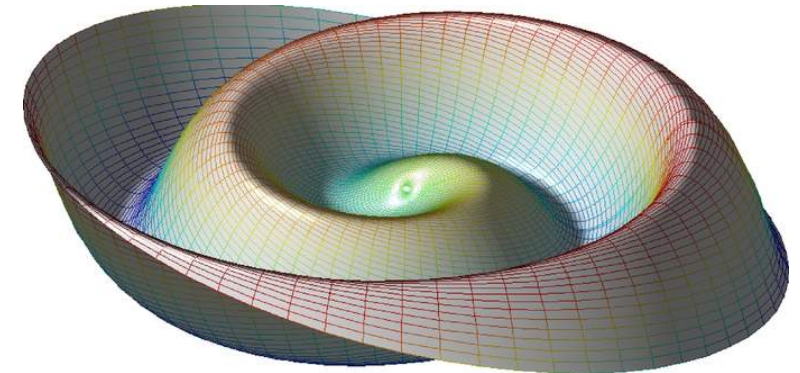
Trasporto di RC nell'eliosfera: l'equazione di Parker

Parker equation captures the whole phenomenology of CRs in the heliosphere

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{\text{Flux}} = \underbrace{\nabla \cdot [\mathbf{K} \cdot \nabla f]}_{\text{Diffusion}} - \underbrace{\mathbf{V} \cdot \nabla f}_{\text{Convection}} - \underbrace{\langle \mathbf{v}_D \rangle \cdot \nabla f}_{\text{Particle drift}} + \underbrace{\frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{V}) \frac{\partial f}{\partial \ln p}}_{\text{Energy losses}} + \underbrace{Q(r, p, t)}_{\text{Source}}$$



Parker spiral



Trasporto di RC nell'eliosfera: l'equazione di Parker

Parker equation

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{\text{Flux}} = \underbrace{\nabla \cdot [\mathbf{K} \cdot \nabla f]}_{\text{Diffusion}} - \underbrace{\mathbf{V} \cdot \nabla f}_{\text{Convection}} - \underbrace{\langle \mathbf{v}_D \rangle \cdot \nabla f}_{\text{Particle drift}} + \underbrace{\frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{V}) \frac{\partial f}{\partial \ln p}}_{\text{Energy losses}} + \underbrace{Q(r, p, t)}_{\text{Source}}$$

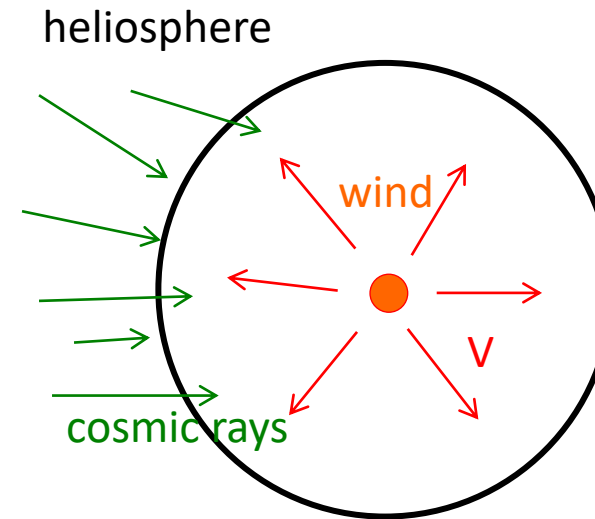
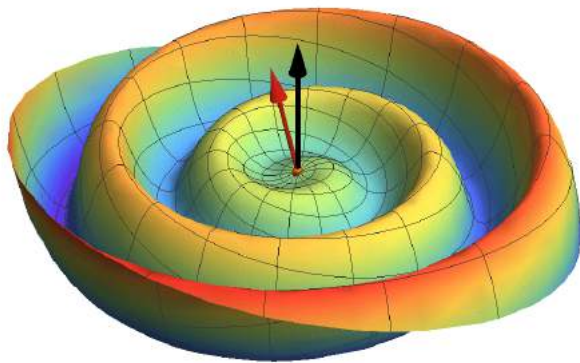
Qui il termine di drift è riportato in maniera esplicita, ma può anche essere incluso come componente antisimmetrica del tensore di diffusione

Per «sorgente» si intende il flusso «LIS» delle particelle Galattiche che entrano nell'eliosfera. Si può anche non utilizzare questo termine, e imporre il LIS come condizione al contorno ai bordi.

Trasporto di RC nell'eliosfera: l'equazione di Parker

Parker equation

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{\text{Flux}} = \underbrace{\nabla \cdot [\mathbf{K} \cdot \nabla f]}_{\text{Diffusion}} - \underbrace{\mathbf{V} \cdot \nabla f}_{\text{Convection}} - \underbrace{\langle \mathbf{v}_D \rangle \cdot \nabla f}_{\text{Particle drift}} + \underbrace{\frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{V}) \frac{\partial f}{\partial \ln p}}_{\text{Energy losses}} + \underbrace{Q(r, p, t)}_{\text{Source}}$$



Trasporto di RC nell'eliosfera: l'equazione di Parker

Parker equation

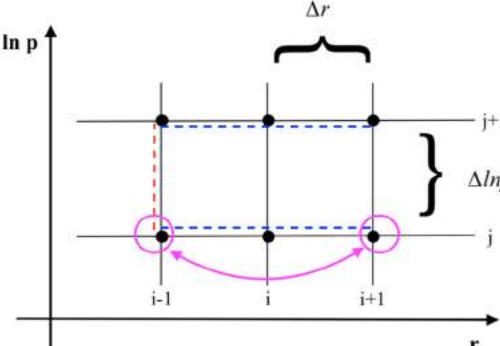
$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{\text{Flux}} = \underbrace{\nabla \cdot [\mathbf{K} \cdot \nabla f]}_{\text{Diffusion}} - \underbrace{\mathbf{V} \cdot \nabla f}_{\text{Convection}} - \underbrace{\langle \mathbf{v}_D \rangle \cdot \nabla f}_{\text{Particle drift}} + \underbrace{\frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{V}) \frac{\partial f}{\partial \ln p}}_{\text{Energy losses}} + \underbrace{Q(r, p, t)}_{\text{Source}}$$

La soluzione si ottiene per via numerica o Monte-Carlo. Una semplificazione è quella di considerare simmetria sferica (1D), diffusione omogenea, e steady-state. L'equazione diventa:

$$k \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \left(-V + \frac{2k}{r} + \frac{\partial k}{\partial r} \right) \frac{\partial f}{\partial r} + \left(\frac{2V}{3r} + \frac{1}{3} \frac{\partial V}{\partial r} \right) \frac{\partial f}{\partial \ln p} = 0$$

Questa equazione si risolve agevolmente con il metodo delle differenze finite di *Crank-Nicholson*.

Ora consideriamo due approssimazioni che portano a soluzioni analitiche: la **Convection-Diffusion** approximation (CD), e la **Force-Field** approximation (FF).



$$\frac{\partial f}{\partial \ln p} = \frac{(f_i^{j+1} - f_i^j)}{\Delta \ln p}$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{2} \left(\frac{f_{i+1}^{j+1} - f_{i-1}^{j+1}}{2\Delta r} + \frac{f_{i+1}^j - f_{i-1}^j}{2\Delta r} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{f_{i+1}^{j+1} - 2f_i^{j+1} + f_{i-1}^{j+1}}{\Delta_r^2} + \frac{f_{i+1}^j - 2f_i^j + f_{i-1}^j}{\Delta_r^2} \right)$$

L'approssimazione Convection-Diffusion

Il formalismo Convection-Diffusion è l'approssimazione più semplice, ma non è molto utilizzata oggi. Consiste nell'assumere un problema a simmetria sferica in cui la diffusione delle particelle agisce sempre **verso l'interno** (che non è vero), mentre la convezione **verso l'esterno** (che è vero)

La corrente diffusiva è:

$$S_d = -k \frac{\partial f}{\partial r}$$

Dove k è il coefficiente di diffusione, scalare, funzione della coordinata radiale r e del momento p : $k = k(r, p)$. Questa corrente è controbilanciata da una corrente convettiva S_c rivolta verso l'esterno, perché le irregolarità magnetiche sono congelate nel plasma espulso radialmente.

$$S_c = Vf$$

Infine si assume inoltre equilibrio (cioè condizioni stazionarie o quasi-stazionarie).

L'equazione di trasporto si scrive semplicemente:

$$Vf - k \frac{\partial f}{\partial r} = 0$$

Ciò si ottiene anche dall'equazione di Krymsky-Parker a simmetria sferica, per k scalare, assumendo steady-state ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$), e trascurando le perdite adiabatiche.

L'approssimazione Convection-Diffusion

La soluzione è immediata, del tipo $f = f_b e^{-M}$, dove
$$M = \int_r^{r_b} \frac{V(r)}{k} dr$$

La distribuzione f_b è imposta all'estremità dell'eliosfera, per $r = r_b \sim 120 AU$. Qui si assume che il flusso dei RC diventi rappresentativo del flusso interstellare, esterno all'eliosfera. Cioè f_b è legata al flusso interstellare locale (LIS) dei RC.

La distribuzione $f = f(r, p)$ è la soluzione stazionaria, e rappresenta il flusso dei RC ad una data posizione radiale nell'eliosfera (tipicamente $r = r_0 = 1 AU$, dove sono le misure). Il parametro adimensionale $M = \log(f_b/f)$ è detto **parametro di modulazione**. Esso dipende dal coefficiente di diffusione e dalla velocità del vento solare.

Tipicamente la soluzione viene calcolata per $r = r_0 = 1 AU$ (cioè in prossimità della Terra, dove sono condotte le misure) e si può cercare il valore di M che descrive i flussi interstellari f_b . Tuttavia né M né f_b in genere sono conosciuti a priori.

Usando i dati, gli studi di modulazione possono essere orientati a:

- calcolare M dalle proprietà globali dell'eliosfera, per poi usare i dati al fine di trovare f_b .
- determinare M , e quindi le proprietà dell'eliosfera, partendo da un f_b noto o calcolato.

L'approssimazione Convection-Diffusion

La soluzione CD è del tipo $f = f_{LIS}e^{-M}$, dove

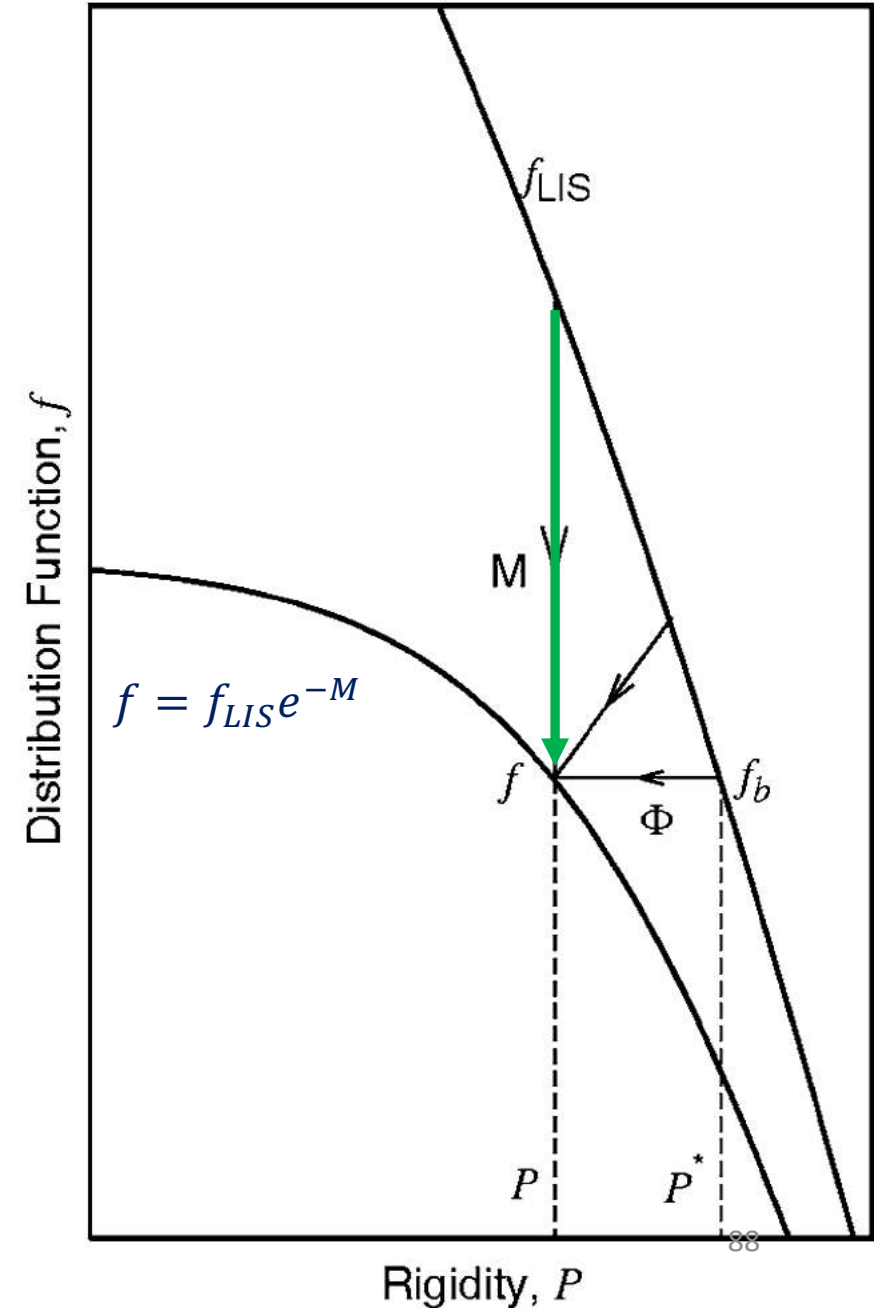
$$M = \int_r^{r_b} \frac{V(r)}{k} dr$$

Il flusso LIS è fissato (almeno alle energie più basse) dalle osservazioni di Voyager-1 nello spazio interstellare (a $r \geq r_b$).

