

Lecture 11 161118

Il pdf delle lezioni puo' essere scaricato da

[http://www.fisgeo.unipg.it/~fiandrin/didattica_fisica/
cosmic_rays1819/](http://www.fisgeo.unipg.it/~fiandrin/didattica_fisica/cosmic_rays1819/)

RS: potenza totale B

$$\langle \left(\frac{dE}{dt} \right) \rangle = \frac{4}{3} \sigma_T c U_B \beta^2 \gamma^2$$

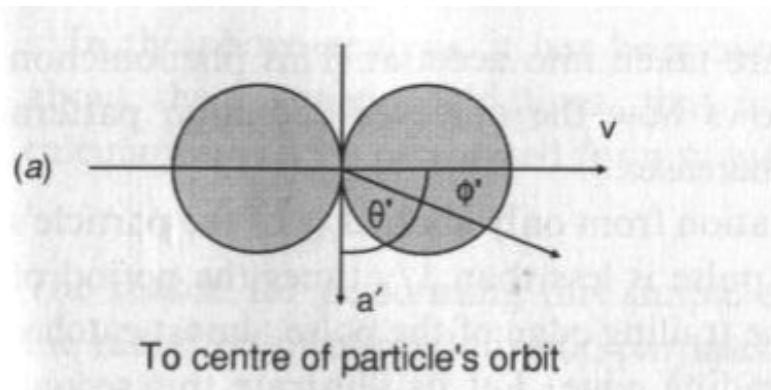
- L'espressione trovata e' uguale a quella dello scattering Compton nel limite di Thomson con U_B al posto di U_E
- La coincidenza non e' accidentale
- La radiazione di sincrotrone puo' essere considerata come scattering Compton dell'elettrone con i fotoni virtuali del campo B → potremmo procedere esattamente come nel caso Compton nel limite di Thomson

RS: spettro-argomenti fisici

- Cominciamo con l'analizzare alcuni degli aspetti fondamentali dei processi in cui sono implicate particelle relativistiche, che saranno utili per capire da dove molti dei risultati esatti provengono
- Una delle caratteristiche fondamentali della radiazione da particelle relativistiche e' che essa e' collimata nella direzione del moto della particella che emette
- Parte di questo effetto e' associato con l'aberrazione relativistica tra il riferimento della particella e quello dell'osservatore
- Ma oltre a cio' occorre valutare con attenzione anche lo sviluppo temporale di cosa e' realmente visto dall'osservatore distante

RS: beaming

Consideriamo per semplicita' un elettrone con angolo di pitch $\pi/2$



Nel riferimento S' dell'elettrone, la distribuzione angolare della radiazione e' quella dipolare

$$\approx \sin\theta'^2 = \cos\phi'^2$$

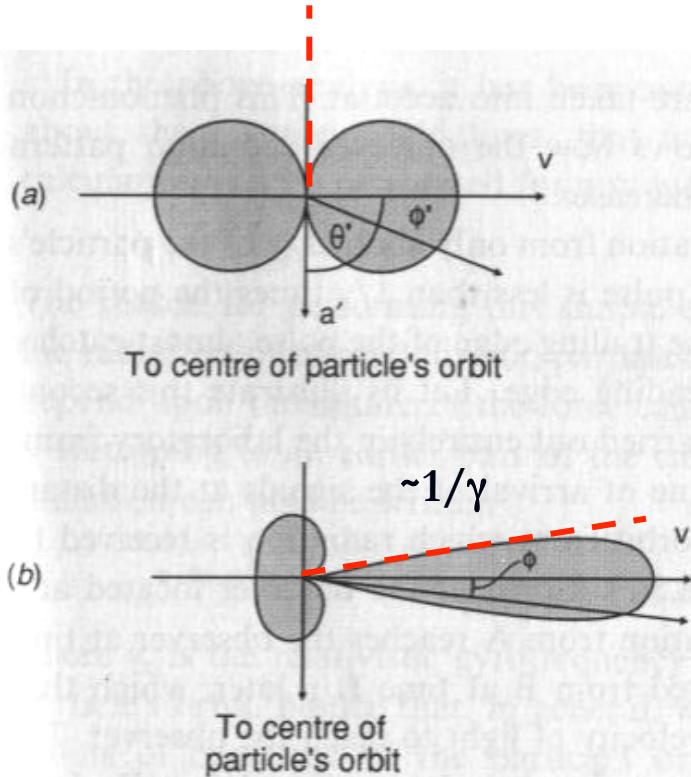
A parte la normalizzazione, puo' essere pensata come alla probabilita' con cui i fotoni sono emessi in S'

Applicando le formule di aberrazione possiamo ottenere la distribuzione nel labo

$$\cos\phi = \frac{(\cos\phi' + \beta)}{(1 + \beta \cos\phi')} \quad \sin\phi = \frac{\sin\phi'}{\gamma(1 + \beta \cos\phi')}$$

(il segno + compare perche' stiamo applicando le trasformazioni inverse da S' a S)

RS: beaming



$$\cos \phi = \frac{(\cos \phi' + \beta)}{(1 + \beta \cos \phi')} \quad \sin \phi = \frac{\sin \phi'}{\gamma(1 + \beta \cos \phi')}$$

Come già sappiamo, la radiazione viene concentrata in avanti in un angolo $\phi \approx 1/\gamma$

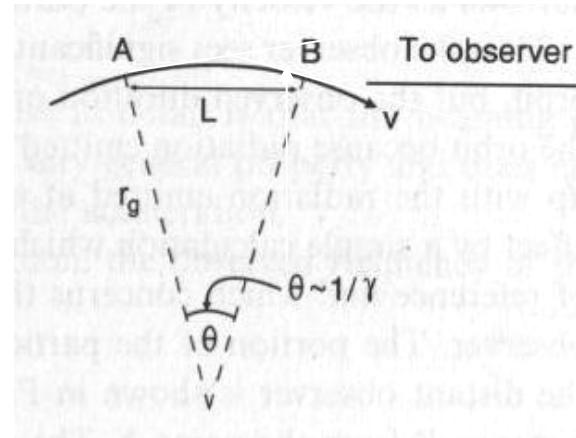
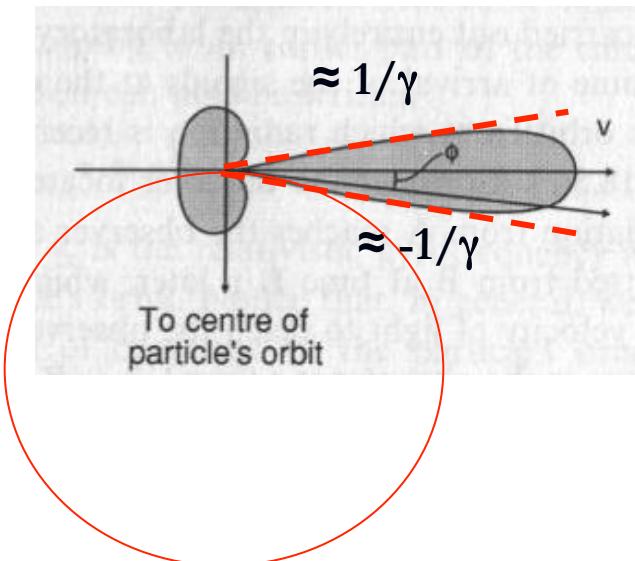
$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{\gamma^4(1 - \beta \cos \theta)^4} \frac{dP'}{d\Omega'}$$

Infatti se prendiamo $\phi' = \pi/2 \rightarrow \sin \phi \approx 1/\gamma \approx \phi$

La conseguenza di ciò è che un osservatore lontano riceve un impulso di radiazione solo quando la velocità della particella punta lungo la linea di vista entro un angolo $1/\gamma$, fortemente spostata in frequenza a causa dell'effetto Doppler

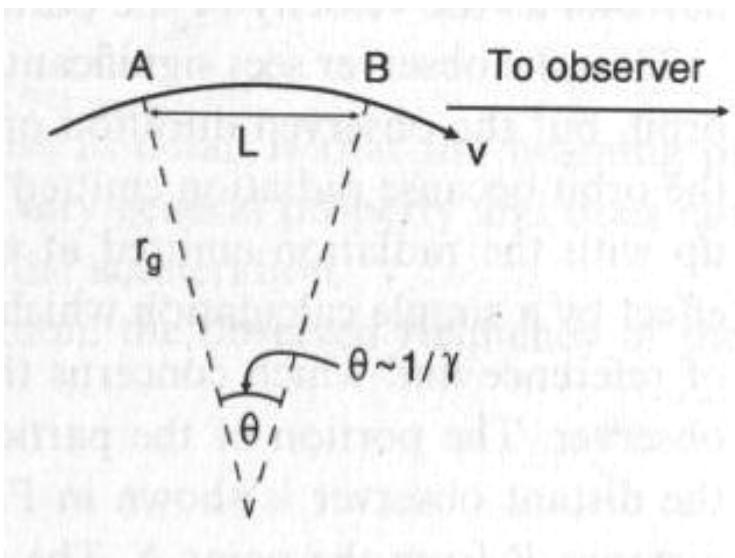
RS: beaming

Da cio' segue che l'osservatore riceve radiazione solo da una frazione $1/\gamma$ dell'orbita della particella



Ma la durata dell'impulso, misurata da un osservatore distante e' pero' molto piu' breve di $1/\gamma$ volte il periodo dell'orbita come ci si potrebbe a prima vista aspettare nel caso di una particelle relativistica

RS: beaming



Supponiamo che l'osservatore O sia a distanza R dalla posizione A

O inizia a ricevere la radiazione quando la particella transita in A

Il tempo di volo dei fotoni da A e' $t_A = R/c$

O cessa di ricevere la radiazione quando la particella transita in B dopo un tempo $\approx L/v$ dal suo passaggio in A e giunge ad O dopo un tempo $\approx t_B = (R-L)/c$ dal transito in B

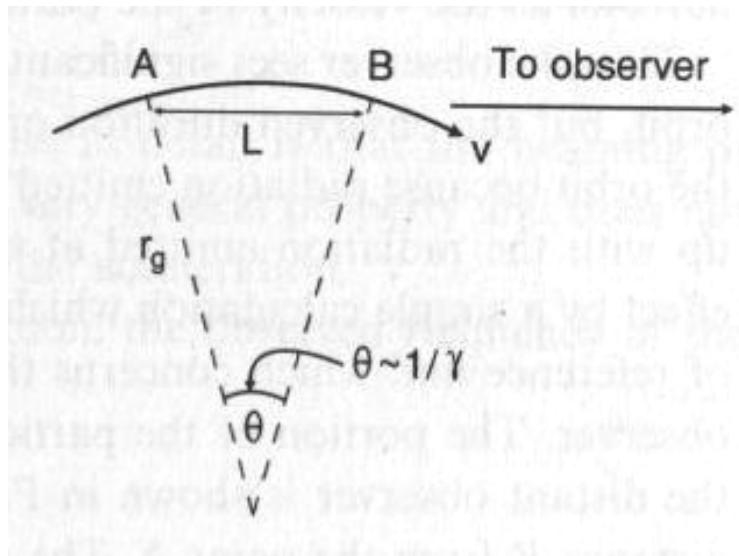
Quindi la durata totale dell'impulso misurata da O e' $\Delta T \approx t_B + L/v - t_A$

$$\Delta t = (R - L)/c + L/v - R/c = -L/c + L/v = (L/v)(1 - v/c)$$

Se $v \approx c$ la durata dell'impulso e' $\ll L/v$ come ci si poteva aspettare ingenuamente (accade per $c \rightarrow \text{infinito}$)

Il fattore Doppler tiene conto del fatto che la sorgente e' in moto e "quasi" raggiunge la radiazione che emette

RS: beaming



$$\Delta t = (L/v)(1 - v/c)$$

l'arco AB percorso sulla traiettoria $\approx L$ se $1/\gamma \ll 1$

$$\rightarrow L/v = r_c\theta/v \approx 1/\gamma\omega_r \quad V = \omega r_c \text{ e } \theta \sim 1/\gamma$$

ma $\omega_r = eB/m\gamma = \omega_g/\gamma$

ω_g frequenza di Larmor non relativistica

$$\rightarrow L/v \approx 1/\omega_g$$

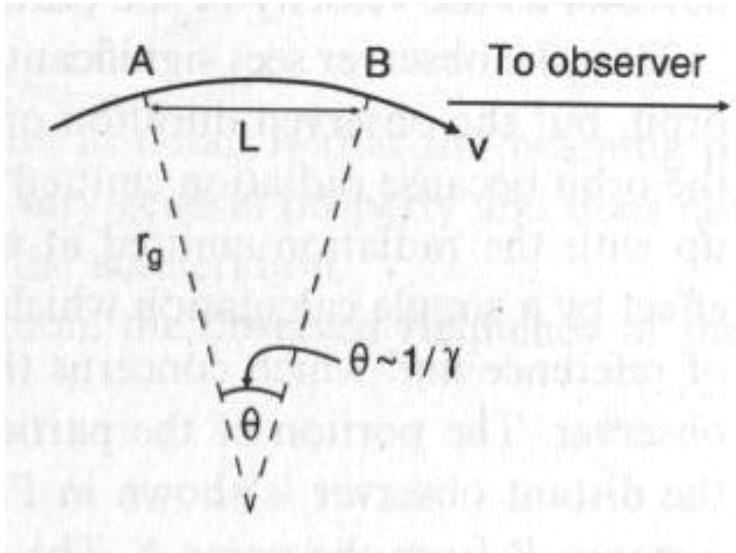
inoltre $(1 - v/c) \approx 1/2\gamma^2$ se $v/c \approx 1$ → $\Delta t \approx (1/\omega_g)(1/2\gamma^2)$

$$= (1/2\omega_g\gamma^2)$$

La durata dell'impulso osservato da O e' $\approx 1/\gamma^2$ volte piu' breve del periodo non relativistico del moto della particella $T_g = 2\pi/\omega_g$

In termini di ω_r si ha $\Delta t \approx (1/2\omega_r\gamma^3)$

RS: frequenza di emissione



$$\Delta t \approx 1/2\gamma^2\omega_g$$

Noi sappiamo che lo spettro in tal caso sara' piuttosto largo, con un cutoff a frequenze $\omega \approx 1/\Delta t$

definiamo una frequenza critica

$$\omega_c \equiv \frac{3}{2}\gamma^2\omega_g = \frac{3}{2}\gamma^3 2\omega_r$$

Se l'angolo di pitch non e' $\pi/2$ allora $\omega_g \rightarrow \omega_g \sin \alpha$

Ci aspettiamo che lo spettro si estenda fino $\approx \omega_c$ e che oltre decada rapidamente, ie c'e' poca potenza emessa oltre ω_c

Se la durata dell'impulso e' Δt , la massima componente di Fourier si ha alla frequenza $\nu \approx (\Delta t)^{-1}$

Per un'elettrone $v/B = 28 \text{ GHz T}^{-1}$

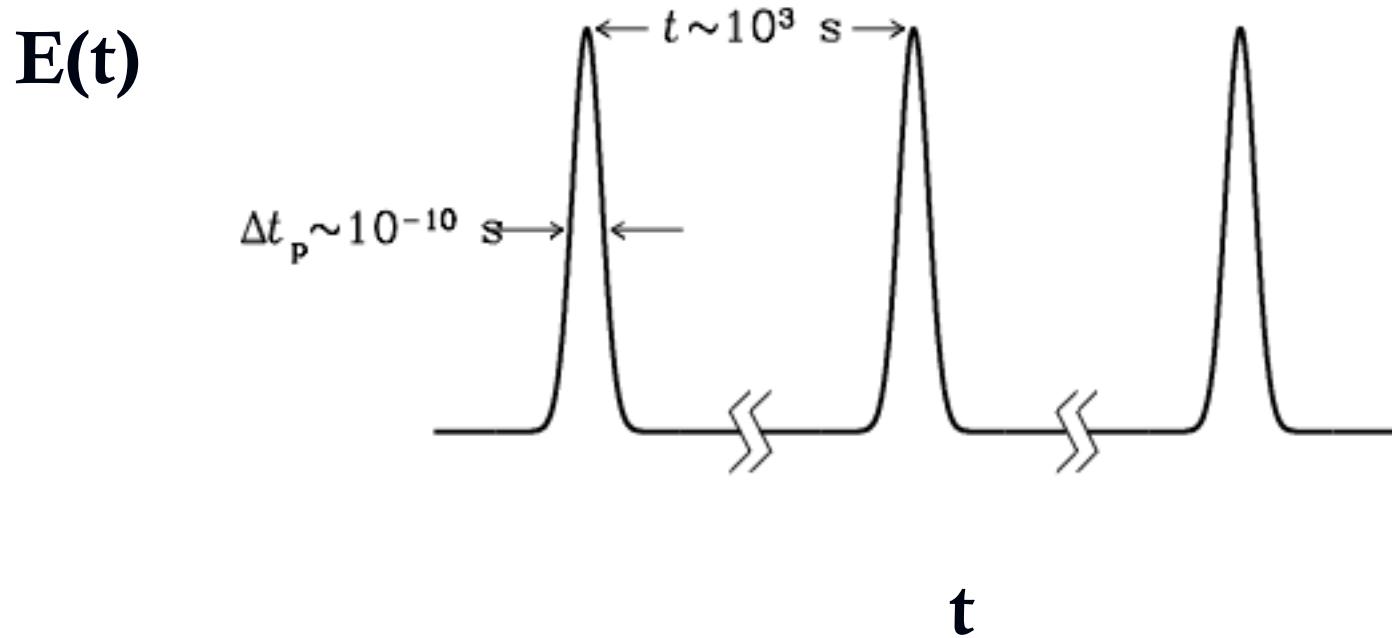
Con $B \sim 5 \times 10^{-6} \text{ G}$

$$\omega_{larmor} \approx 2\pi \times 14 \text{ rad s}^{-1}$$

Per un e- con $\gamma \sim 10^4$ la larghezza dell'impulso e'

$$\Delta t_{pulse} \approx \frac{1}{\gamma^2 \omega_{larmor}} \approx \frac{1}{(10^4)^2 \times 2\pi \times 14} \approx 10^{-10} \text{ s}$$

The time between pulses is $\sim t \approx \frac{\gamma}{\nu_{larmor}} \approx 10^3 s$



RS: spettro qualitativo

Possiamo dedurre molto sulle caratteristiche dello spettro usando il fatto che E e' solo funzione di $\gamma\theta$

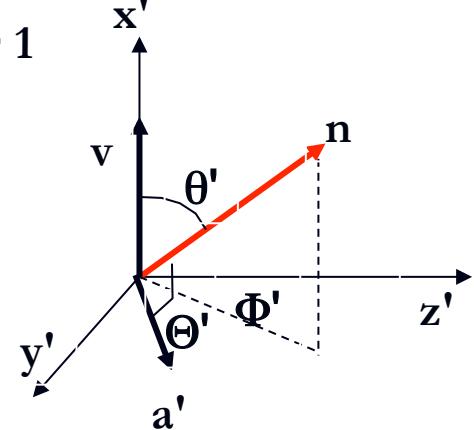
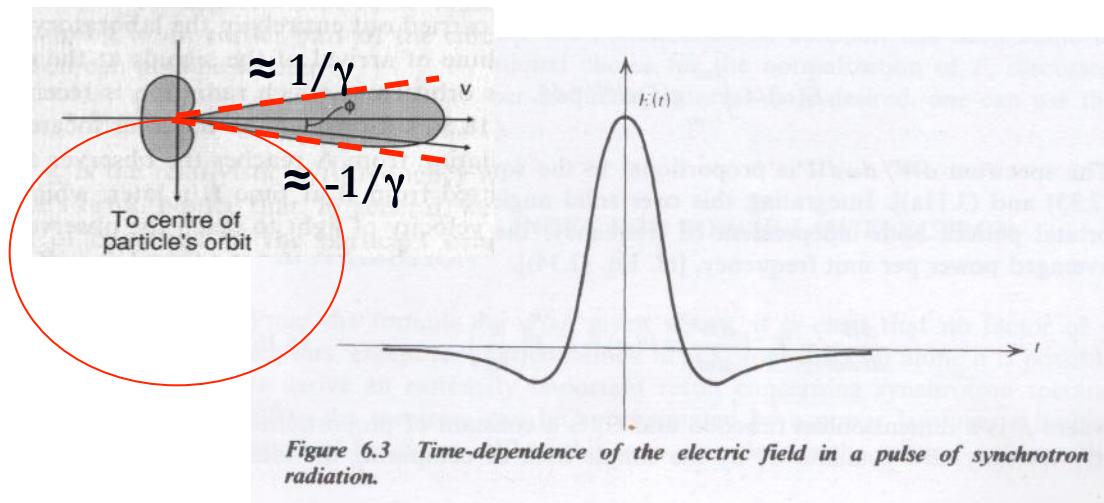
Nel caso di accel **perp** v , come della RS, la distribuzione angolare e' (cfr. Irraggiamento)

$$\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)_\perp = \frac{q^2}{4\pi c^3} \frac{|\vec{a}_\perp|^2}{(1-\beta\mu)^4} \left(1 - \frac{\sin^2\theta \cos^2\Phi}{\gamma^2(1-\beta\mu)^2}\right) \quad \text{Nel limite ultra-rel } \gamma \gg 1$$

$$\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)_\perp \approx \frac{4q^2 a_\perp^2}{\pi c^3} \gamma^8 \frac{1 - 2\gamma^2\theta^2 \cos^2\phi + \gamma^4\theta^4}{(1+\gamma^2\theta^2)^6}$$