Il flusso modulato f è misurato da molti esperimenti in prossimità della terra ($r=1\text{AU}$), in varie epoche.

Il parametro di modulazione è derivato di conseguenza, ed è legato a proprietà globali dell'eliosfera che possiamo in parte misurare o stimare (es. intensità del campo B, velocità del vento V, diffusione k)

(NB: Abbiamo parlato di «flusso» riferendoci alla funzione di distribuzione f . In realtà sono due grandezze diverse ma legate tra loro. L'articolo Moraal 2013 chiama «flusso» anche quello che qui è chiamato «corrente»)



L'approssimazione Convection-Diffusion

Sebbene il flusso interstellare f_b sia costante nel tempo, le proprietà dell'eliosfera **evolvono** (lentamente) con il ciclo solare. A rigore **k o di V sono funzioni del tempo.**

Quindi, in differenti epoche/fasi del ciclo solare, l'eliosfera è caratterizzata da diversi valori di k o di V , e quindi diversi parametri di modulazione M che regolano il flusso modulato f nell'eliosfera: $M = M(t)$.

Per esempio, se consideriamo due epoche distinte t_1 e t_2 , ci aspettiamo di misurare flussi di particelle differenti, $f_1 = f(t_1)$ e $f_2 = f(t_2)$. Questi flussi sono dovuti a parametri di modulazione differenti M_1 e M_2 .

Sebbene il valore assoluto di M ad una data epoca dipenda dal LIS f_b (in generale poco noto), le **differenze** dei valori di M tra due epoche possono essere determinate direttamente da misure di flusso f_1 e f_2 condotte nell'eliosfera (es. a Terra) nelle due epoche:

$$\Delta M = M_2 - M_1 = \log(f_2/f_1)$$

L'approssimazione Convection-Diffusion

Nell'ipotesi più semplice in cui k e V non dipendono dalla coordinata radiale, il parametro di modulazione si scrive:

$$M = \int_{r_0}^{r_b} \frac{V}{k} dr \approx \frac{V(r_b - r_0)}{k} \sim \frac{V r_b}{k}$$

Questa relazione mostra l'evidente **degenerazione** tra i parametri chiave dell'eliosfera. Il parametro di modulazione è espresso come **combinazione** di tre grandezze:

- la velocità del vento solare V ,
- il coefficiente medio di diffusione k ,
- e la dimensione della regione di modulazione r_b .

Quindi il solo studio dei flussi a Terra, anche assumendo di conoscere il LIS f_b , non è sufficiente per determinare le tre grandezze.

Tuttavia ci sono varie tipologie di osservazioni che possono essere utilizzate.

L'approssimazione Convection-Diffusion

Tuttavia, ci sono varie tipologie di osservazioni che possono essere utilizzate.

- La sonda **Voyager-1** (nel 2012) e Voyager-2 (nel 2018) hanno recentemente attraversato l'eliopausa (cioè il bordo esterno dell'eliosfera) giungendo così nello spazio interstellare. I dati di Voyager-1 hanno stabilito che l'eliopausa è posta a distanza $r_b \approx 122 AU$.
- Inoltre Voyager-1 ha condotto misure di flusso interstellare locale a basse energie (tra 10 MeV e 1 GeV), stabilendo il valore di f_b per varie tipologie di particelle.
- La **velocità del vento solare** V è stata inoltre misurata da molti esperimenti come ACE, IMP8, Ulysses o Pioneer, e vale circa $V_0 \approx 400 km s^{-1}$ (con dipendenze temporali, radiali, e angolari).

L'approssimazione Convection-Diffusion

Per il coefficiente di diffusione, la dipendenze radiali e in rigidità non sono note a priori. Però ci aspettiamo che riflettano la struttura del campo magnetico eliosferico. Una parametrizzazione semplice e spesso usata è:

$$k \equiv \beta k_0 R$$

In questo caso k è omogeneo, indipendente da r , e dipendente dalla rigidità come $k \propto \beta R$. In termini di mean free path, scrivendo $k = \frac{1}{3} \beta c \lambda$, abbiamo che $\lambda(R) \propto R$.

Cioè, in questo caso, il coefficiente di diffusione k è proporzionale alla rigidità delle particelle R e alla loro velocità β : $k_B \propto \beta R$. Esso dipende inoltre dal campo magnetico B , che può essere parametrizzato utilizzando ad esempio il modello di Parker in approssimazione radiale, $B \approx B(r)$. Se tuttavia ignoriamo ogni dipendenze radiali, possiamo scrivere $k \equiv k_0 \beta R$ e abbiamo:

$$M \approx \frac{V r_b}{k(R)} \sim \frac{V r_b}{k_0 \beta R}$$

Valori tipici sono: $M \approx C / \beta R$, dove $C = 1.5 \text{ GV}$ nel minimo solare, e $C = 4.5 \text{ GV}$ durante il massimo solare. In generale M dipende dalla rigidità e la sua dipendenza è legata a quella del coefficiente di diffusione. La dipendenza temporale di k (dovuta a variazioni di B) può essere inclusa in $k_0 = k_0(t)$.

L'approssimazione Convection-Diffusion

Proviamo ora ad applicare la soluzione CD a varie specie nucleari: protoni ed elio.

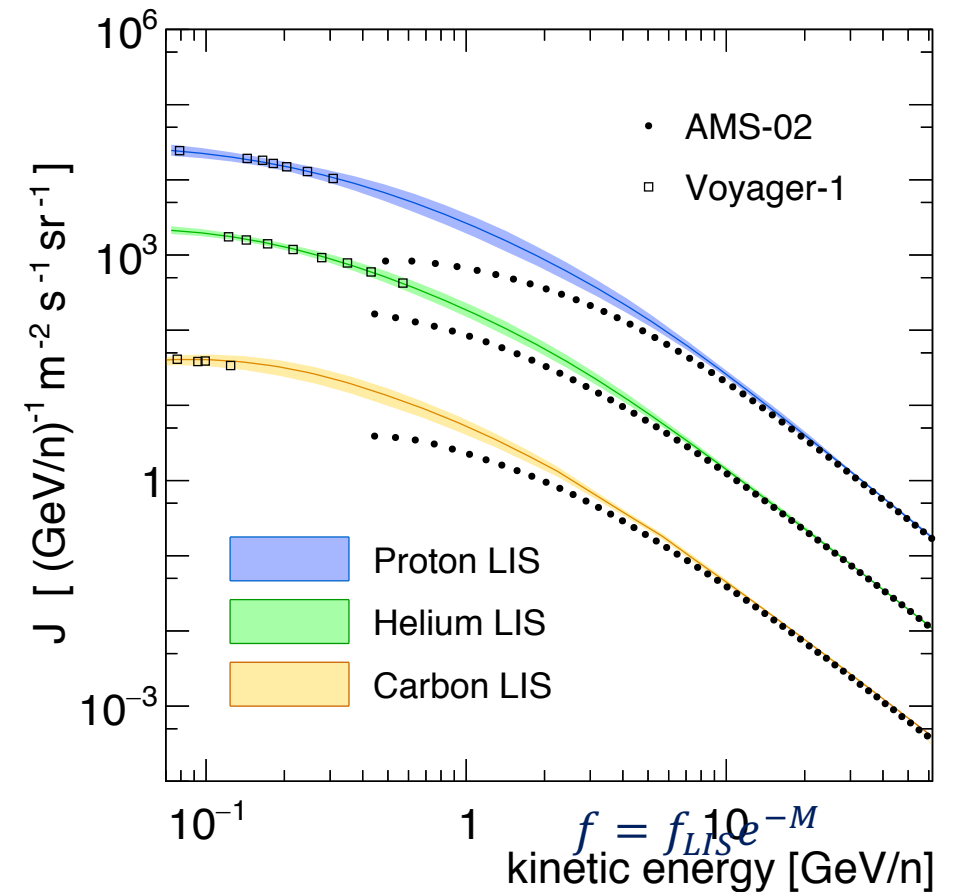
Se consideriamo particelle p e He allo stesso valore di rigidità R, la loro velocità è differente, in quanto:

$$\beta(R) = R \cdot \left[R^2 + \left(\frac{M_p A}{Z} \right)^2 \right]^{-1}$$

Per protoni $Z=1$, $A=1$. Per l'elio $Z=2$, $A=4$.

A rigidità fissata, quindi:

$$\beta_p > \beta_{He}$$



Grazie ai dati di Voyager-1 nello spazio interstellare, uniti a quelli di AMS, conosciamo anche i loro flussi interstellari $J_p^0(R)$ e $J_H^0(R)$. Proviamo a modularli

L'approssimazione Convection-Diffusion

$$J_p^M(R) = J_p^0(R) \cdot e^{-M_p}$$

$$M = \frac{V r_b}{k_0 \beta R}$$

$$J_{He}^M(R) = J_{He}^0(R) \cdot e^{-M_{He}}$$

La loro modulazione è leggermente differente, a parità di condizioni eliosferiche (stessi V, r_b, k_0) e di rigidità R , a causa del fattore β differente, che produce un coefficiente di diffusione K differente.

Il rapporto tra protoni ed elio ad un dato valore di rigidità è:

$$\frac{p}{He} = \left(\frac{J_p^0}{J_{He}^0} \right) \cdot \frac{e^{-V r_b / K_p}}{e^{-V r_b / K_{He}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{He} = \left(\frac{J_p^0}{J_{He}^0} \right) \cdot \left\{ 1 - \frac{\mu(t)}{R(GV)} \left[\frac{1}{\beta_p(R)} - \frac{1}{\beta_{He}(R)} \right] \right\}$$

Dove il parametro $\mu = V r_b / k_0$ contiene proprietà base dell'eliosfera che dipendono dal tempo.

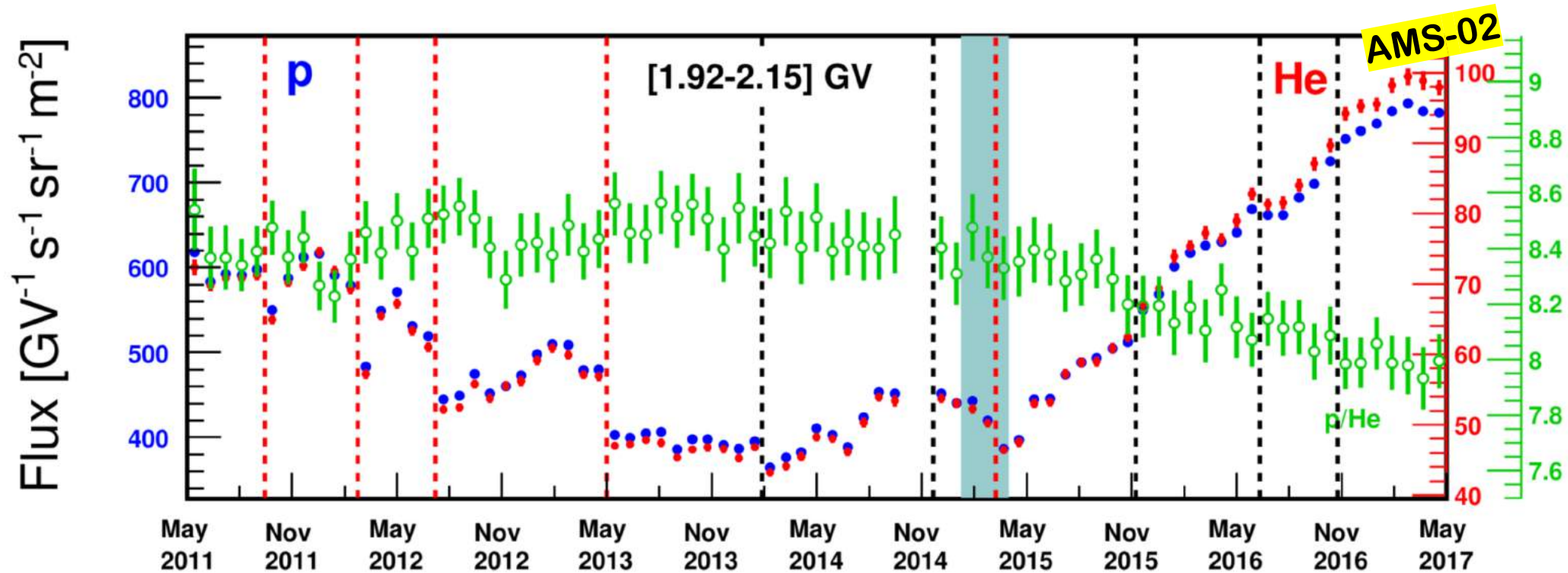
→ Il rapporto p/He calcolato ad una rigidità fissata, deve dipendere debolmente dal tempo!

L'approssimazione Convection-Diffusion

Nuove misure di AMS-02:

Prima misura del rapporto p/He in funzione dell'elio, misurato a varie rigidità.

→ Il rapporto non è costante, ma vi è una debole variazione nel tempo



L'approssimazione Convection-Diffusion

La misura del rapporto p/He di AMS-02 si può spiegare qualitativamente con il modello convection-diffusion

PHYSICAL REVIEW LETTERS **121**, 251104 (2018)

Testing Diffusion of Cosmic Rays in the Heliosphere with Proton and Helium Data from AMS

N. Tomassetti,¹ F. Barão,² B. Bertucci,¹ E. Fiandrini,¹ J. L. Figueiredo,² J. B. Lousada,² and M. Orcinha²

¹*Università degli Studi di Perugia and INFN-Perugia, I-06100 Perugia, Italy*

²*Laboratório de Instrumentação e Física Experimental de Partículas, P-1000 Lisboa, Portugal*



(Received 12 July 2018; revised manuscript received 28 September 2018; published 18 December 2018)

After six years of continuous observations in space, the Alpha Magnetic Spectrometer experiment has released new data on the temporal evolution of the proton and helium fluxes in cosmic rays. These data revealed that the ratio between proton and helium fluxes at the same value of rigidity $\mathcal{R} = p/Z$ (momentum/charge ratio) is not constant at $\mathcal{R} \lesssim 3$ GV. In particular, the ratio is found to decrease steadily during the descending phase of Solar Cycle 24 toward the next minimum. We show that such a behavior is a remarkable signature of the $\beta \times \lambda(\mathcal{R})$ dependence in the diffusion of cosmic rays in heliosphere, where β is their adimensional speed and $\lambda(\mathcal{R})$ is their mean free path, a *universal* function of rigidity for all nuclei. This dependence is responsible for distinctive charge or mass dependent effects in the time-dependent modulation of low-rigidity particles.

DOI: [10.1103/PhysRevLett.121.251104](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.251104)

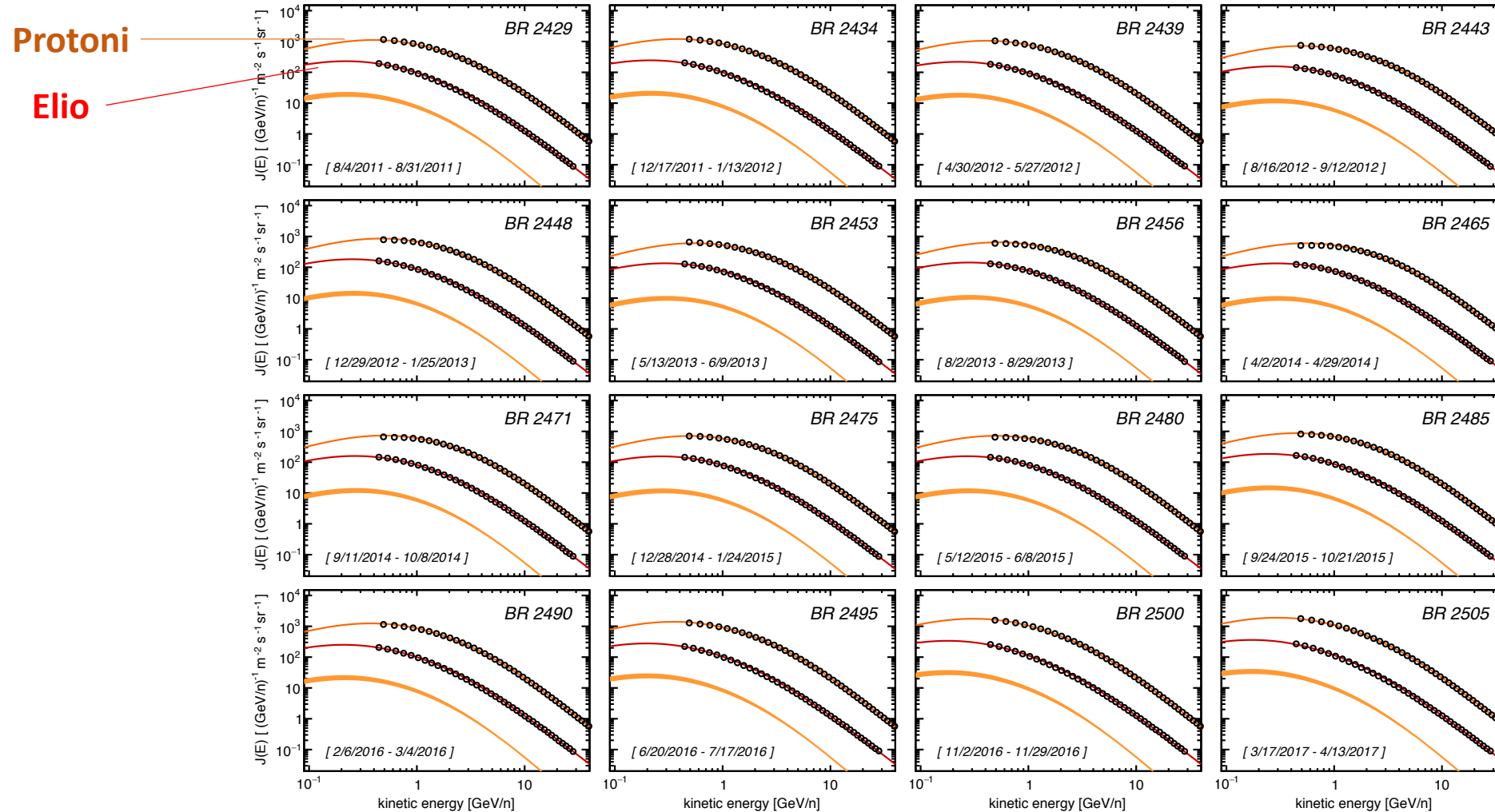
L'approssimazione Convection-Diffusion

$$k(R, t) \equiv \beta k_0(t) R$$

Fit al flusso di protoni mese per mese

Determinazione della sequenza temporale $k_0(t)$

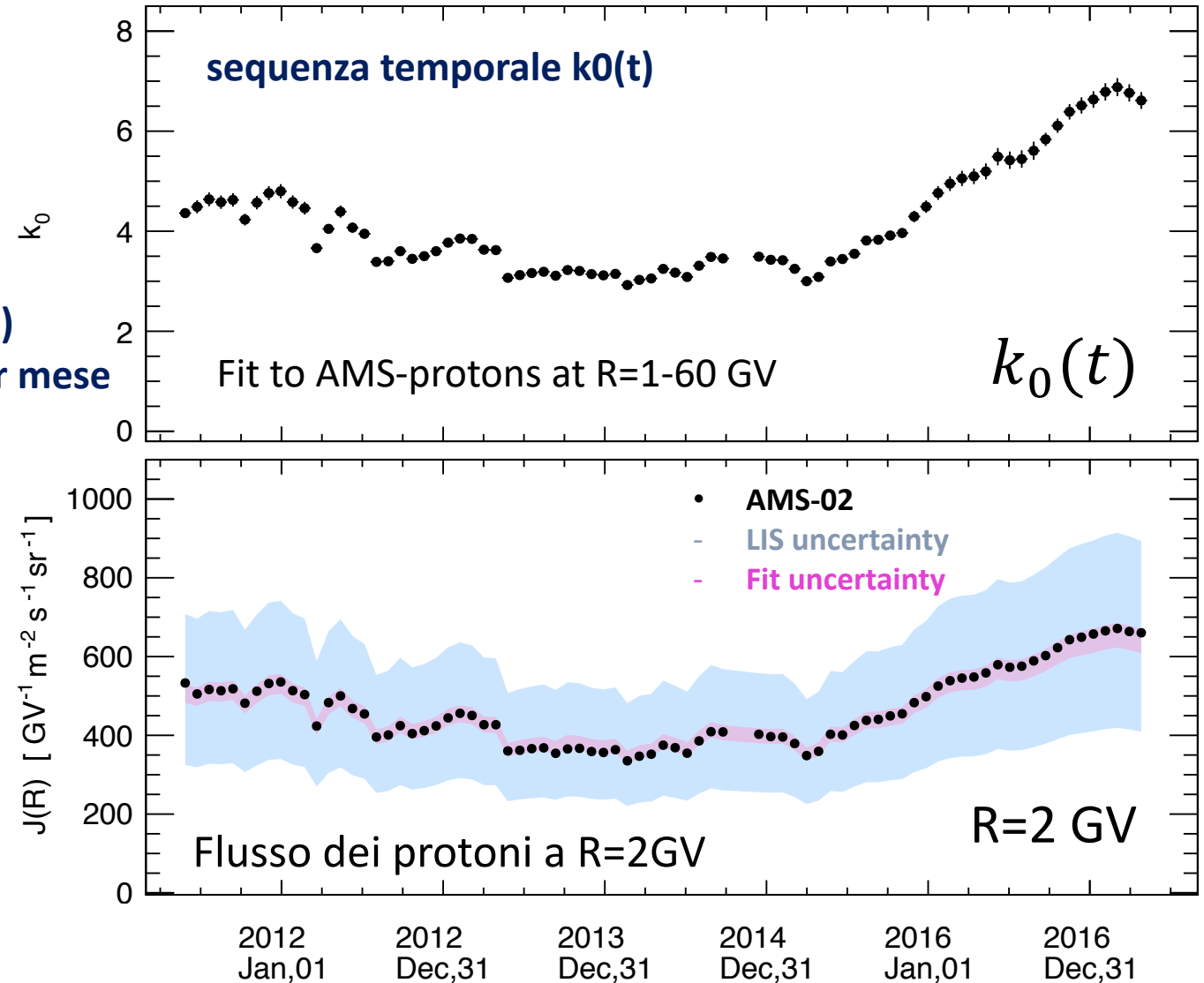
Calcolo del flusso di elio mese per mese, e del p/He