Dato che $\left(\frac{dP}{d\Omega}\right) \propto |E|^2$ possiamo scrivere $E(t) \propto F(\gamma\theta)$

t e' misurato nel rif dell'osservatore



L'osservatore osserva $E \neq 0$ solo quando v punta su di lui entro un cono di semi-aper. $1/\gamma$, cioe' in un intervallo di tempo ben definito → esiste una relazione fra θ e t (se misuriamo il tempo a partire dall'istante in cui l'osserv inizia a ricevere la radiazione

RS: spettro qualitativo

$$E(t) \propto F(\gamma\theta) \quad \omega_c \equiv \frac{3}{2}\gamma^2\omega_g = \frac{3}{2}\gamma^3\omega_r$$

Abbiamo visto che la durata misurata dall'osservatore e'

$$t = (L/v)(1 - \beta) \approx \frac{L}{2v\gamma^2} \quad \text{Per definizione } \theta = L/a$$

$$t \approx \frac{L}{2v\gamma^2} = \frac{a\theta}{2v\gamma^2} \quad \text{Ma } \omega_r = v/a \quad t \approx \frac{\theta}{2\omega_r \sin \alpha \gamma^2} \quad \rightarrow \quad \gamma\theta \approx 2\gamma(\gamma^2\omega_r \sin \alpha)t \propto \omega_c t$$

 $E(t) \propto g(\omega_c t)$

La costante di prop non e' (ancora) nota e puo' dipendere da tutto, eccetto che dal tempo

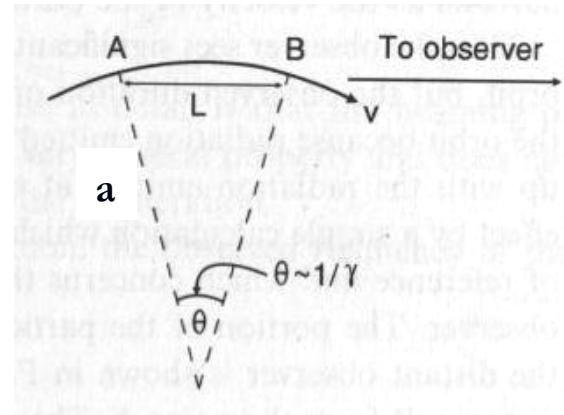
Questo e' suff per derivare la dipendenza generale della spettro da ω

La distribuzione spettrale dipende dalla trasformata di Fourier del campo E di radiazione

$$\tilde{E}(\omega) \propto \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega_c t) e^{i\omega t} dt$$

Ponendo $x = \omega_c t$ si ha

$$\tilde{E}(\omega) \propto \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{ix\omega/\omega_c} dx$$



RS: spettro qualitativo

$$\tilde{E}(\omega) \propto \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{ix\omega/\omega_c} dx \equiv f(\omega/\omega_c)$$

Lo spettro di energia per unita' di frequenza e angolo solido e'

$$\frac{dE}{d\omega d\Omega} \propto |E(\omega)|^2 \quad \rightarrow \quad \frac{dE}{d\omega} \propto \int |E(\omega)|^2 d\Omega \quad \text{NB: l'integrazione non cambia la dip da } \omega$$

Se T e' il periodo orbitale dell'e- (indipendente dalla frequenza emessa), la potenza media irraggiata in T e'

$$\frac{dE}{d\omega dt} = T^{-1} \frac{dE}{d\omega}$$

$$\frac{dE}{d\omega dt} \propto T^{-1} \int |E(\omega)|^2 d\Omega \equiv C_1 F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \quad \text{Lo spettro dipende solo da } \omega/\omega_c$$

La costante (rispetto a ω e t) puo' essere determinata dalla condizione che

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^\infty \frac{dE}{d\omega dt} d\omega = C_1 \int_0^\infty F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) d\omega = \omega_c C_1 \int_0^\infty F(z) dz \quad z = \omega/\omega_c$$

Tenendo conto che

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2q^4 B^2 \gamma^2 \beta^2 \sin^2 \alpha}{3m^2 c^3} \quad \omega_c \equiv \frac{3}{2} \gamma^2 \omega_g \sin \alpha = \frac{3}{2} \gamma^3 \omega_r \sin \alpha \quad \text{Si ottiene}$$

$C_1 = \frac{4}{3} \frac{q^3 B \sin \alpha}{mc^2 \int_0^\infty F(z) dz}$ Non conosciamo il valore assoluto di C_1 finche' non si determina $F(z)$, ma l'integrale a denominatore fissa solo la normalizzazione assoluta dello spettro, non la dipendenza dalle variabili, che e' esatta

$$\rightarrow \frac{dE}{d\omega dt} = K \frac{q^3 B \sin \alpha}{mc^2} F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \quad \text{dove K e' un numero privo di dimensioni fisiche (dell'ordine dell'unità')}$$

RS: spettro di emissione

$$(\frac{dP}{d\omega})_{\perp} \approx \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{4\pi mc} [F(x) + G(x)]$$

$$(\frac{dP}{d\omega})_{\parallel} \approx \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{4\pi mc} [F(x) - G(x)] \quad x = \omega/\omega_c$$

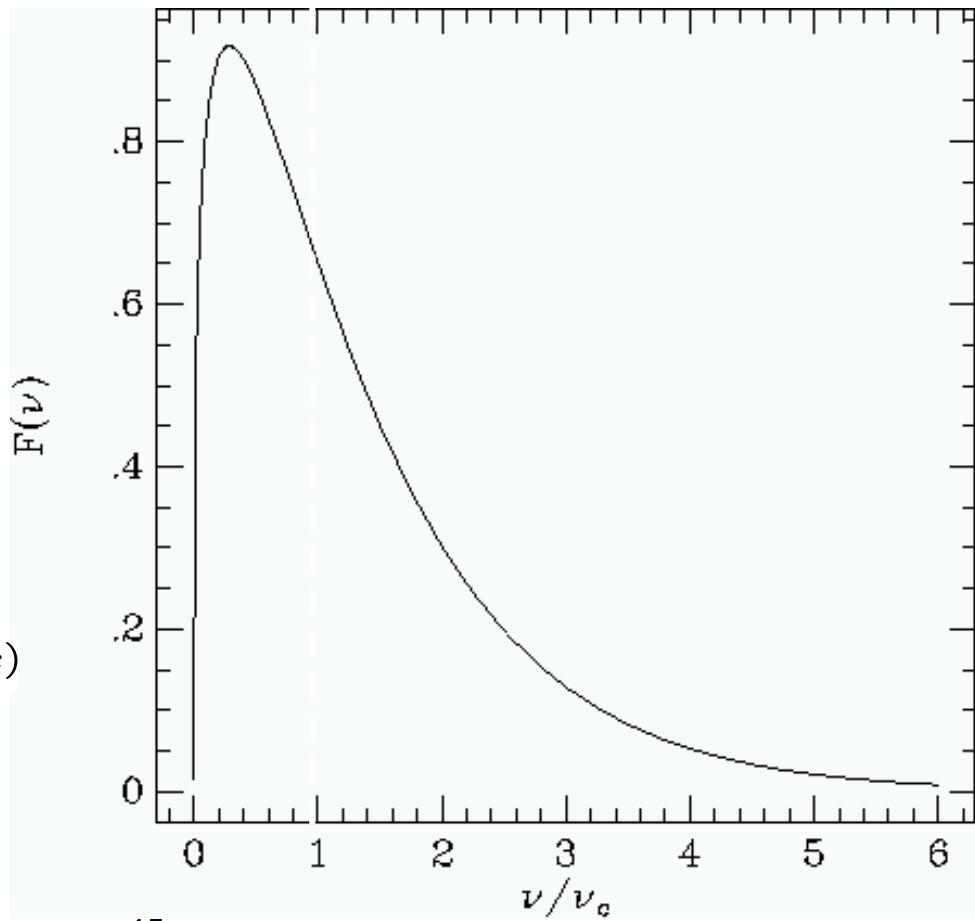
$$(\frac{dP}{d\omega}) = (\frac{dP}{d\omega})_{\perp} + (\frac{dP}{d\omega})_{\parallel} \approx \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{2\pi mc} F(x) \quad [\text{Es}^{-1}\text{Hz}^{-1}] \quad \omega_c = 3\gamma^3 c/2a$$

La distribuzione dello spettro e' interamente determinata da $F(x)$

La funzione F ha un largo massimo a $\nu \approx \nu_c$ con una larghezza $\Delta\nu/\nu \approx 1$

Il max dell'emissione si ha a $\nu = 0.29\nu_c$

$$F(x) = x \int_x^{\infty} K_{5/3}(z) dz \quad G(x) = x K_{2/3}(x)$$



RS: spettro di emissione

$$\left(\frac{dP}{d\omega}\right) = \left(\frac{dP}{d\omega}\right)_\perp + \left(\frac{dP}{d\omega}\right)_\parallel \approx \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{2\pi mc} F(x) \quad [\text{Es}^{-1}\text{Hz}^{-1}] \quad x = \omega/\omega_c$$

La frequenza critica ω_c puo' essere espressa in funzione della frequenza di Larmor dell'elettrone, eliminando a

$$\omega_c = 3\gamma^3 c / 2a$$

La particella descrive una spirale con angolo di pitch α → istantaneamente il piano dell'orbita ha la stessa inclinazione. Nel piano istantaneo dell'orbita (che contiene v ed a), il moto puo' essere considerato circolare quindi

$$v/a = \omega_r \sin \alpha \quad \longrightarrow \quad a = v/\omega_r \sin \alpha$$

Nel limite ultra relativistico $v \approx c$

$$a = c/\omega_r \sin \alpha \quad \longrightarrow \quad \omega_c = \frac{3}{2}\gamma^3 \omega_r \sin \alpha$$

Ma $\omega_r = \omega_g/\gamma$ dove ω_g e' la frequenza di larmor non relativistica $\omega_g = qB/m$

$$\omega_c = \frac{3}{2}\gamma^2 \omega_g \sin \alpha$$

Il risultato ottenuto e' molto simile a quello ottenuto da considerazioni elementari da cui si era ottenuto che la radiazione e' emessa a frequenze $\omega \approx \gamma^2 \omega_g \sin \alpha$

RS: comportamenti asintotici dello spettro

$$\left(\frac{dP}{d\omega}\right) = \left(\frac{dP}{d\omega}\right)_\perp + \left(\frac{dP}{d\omega}\right)_\parallel \approx \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{2\pi mc} F(x)$$

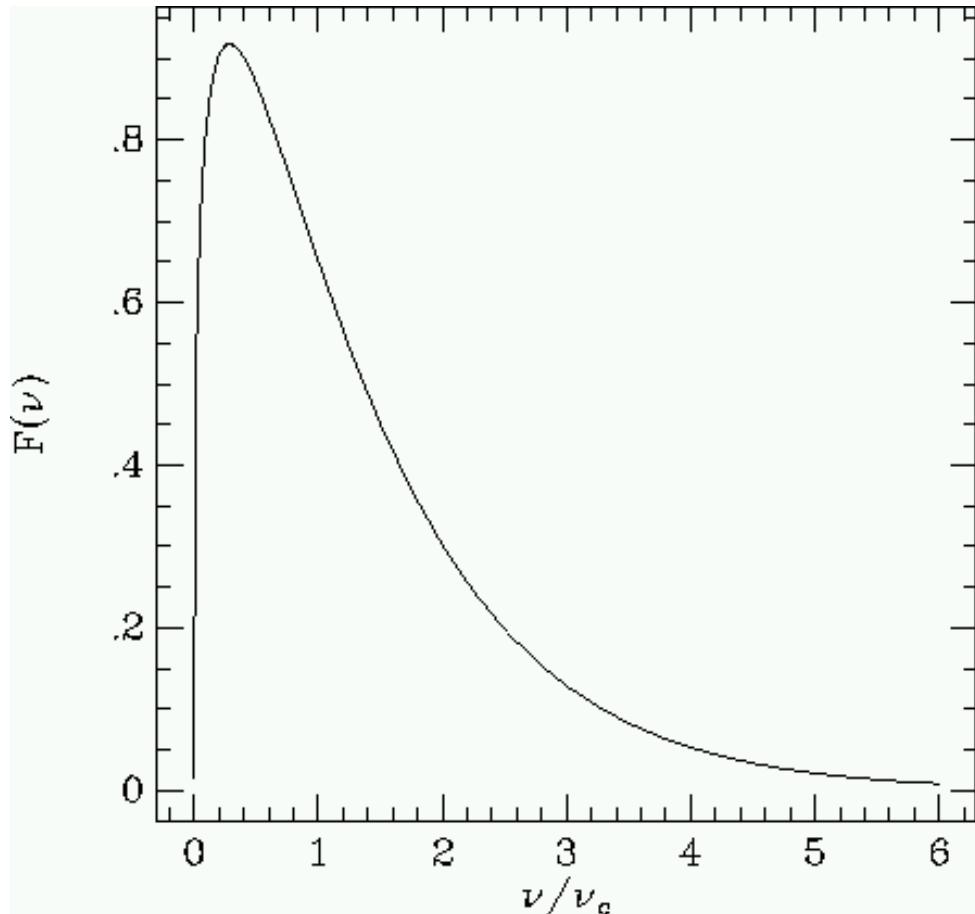
$$x = \omega/\omega_c$$

$$\omega_c = \frac{3}{2}\gamma^2\omega_g \sin \alpha$$

La forma della $F(x)$ non e' esprimibile in forma analitica chiusa ma nei limiti di $x \ll 1$ e $x \gg 1$ e' possibile ottenere forme funzionali semplici, sfruttando le proprietà asintotiche delle funzioni di Bessel

$$F(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} x^{1/2} e^{-x} \quad x \gg 1$$

$$F(x) = \frac{4\pi}{\sqrt{3}\Gamma(1/3)} \left(\frac{x}{2}\right)^{1/3} \quad x \ll 1$$



RS: comportamenti asintotici dello spettro

$$\left(\frac{dP}{d\omega}\right) = \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{2\pi mc} F(x)$$

$$x = \omega/\omega_c$$

$$\omega_c = \frac{3}{2}\gamma^2\omega_g \sin \alpha$$

Nel limite $x \gg 1$ $F(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} x^{1/2} e^{-x}$

Percio' lo spettro ha la forma

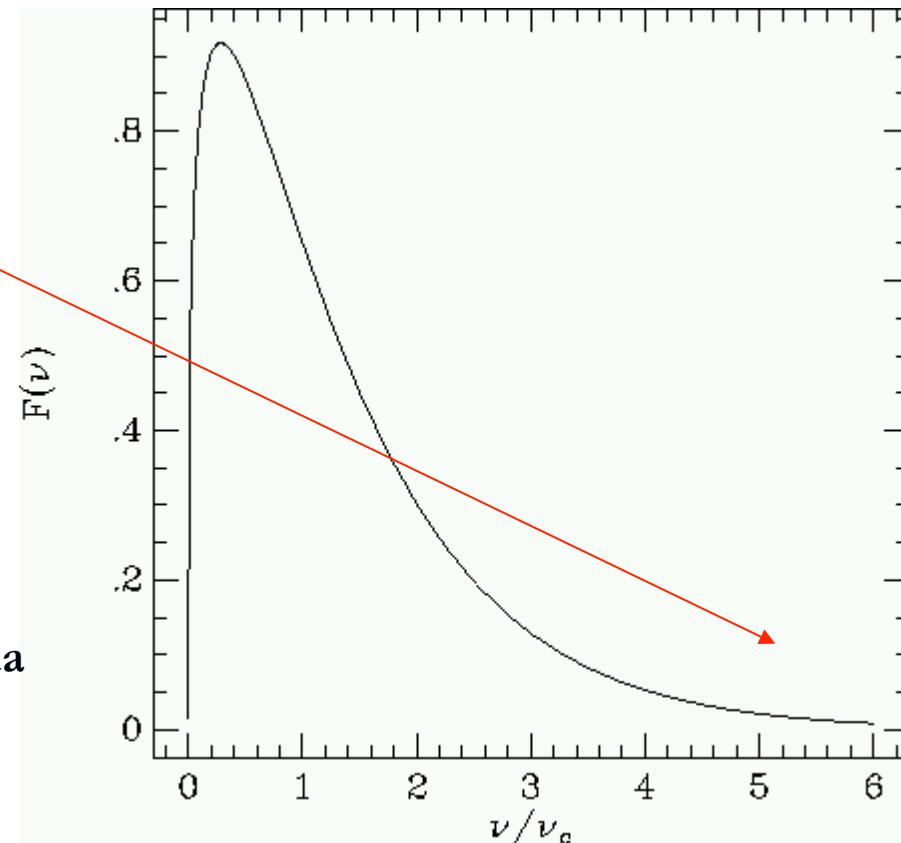
$$\left(\frac{dP}{d\omega}\right) = \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{2\pi mc} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{1/2} e^{-\omega/\omega_c}$$

C'e' poca potenza emessa a frequenze $> \omega_c$

E' una diretta conseguenza del beaming relativistico

La durata dell'impulso di radiazione misurata da un osservatore lontano e'

$$\Delta t \approx \gamma^2 \omega_g$$



Quindi le componenti di Fourier hanno intensita' apprezzabili solo fino a $\approx (\Delta t)^{-1}$, i.e. ω_c

RS: comportamenti asintotici dello spettro

$$\left(\frac{dP}{d\omega}\right) = \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{2\pi mc} F(x)$$

$$x = \omega/\omega_c$$

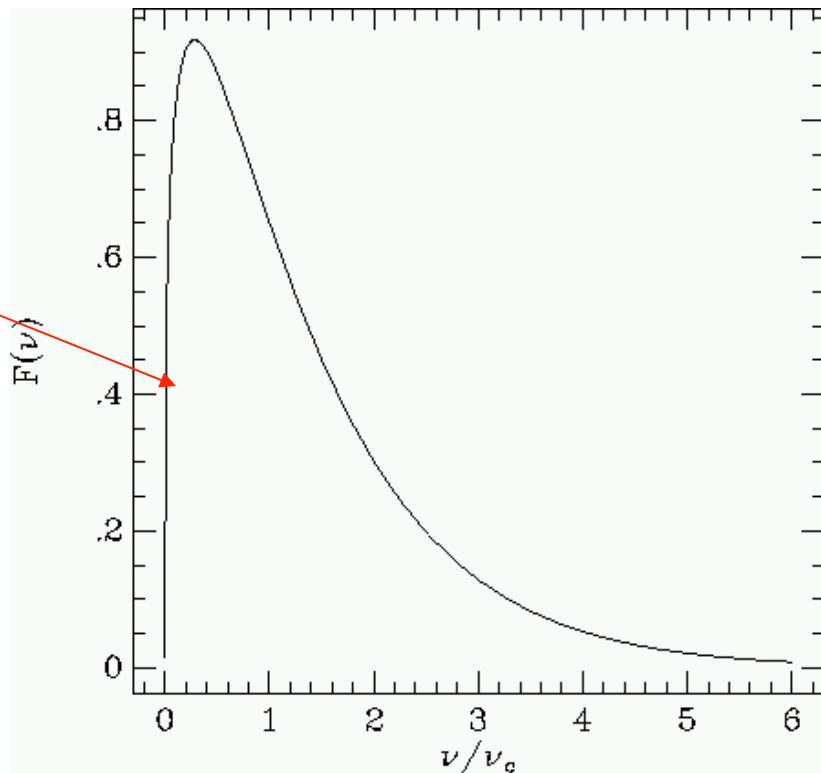
$$\omega_c = \frac{3}{2}\gamma^2\omega_g \sin \alpha$$