L'approssimazione Convection-Diffusion

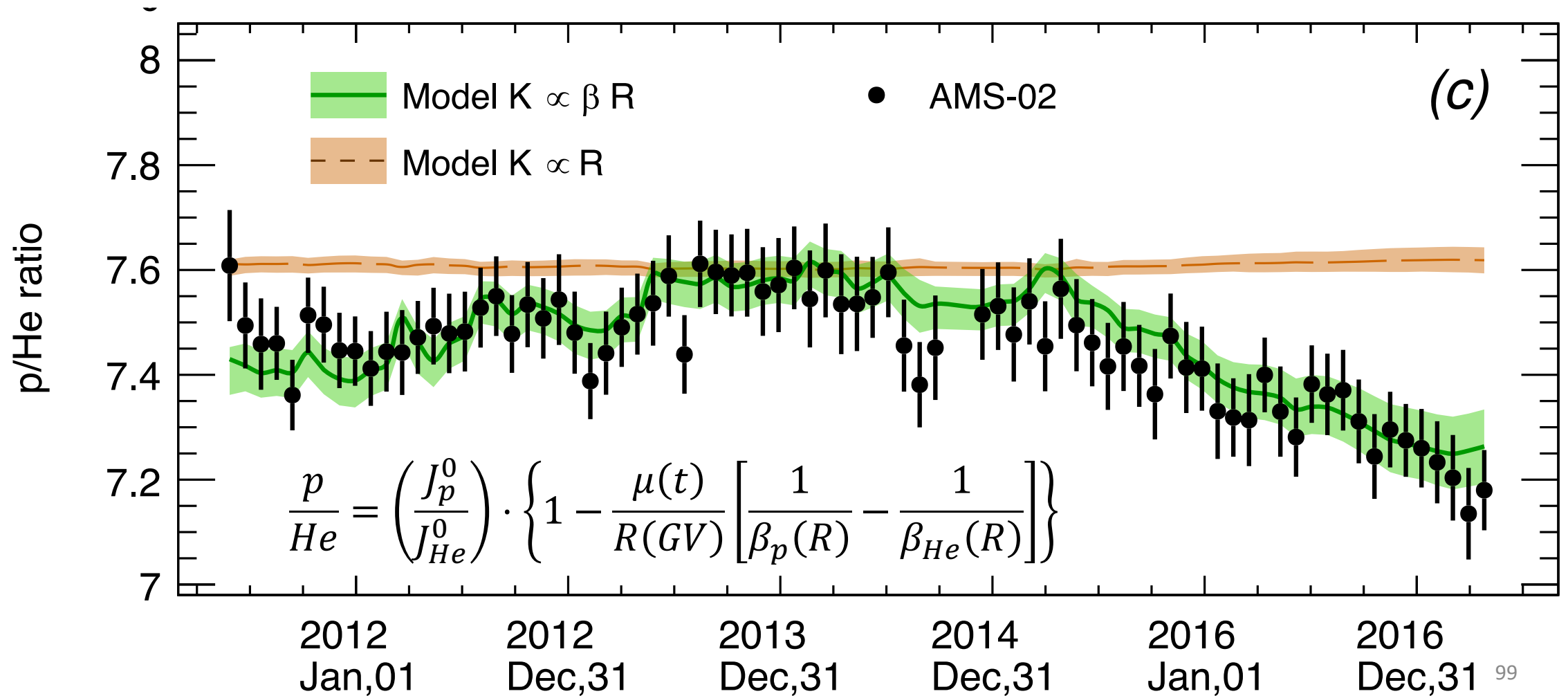
$$k(R, t) \equiv \beta k_0(t) R$$

- ✓ Fit al flusso di protoni mese per mese
- ✓ Determinazione della sequenza temporale $k_0(t)$
- Predizione del flusso di He e del p/He mese per mese



L'approssimazione Convection-Diffusion

$k(R, t) \equiv \beta(R)k_0(t)R$
 ✓ Predizione del flusso di He e del p/He mese per mese
 ✓ Confronto con i dati

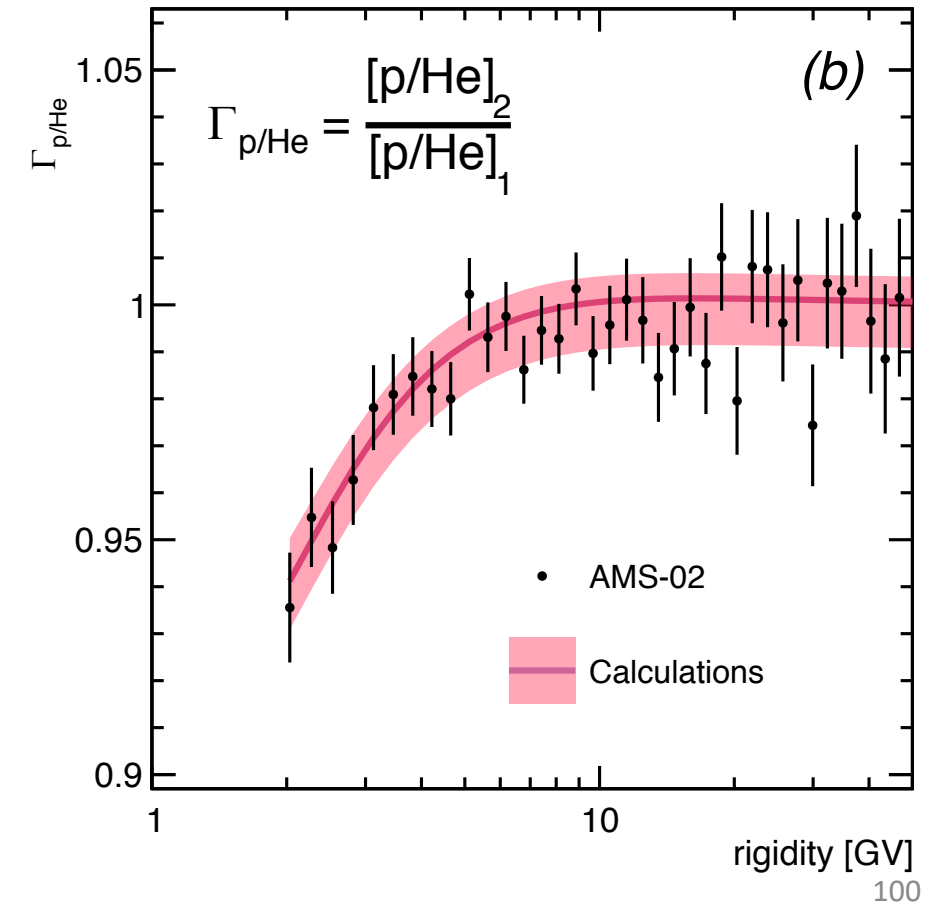
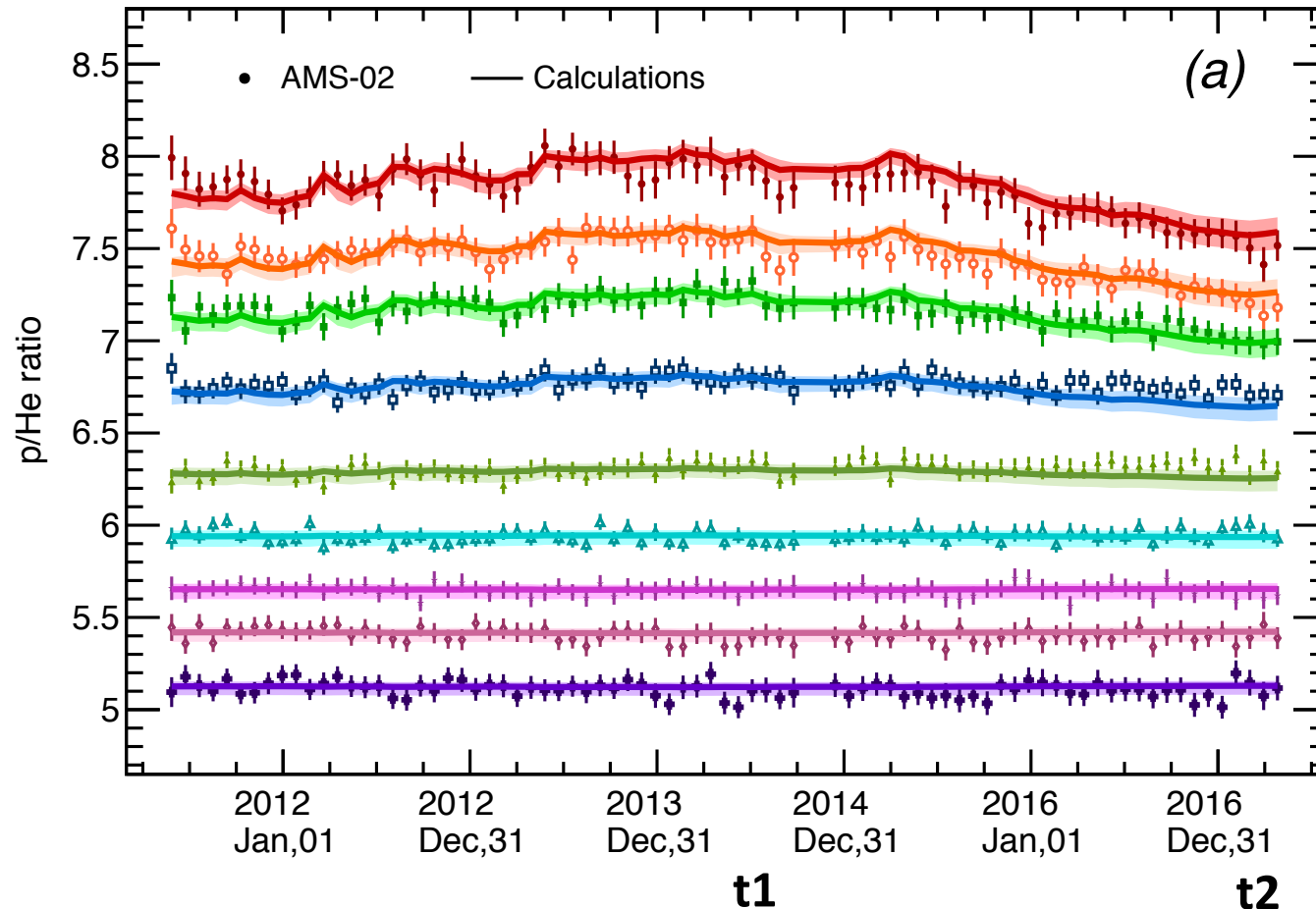