Nel limite $x \ll 1$ $F(x) = \frac{4\pi}{\sqrt{3}\Gamma(1/3)}\left(\frac{x}{2}\right)^{1/3}$

quindi

$$\left(\frac{dP}{d\omega}\right) = \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{2\pi mc} \frac{4\pi}{\sqrt{3}\Gamma(1/3)}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right)^{1/3}$$

L'origine della dipendenza sta nel fatto che la potenza totale emessa e' indipendente dalla massa di riposo della particella che emette e puo' essere espressa in funzione delle frequenze di larmor e critica



RS: spettro da una distribuzione

Per ottenere lo spettro osservato occorre integrare sulla popolazione di elettroni nel campo magnetico $n(E) = dN/dEdV$

La potenza per unita' di volume emessa e' $J(\omega) \equiv \left(\frac{dE}{dt dV} \right) = \int \left(\frac{dP}{d\omega} \right)_e n(E) dE$ [Es-1V⁻¹Hz-1]

con $\left(\frac{dP}{d\omega} \right) = \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{8\pi^2 \epsilon_0 mc} F(x)$ [Es⁻¹Hz⁻¹]

Se prendiamo una distribuzione di elettroni con una legge di potenza in energia

$$n(E)dE = kE^{-p}dE$$

Lo spettro e' $J(\omega) = \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{8\pi^2 \epsilon_0 mc} k \int_o^\infty F(x) E^{-p} dE$

Supponiamo per ora che l'angolo di pitch α sia fissato

RS: spettro da una distribuzione

$$J(\omega) = \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{8\pi^2 \epsilon_0 mc} k \int_o^\infty F(x) E^{-p} dE \quad x = \omega/\omega_c \quad \omega_c = \frac{3}{2}\gamma^2 \omega_g \sin \alpha$$

Integriamo il contributo di elettroni di diverse energie ad una data frequenza ω

Per una data frequenza, x dipende dall'energia della particella

$$x = \omega / \left(\frac{3}{2} \gamma^2 \omega_g \sin \alpha \right) = \frac{2}{3} \frac{m^2 c^4}{(\omega_g \sin \alpha)} \frac{\omega}{E^2} = \frac{A}{E^2}$$

Fissata una frequenza ω , quando $E \gg mc^2$ (i.e. $\gamma \gg 1$) $\rightarrow x \ll 1$, cioe' sommiamo sulla coda a bassi x di $F(x)$, mentre quando $E \ll mc^2$, $x \gg 1$ e sommiamo sulle code esponenziali di $F(x)$

Grazie alla relazione di sopra, possiamo trasformare l'integrale su E in un integrale su x

Invertendo si ha $E = \left(\frac{A}{x}\right)^{1/2}$ $dE = -\frac{1}{2} \frac{A^{1/2}}{x^{3/2}} dx$

RS: spettro da una distribuzione

$$J(\omega) = \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{8\pi^2 \epsilon_0 mc} k \int_o^\infty F(x) E^{-p} dE \quad x = \omega/\omega_c \quad \omega_c = \frac{3}{2}\gamma^2 \omega_g \sin \alpha$$

$$E = \left(\frac{A}{x}\right)^{1/2} \quad dE = -\frac{1}{2} \frac{A^{1/2}}{x^{3/2}} dx$$

$$\begin{aligned} J(\omega) &= \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{8\pi^2 \epsilon_0 mc} k \int_o^\infty \left(\frac{A}{x}\right)^{-p/2} F(x) \left(-\frac{1}{2} \frac{A^{1/2}}{x^{3/2}}\right) dx = \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{16\pi^2 \epsilon_0 mc} k A^{-(p-1)/2} \int_o^\infty x^{p/2-3/2} F(x) dx \\ &= \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{16\pi^2 \epsilon_0 mc} k \left(\frac{2}{3} \frac{m^2 c^4}{(\omega_g \sin \alpha)} \omega\right)^{-(p-1)/2} \int_o^\infty x^{p/2-3/2} F(x) dx \end{aligned}$$

L'integrale si ottiene da $\int_0^\infty x^\mu F(x) dx = \frac{2^{\mu+1}}{\mu+2} \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{7}{3}\right) \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{2}{3}\right)$ **Con $\mu=(p-3)/2$**

$$\int_o^\infty x^{p/2-3/2} F(x) dx = \frac{2^{(p-3)/2+1}}{(p-3)/2+2} \Gamma\left(\frac{(p-3)/2}{2} + \frac{7}{3}\right) \Gamma\left(\frac{(p-3)/2}{2} + \frac{2}{3}\right) = \frac{2^{(p-1)/2}}{(p+1)/2} \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{1}{12}\right)$$

$$J(\omega) = \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{16\pi^2 \epsilon_0 mc} k \left(\frac{2}{3} \frac{m^2 c^4}{\omega_g \sin \alpha} \omega\right)^{-(p-1)/2} \frac{2^{(p-1)/2}}{(p+1)/2} \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{1}{12}\right)$$

$$J(\omega) = \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{8\pi^2 \epsilon_0 mc(p+1)} k \left(\frac{m^2 c^4}{3\omega_g \sin \alpha} \omega\right)^{-(p-1)/2} \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{1}{12}\right)$$

RS: spettro da una distribuzione

$$J(\omega) = \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{8\pi^2 \epsilon_0 mc(p+1)} k \left(\frac{m^2 c^4}{3\omega_g \sin \alpha} \omega \right)^{-(p-1)/2} \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{1}{12}\right) \quad [\text{Es-1V-1Hz-1}]$$

Bisogna ora integrare sull'angolo di pitch, assegnata una distribuzione

$$J(\omega) = \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin^{(p+1)/2} \alpha}{8\pi^2 \epsilon_0 mc(p+1)} k \left(\frac{m^2 c^4}{3\omega_g} \omega \right)^{-(p-1)/2} \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{1}{12}\right)$$

Il caso piu' semplice e' quello di una distribuzione isotropa di angoli di pitch

La distribuzione e' $p(\alpha) = \frac{1}{2} \sin \alpha d\alpha$ **quindi** $\langle J(\omega) \rangle_\alpha = \int_0^\pi p(\alpha) J(\omega; \alpha) d\alpha$

Per cui l'integrale da calcolare e' $\frac{1}{2} \int_0^\pi \sin^{(p+3)/2} \alpha d\alpha = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma((p+5)/4)}{2 \Gamma((p+7)/4)}$

$$\langle J(\omega) \rangle_\alpha = \frac{\sqrt{3\pi} q^3 B}{16\pi^2 \epsilon_0 mc(p+1)} k \left(\frac{m^2 c^4}{3\omega_g} \omega \right)^{-(p-1)/2} \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{1}{12}\right) \frac{\Gamma((p+5)/4)}{2 \Gamma((p+7)/4)}$$

Sostituendo $\omega_g = \frac{qB}{m}$

$$\langle J(\omega) \rangle_\alpha = \frac{\sqrt{3\pi} q^3 B}{16\pi^2 \epsilon_0 mc(p+1)} k \left(\frac{m^3 c^4}{3qB} \omega \right)^{-(p-1)/2} \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{1}{12}\right) \frac{\Gamma((p+5)/4)}{2 \Gamma((p+7)/4)} \quad [\text{Es-1V-1Hz-1}]$$

E' la forma finale dello spettro da una distribuzione isotropa di elettroni con legge di potenza

RS: spettro da una distribuzione

$$\langle J(\omega) \rangle_{\alpha} = \frac{\sqrt{3\pi}q^3 B}{16\pi^2\epsilon_0 mc(p+1)} k \left(\frac{m^3 c^4}{3qB} \omega \right)^{-(p-1)/2} \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{1}{12}\right) \frac{\Gamma((p+5)/4)}{2\Gamma((p+7)/4)}$$

■ Le dipendenze essenziali sono $\langle J(\omega) \rangle_{\alpha} = DkB^{(p+1)/2}\omega^{-(p+1)/2}$ ■ [Es-1V⁻¹Hz⁻¹]

- ▷ L'intensita' dell'emissione per unita' di volume dipende dal valore del campo B in cui gli elettroni spiralano e dall'indice dello spettro → misurando lo spettro abbiamo informazioni sull'intensita' del campo B nella regione di emissione
- ▷ La pendenza dello spettro e' diversa da quella degli elettroni ma misurando l'indice spettrale della radiazione conosciamo quello degli elettroni che emettono

RS: spettro da una distribuzione

- Lo spettro da una distribuzione di elettroni puo' essere ricavato anche da considerazioni piu' semplici che mettono in evidenza il motivo per cui lo spettro della radiazione e' piu' ripido
 - La considerazione chiave e' che gli elettroni emettono la maggior parte della potenza intorno alla frequenza critica ω_c , cioe' la distribuzione spettrale e' piccata intorno ad ω_c
 - La larghezza della distribuzione in ω_c e' molto piu' stretta della distribuzione di energia degli elettroni
 - Cosi' possiamo ritenere che, con buona approssimazione, che tutta la radiazione da un singolo elettrone sia emessa alla frequenza ω_c
- $$\nu \approx \nu_c \approx \gamma^2 \nu_g = \left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 \nu_g \quad \nu_g = qB/2\pi m$$
- → la radiazione emessa tra ν e $\nu + d\nu$, puo' essere attribuita ad elettroni con energia tra E ed $E + dE$

RS: spettro da una distribuzione

Percio' possiamo scrivere

$$J(\nu)d\nu = \left(\frac{dE}{dt}\right)N(E)dE$$

$$\nu = \left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 \nu_g \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}}$$

$$E = \left(\frac{\nu}{\nu_g}\right)^{1/2} mc^2 \quad dE = \frac{mc^2}{2\nu_g^{1/2}} \nu^{-1/2} d\nu$$

$$\left(\frac{dE}{dt}\right) = \frac{4}{3} \sigma_T U_B c \gamma^2 \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}}$$

$$\left(\frac{dE}{dt}\right) = \frac{4}{3} \sigma_T U_B c (E/mc^2)^2 = \frac{4}{3} \sigma_T U_B c \frac{\nu}{\nu_g}$$

$$N(E)dE = kE^{-p}dE = \frac{k}{(mc^2)^p} \frac{\nu^{-p/2}}{\nu_g^{-p/2}} \cdot \frac{mc^2}{2\nu_g^{1/2}} \nu^{-1/2} d\nu = \frac{k}{2(mc^2)^{p-1}} \nu_g^{p/2-1/2} \cdot \nu^{-p/2-1/2} d\nu$$

$$J(\nu)d\nu = \frac{4}{3} \sigma_T U_B c \frac{\nu}{\nu_g} \frac{k}{2(mc^2)^{p-1}} \nu_g^{p/2-1/2} \cdot \nu^{-p/2-1/2} d\nu \quad \nu_g = qB/2\pi m \quad U = B^2/8\pi$$

$$J(\nu)d\nu = \frac{4}{3} \sigma_T \frac{B^2}{8\pi} c \frac{k}{2(mc^2)^{p-1}} (qB/2\pi m)^{p/2-3/2} \nu^{-p/2+1/2} d\nu$$

Mettendo in evidenza la dipendenza da B , k e ν si ha $J(\nu)d\nu = DkB^{(p+1)/2}\nu^{-(p-1)/2}d\nu$

esattamente la stessa di quella ottenuta con l'analisi rigorosa

→ La forma dello spettro di radiazione e' determinata dallo spettro di elettroni e non dalla distribuzione di singola particella a causa del forte beaming a v_c

→ La differente pendenza e' dovuta alla relazione quadratica tra ν ed E

RS: polarizzazione

- La potenza emessa nelle due direzioni di polarizzazione? e \mathbf{k} a \mathbf{B} e'

$$j_{\perp}(\omega) = \left(\frac{dP}{d\omega}\right)_{\perp} \approx \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{4\pi mc} [F(x) + G(x)] \quad j_{\parallel}(\omega) = \left(\frac{dP}{d\omega}\right)_{\parallel} \approx \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{4\pi mc} [F(x) - G(x)]$$

$$x = \omega/\omega_c$$

- Si vede subito che la potenza emessa nella componente **parallela** e' piu' piccola di quella nella direzione **perp**

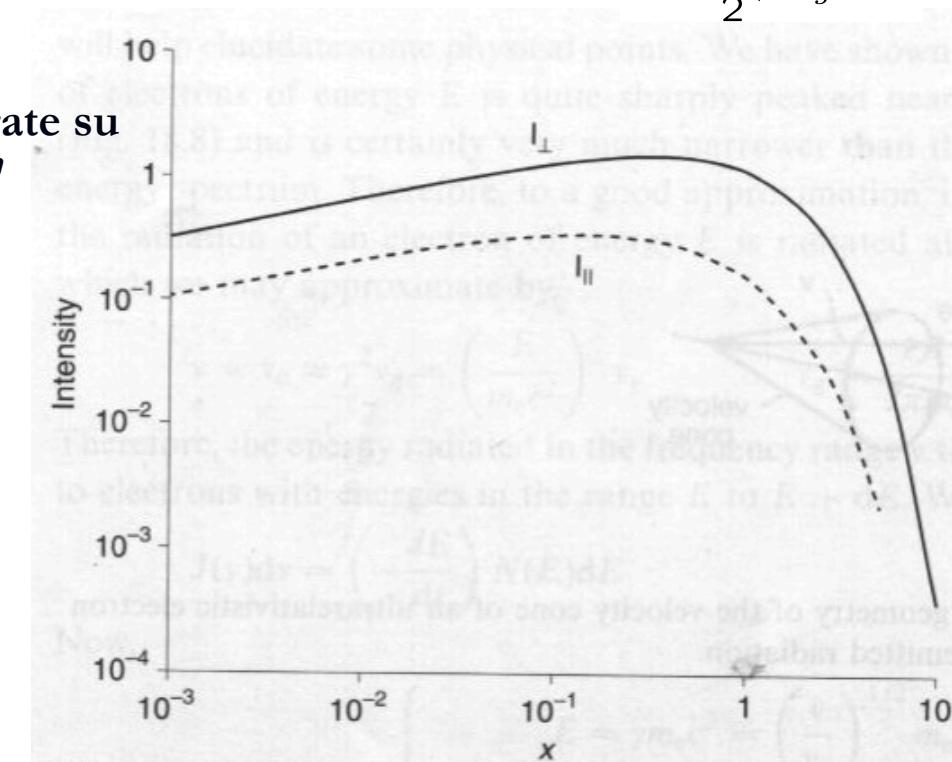
$$\omega_c = \frac{3}{2}\gamma^2\omega_g \sin \alpha$$

- Il rapporto delle energie totali (i.e. integrate su ω) irraggiate nelle due componenti e'

$$\begin{aligned} \frac{I_{\perp}}{I_{\parallel}} &= \frac{\int_0^{\infty} [F(x) + G(x)] dx}{\int_0^{\infty} [F(x) - G(x)] dx} \\ &= \frac{\Gamma(7/3)\Gamma(2/3) + \Gamma(4/3)\Gamma(2/3)}{\Gamma(7/3)\Gamma(2/3) - \Gamma(4/3)\Gamma(2/3)} \end{aligned}$$

■ [Dato che $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$] $= \frac{4/3 + 1}{4/3 - 1} = 7$

- L'energia liberata nelle due polarizzazioni da un singolo elettrone e' esattamente 7:1

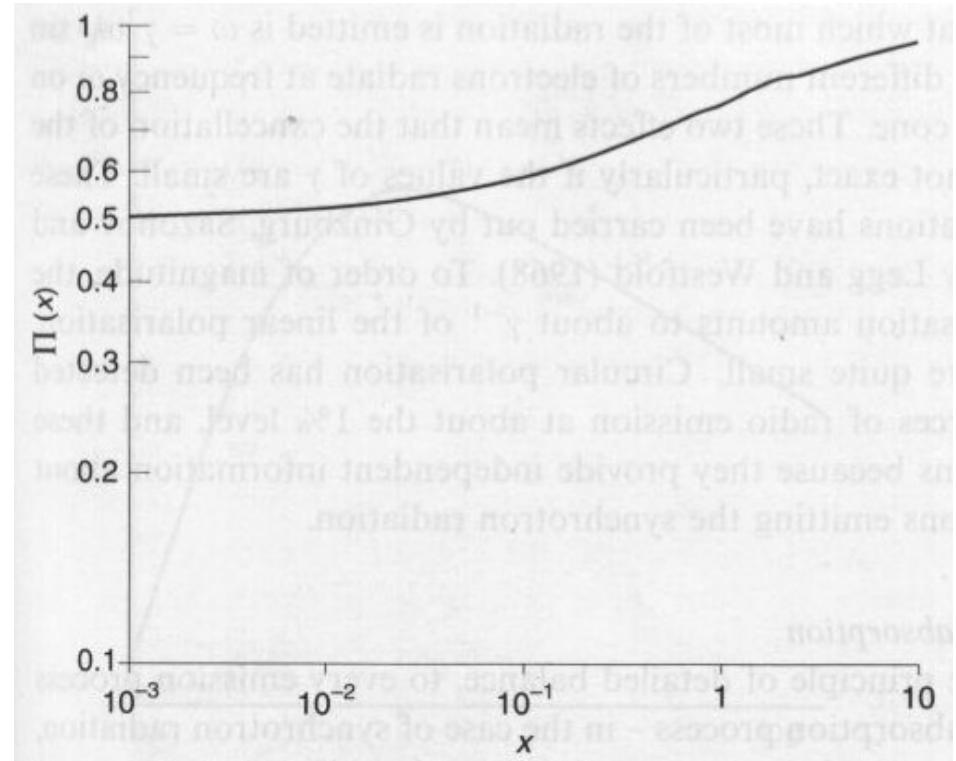


- La radiazione emessa da un e' ultrarelativistico e' quasi completamente polarizzata nel piano **perp a B**

RS: polarizzazione

- La frazione di polarizzazione della radiazione di singolo elettrone e'

$$\Pi(\omega) = \frac{j_{\perp} - j_{\parallel}}{j_{\perp} + j_{\parallel}} = \frac{G(x)}{F(x)}$$



- La radiazione di singolo elettrone e' fortemente polarizzata a tutte le frequenze

RS: polarizzazione

- Nel caso di una popolazione di elettroni, per ottenere la polarizzazione bisogna mediare sulle energie degli elettroni che possono contribuire all'intensita' ad una data frequenza
- Per calcolarlo si procede esattamente come nel caso dello spettro totale. Senza ripetere i passaggi si ottiene

■ Usando gli integrali

$$\Pi = \frac{\int_0^\infty G(x)x^{(p-3)/2}dx}{\int_0^\infty F(x)x^{(p-3)/2}dx}$$
$$\int_0^\infty x^\mu F(x)dx = \frac{2^{\mu+1}}{\mu+2} \Gamma(\frac{\mu}{2} + \frac{7}{3}) \Gamma(\frac{\mu}{2} + \frac{2}{3}) \quad \int_0^\infty x^\mu G(x)dx = \frac{2^\mu}{\mu+2} \Gamma(\frac{\mu}{2} + \frac{4}{3}) \Gamma(\frac{\mu}{2} + \frac{2}{3})$$
$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{p+1}{4} \frac{\Gamma(p/4 + 7/12)}{\Gamma(p/4 + 19/12)} &= \frac{p+1}{4} \frac{\Gamma(p/4 + 7/12)}{\Gamma(p/4 + 19/12)} & \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \\ &= \frac{p+1}{4\Gamma(p/4 + 7/12)} &= \frac{p+1}{p+7/3} \end{aligned}$$

■ I valori tipici dell'indice spettrale del flusso di elettroni e' $p \approx 2.5 \rightarrow \Pi \approx 72\%$

■ La radiazione di sincrotrone da una popolazione di elettroni e' MOLTO polarizzata
→ la polarizzazione e' una segnatura caratteristica della radiazione di sincrotrone

Sincrotrone/Compton Inverso

$$\langle \left(\frac{dE}{dt} \right) \rangle = \frac{4}{3} \sigma_T c U_B \beta^2 \gamma^2 \quad \quad \quad \langle \left(\frac{dE}{dt} \right)_{tot} \rangle = \frac{4}{3} c \sigma_T U_{rad} \gamma^2 \beta^2$$