L'approssimazione Convection-Diffusion

Sx: dipendenza temporale del p/He a vari valori della rigidità

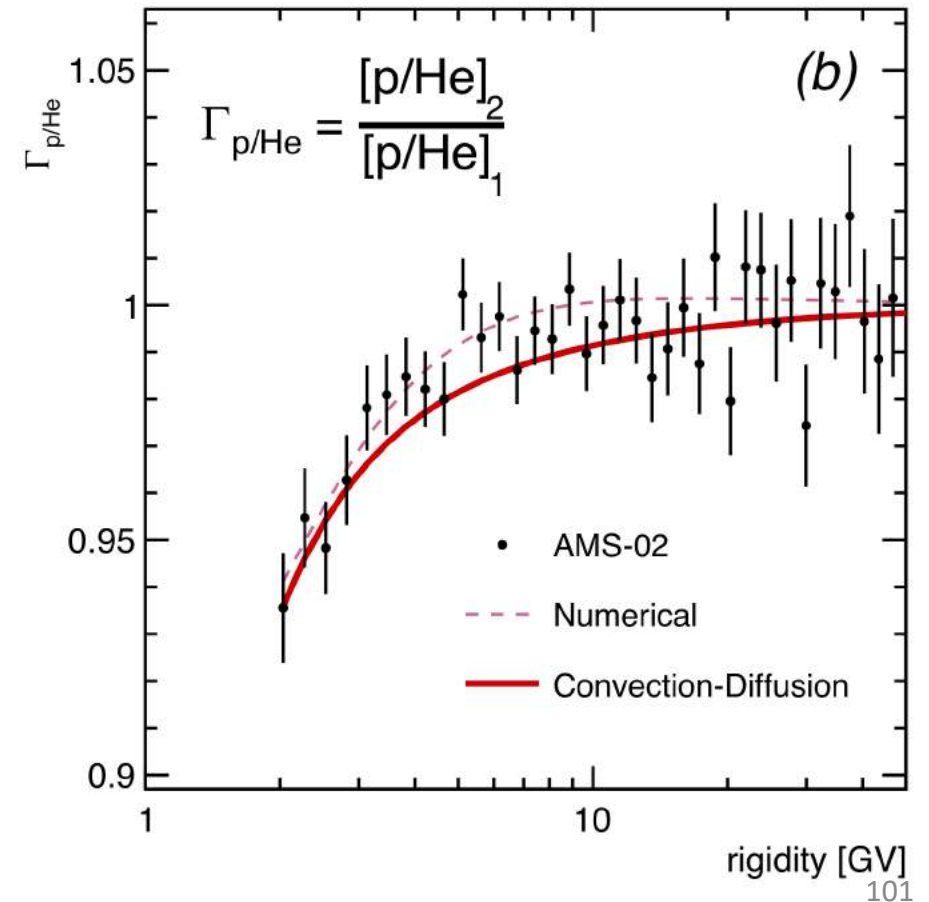
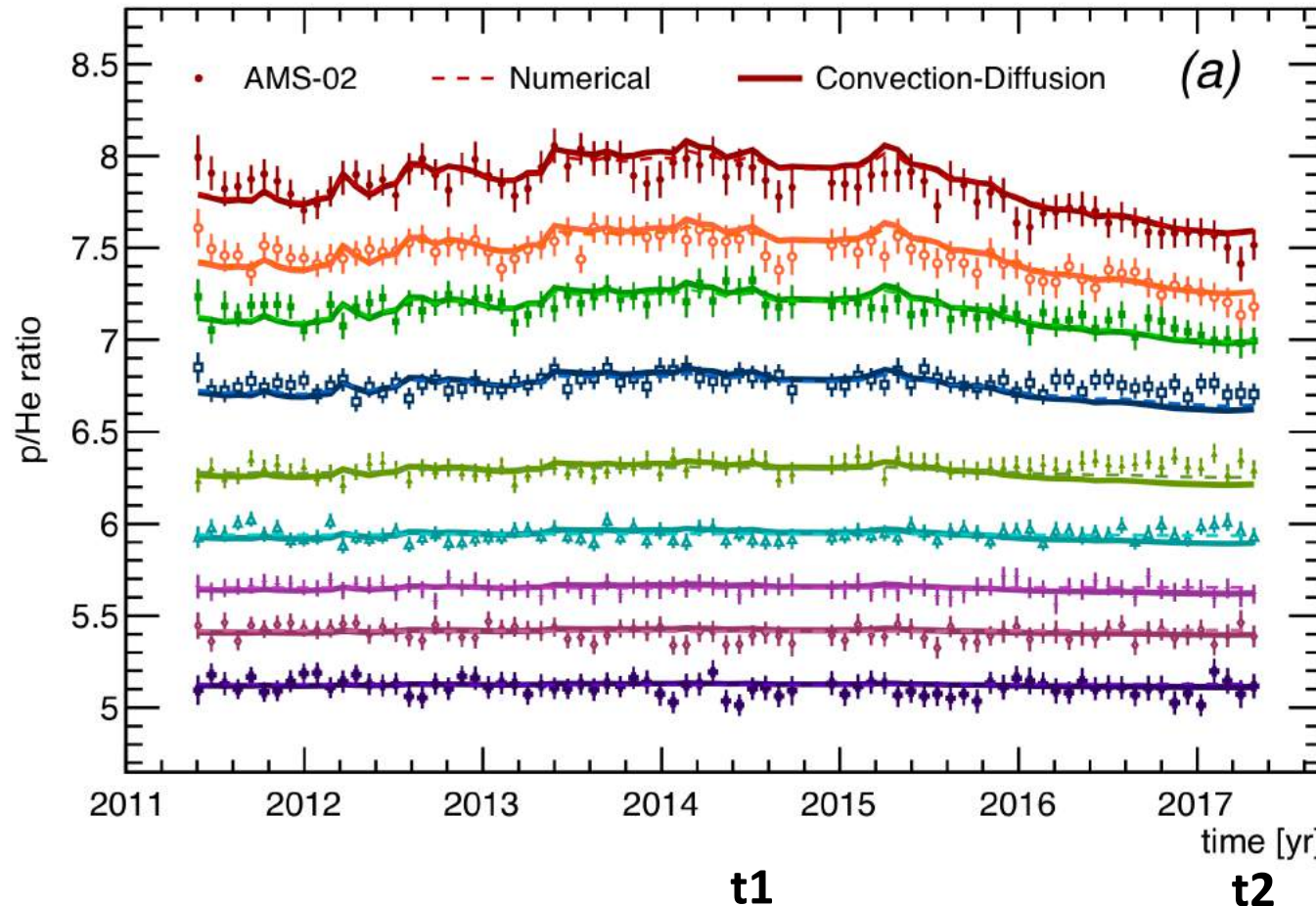
Dx: dipendenza in rigidità del p/He a due epoche t1 e t2

$$\Gamma_{p\text{He}}(\mathcal{R}) \approx \frac{1 - \frac{\mu(t_2)}{\mathcal{R}/\text{GV}} \left[\frac{1}{\beta_p(\mathcal{R})} - \frac{1}{\beta_{\text{He}}(\mathcal{R})} \right]}{1 - \frac{\mu(t_1)}{\mathcal{R}/\text{GV}} \left[\frac{1}{\beta_p(\mathcal{R})} - \frac{1}{\beta_{\text{He}}(\mathcal{R})} \right]}$$



L'approssimazione Convection-Diffusion

I calcoli visti prima in realtà sono stati eseguiti numericamente.
Tuttavia, in approssimazione CD, i risultati sono qualitativamente simili:



L'approssimazione Force-Field

E' un'approssimazione analitica semplice quasi quanto la Convection-Diffusion.
L'equazione di Parker per $f(p)$ viene scritta come:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\nabla S + \frac{1}{3} \nabla V \frac{\partial f}{\partial \log p}$$

Dove S è la corrente di particelle $S = 4\pi p^2 [CVf - K\nabla f]$

Dove C è detto coefficiente di Compton-Getting $C = -\frac{1}{3} \frac{\partial \log(f)}{\partial \log(p)}$

Partendo da qui, l'approssimazione FF assume:

- Steady-state ($df/dt=0$):
- No perdite in momento ($\dot{p} = 0$)
- Simmetria radiale (coordinata r)
- Coefficiente di diffusione scalare e in forma separabile: $K(p, r) = \beta k_1(r) \cdot k_2(p)$

L'approssimazione Force-Field

L'equazione di Parker per $f(p)$ diventa:

$$CVf = K \partial f / \partial r$$

Rispetto all'equazione CD, rimane il termine C (Compton-Getting). Cioè, pur trascurando le perdite di energia, l'approssimazione FF mantiene il termine CG (che è legato alle perdite).

Se esplicitiamo i termini, l'equazione si può riscrivere come:

$$\frac{Vp}{3} \frac{\partial f}{\partial p} + K \frac{\partial f}{\partial r} = 0$$

Che è un'equazione PDE del primo ordine. La scriviamo usando esplicitamente la rigidità R invece del momento p , e dividendo per K :

$$\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{VR}{3K} \frac{\partial f}{\partial R} = 0$$

Per il coefficiente di diffusione si usa una forma separabile del tipo: $K(r, R) = \beta k_1(r) k_2(R)$

L'approssimazione Force-Field

Mettiamo le dipendenze in rigidità da una parte (LHS) e quelle in raggio dall'altra. La soluzione si ottiene integrando:

$$\int_R^{R_b} \frac{\beta(R')k_2(R')}{R'} dR' = \int_r^{r_b} \frac{V(r')}{3k_1(r')} dr'$$

L'integrale a destra viene chiamato «potenziale di modulazione», ed è il parametro libero del modello FF:

$$\phi \equiv \int_r^{r_b} \frac{V(r')}{3k_1(r')} dr'$$

Fisicamente, ϕ può essere interpretato come l'energia persa dalle particelle nell'eliosfera per unità di carica (anzi, la rigidità persa). Questa grandezza viene detta “potenziale” perché si misura in MV o GV (come una rigidità, ma anche come un potenziale elettrico).

Tipicamente ϕ può variare da 200 MV a 1500 MV, a seconda del livello di attività solare. Alla buona si può scrivere:

$$\phi \sim Vr_b/k$$

L'approssimazione Force-Field

Nell'approssimazione “force-field”, il flusso di RC modulato (SM), cioè osservato a Terra, risulta quindi legato al flusso intertellare (IS), cioè esterno all'eliosfera, tramite il parametro di modulazione ϕ . Che è la differenza tra rigidità dentro e fuori dell'eliosfera:

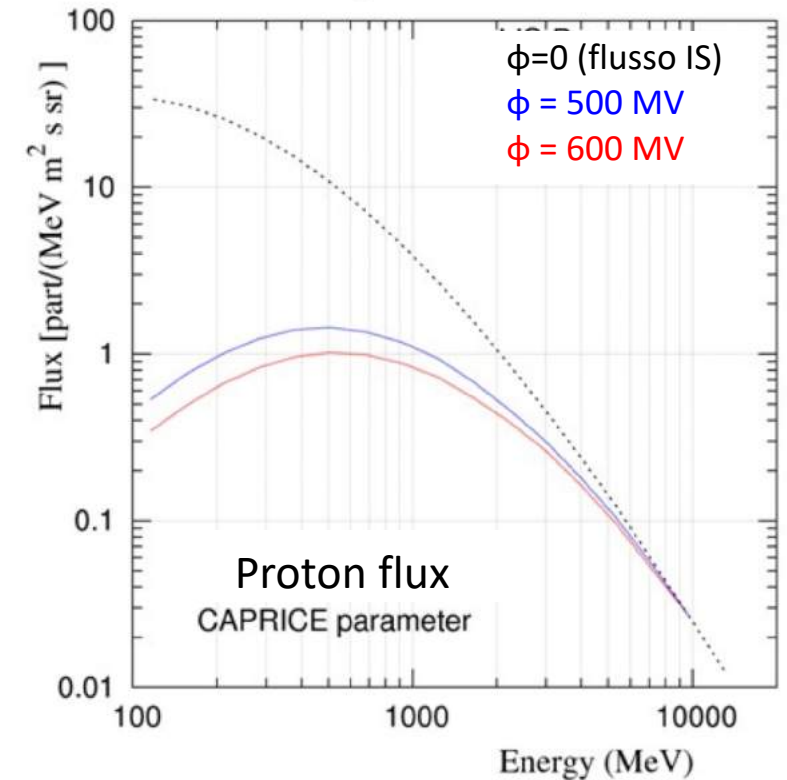
$$J_{MOD}(R) = \frac{R^2}{R_{IS}^2} J_{IS}(R_{IS})$$

$$R_{IS} = R + |Ze|\phi$$

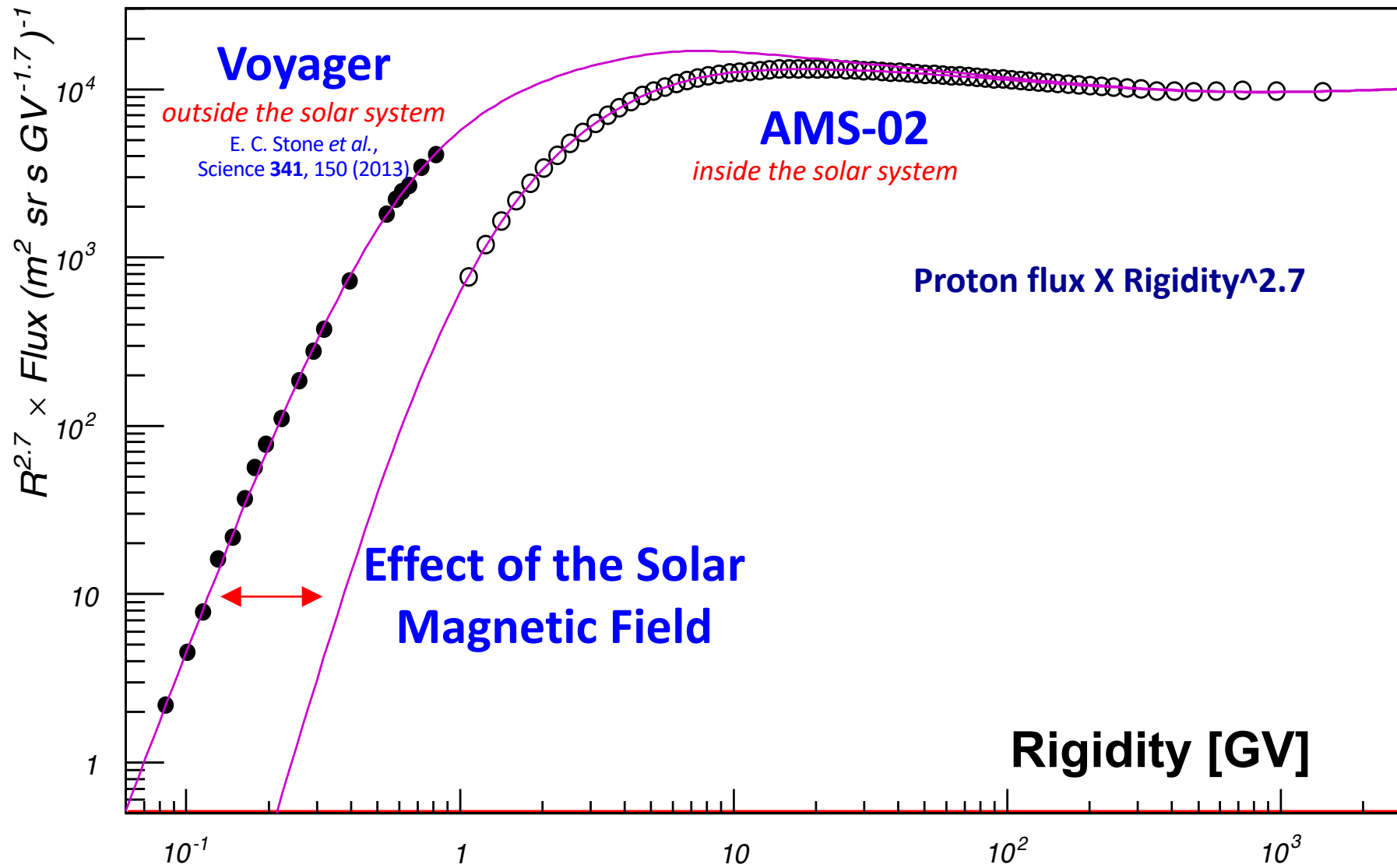
In funzione dell'energia cinetica per nucleone E, scriviamo:

$$J_{MOD}(E) = \frac{(E + M_p)^2 - M_p^2}{\left(E + M_p + \frac{|Z|}{A} \phi\right)^2 - M_p^2} J_{IS}\left(E + \frac{|Z|}{A} \phi\right)$$