Sono le stesse con $U_B \leftrightarrow U_{rad}$

Perche' l'emissione e' causata dal campo elettrico che accelera l'e- nel suo rest frame, indipendentemente dall'origine del campo elettrico:

sincrotrone – il campo \mathbf{E} e' quello indotto dal moto dell'e- nel campo \mathbf{B} , $\mathbf{E} \sim \mathbf{v} \times \mathbf{B}$

Compton – il campo \mathbf{E} e' la somma dei campi elettrici delle onde elm incidenti sull'e-

In entrambi i casi, l'emissione $e' \sim U$

In entrambi casi la perdita di energia $e' \sim E^2$

Sincrotrone/Compton Inverso

$$\langle \left(\frac{dE}{dt} \right) \rangle = \frac{4}{3} \sigma_T c U_B \beta^2 \gamma^2$$

$$\langle \left(\frac{dE}{dt} \right)_{tot} \rangle = \frac{4}{3} c \sigma_T U_{rad} \gamma^2 \beta^2$$

Importanza relativa di S ed IC:

$$\frac{(dE/dt)_{IC}}{(dE/dt)_S} = \frac{U_{rad}}{U_B}$$

- Assumendo $B \sim 3 \times 10^{-10}$ T, $U_B = B^2/2\mu_0 \sim 2.24 \times 10^5$ eV m⁻³
- $\rightarrow U_{rad}/U_B \sim 3$. quindi entrambi i processi rappresentano importanti perdite di energia per gli e- nella galassia
- NB: mentre sincrotrone e' "limitato" alla galassia, l'IC e' presente ovunque (anche nello spazio intergalattico, dove sincrotrone e' assente o minimo perche' $B \sim 0$) poiche' il CMB permea l'intero Universo e $U_{CMB}/U_B \sim 1$

Decelerazione adiabatica

E' possibile che il mezzo in cui le particelle diffondono sia in moto, p es di espansione, come accade per SuperNovae Remnant (SNR), venti stellari (plerioni – pulsars con venti stellari o come il vento solare)

Due conseguenze:

Oltre al flusso di diffusione, c'e' anche un flusso di convezione

Le particelle che diffondono in un mezzo in espansione perdono energia

Convezione

- $J = -D \nabla n$ — Legge di Fick per il flusso di diffusione

• Il flusso di convezione è semplicemente $\vec{J}_{conv} = m \vec{V}$
 \vec{V} = velocità di convezione del mezzo

• Il flusso totale è $\vec{J}_{tot} = \vec{J}_{diff} + \vec{J}_{conv} = m \vec{V} - D \vec{\nabla} n$ o
in comp. $J_i = m V_i - D \nabla_i n$

\Rightarrow Facciamo la divergenza $\nabla^i J_i = \nabla^i (m V_i) - \nabla^i (D \nabla_i n)$

• In un fluido (gas), la massa si conserva $\Rightarrow \nabla^i J_i + \frac{\partial n}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \nabla^i J_i = - \frac{\partial n}{\partial t}$$

$$\Rightarrow - \frac{\partial n}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{m} \vec{V} - D \vec{\nabla} n)$$

Termino di
convezione

Il resto dei termini dell'equazione
rimane lo stesso

Decelerazione adiabatica (1)

I RC si muovono nell'ISM e ne sono parte

L'ISM e' un gas, quindi un sistema termodinamico

Se l'ISM o una parte di esso si espande, le particelle diffondono e allo stesso tempo perdono energia (in media), infatti:

L'energia interna U del gas diminuisce se si espande $dU = -pdV$

I RC che diffondono all'interno del mezzo in espansione devono fare lavoro contro l'espansione del gas che li trascina via

Decelerazione adiabatica (2)

• L'energia interna del gas è $U = n E \nu$ $E = E_{n\text{media}}$,

$$\Rightarrow dU = n \nu dE \Rightarrow n \nu dE = -p d\nu$$

ma $p = \frac{n}{3} \langle u P \rangle^*$, $P = \text{mom. di una particella}$

$$\Rightarrow \nu \ll c \quad P = mu \Rightarrow p = \frac{2m}{3} \left\langle \frac{mu^2}{2} \right\rangle = \frac{2}{3} m E$$

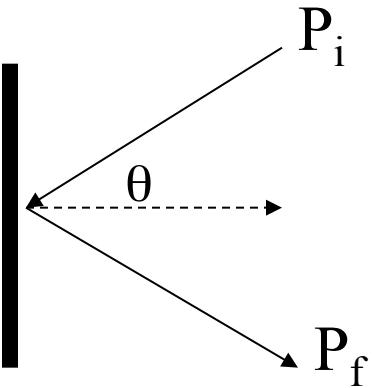
$$\nu \approx c \Rightarrow E \approx c p \Rightarrow p = \frac{m E}{3}$$

$$\Rightarrow \nu dE = -\frac{2}{3} E d\nu \quad z = \begin{cases} 1 & \nu \approx c \\ 2 & \nu \ll c \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{dt}$$

* See next 2 slides

*Pressure, statistical derivation

We have to find the momentum transfer to a wall from a gas of particles with number density n in the hypothesis of elastic collisions $|p_i| = |p_f|$



A single particle with momentum p arriving from direction θ with respect to the normal n to the wall gets a $\Delta p = 2pcos\theta$

In the time dt , the # of particles coming from θ direction impinging the wall are $dN = nvcos\theta Sdt$, ie all the particles in the volume $(vcos\theta)dtS$

Then the net momentum transfer to the wall is $dP = (\text{single part } \Delta p) \times (\# \text{ of part imping. the wall}) = 2pcos\theta \times nvcos\theta Sdt = 2nvp cos^2\theta Sdt$

*Pressure

The force is $F = dP/dt = 2nvp\cos^2\theta S$

The pressure is $p = dF/dS$

So $p(\theta) = 2nvp\cos^2\theta$ is the pressure due to particles arriving from direction θ

If the distribution of directions is isotropic, then the probability for a particle to arrive in a solid angle $d\Omega$ along θ is $d\Omega/4\pi$, so the total pressure is

$$P_{tot} = \int p(\theta) \frac{d\Omega}{4\pi} = \int_0^1 p(\theta) \frac{2\pi d\cos\theta}{4\pi} = nvp \int_0^1 \cos^2\theta d\cos\theta = nvp/3$$

non relativistic particle $p = mv$

$$P_{tot} = nmv^2/3 = \frac{2}{3}u \quad u = \frac{1}{2}nmv^2$$

From equipartition theorem $\langle E \rangle = 3kT/2$

Energy density

$$P_{tot} = nkT \quad \text{Ideal gas law}$$

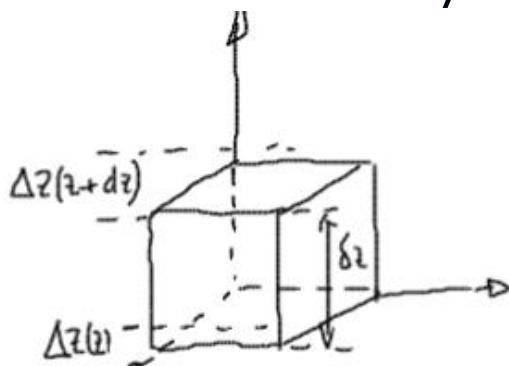
Relativistic particle (as photons) $E_{tot} = cp$ and $v \sim c$

$$P_{tot} = ncp/3 = u/3$$

E. Fiandrini Cosmic Rays 1819

$$u = ncp \quad \text{Energy density}$$

$$\frac{dV}{dt} = V_r \cdot v$$



o In un tempo dt , il volume si deforma a causa del moto di espansione

o Prendiamo p. es. il moto lungo z
Lo spost. dipende dalla velocità locale

$$\text{In } dt \text{ si ha } \Delta z(z) = v(z) dt$$

$$\Delta z(z + \delta z) = v(z + \delta z) dt$$

\Rightarrow La variazione complessiva e'

$$\Delta z_1 \equiv \Delta z(z + \delta z) - \Delta z(z) = [v(z + \delta z) - v(z)] dt \Rightarrow$$

$$\Delta z_1 = \frac{\partial v}{\partial z} \delta z dt \Rightarrow \frac{d \Delta z}{dt} = \frac{\partial v}{\partial z} dz$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dV}{dt} \right)_z = \frac{\partial}{\partial z} \delta x \delta y \delta z = \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \delta v$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{dV}{dt} \right)_{x_i} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) V$$

- Quindi $\frac{dE}{dt} = -\frac{2}{3}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) E$
- Esempio: sfera in espansione uniforme
 $v_r = v_0 \left(\frac{R}{r} \right)$ con $v_0 = v(R)$
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_0 r^3}{R} \right) = 3 \left(\frac{v_0}{R} \right) \Rightarrow -\frac{dE}{dt} = -2 \left(\frac{v_0}{R} \right) E$
 $\Rightarrow -\frac{dE}{dt} = -2 \left(\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \right) E$
- Le perdite adiabatiche sono importanti quando il tempo scala dell'espansione $T_{exp} = \left(\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \right)^{-1}$ e' dell'ordine del tempo in cui le part. sono rimaste nel volume T_{conf}
- Importante in:
 - fuga di particelle da SNR
 - quando le part. esercitano pressione, le perdite adiab sono importanti nell'ISM in generale

Tempi scala di perdita (1)

- Il tempo scala per dimezzare l'energia e'

$$\tau_{1/2} = - \int_{E_i}^{E_f} \frac{dE}{(dE/dt)} \quad E_f = E_i/2$$

- Ionizz. $\frac{dE}{dt} = 7.64 \times 10^{-15} N (\ln \gamma + 19.8) \text{ eV s}^{-1}$

- Trascurando la dipendenza logaritmica dall'energia, una buona approx e'

$$\frac{dE}{dt} \approx 10^{-5} N \text{ eV/anno}$$

Quindi $\tau = - \int_E^{E/2} \frac{dE}{10^{-5} N} = \frac{E(\text{eV})}{2 \cdot 10^{-5} N} \text{ anni}$

Per $E \sim 1 \text{ GeV}$ $\tau \approx \frac{5 \times 10^{13}}{N} \text{ anni}$

con $N \sim 10^6 \text{ pm}^{-3}$ $\tau \sim 5 \times 10^7 \text{ anni}$

Tempi scala di perdita

• Brems (H neutro) $\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = 3.66 \times 10^{-22} N s^{-1}$

$$\tau = - \int_{\epsilon}^{\epsilon/2} \frac{dE}{3.66 \cdot 10^{-22} EN} = \frac{\ln 2}{3.66 \cdot 10^{-22} N} \quad s = \frac{1.9 \times 10^{21}}{N} s$$
$$\approx \frac{6 \times 10^{14}}{N} \text{ anni, indipendente da } E$$

■ $N \approx 10^6 \text{ pm}^{-3} \rightarrow \tau \approx 6 \times 10^8 \text{ anni}$

Tempi scala di perdita (3): IC+Sinc

$$\langle \left(\frac{dE}{dt} \right) \rangle = \frac{4}{3} \sigma_T c U_B \beta^2 \gamma^2 \quad \quad \langle \left(\frac{dE}{dt} \right)_{tot} \rangle = \frac{4}{3} c \sigma_T U_{rad} \gamma^2 \beta^2$$

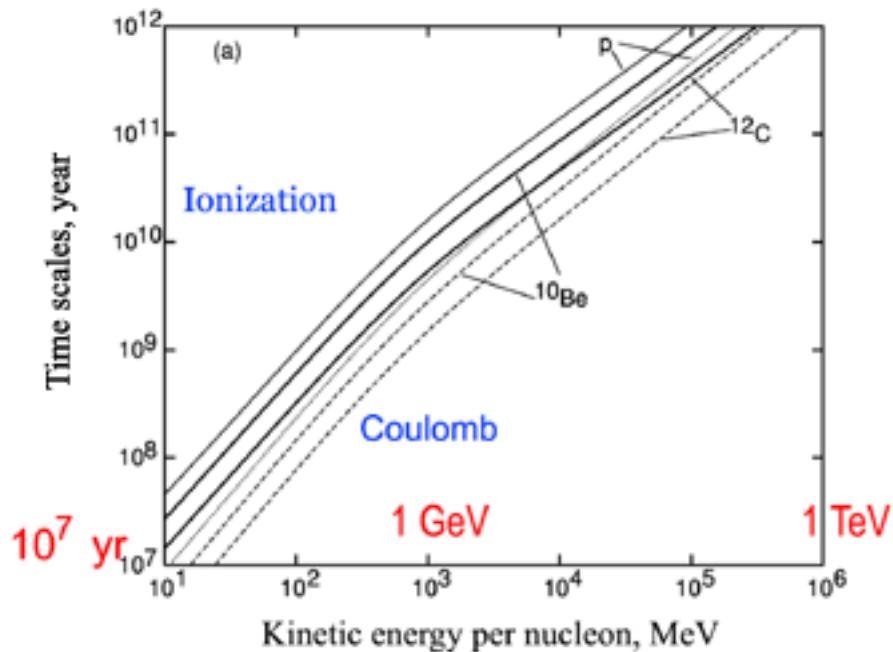
- $\frac{dE}{dt} = \frac{4}{3} \sigma_T c (U_R + U_B) \gamma^2 \quad \tau = \int \frac{dE}{\frac{4}{3} \sigma_T c (U_R + U_B) \gamma^2}$
- $E = mc^2(\gamma - 1) \Rightarrow dE = mc^2 \gamma \Rightarrow \tau = - \int_{\gamma}^{\gamma/2} \frac{mc^2}{\frac{4}{3} \sigma_T c} \cdot \frac{1}{(U_R + U_B)} \cdot \frac{d\gamma}{\gamma^2}$
- Perciò $\tau = \frac{mc^2}{\frac{4}{3} \sigma_T c} \cdot \frac{1}{(U_R + U_B)} \cdot \frac{1}{\gamma}$
- $\frac{4}{3} \sigma_T c = 2.66 \times 10^{-20} m^2 s^{-1} \quad mc^2 = 5.11 \times 10^5 eV$
- $U_B \approx 2.2 \times 10^5 eV m^{-3} \quad \text{e} \quad B = 3 \times 10^{-10} T$
- $U_{CMB} \approx 2.62 \times 10^5 eV m^{-3}$
- $U_{Star} \approx 6 \times 10^5 eV m^{-3}$

$\times CMB$ presente ovunque \Rightarrow Agisce sempre

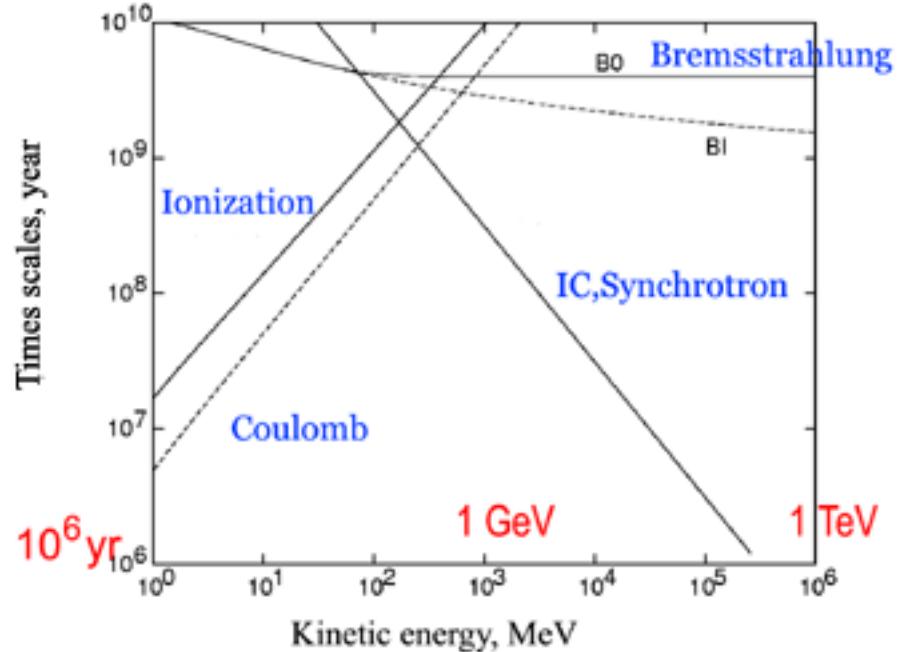
$$\tau \leq \tau_{CMB} = \frac{7.328 \times 10^{19}}{\gamma} s = \frac{2.32 \times 10^{12}}{\gamma} anni \quad (= \frac{4.54 \times 10^9}{E (GeV)} anni)$$

o Per $e^- \approx E = 100 GeV$, $\tau \lesssim 10^7 anni$

nucleons



electrons & positrons



Differenti regimi di perdite, dipendenti da E

Il tempo scala piu' breve domina

IC e' un lim superiore: nella galassia non c'e' solo CMB
ma anche starlight (ottica, UV, X,...) e campi magnetici →
 $U \approx 10^6 \text{ eVcm}^{-3}$

- Nel caso di diffusione, le particelle si spostano in media di $\lambda \approx (2D\tau)^{1/2}$

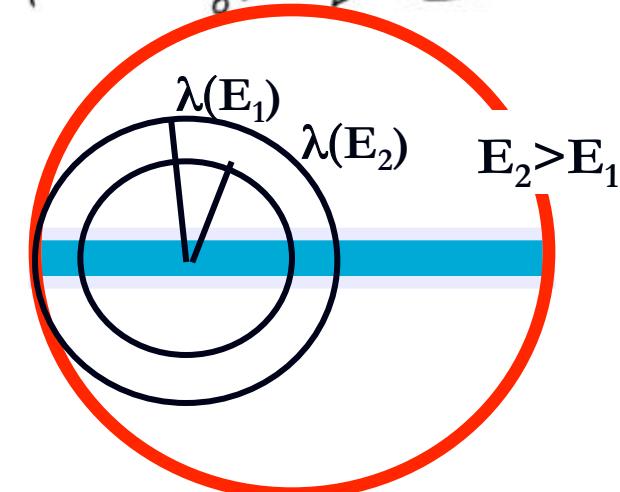
- In generale $D = D(E) \Rightarrow \lambda(E, E_0) = \left(\int_0^E D(E') d\tau' \right)^{1/2} = \left(\int_{E_0}^E \frac{D(E') dE'}{b(E)} \right)^{1/2}$

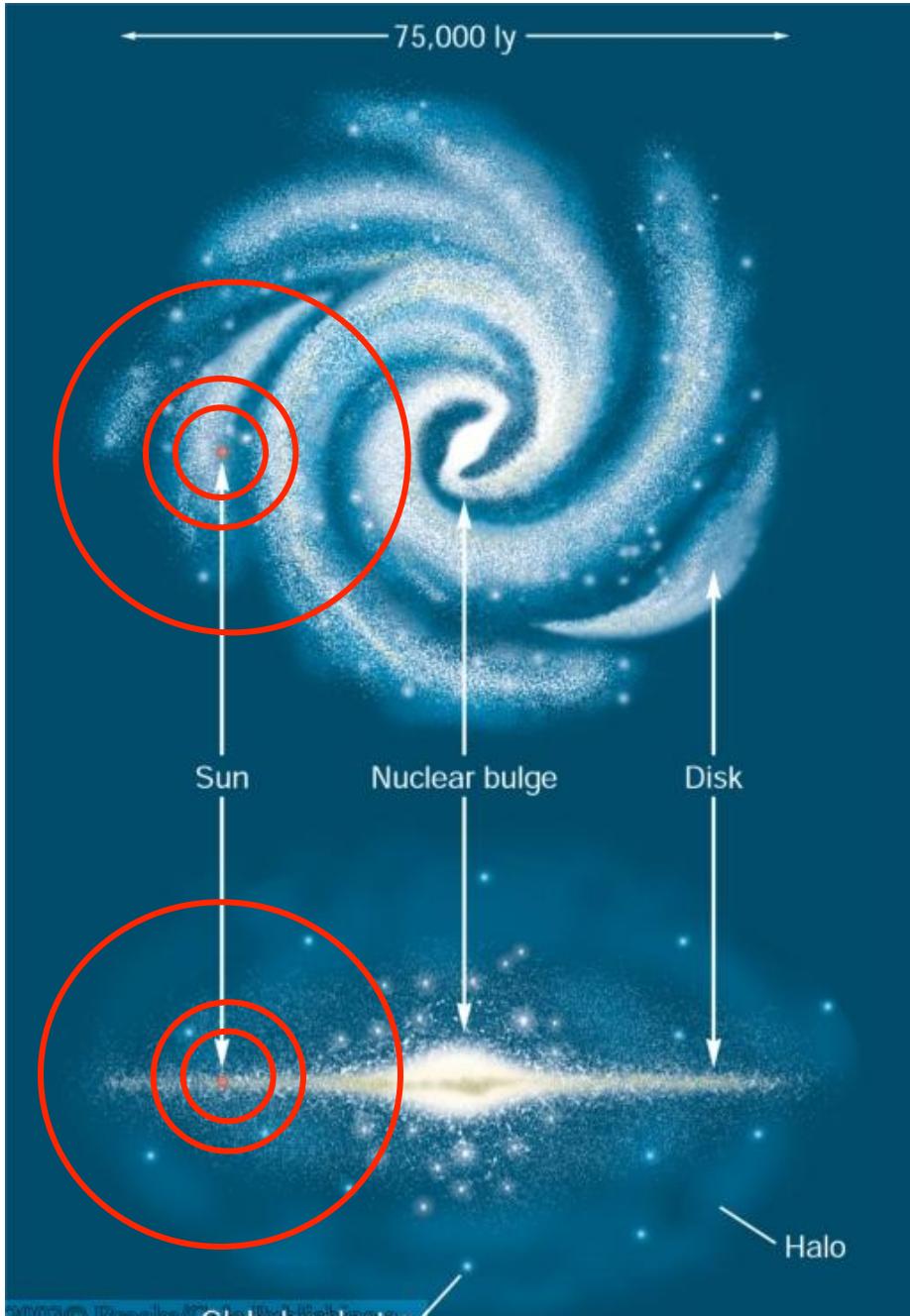
$\times D \approx 10^{29} \text{ cm}^2 \text{s}^{-1}$ (val. medio galattico) $\Rightarrow \lambda \approx 10 \text{ kpc} \quad (\text{G} \quad 1 \text{ GeV}$
 $(\text{solo IC + Sincro}) \text{ i.e. } \gamma = \frac{1}{KE_0})$

Trascurando la dipend. di D da E $\lambda \propto E^{-1/2} \Rightarrow$
Lo spettro degli e^\pm nei differenti intervalli di energia dipende dalle condizioni medie di propagazione nell'ISM in una regione di raggio $R \sim \lambda(E)$

Esempio: per e^- con $E > 1 \text{ GeV}$, $\lambda(E) \lesssim 10 \text{ kpc} = R_{\text{gal}} \Rightarrow$ solo
 \Rightarrow Gli e^- sono galattici.

- Quindi lo spettro osservato cambia parecchio durante la propagazione





$\approx 10^2$ ly @ 1 TeV
 $\approx 3.16 \times 10^3$ ly @ 100 GeV
 $\approx 10^4$ ly @ 10 GeV
 $\approx 3 \times 10^4$ ly @ 1 GeV

Gli elettroni
vengono da vicino!

Ancora propagazione

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} - \vec{v} \cdot (\hat{D}_i \vec{N}_j) + \frac{\partial}{\partial E} (b_i N_i) + m v r_i N_i + \cancel{\frac{d_i}{\gamma_i}} = q_i + \sum_{j < i} m v r_{ij} N_j + \sum_j \frac{N_j}{T_{ij}}$$

σ_i e' la sez d'urto per il processo $p_{\text{CR}} p_{\text{ISM}} \rightarrow \pi^\pm \rightarrow \mu^\pm \rightarrow e^\pm$ ed n e' la densita' di p nell ISM, N_i e' la densita' di elettroni

Da dove vengono gli elettroni?

Da interazione dei RC con i protoni del mezzo interstellare

Da sorgenti primarie, cioe' siti di accelerazione

Da sorgenti esotiche(?)

Per gli elettroni, a differenza della componente nucleare, sono importanti i processi di perdita di energia durante la propagazione. Il termine che descrive le perdite di energia continue non puo' essere trascurato ma anzi diventa dominante

Toy Model

- Caso semplice di: - soluz. stazionarie $dN/dt = 0$
- × C'è una distrib infinita e uniforme di sorgenti che iniettano e^- con spettro di iniezione $Q(E) = k E^{-p}$
- \Rightarrow La diffusione non è importante \Rightarrow L'equ. diventa
$$-\frac{d}{dE} [b(E) N(E)] = Q(E) \quad \Rightarrow \int d [b(E) N(E)] = - \int Q(E) dE$$
- × Assumiamo $N(E) \rightarrow 0$ per $E \rightarrow \infty \Rightarrow$
$$N(E) = \frac{k E^{-(p-1)}}{(p-1) b(E)}$$
 dove $b(E) = A_1 \left(\ln \frac{E}{mc^2} + 19.8 \right) + A_2 E + A_3 E^2$
- \Rightarrow Se domina ionizz. $N(E) \propto E^{-(p-1)}$ · spettro di E più piatto
- Se " Brems $N(E) \propto E^{-p}$ · lo spettro non cambia
(adiab. loss)
- Se IC o sincr dominano $N(E) \propto E^{-(p+1)}$ spettro più ripido

Spettro a bassa E

Ad $E < 10$ GeV, lo spettro locale di e^- e' distorto dal vento solare (densita' soppressa e decel adiabatica) \rightarrow il flusso misurato sulla Terra non e' rappresentativo del flusso nell ISM

Deducibile da misure indirette, come lo spettro radio nell' alone della galassia dovuto ad emissione di sincr nel campo magn galattico

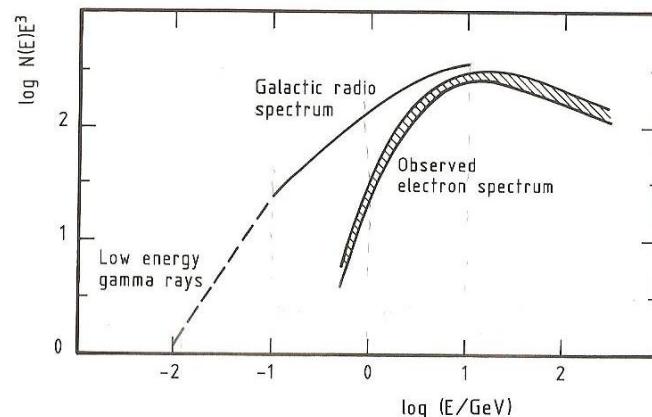


Figure 18.14. The spectrum of relativistic electrons in the local interstellar medium (see also Fig. 9.3). The observed electron spectrum is indicated by the hatched area. The spectrum deduced from the spectrum of the Galactic radio emission is indicated by a solid line. The low energy spectrum deduced from observations of low energy γ -rays is shown as a dashed line. The difference between the observed electron spectrum and that inferred from the Galactic radio emission provides a measure of the solar modulation of the flux of cosmic ray electrons. The units of $N(E)E^3$ are particles $m^{-2} s^{-1} \text{ GeV}^2$. (From W. Webber (1983). In *Composition and origin of cosmic rays*, ed. M.M. Shapiro, p. 83. Dordrecht: D. Reidel Publishing Co.)

Radio Continuum (408 MHz)

Bonn, Jodrell Bank,
and Parkes

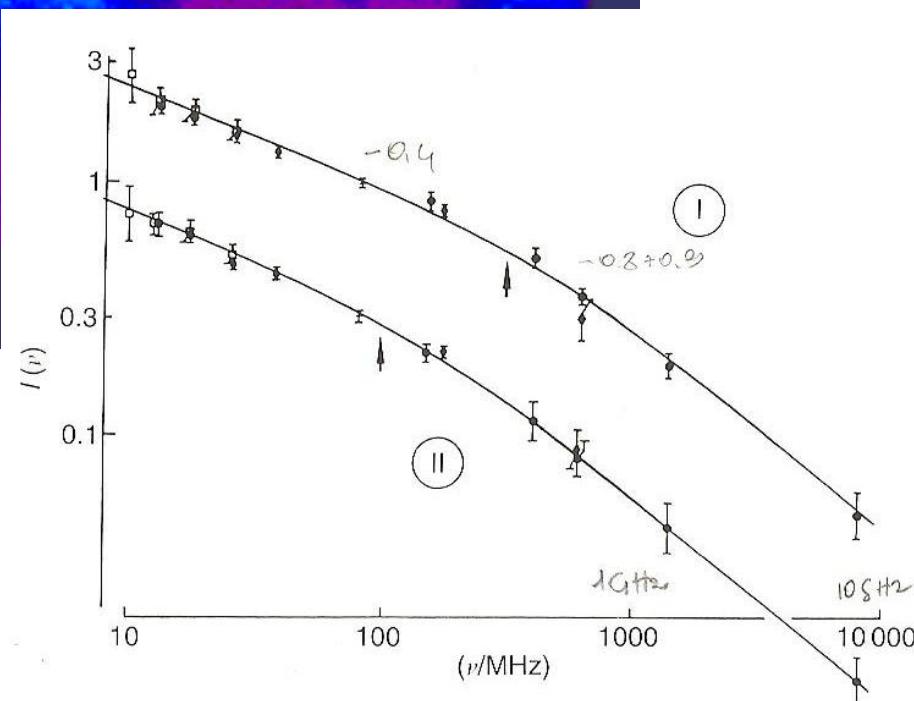
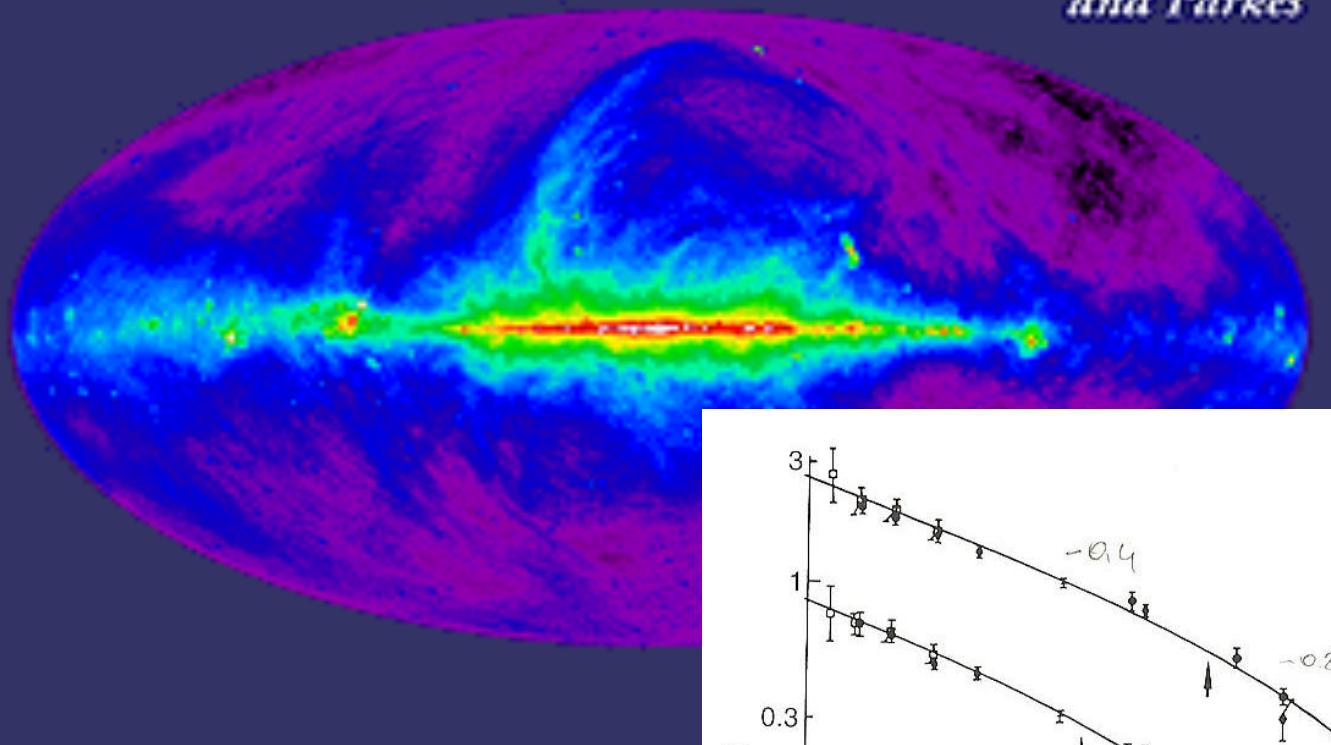


Figure 18.13. The spectrum of the Galactic radio emission. Region I corresponds to the anticentre direction at high galactic latitudes, and region II corresponds to the interarm region. (From A.S. Webster (1971). *Cosmic ray electrons, and Galactic radio emission*. Ph.D. dissertation; and A.S. Webster (1974). *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **166**, 355.)

Lo spettro di radiazione misurato e' una legge di potenza $I(\nu) \approx \nu^{-\alpha}$ con $\alpha = 0.4$ @ $\nu < 200$ MHz e $= 0.8-0.9$ a $\nu > 200$ MHz

Per emissione di sincrotrone $I(\nu) \approx \nu^{-(p-1)/2}$ dove p e' l'indice spettrale della popolazione di e^- che mette

Un e^- irraggia quasi tutta l'energia ad una frequenza $\nu = 28\gamma^2 B$ GHz ($B \approx 1.5-6 \times 10^{-10}$ T, val medio 3×10^{-10}) $\rightarrow \nu \approx 100$ Mhz corrispondono ad e^- di $E \approx 1$ GeV, $\nu \approx 1$ GhZ ad e^- di ≈ 4 GeV

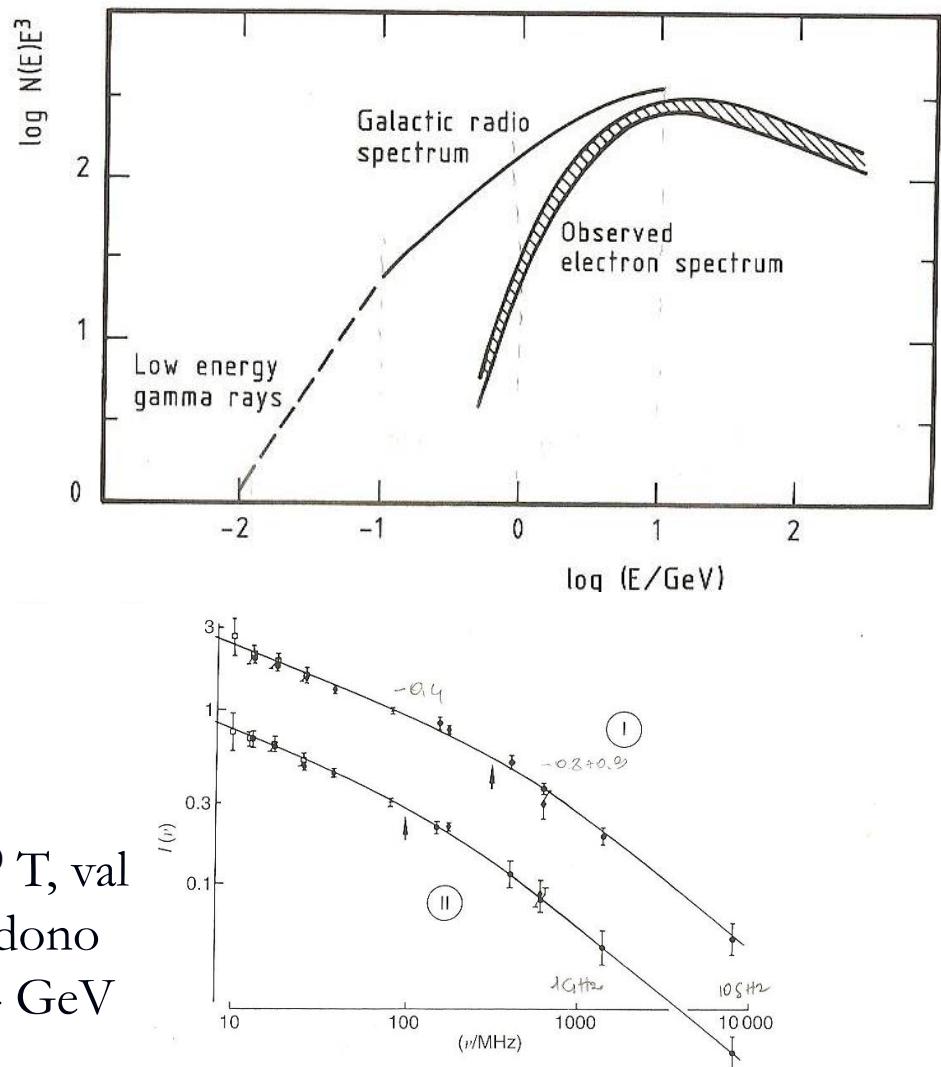


Figure 18.13. The spectrum of the Galactic radio emission. Region I corresponds to the anticentre direction at high galactic latitudes, and region II corresponds to the interarm region. (From A.S. Webster (1971). *Cosmic ray electrons, and Galactic radio emission*. Ph.D. dissertation; and A.S. Webster (1974). *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **166**, 355.)

- Da $(p-1)/2 = 0.4 \rightarrow p = 1.8$ @ $E \approx 1$ GeV
- $(p-1)/2 = 0.9 \rightarrow p = 2.8$ @ $E \approx 10$ GeV

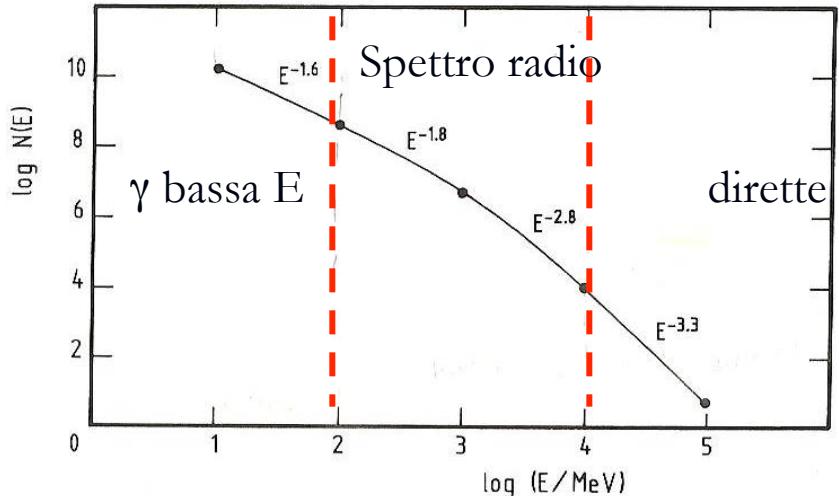


Figure 19.3. A schematic representation of the electron energy spectrum in the local interstellar medium from the data discussed in Sections 18.2 and 18.3. This spectrum has been subject to energy losses at high and low energies during propagation of the electrons through the interstellar medium. The units on the ordinate are relative units (see Fig. 18.14 for physical units).