Dove M_p è la massa del protone

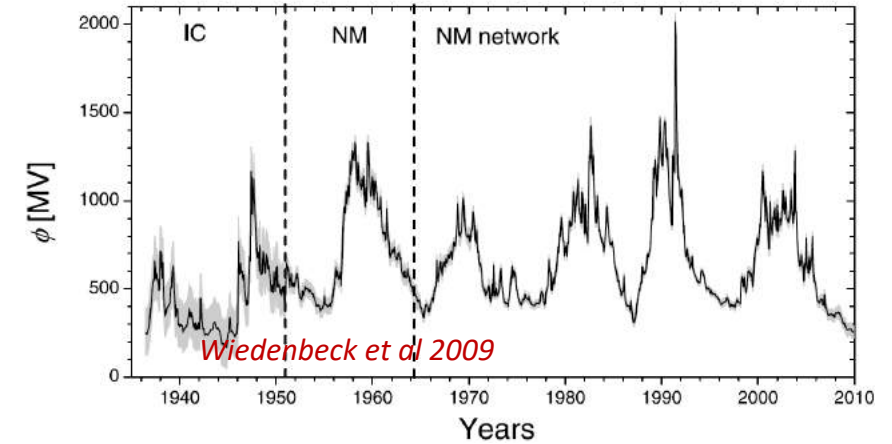
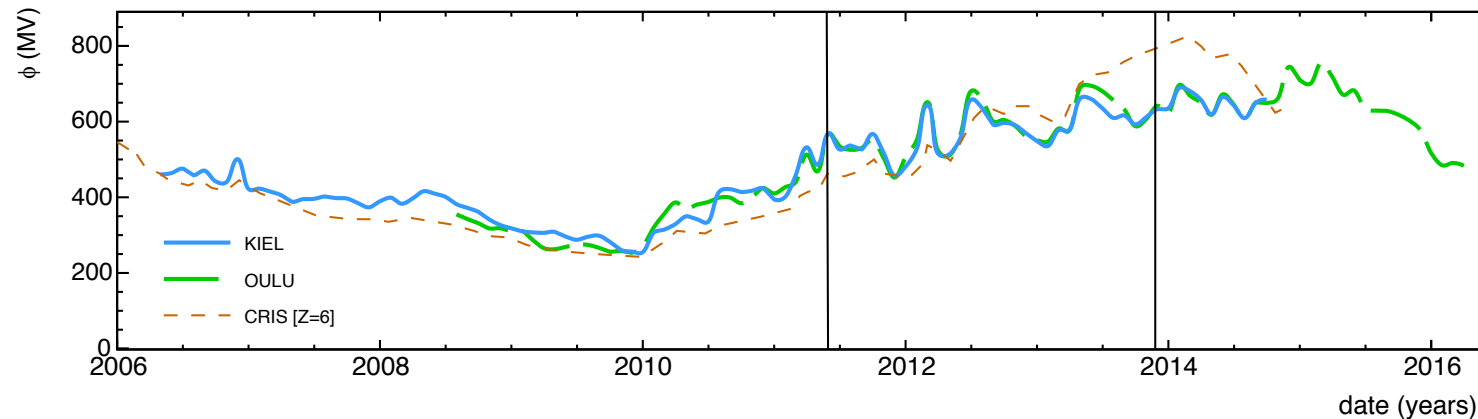
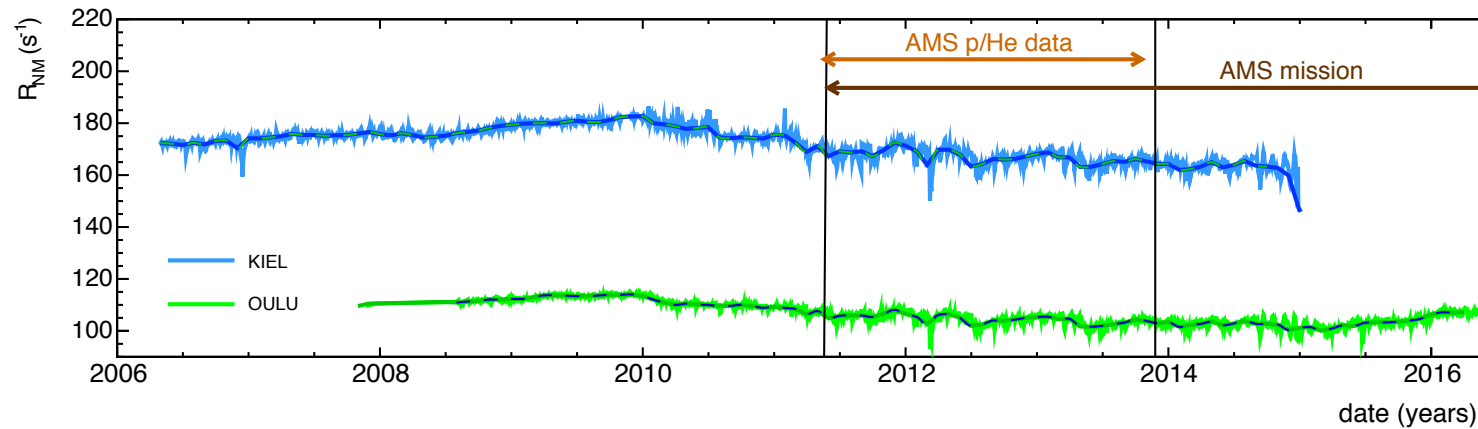


L'approssimazione Force-Field



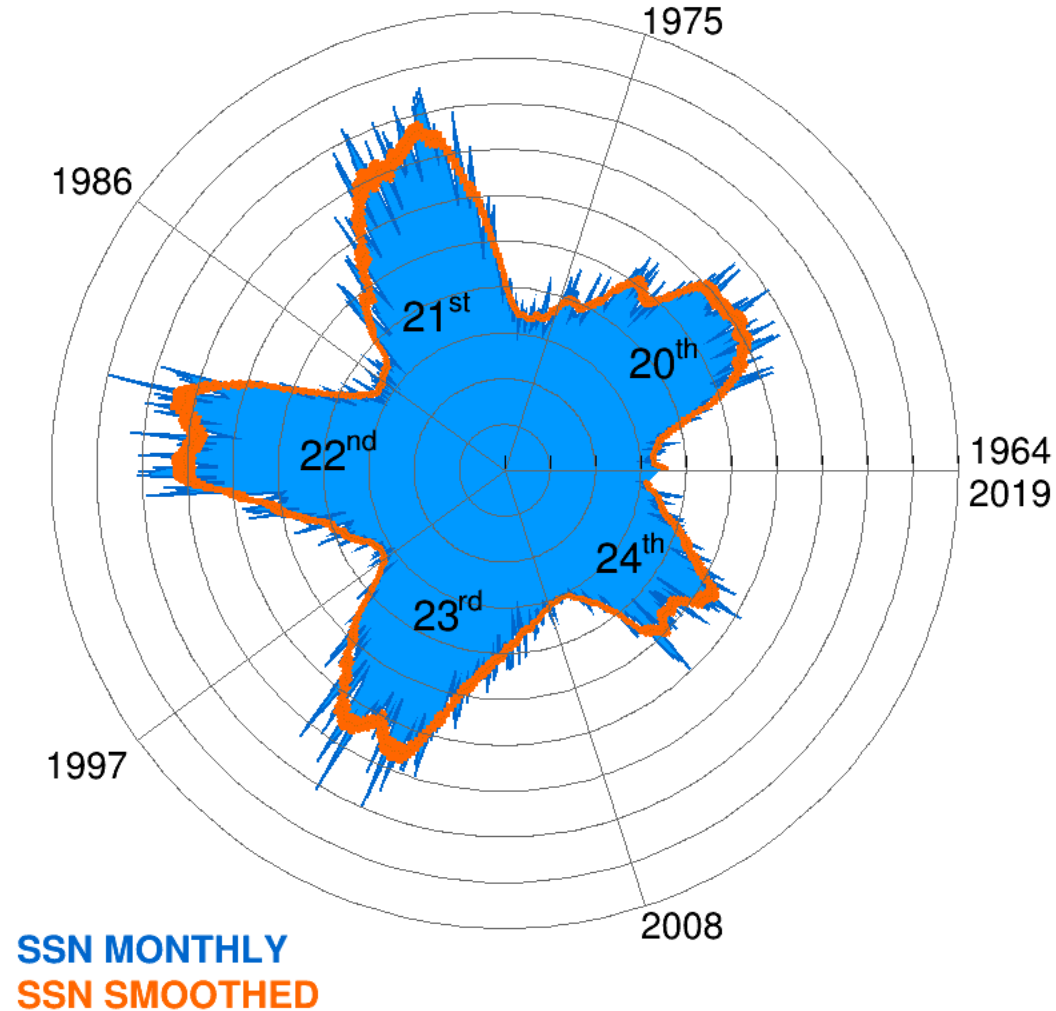
Ricostruzione del parametro di modulazione nel tempo

Ricostruzione del parametro di modulazione ϕ a differenti epoche usando i dati provenienti dai rivelatori di neutroni che monitorano l'intensità del flusso integrale di RC a Terra