Remember:

$$N(E) = (4\pi/c)\phi(E)$$

Lo spettro diventa piu' ripido
all'aumentare di E

Al di sotto di 10 MHz il mezzo
interstellare diventa opaco alla
radiazione a causa dell'auto-
assorbimento (cfr. nota black body) →
si usa l'emissione gamma a bassa
energia (10-100 MeV) per stimare lo
spettro degli elettroni tra 30- 100 MeV

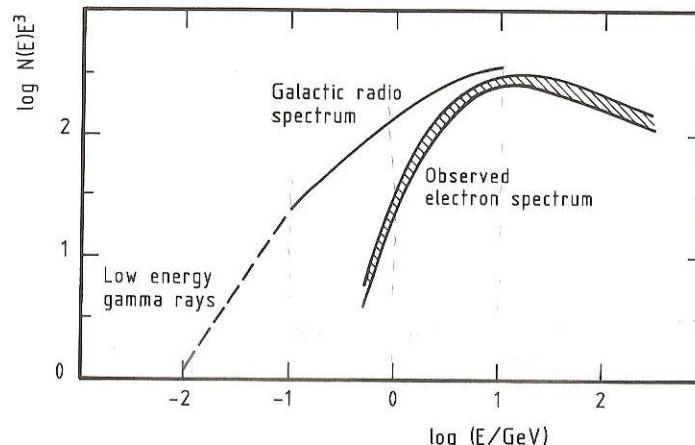
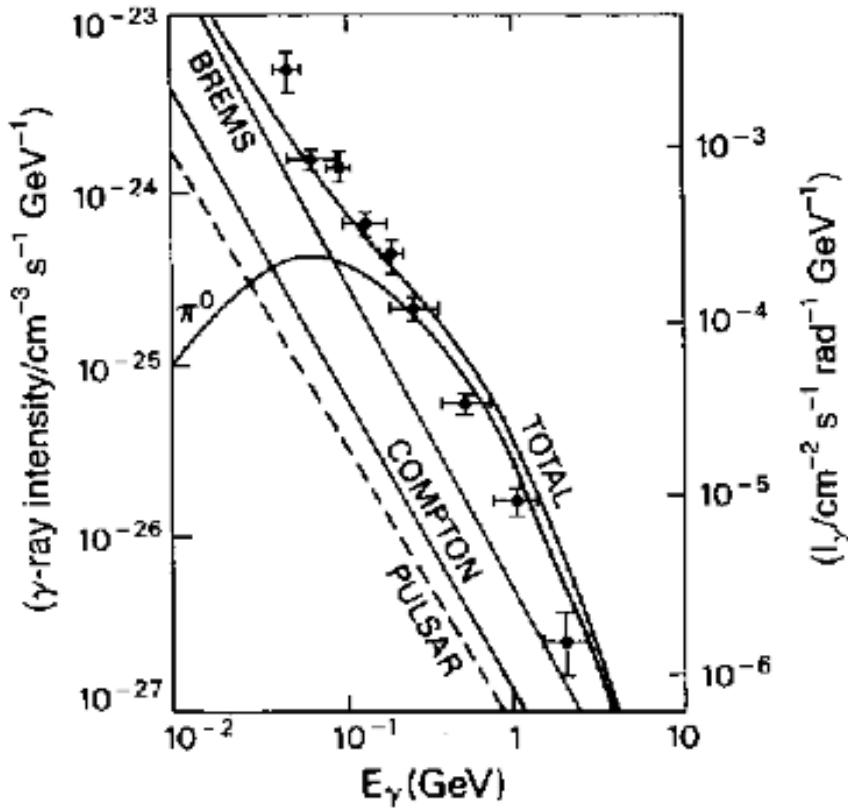


Figure 18.14. The spectrum of relativistic electrons in the local interstellar medium (see also Fig. 9.3). The observed electron spectrum is indicated by the hatched area. The spectrum deduced from the spectrum of the Galactic radio emission is indicated by a solid line. The low energy spectrum deduced from observations of low energy γ -rays is shown as a dashed line. The difference between the observed electron spectrum and that inferred from the Galactic radio emission provides a measure of the solar modulation of the flux of cosmic ray electrons. The units of $N(E)E^3$ are particles $m^{-2} s^{-1} \text{ GeV}^2$. (From W. Webber (1983). In *Composition and origin of cosmic rays*, ed. M.M. Shapiro, p. 83. Dordrecht: D. Reidel Publishing Co.)

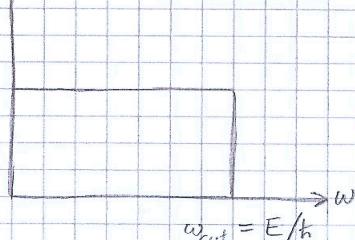


- Lo spettro γ dal disco galattico ad alta E e' dominato dall'emissione dovuta alla produzione di π^0
- A bassa E (30-100 MeV) il contributo dominante e' quello di brems di e- sui nuclei di H nell'ISM: l'emissivita' γ del disco dovuta a brems puo' essere valutata sottraendo il contributo dei π^0
- Lo spettro risultante e' $\kappa_\gamma(\epsilon) \approx 10^{-27} \times \epsilon^{-1.6}$ fotoni/ cm^3secGeV

Spettro a bassa E (\approx 30-100 MeV)

$$\frac{dP}{dw} = \frac{Z(Z+1.3)e^6 N}{16\pi^3 E_0^3 m_e^2 c^4} \ln\left(\frac{183}{Z^{1/3}}\right) \quad k_B w < E \quad [W Hz^{-1}] \quad \text{Spettro di potenza di singola part. di energia}$$

\uparrow



Il # di fotoni con E fra e^- e $e^- + de$ è

$$\frac{dN_f(\epsilon)}{dt dE} = \frac{1}{e} \frac{dP}{dw} \cdot \frac{dw}{de} = \frac{Z(Z+1.3)e^6 N}{16\pi^3 E_0^3 m_e^2 c^4 k} \ln\left(\frac{183}{Z^{1/3}}\right) \cdot \frac{1}{e} \quad \# \text{fotoni / sec MeV}$$

$$= \frac{\alpha N}{e} \quad \text{dove } \alpha = 3.62 \times 10^{-22} Z(Z+1.3) \ln\left(\frac{183}{Z^{1/3}}\right) \quad m^3 s^{-1}$$

$$\text{Assumendo } 90\% \text{ H e } 10\% \text{ He} \quad \alpha \approx 10^{-21} m^3 s^{-1}$$

L'emissività è quindi (integro sulla popolazione di e^-)

$$K_f(\epsilon) = \int_{\epsilon}^{\infty} \underbrace{\frac{dN_f(\epsilon)}{dt dE} \cdot n_e(E) dE}_{dn_e} \quad \text{con } n_e(E) = k E^{-p} \Rightarrow K_f(\epsilon) = \frac{\alpha N k \epsilon^{-p}}{(p-1)} \quad \# \text{fotoni / m}^3 \text{ sec MeV}$$

$\uparrow \quad dn_e$

$$= \frac{\alpha N}{(p-1)} n_e(\epsilon) \Rightarrow \frac{n_e(\epsilon)}{p-1} = \frac{k_f(\epsilon)}{\alpha N} \quad \text{cm}^{-3} \text{ MeV}^{-1}$$

$$\Rightarrow \phi_e(\epsilon) = \frac{c}{4\pi} n_e(\epsilon) \quad \text{cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ MeV}^{-1} \text{ sr}^{-1}$$

■ L'indice spettrale degli elettroni e' lo stesso dei fotoni ≈ 1.6

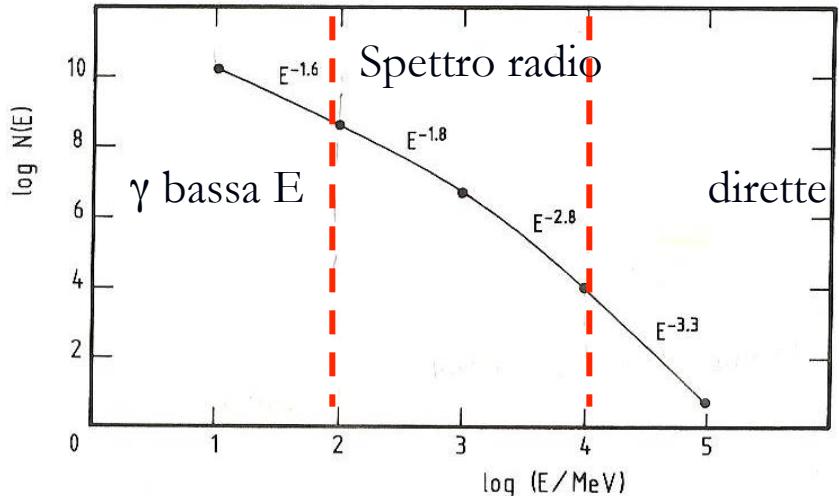


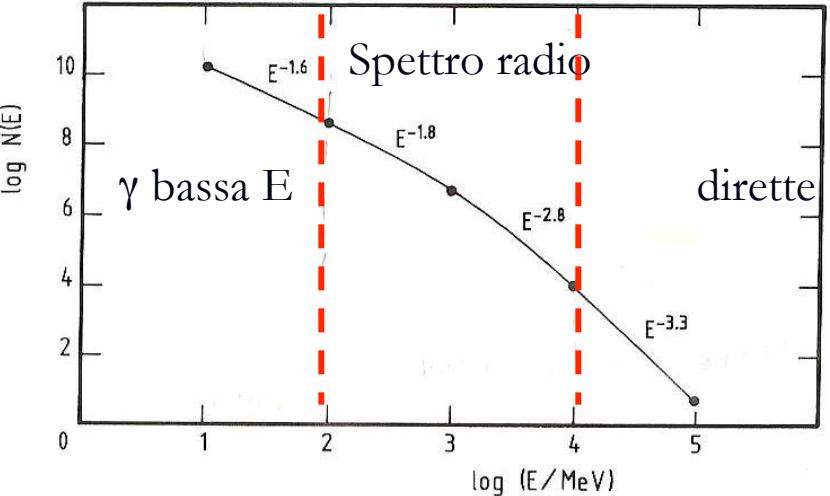
Figure 19.3. A schematic representation of the electron energy spectrum in the local interstellar medium from the data discussed in Sections 18.2 and 18.3. This spectrum has been subject to energy losses at high and low energies during propagation of the electrons through the interstellar medium. The units on the ordinate are relative units (see Fig. 18.14 for physical units).

Potremmo risolvere l'equ di diffusione completa...ma sarebbe piuttosto lungo...

Usiamo invece il modello Leaky Box in cui il termine di diffusione e' rimpiazzato da un term $N(E)/T(E)$, T tempo di fuga

Distr gaussiana di path length → simula la diffusione

Distr exp per il caso in cui non c'e' diffusione ma solo prop nel volume



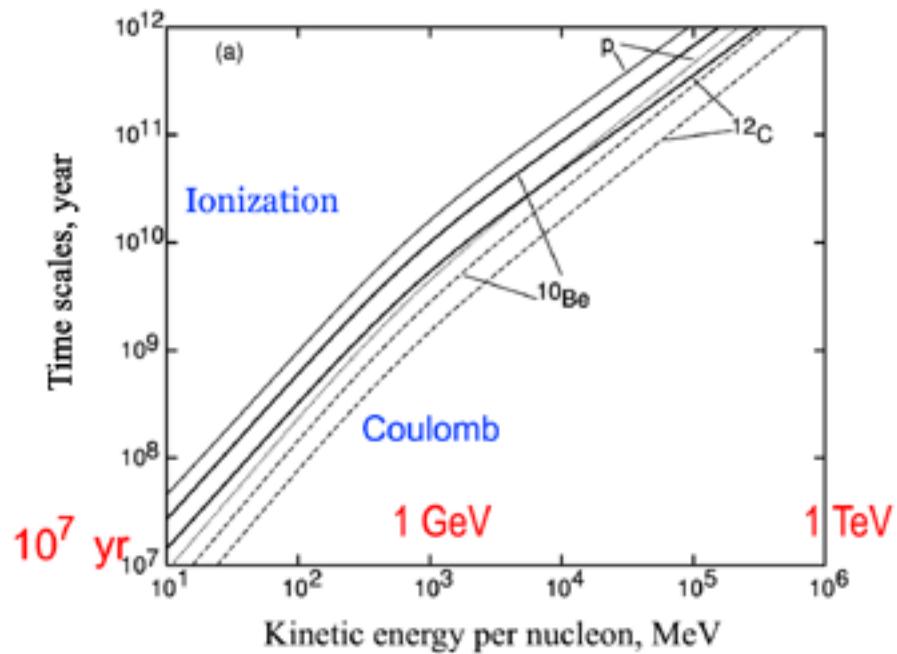
Abbiamo visto che i tempi di confinamento dei RC sono dell'ordine di $T(E) \approx 1-3 \times 10^7$ anni

Se gli e- hanno tempi simili, il tempo scala per le perdite di energia $\tau_e < T(E)$ per differenti ragioni in differenti intervalli di energia:

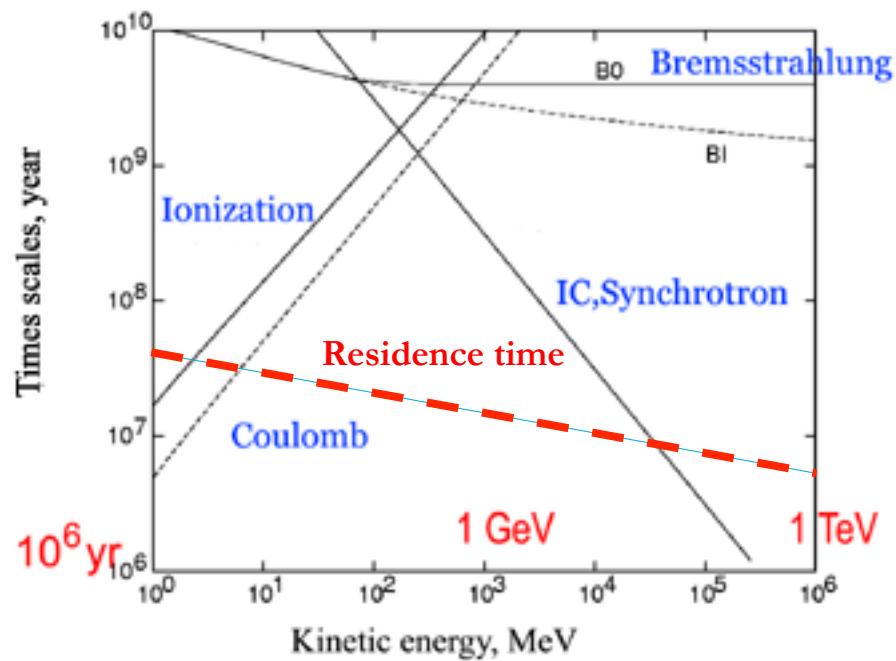
Ad $E < 1$ GeV dominano le perdite per ionizz. $\tau(E) \approx 10^7$ anni per e- ad $E = 300$ MeV

Ad $E > 10$ GeV, IC e sincr dominano ed $\tau(E) < 10^7$ anni per e-

nucleons



electrons & positrons



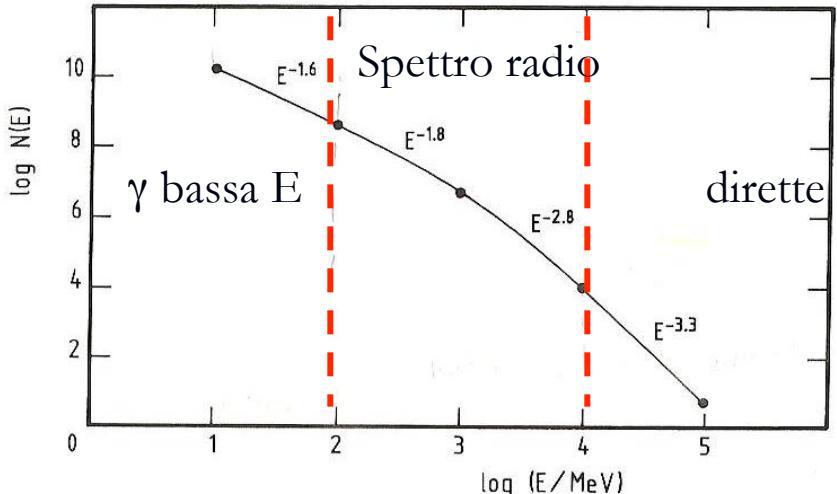
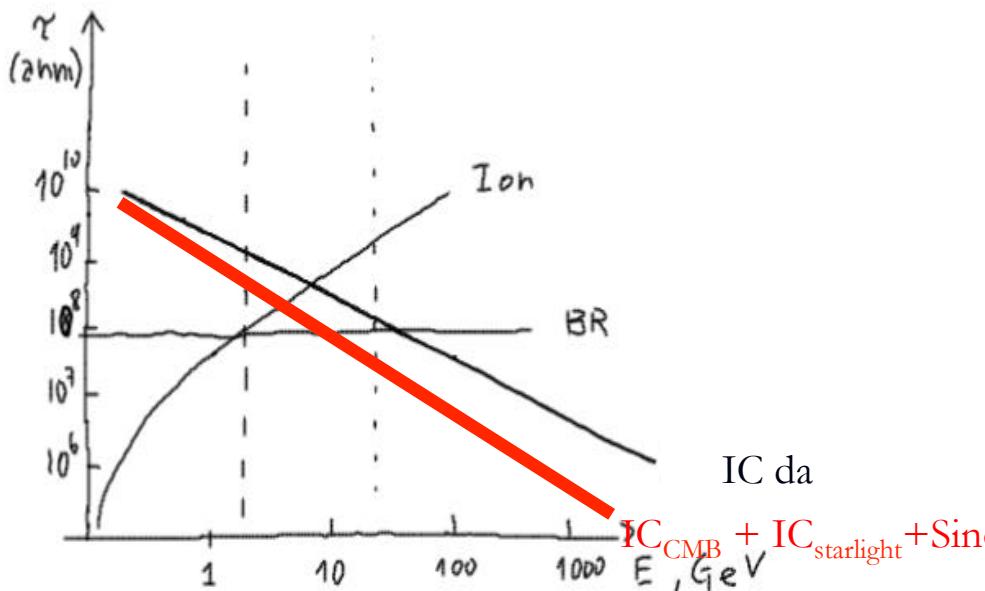


Figure 19.3. A schematic representation of the electron energy spectrum in the interstellar medium from the data discussed in Sections 18.2 and 18.3. has been subject to energy losses at high and low energies due to



Quindi, se gli e- sono iniettati continuamente nell'ISM, dovrebbero raggiungere una situazione stazionaria di equil fra iniezione e perdite, $dN/dt = 0$

A bassa E, dove la ionizz domina quindi $N(E) \approx E^{-p-1} \approx Q(E)E^{-1} \rightarrow (p-1) = 1.6 \rightarrow Q(E) \approx E^{-2.6}$

Ad alta E, IC e Sincr dominano quindi $N(E) \approx E^{-(p+1)} \rightarrow p+1 = 3.3 \rightarrow Q(E) \approx E^{-2.3}$

I due indici spettrali sono piuttosto simili: cio' suggerisce che lo spettro alla sorgente degli e- sia una legge di potenza con indice spettrale $p \approx 2.5$ fra 100 MeV e 100 GeV

Possibili Break del flusso

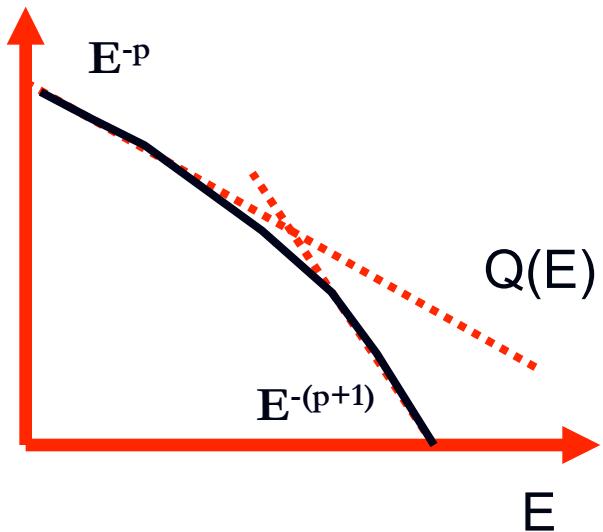
- Un processo crea una distr. di e^- alla sorgente di tipo $Q(E) = kE^{-\beta} [m^{-3} GeV^{-1}]$
- Gli e^- possono rimanere nella sorgente per un tempo t_0 prima di sfuggire e propagarsi fino a noi.
Per esempio SNR
- Durante la permanenza nella sorgente possono perdere energia, per es. per sincrotrone
 $\Leftrightarrow e^-$ con $E \geq E_0 = \frac{1}{k t_0} = \frac{0.125}{B^2 t} [T] [anni]$ hanno perso una fraz. significativa di E prima lasciare la sorgente

o per $E < E_0$, gli e⁻ non hanno perduto fazioni importanti di E
 \Rightarrow lo spettro degli e⁻ che lasciano la sorgente dopo t₀ è lo stesso di Q(E) $\Rightarrow N(E) = \kappa E^{-p}$

o per $E > E_0$, osserviamo solo gli elettroni prodotti nell'intervallo τ precedente t₀, cioè $\tau = 1/E$

$$\Rightarrow N(E) = Q(E) \cdot \tau(E) \propto E^{-(p+1)}$$

o All'energia E₀ c'è un cambio di pendenza nello spettro N(E) (un "break")



Electron mass small compared to protons and heavy nuclei, → lose energy more rapidly

Lifetimes are short, → electron sources are Galactic.

Observed energy density $\sim 4 \times 10^3 \text{ eV m}^{-3}$ (total for cosmic rays $\sim 10^6 \text{ eV m}^{-3}$)

Assuming Crab pulsar-like sources...

can Galactic pulsars source CR electrons?

Need first to calculate how many electrons produced by the
Crab nebula.

Observed synchrotron X-rays from SNR,

$$\nu = 4 \times 10^{36} E^2 B \text{ Hz}$$

@ $\nu \sim 10^{18} \text{ Hz}$ (X-ray) assume $B_{\text{SNR}} = 10^{-8} \text{ Tesla}$

$$\rightarrow E_e \sim 5 \times 10^{-6} J = 3 \times 10^{13} \text{ eV}$$

$$\begin{aligned}P &= 2.4 \times 10^{12} E^2 B^2 \text{ J/s} \\&= 2.4 \times 10^{12} \times 2.5 \times 10^{-11} \times 10^{-16} \text{ J/s} \\&= 6 \times 10^{-15} \text{ J/s}\end{aligned}$$

Observed flux = $1.6 \times 10^{-11} \text{ J m}^{-2}\text{s}^{-1}$

Distance = 1kpc = $3 \times 10^{19} \text{ m}$

Total luminosity, L = $1.6 \times 10^{-11} \times 4\pi d^2 \text{ J/s} = 1.6 \times 10^{-10} \times 10^2 \times 10^{38} \text{ J/s} = 1.6 \times 10^{30} \text{ J/s}$

$$\text{Number of electrons} = \text{luminosity/power per } e^- = 1.6 \times 10^{30} / 6 \times 10^{-15} = 2.6 \times 10^{44}$$

$$\text{Synchrotron lifetime, } \tau_{\text{sinc}} = 5 \times 10^{-13} B^{-2} E^{-1} \text{ s} = 30 \text{ years}$$

Thus in 900 yrs since SN explosion, must be 30 replenishments of electrons and these must be produced by the pulsar.

$$\text{Total no. electrons} = 2.6 \times 10^{44} \times 30 \sim 8 \times 10^{45}$$

$$\text{each with } E = 5 \times 10^{-6} \text{ J}$$

Total energy is thus $4 \times 10^{40} \text{ J}$

Assume 1 SN every 100 years for 10^{10} years → total energy due to pulsars $4 \times 10^{40} \times 10^8 \text{ J} = \underline{\underline{4 \times 10^{48} \text{ J}}}$ in a volume of $\sim 10^{63} \text{ m}^{-3}$ (ie. the Galaxy)

→ energy density of electrons produced by pulsars :

$$= 4 \times 10^{48} / 10^{63} \text{ J m}^{-3} = 4 \times 10^{-15} \text{ J m}^{-3}$$

$$= 4 \times 10^{-15} / 1.6 \times 10^{-19} \text{ eV m}^{-3} = 2.5 \times 10^4 \text{ eV m}^{-3}$$

Remember that the observed electron energy density is $4 \times 10^3 \text{ eV/m}^3$, so electron emissions from pulsars are sufficient to produce observed levels, given the assumptions made.

SNRs vicine

Vicino al noi ci sono numerose potenziali sorgenti di elettroni

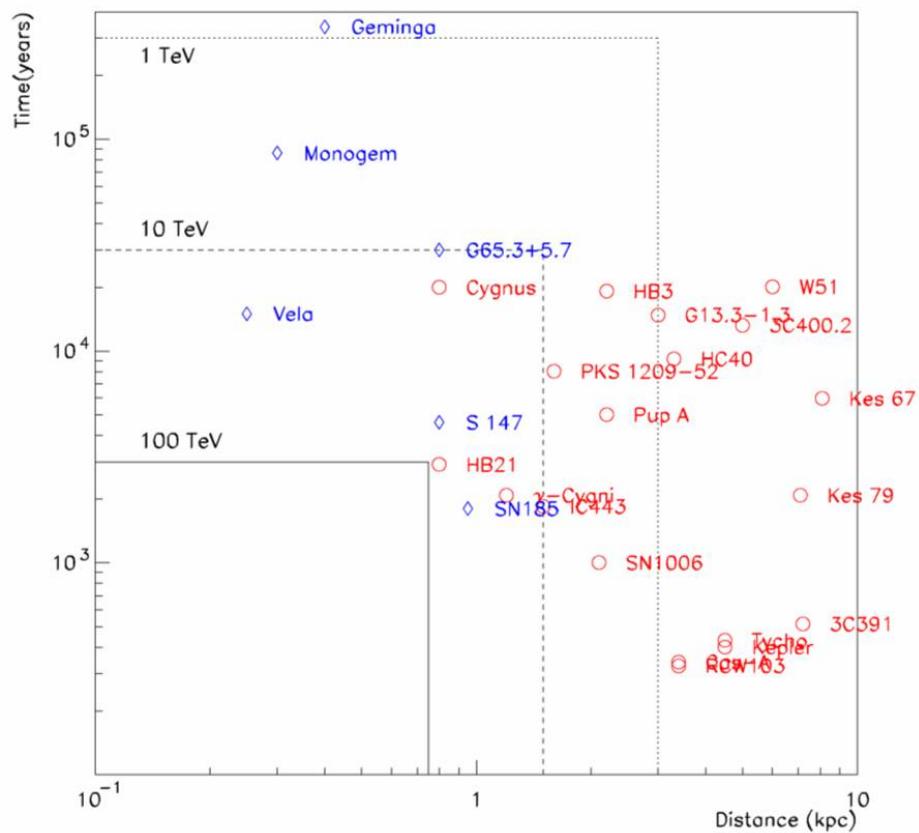


TABLE 1
LIST OF NEARBY SNRs

SNR	Distance (kpc)	Age (yr)	E_{\max}^a (TeV)	Reference
SN 185.....	0.95	1.8×10^3	1.7×10^2	1
S147.....	0.80	4.6×10^3	63	2
HB 21.....	0.80	1.9×10^4	14	3, 4
G65.3+5.7	0.80	2.0×10^4	13	5
Cygnus Loop.....	0.44	2.0×10^4	13	6, 7
Vela.....	0.30	1.1×10^4	25	8
Monogem.....	0.30	8.6×10^4	2.8	9
Loop1.....	0.17	2.0×10^5	1.2	10
Geminga.....	0.4	3.4×10^5	0.67	11

^a Maximum energy limited by the propagation of electrons in the case of the prompt release after the explosion. The delay of the release time gives the larger value.

REFERENCES.—(1) Strom 1994; (2) Braun et al. 1989; (3) Tatematsu et al. 1990; (4) Leahy & Aschenbach 1996; (5) Green 1988; (6) Miyata et al. 1994; (7) Blair et al. 1999; (8) Caraveo et al. 2001; (9) Plucinsky et al. 1996; (10) Egger & Aschenbach 1995; (11) Caraveo et al. 1996.

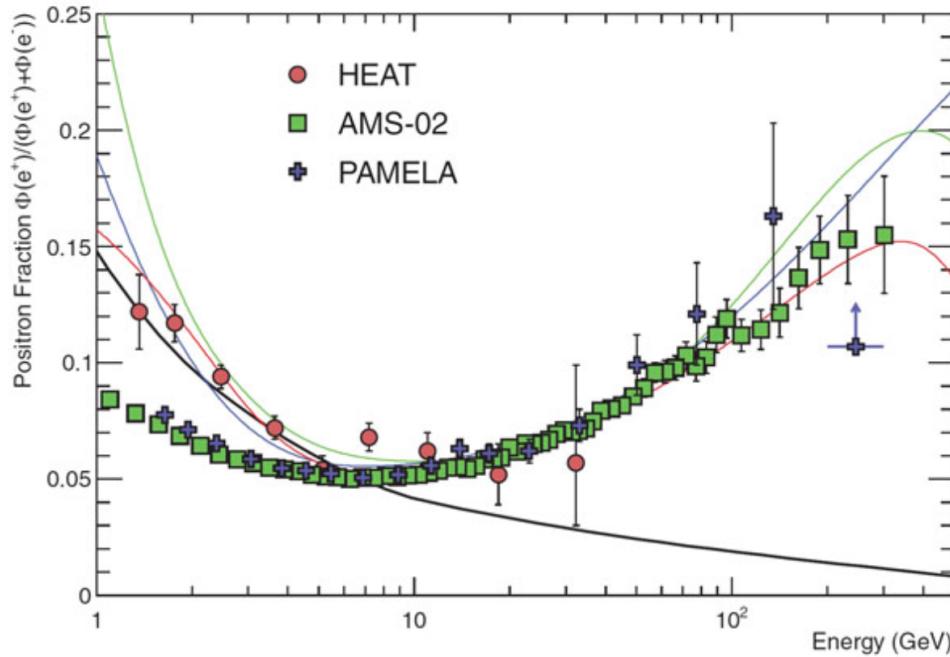


Fig. 3.14 The positron fraction (ratio of the flux of e^+ to the total flux of $e^+ + e^-$) as a function of the energy measured HEAT, PAMELA, and AMS-02. The heavy *black line* is a model of pure secondary production using a detailed propagation model of CRs (Sect. 5.4). The *three thin lines* show three representative attempts to model the positron excess with different phenomena discussed in Sect. 13.9.3: dark matter decay (*green*); propagation physics (*blue*); production in pulsars (*red*). The ratio below 10 GeV is dependent on the polarity of the solar magnetic field. Figure from the Sect. 27. Cosmic Rays of Beringer et al. (2012)

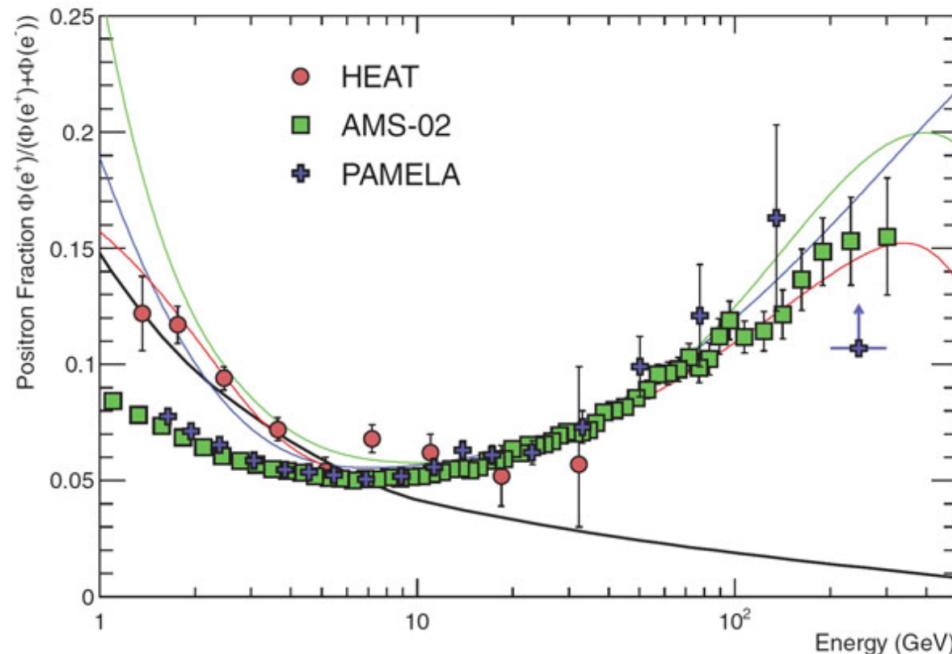
■ The positron-fraction spectrum does not exhibit fine structures and steadily increases in the region between 10 and 250 GeV. In the high statistics AMS-02 sample the ratio is of the order of $\sim 10\%$ above a few tens of GeV. As a consequence, since positrons are always created in pair with an electron *about 90 % of the observed electrons must be of primary origin.*

Eccesso rispetto a cosa?

Produzione secondaria nell'ISM di e+ ed e-

Sorgenti primarie di e-: $n_-(E) = K_{ep} N_{cr}(E) + \sigma_{pe^-} n_{ISM} c n_{cr}(E)$, $K_{ep} \approx 10^{-3}$

No sorgenti primarie di e+: $n_+(E) = \sigma_{pe^+} n_{ISM} c n_{cr}(E)$



Leaky box equilibrium density $n_{cr}(E) = N_{cr}(E)\tau_{esc}(E)$, $\tau_{esc}(E) = \tau_0 E^{-\delta}$

$$\begin{aligned} n_-(E)/n_+(E) &= (K_{ep} N_{cr}(E) + \sigma_{pe^-} n_{ISM} c N_{cr}(E)\tau_{esc}(E)) / (\sigma_{pe^+} n_{ISM} c N_{cr}(E)\tau_{esc}(E)) \\ &= \sigma_{pe^-}/\sigma_{pe^+} + K_{ep}/\tau_{esc}(E) \end{aligned}$$

$$n_+(E)/(n_+(E) + n_-(E)) = 1/(1 + n_-(E)/n_+(E)) = 1/(1 + \sigma_{pe^-}/\sigma_{pe^+} + K_{ep}/\tau_{esc}(E))$$

$$\sigma_{pe^-}/\sigma_{pe^+} \approx 0.5 - 0.3 \rightarrow n_+(E)/(n_+(E) + n_-(E)) \approx 1/(1.5 + (K_{ep}/\tau_0)E^\delta)$$

→ Senza produzione primaria di e+ alle sorgenti la frazione decresce con l'energia

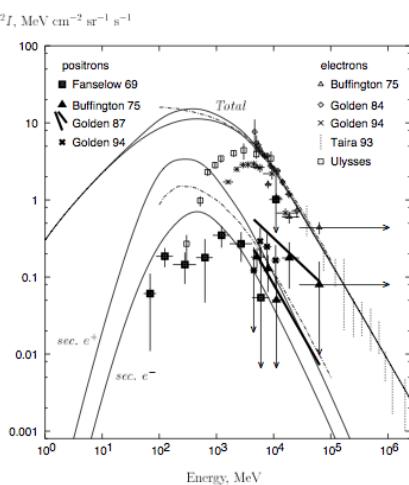


Fig. 5.— Spectra of secondary positrons and electrons, and of primary electrons. *Left panel*: model with no reacceleration (08-005). Electron injection spectrum index 2.1, 2.4 above and below 10 GeV respectively. Model: upper curves: primary electrons and primary+secondary electrons and positrons. Lower curves: secondary positrons, electrons. Lower dashed-dot line: Protheroe (1982) leaky-box prediction. Data: electrons: Buffington, Orth, & Smoot (1975), Golden et al. (1984), Golden et al. (1994), Taira et al. (1993), Ulysses (Ferrando et al. 1996), upper dashed-dot line: Protheroe (1982); positrons: Fanselov et al. (1969), Buffington, Orth, & Smoot (1975), Golden et al. (1987), Golden et al. (1994). *Right panel*: same, model with reacceleration (08-006).

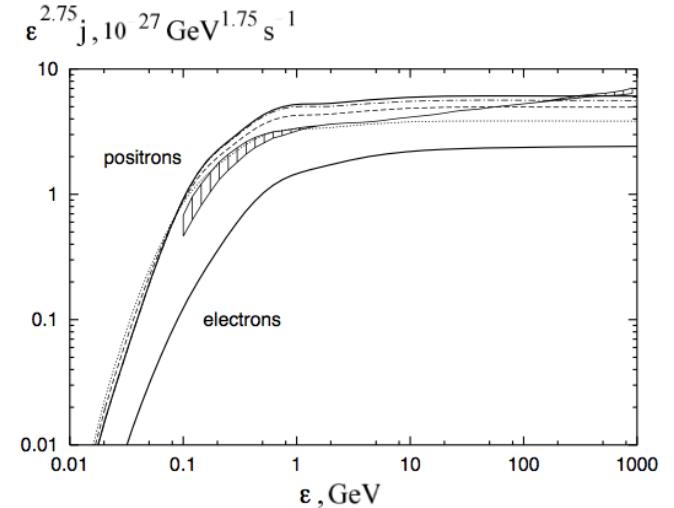


Fig. 4.— Illustration of the effect of the different positron distributions in the muon rest system. The thick solid lines show the production spectrum of secondary positrons and electrons per hydrogen atom for the cosmic-ray proton spectrum given by Mori (1997). The positron spectrum with no kaon contribution is shown by the dash-dotted line. The dashed line shows the spectrum calculated assuming an isotropic distribution of e^+ in the muon rest system ($\xi = 0$), the dotted line shows the spectrum calculated for $\xi = -1$. The thin solid line with hatched regions shows cosmic rays in interstellar medium (including contribution of He)

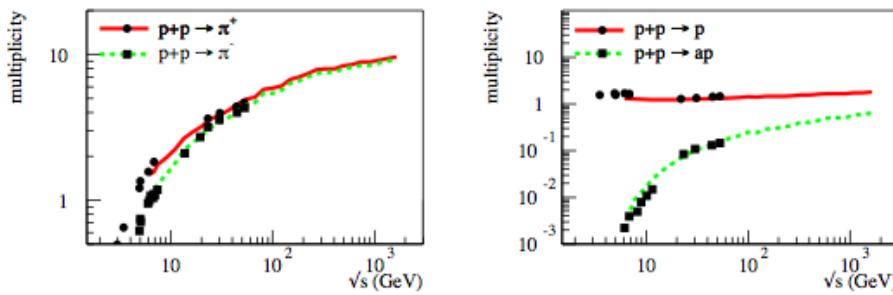


Figure 1: The 4π multiplicities of π^+, π^- , proton, antiproton produced in a pp collision as a function of \sqrt{s} . The full and dashed lines show the result of the χ^2 fit. The points are data from [15].

Comparing our data with a minimal model, as an example.

In this model the e^+ and e^- fluxes, Φ_{e^+} and Φ_{e^-} , are parametrized as the sum of individual diffuse power law spectra and the contribution of a single common source of e^\pm :

$$\Phi_{e^+} = C_{e^+} E^{-\gamma_{e^+}} + C_s E^{-\gamma_s} e^{-E/E_s} \quad \blacksquare \text{ pulsar source} \quad \text{Eq(1)}$$

$$\Phi_{e^-} = C_{e^-} E^{-\gamma_{e^-}} + C_s E^{-\gamma_s} e^{-E/E_s} \quad (E \text{ in GeV}) \quad \text{Eq(2)}$$

Coefficients C_{e^+} and C_{e^-} correspond to relative weights of diffuse spectra for positrons and electrons.

C_s is the weight of the source spectrum.

γ_{e^+} , γ_{e^-} and γ_s are the corresponding spectral indexes.

E_s is a characteristic cutoff energy for the source spectrum.

With this parametrization the positron fraction depends on 5 parameters.