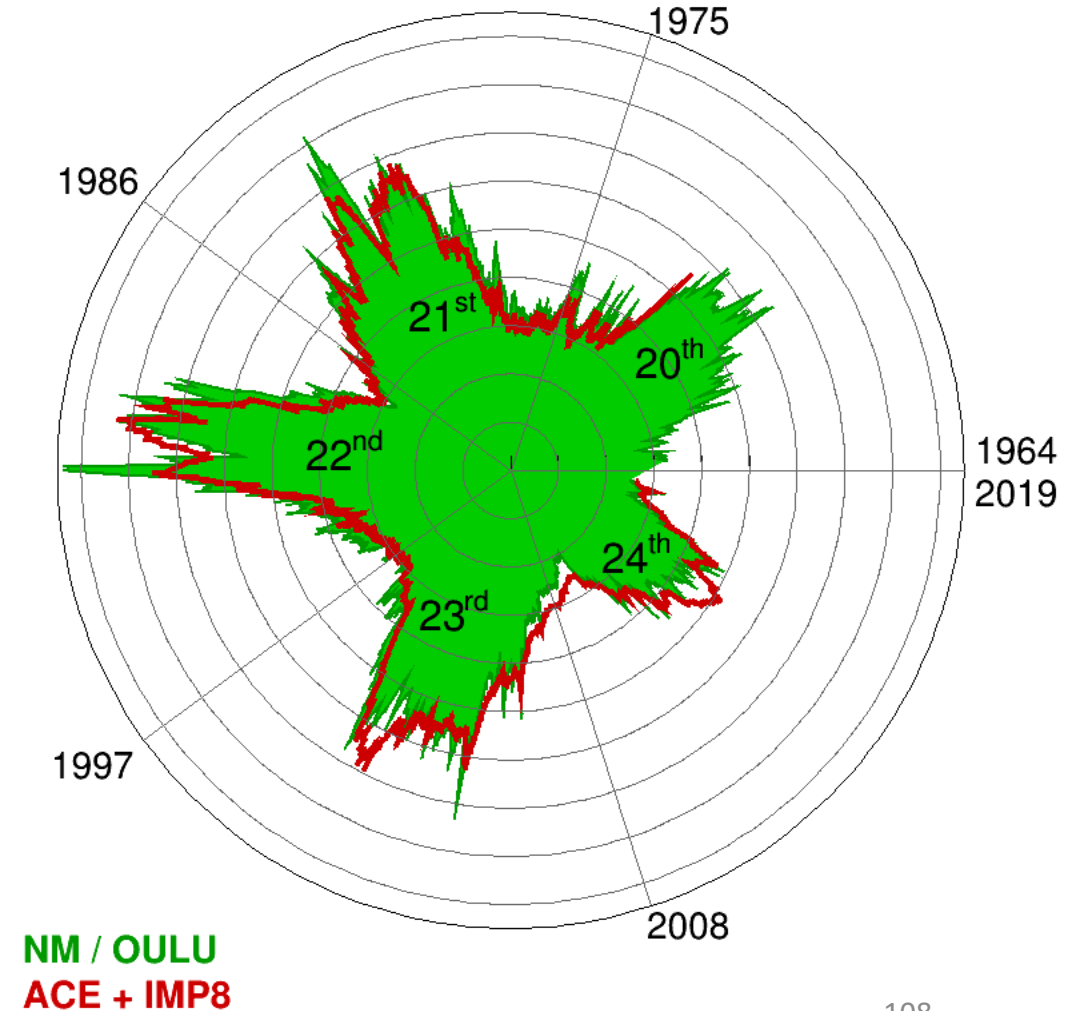


Correlazione: macchie solari VS parametro di modulazione

SOLAR ACTIVITY



COSMIC-RAY MODULATION

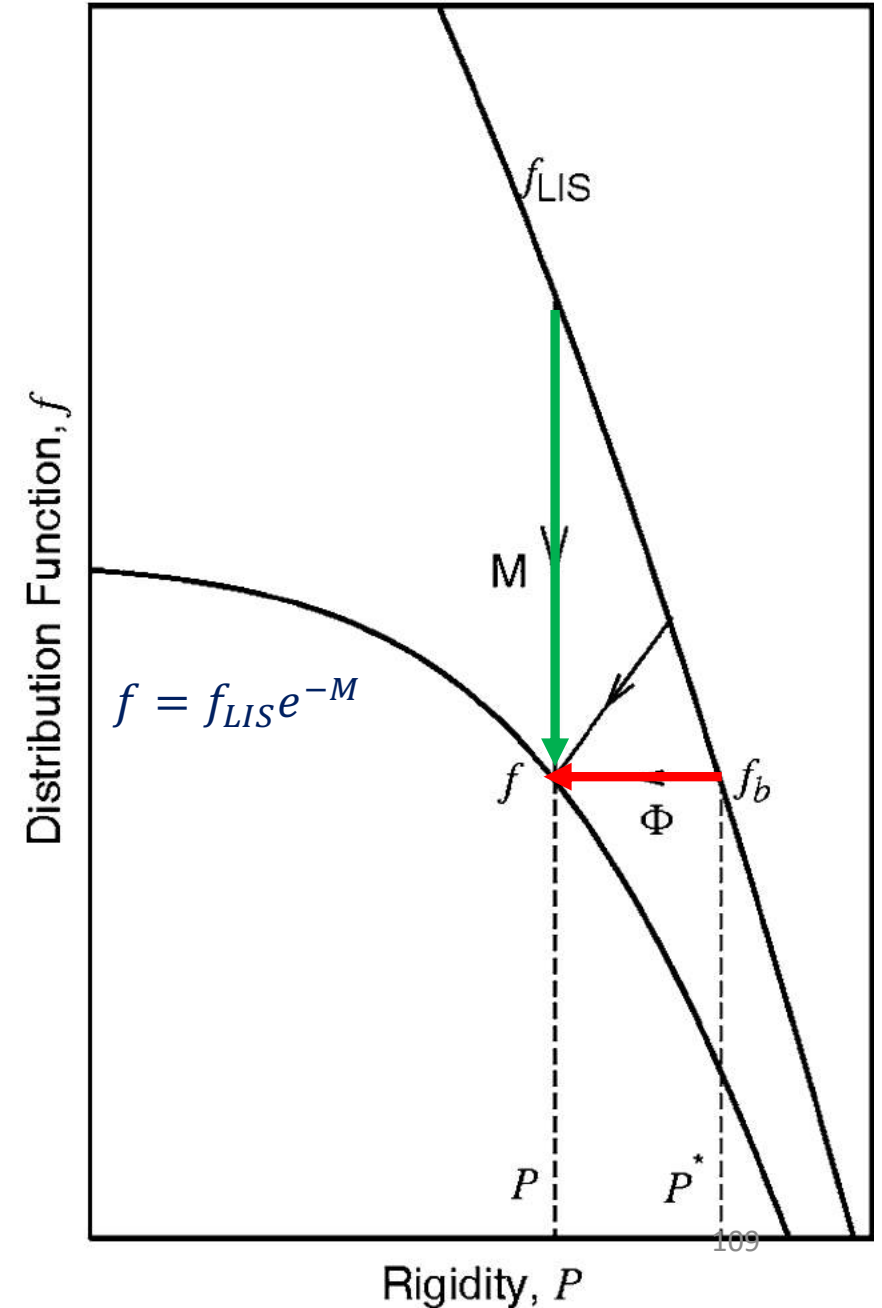


Confronto tra CD e FF

Il **CD** si interpreta come una soppressione esponenziale del flusso di particelle, causata dal parametro di modulazione M .

Il **FF** si interpreta come uno shift di rigidità (o di energia) delle particelle del flusso, che rallentano nel loro viaggio nell'eliosfera, perdendo rigidità pari a Φ .

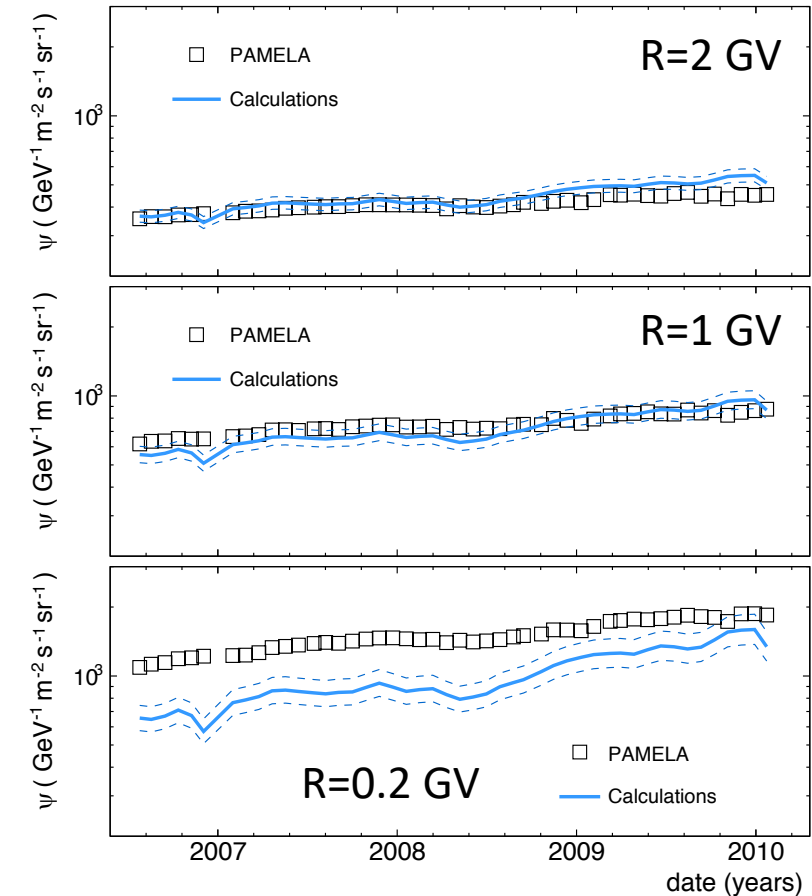
In entrambi i casi, si tratta di approssimazioni brutali e fisicamente poco consistenti. Tuttavia funzionano bene in molti casi per descrivere l'effetto di modulazione.



Limiti dell'approssimazione force-field

L'approssimazione “force-field” si rivela inadeguata:

- 1) nei casi di attività solare molto intensa o fortemente variabile;
- 2) nella descrizione dei flussi ad energie molto basse ($E < 0.1$ GeV), in cui l'effetto di modulazione è grande;
- 3) Nel descrivere differenze di modulazione osservate tra i flussi di particelle cariche di segno opposto (es. discrepanze nei rapporti elettroni/positroni, o antiprotoni/protoni).
- 4) In generale, se le misure che vogliamo descrivere sono “troppo precisi”, allora apprezziamo discrepanze tra predizione force-field e dati.



Appendice

La derivazione di Gleeson & Axford

Gleeson e Axford hanno derivato l'equazione di Parker partendo dall'equazione di Boltzmann, valutando i processi di scattering della singola particella nel sistema di riferimento (comovente) del vento solare, e quindi integrandola sulle direzioni nello spazio dei momenti, e poi ri-trasformandola nel sistema di riferimento dell'eliosfera (o dell'osservatore).

Questo approccio funziona solo in simmetria radiale, mentre l'equazione di Parker è del tutto generale, ma fornisce l'equazione di Parker nella stessa forma vista prima. Inoltre questi autori notarono che il flusso (corrente) di particelle definito come $S=nV$ deve essere corretto per l'effetto "Compton-Getting" quando viene espresso in maniera differenziale (cioè ad intervalli infinitesimi di energia, o di momento). E' da questo approccio che deriva l'approssimazione Force-Field, in cui il termine CG sopravvive.

La derivazione di Gleeson & Axford

Consideriamo una densità differenziale in momento: $U_p = 4\pi p^2 f$

Il flusso convettivo dovrebbe essere: $S_p = VU_p = 4\pi p^2 V f$

Ma in realtà, considerando l'effetto Compton-Getting, ci va un fattore C: $S_p = CVU_p = 4\pi p^2 CV f$

Questo fattore è il coefficiente di Compton-Getting: $C = -\frac{1}{3} \frac{\partial \log(f)}{\partial \log(p)}$

L'effetto CG è analogo all'effetto Doppler per i fotoni: è dovuto al fatto che il fascio di particelle è osservato in una direzione che recede, e quindi l'energia delle particelle è spostata. Siccome è legato al logaritmo, se la distribuzione in momento è una legge di Potenza $f \propto p^{-\gamma}$, allora si ha semplicemente: $C = \gamma/3$.

La derivazione di Gleeson & Axford

Tenendo conto dell'effetto CG, l'espressione del flusso è: $S = 4\pi p^2 (CVf - K \cdot \nabla f)$

Bisogna anche considerare le perdite adiabatiche. Nel sistema di riferimento del vento solare queste sono date da:

$$\frac{\langle \dot{p} \rangle}{p} = -\frac{1}{3} V \cdot \frac{\nabla f}{f}$$

Mettendo S e le perdite nell'equazione: $\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot S + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} [p^2 \langle \dot{p} \rangle f] = q$

otteniamo infine l'equazione:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (CVf - K \cdot \nabla f) - \frac{1}{3p^2} \frac{\partial}{\partial p} [p^3 V \cdot \nabla f] = q$$

che è del tutto equivalente (con un po' di algebra) all'equazione di Parker già vista prima nelle varie forme.

Accelerazione: meccanismo di Fermi

PHYSICAL REVIEW

VOLUME 75, NUMBER 8

APRIL 15, 1949

On the Origin of the Cosmic Radiation

ENRICO FERMI

Institute for Nuclear Studies, University of Chicago, Chicago, Illinois

(Received January 3, 1949)

A theory of the origin of cosmic radiation is proposed according to which cosmic rays are originated and accelerated primarily in the interstellar space of the galaxy by collisions against moving magnetic fields. One of the features of the theory is that it yields naturally an inverse power law for the spectral distribution of the cosmic rays. The chief difficulty is that it fails to explain in a straightforward way the heavy nuclei observed in the primary radiation.

$$I(p, z) = Y \delta(z) \delta(p - p_0)$$

Accelerazione: elettroni e protoni

Vedi: Merten et al. 2017 [1702.07523] <https://arxiv.org/pdf/1702.07523.pdf>

Stochastic acceleration predicts a power-law behavior in momentum,

$$\frac{dN_i}{dp_i} \propto p_i^{-\alpha_i} \quad (1)$$

with $i = e, p$ (electrons or protons). It is now assumed that the same total number of electrons and protons are accelerated, $N_p = N_e$ with $N_i = \int dN_i/dT_i dT_i$. Here, $T_i = \sqrt{m_i^2 \cdot c^4 + p_i^2 \cdot c^2} - m_i \cdot c^2$ is the kinetic energy of the particles with a minimum kinetic energy of $T_0 = 10$ keV. Assuming further that the two populations have the same spectral index $\alpha_e = \alpha_p =: \alpha$, the expected ratio scales with the masses of the two species:

$$\frac{dN_e/dp_e}{dN_p/dp_p} = \left(\frac{m_e + \frac{T_0}{2 \cdot c^2}}{m_p + \frac{T_0}{2 \cdot c^2}} \right)^{(\alpha-1)/2} \approx \left(\frac{m_e}{m_p} \right)^{(\alpha-1)/2} \quad (2)$$

The last step requires $T_0 \ll m_e \cdot c^2, m_p \cdot c^2$. This makes the approximation in Eq. [2] independent of the minimum energy. In contrast to that the exact solution depends strongly on the minimum energy and a possible difference in the minimum energies for protons and electrons as we will show later. With a spectral index of $\alpha \approx 2.2$, which is an approximate value to be expected from diffusive shock acceleration (see e.g. [8] for a summary), one finds a ratio of the order of

$$\tilde{K}_{ep} := \frac{dN_e/dp_e}{dN_p/dp_p} \approx \frac{1}{100} \quad (3)$$

Accelerazione: meccanismo di Fermi

Consideriamo un processo per cui una particella carica che “incontri” un plasma magnetizzato guadagni energia secondo la relazione:

$$\Delta E = \xi E$$

Dopo n attraversamenti: $E_n = E_o (1 + \xi)^n$

Probabilità di fuga dalla zona di accelerazione: P_{esc}

Probabilità di restare nell'acceleratore dopo n attraversamenti $(1 + P_{esc})^n$

Numero di attraversamenti necessari per raggiungere energia E $n_0 = \frac{\ln(E / E_o)}{\ln(1 + \xi)}$

Frazione di particelle accelerate ad un'energia maggiore di E :

$$N(\geq E) \propto \sum_{m=n_0}^{\infty} (1 - P_{esc})^m = \frac{(1 - P_{esc})^{n_0}}{P_{esc}}$$

Da cui si ottiene: $N(\geq E) \propto \frac{1}{P_{esc}} \left(\frac{E}{E_o} \right)^{-\gamma}$

Con

$$\gamma = \ln \left(\frac{1}{1 - P_{esc}} \right) / \ln(1 + \xi) \approx \frac{P_{esc}}{\xi} = \frac{1}{\xi} \cdot \frac{T_{cycle}}{T_{esc}}$$

Accelerazione: meccanismo di Fermi

Una particella carica di energia E_1 entra nella nube di plasma e viene diffusa elasticamente dal campo magnetico irregolare ivi presente.

Dopo alcune interazioni il moto medio della particella coincide con quello della nube. Nel sistema di riferimento del gas l'energia della particella ($m=0$) è:

$$E_1^* = \gamma E_1 (1 - \beta \cos \theta_1)$$

Il g e b si riferiscono al moto della nube di gas rispetto al laboratorio. Essendo tutti gli urti elastici, per l'energia finale della particella nel S.R. della nube varrà

$$E_2^* = E_1^*$$

Trasformando dal S.R. della nube a quello del laboratorio

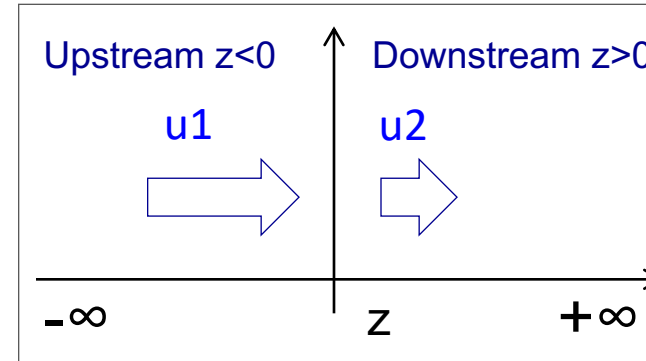
$$E_2 = \gamma E_2^* (1 + \beta \cos \theta_2)$$

Sostituendo otteniamo la variazione percentuale di energia

$$\frac{\Delta E}{E_1} = \frac{1 - \beta \cos \theta_1 + \beta \cos \theta_2 - \beta^2 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{(1 - \beta^2)} - 1$$

Accelerazione diffusiva in onde di shock

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left[D \frac{\partial f}{\partial z} \right]}_{\text{diffusion}} - \underbrace{u \frac{\partial f}{\partial z}}_{\text{advection}} + \underbrace{\frac{1}{3} \frac{\partial u}{\partial z} p \frac{\partial f}{\partial p}}_{\text{compression}} + \underbrace{I(x, p)}_{\text{injection}}$$



$r = u_1/u_2 \sim 4$ per shock forte
 $D(p)$ coefficiente di diffusione

Integrazione attraverso lo shock

$$\left[D \frac{\partial f}{\partial z} \right]_2 - \left[D \frac{\partial f}{\partial z} \right]_1 + \frac{1}{3} (u_2 - u_1) p \frac{\partial f_0}{\partial p} + I = 0$$

Integrazione upstream fino a $z = -\infty$

$$\left[D \frac{\partial f}{\partial z} \right]_1 = u_1 f_0$$

Assunzione di omogenità downstream

$$p \frac{\partial f_0}{\partial p} = \frac{3}{u_2 - u_1} (u_1 f_0 - I)$$

Termine di iniezione allo shock

$$I(p, z) = Y \delta(z) \delta(p - p_0)$$

Soluzione allo shock

$$f_0 = \alpha \frac{Y}{4\pi p_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-\alpha}$$

$$\alpha = \frac{3u_1}{u_1 - u_2} \sim 4$$

$$n(p) dp = 4\pi p^2 f(p) \propto p^{-2}$$

- Legge di potenza estesa a infiniti momenti
- Carattere universale. Non dipende da D o j
- Parametro di normalizzazione Y arbitrario

Accelerazione DSA ed energia massima

$$f^j = Y^j \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-\alpha}$$

- Non dipende da dettagli e proprietà della diffusione nello shock
- Vale per tutte le particelle cariche (in termini di rigidità $R=p/Z$)

Spettro totale di Accelerazione

$$Q_j^{pri}(p) = (4\pi p^2) \Gamma_{SN} \int_0^{x_{max}=u_2 \tau_{SN}} (4\pi x^2) f_j(x, p) dx \cong Y^j \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-\nu}$$

Tempo di accelerazione:

$$\tau_{acc}(p) = \frac{3}{u_1 - u_2} \int_{p_0}^p \left\{ \frac{D_1(p')}{u_1} + \frac{D_2(p')}{u_2} \right\} \frac{dp'}{p'}$$

- Particelle più energetiche impiegano più tempo (più cicli di accelerazione).
- Se il tempo a disposizione (età SNR) è finito -> massimo valore del momento ottenibile.
- Il tempo di accelerazione *dipende* dalle proprietà della diffusione, cioè da $D(p)$.

Per diffusione
à la Bohm

$$D_B(p) = \frac{vr_g}{3} = \frac{p}{3ZB}$$

$$\tau_{acc}(p) = \frac{\alpha(1+r)D(p)}{u_1^2} \approx \frac{20D(p)}{3u_1^2}$$

Per un'età finita T , si ottiene una rigidità massima $R_{max} = \frac{3Bu^2}{20} \tau_{SN} \sim O(TV)$ $E_{max}^j = Z^j \cdot R_{max}$

$$E_{max} = Z \left(2 \cdot 10^{14} eV \right) \left(\frac{u_s}{5 \cdot 10^3 km/s} \right) \left(\frac{B}{3 \mu G} \right) \left(\frac{\tau_{SN}}{10^3 yr} \right) \sim O(10 TeV)$$

Accelerazione DSA ed energia massima

$$f^j = Y^j \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-\alpha}$$

- Non dipende da dettagli e proprietà della diffusione nello shock
- Vale per tutte le particelle cariche (in termini di rigidità $R=p/Z$)

Spettro totale di Accelerazione

$$Q_j^{pri}(p) = (4\pi p^2) \Gamma_{SN} \int_0^{x_{max}=u_2 \tau_{SN}} (4\pi x^2) f_j(x, p) dx \cong Y^j \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-\nu}$$

Tempo di accelerazione:

$$\tau_{acc}(p) = \frac{3}{u_1 - u_2} \int_{p_0}^p \left\{ \frac{D_1(p')}{u_1} + \frac{D_2(p')}{u_2} \right\} \frac{dp'}{p'}$$

- Particelle più energetiche impiegano più tempo (più cicli di accelerazione).
- Se il tempo a disposizione (età SNR) è finito -> massimo valore del momento ottenibile.
- Il tempo di accelerazione *dipende* dalle proprietà della diffusione, cioè da $D(p)$.

Per diffusione
à la Bohm

$$D_B(p) = \frac{vr_g}{3} = \frac{p}{3ZB}$$

$$\tau_{acc}(p) = \frac{\alpha(1+r)D(p)}{u_1^2} \approx \frac{20D(p)}{3u_1^2}$$

Per un'età finita T , si ottiene una rigidità massima $R_{max} = \frac{3Bu^2}{20} \tau_{SN} \sim O(TV)$ $E_{max}^j = Z^j \cdot R_{max}$

Emax ~10 TeV. Ma osserviamo RC almeno fino a E~5 PeV

- Forse le SNR non sono le sole sorgenti di RC nella galassia
- Forse c'è un meccanismo per cui R_{max} può risultare amplificata a energie $\gg 10$ TeV

Equazione di trasporto includendo i termini di guadagno e perdita

Accelerazione in SNRs:
p, He, C-N-O, Fe...



Propagazione diffusiva
(+convezione+riaccelerazione)

Frammentazione nel mezzo interstellare.
Produzione secondaria
2H, 3He, Li-Be-B, F, T...



Modulazione solare



Osservabili
Spettri di energia,
anisotropia, composizione

Diffusive-Reacceleration Evolution Equation

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \text{CR density evolution}$$

$$Q_{pri} + Q_{sec} + \text{sources: primary and secondary}$$

$$+ \vec{\nabla} \cdot [K \vec{\nabla} \psi] + \text{magnetic diffusion}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial p} \left[p^2 D_{pp} \frac{\partial}{\partial p} \frac{\psi}{p^2} - \dot{p} \psi \right] + \text{losses \& gains}$$

$$- \Gamma_d \psi \text{ destruction \& decay}$$

Coulomb + ionization losses
&
Diffusive reacceleration

$$Q_{pri} = dq / dR \propto R^{-\alpha} \quad \text{primary source function}$$

$$Q_{sec} = \sum_{k>j} \Gamma_{k \rightarrow j} \psi_k \quad \text{secondary production: equation coupling}$$

Equazione di trasporto includendo i termini di guadagno e perdita

Accelerazione in SNRs:
p, He, C-N-O, Fe...

Propagazione diffusiva
(+convezione+riaccelerazione)

Frammentazione nel mezzo interstellare.
Produzione secondaria
2H, 3He, Li-Be-B, F, T...

Modulazione solare

Osservabili
Spettri di energia,
anisotropia, composizione

Diffusive-Reacceleration Evolution Equation

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \text{CR density evolution}$$

$$Q_{pri} + Q_{sec} + \text{sources: primary and secondary}$$

$$+ \vec{\nabla} \cdot [K \vec{\nabla} \psi] + \text{magnetic diffusion}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial p} \left[p^2 D_{pp} \frac{\partial \psi}{\partial p} - \dot{p} \psi \right] + \text{losses \& gains}$$

$$- \Gamma_d \psi \text{ destruction \& decay}$$

No gain no pain

Coulomb + ionization losses
&
Diffusive reacceleration

Senza il termine
perdite/guadagni
continui, la dipendenza
in momento (energia) è
solo implicita
nell'equazione di
trasporto.

$$Q_{pri} = dq / dR \propto R^{-\alpha} \quad \text{primary source function}$$

$$Q_{sec} = \sum_{k>j} \Gamma_{k \rightarrow j} \psi_k \quad \text{secondary production: equation coupling}$$