A fit to the data in the energy range 1 to 350 GeV yields a $\chi^2/d.f. = 28.5/57$ and:

$\gamma_{e^-} - \gamma_{e^+} = -0.63 \pm 0.03$, i.e., the diffuse positron spectrum is less energetic than the diffuse electron spectrum;

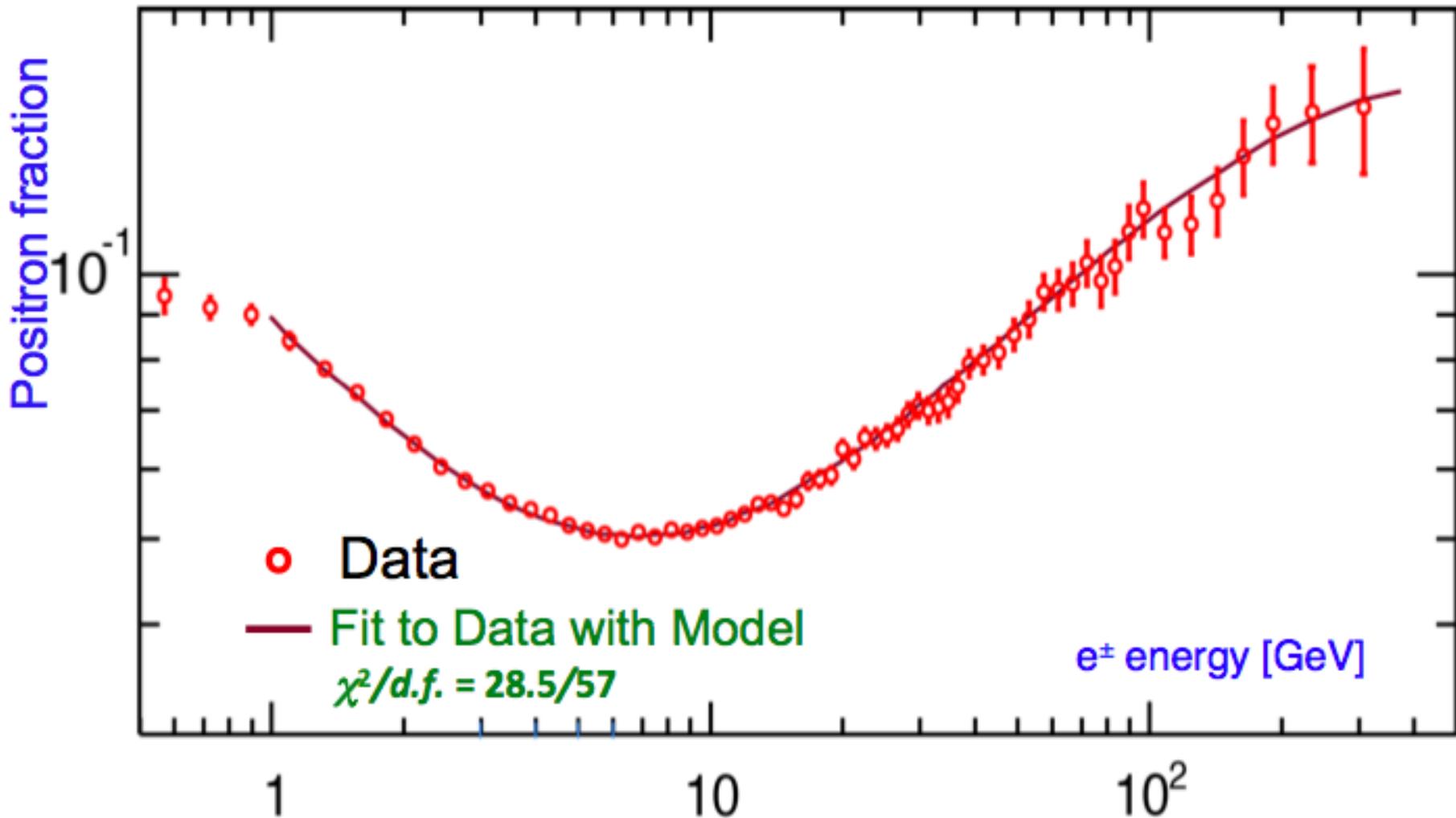
$\gamma_{e^-} - \gamma_s = 0.66 \pm 0.05$, i.e., the source spectrum is more energetic than the diffuse electron spectrum;

$C_{e^+}/C_{e^-} = 0.091 \pm 0.001$, i.e., the weight of the diffuse positron flux amounts to ~10% of that of the diffuse electron flux;

$C_s/C_{e^-} = 0.0078 \pm 0.0012$, i.e., the weight of the common source constitutes only ~1% of that of the diffuse electron flux;

$1/E_s = 0.0013 \pm 0.0007 \text{ GeV}^{-1}$,

corresponding to a cutoff energy of $760^{+1000}_{-280} \text{ GeV}$.



The agreement between the data and the model shows that the positron fraction spectrum is consistent with e^\pm fluxes each of which is the sum of its diffuse spectrum and a single common power law source.

The origin of the excess ...

...is there any privileged arrival direction?

Analysis of possible deviation of the measured ratio as a function of the arrival direction in galactic coordinates (b,l)

$$\frac{r_e(b, l)}{\langle r_e \rangle} - 1 = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\pi/2 - b, l)$$

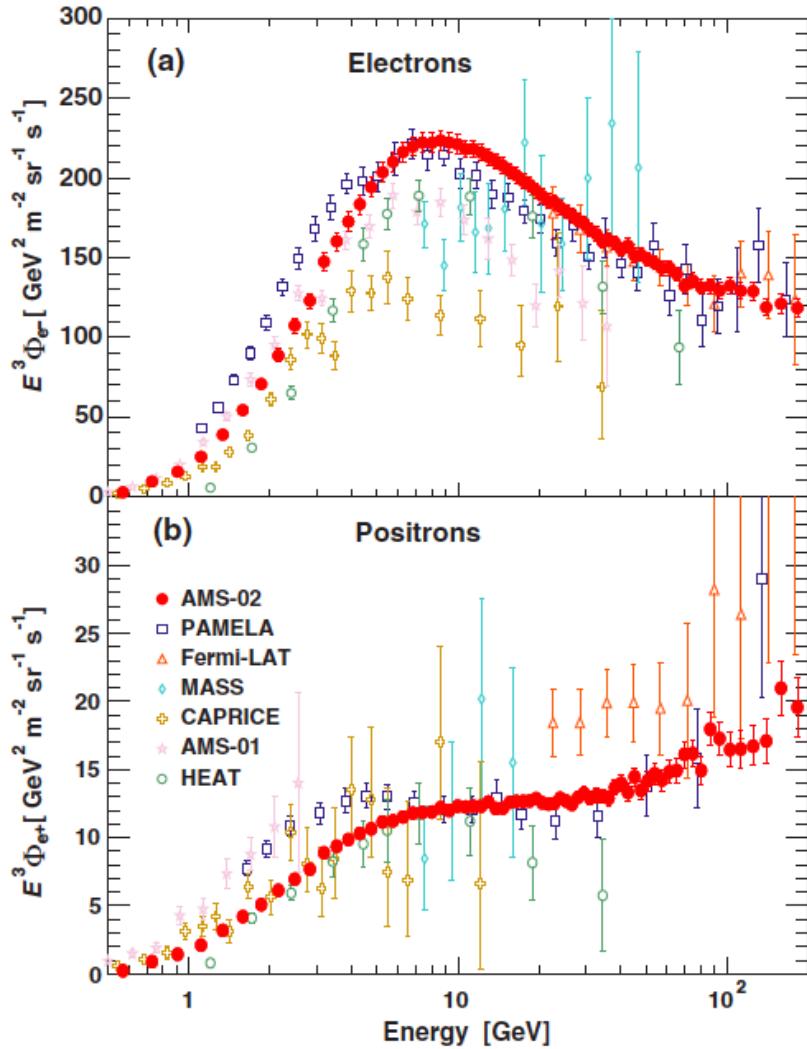
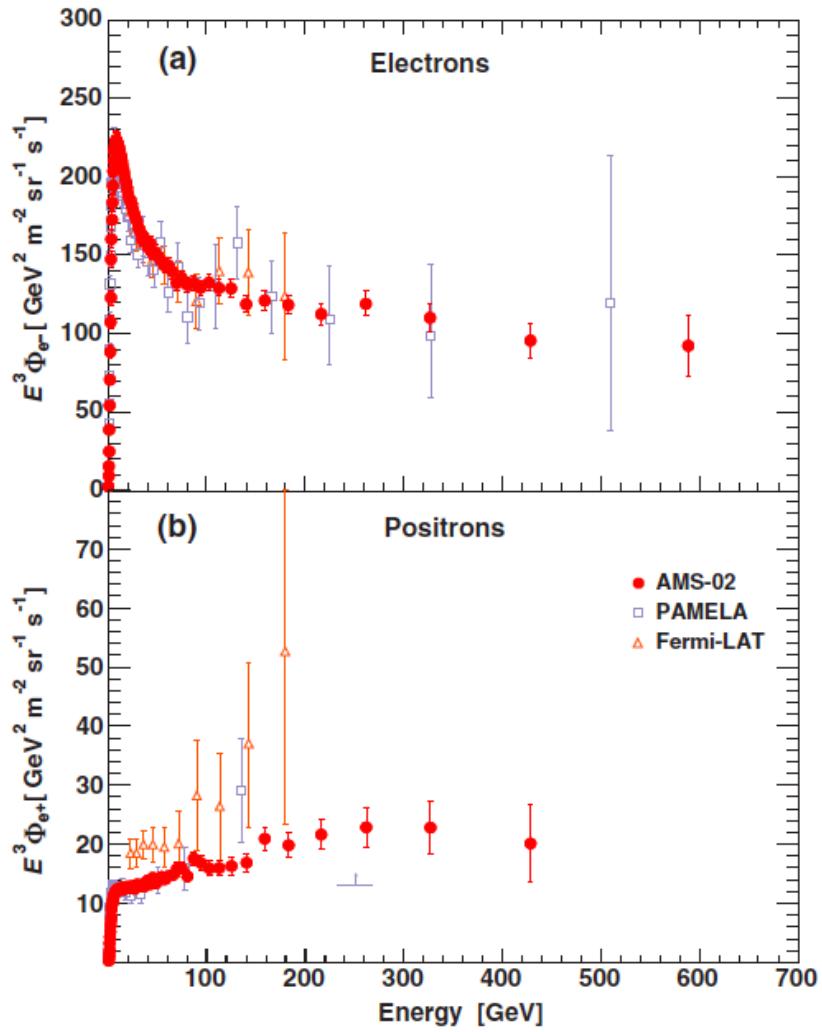
Power spectrum from the coefficient of the spherical harmonics:

$$C_{\ell} = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |a_{\ell m}|^2$$

Compatible with isotropy in the dipolar mode $\delta = 3\sqrt{C_1/4\pi}$

$\delta \leq 0.036$ at the 95% confidence level

■Oggi:



Possiamo dare un quadro generale degli spettri alle sorgenti:

Per la componente nucleare $p \approx 2$

Per la componente e^+ $p \approx 2.5$

Fino ad almeno qualche centinaio di GeV

Gli spettri alla sorgente sono differenti per e^- e protoni (cum grano salis)

Per entrambe le componenti c'è evidenza sperimentale di hardening dello spettro a qualche O(100 GeV)

Per e+ ed e- l'evidenza è netta: c'è una sorgente che immette e+ ed e- di alta energia nell'ISM

Per i nuclei la situazione è più incerta: nuova classe di sorgenti? Effetto di propagazione?
Servono più dati.

Le pulsar accelerano e+ ed – ma non protoni (per esempio)

Occorre quindi trovare uno o piu' processi astrophisici che siano in grado di accelerare le particelle fino ad energie ultrarelativistiche con la distribuzione osservata

Pulsars

Gamma-ray pulsars are predicted to produce energetic electron-positron pairs with a harder spectrum than that from secondary cosmic-ray induced origin, leading to the possibility that such sources may dominate the cosmic ray positron spectrum at high energies.

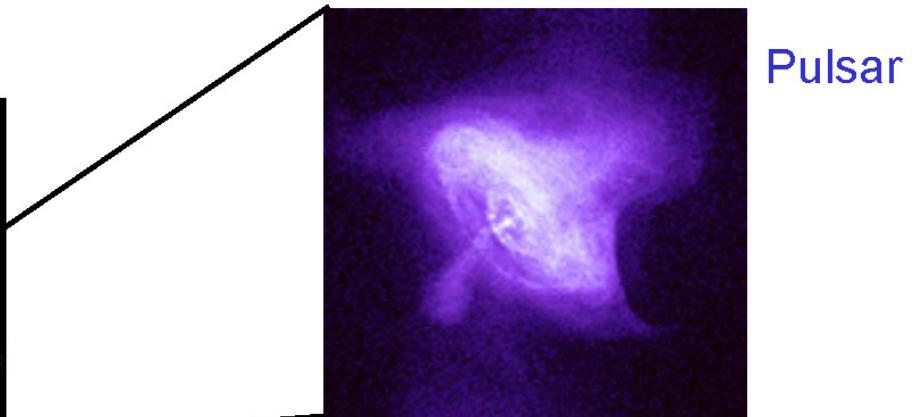
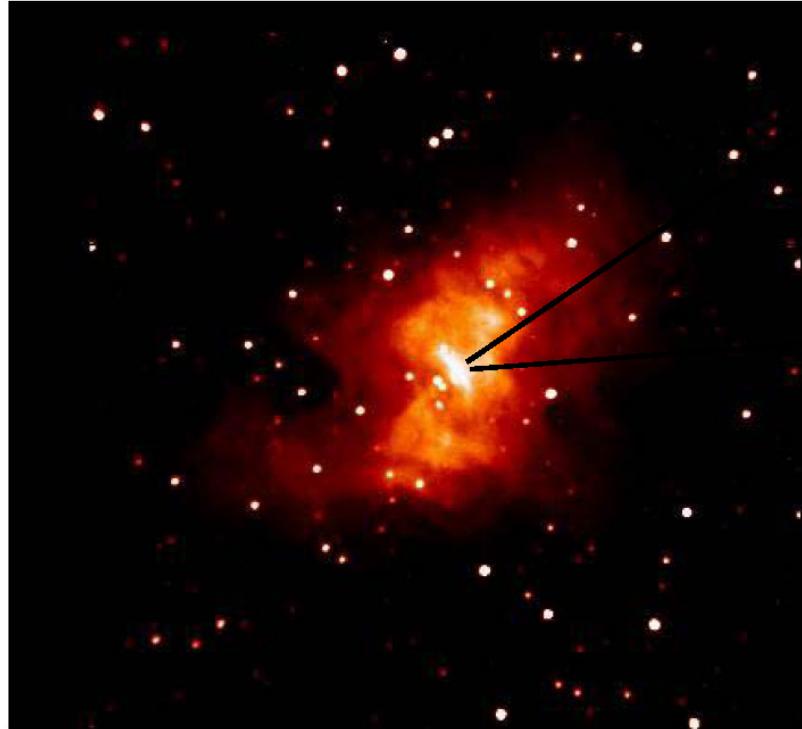
Una Pulsar è una giovane *stella di neutroni* (NS) rapidamente ruotante rispetto ad un asse.

Una NS ha un'altissima densità (quella dei nuclei), massa pari a $\sim 1.4 M_{\odot}$ (massa sole), e raggio $R_{NS} \sim 10$ km

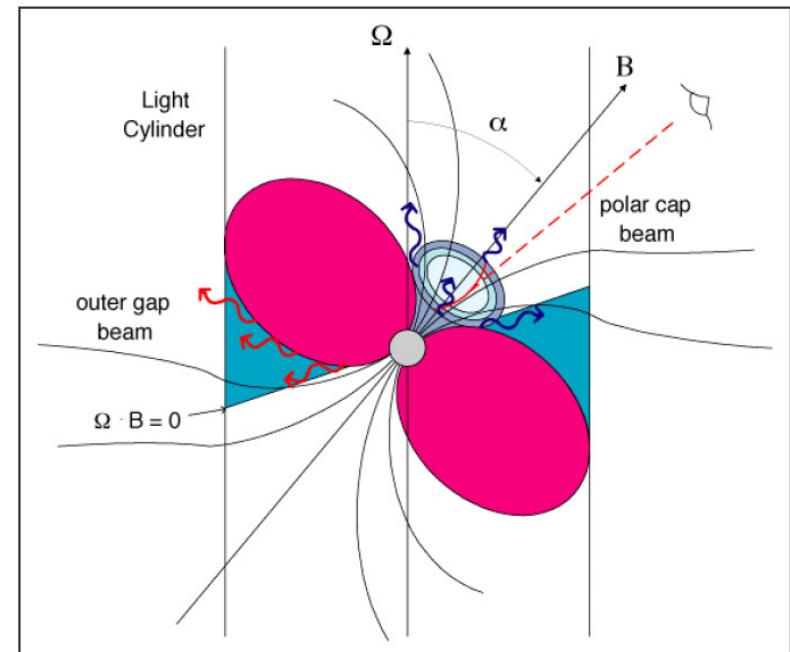
Supponendo un campo magnetico della stella prima del collasso pari a $B \sim B_{\odot} \sim 10^{-2}$ T, per la legge di Gauss:

$$B_{NS} = B \left(\frac{R}{R_{NS}} \right)^2 \cong 10^{-2} T \cdot 10^{10} \cong 10^8 T$$

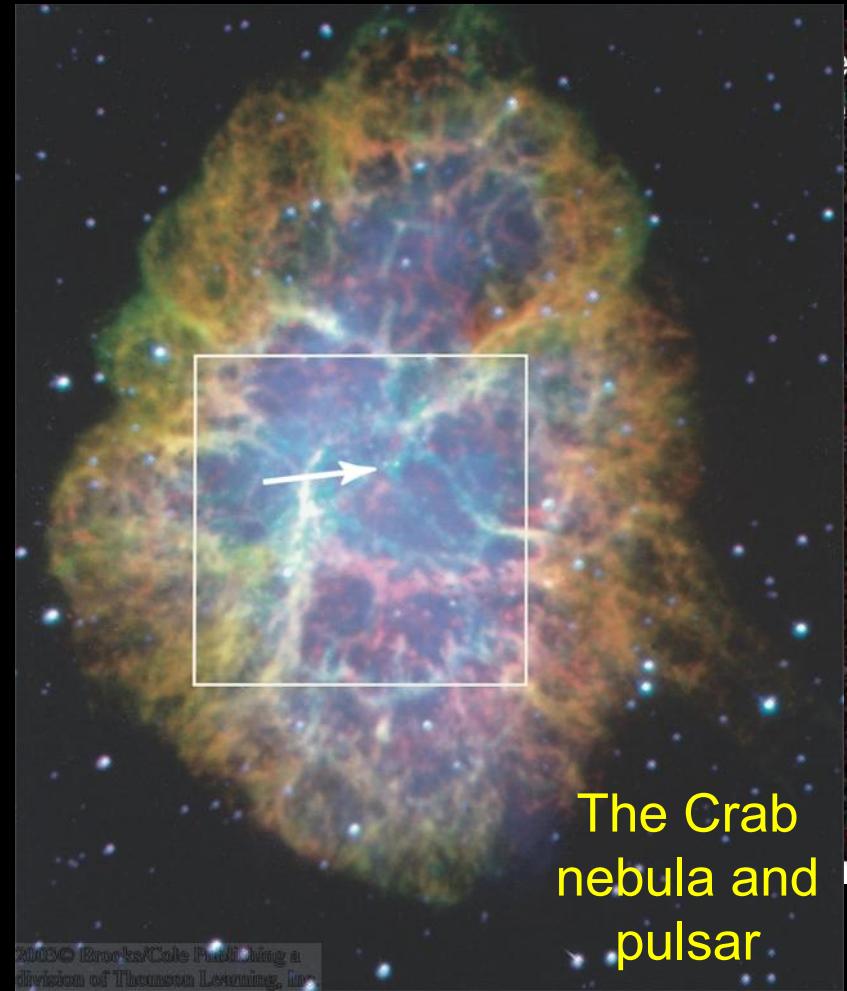
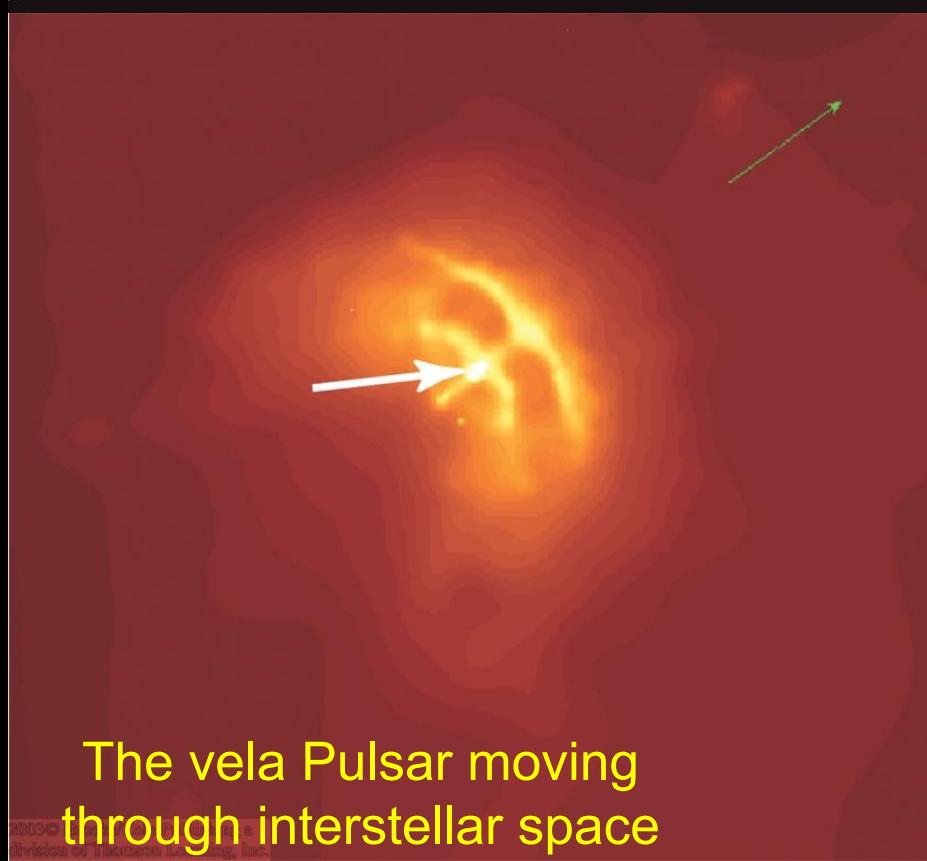
Power Source: Pulsar



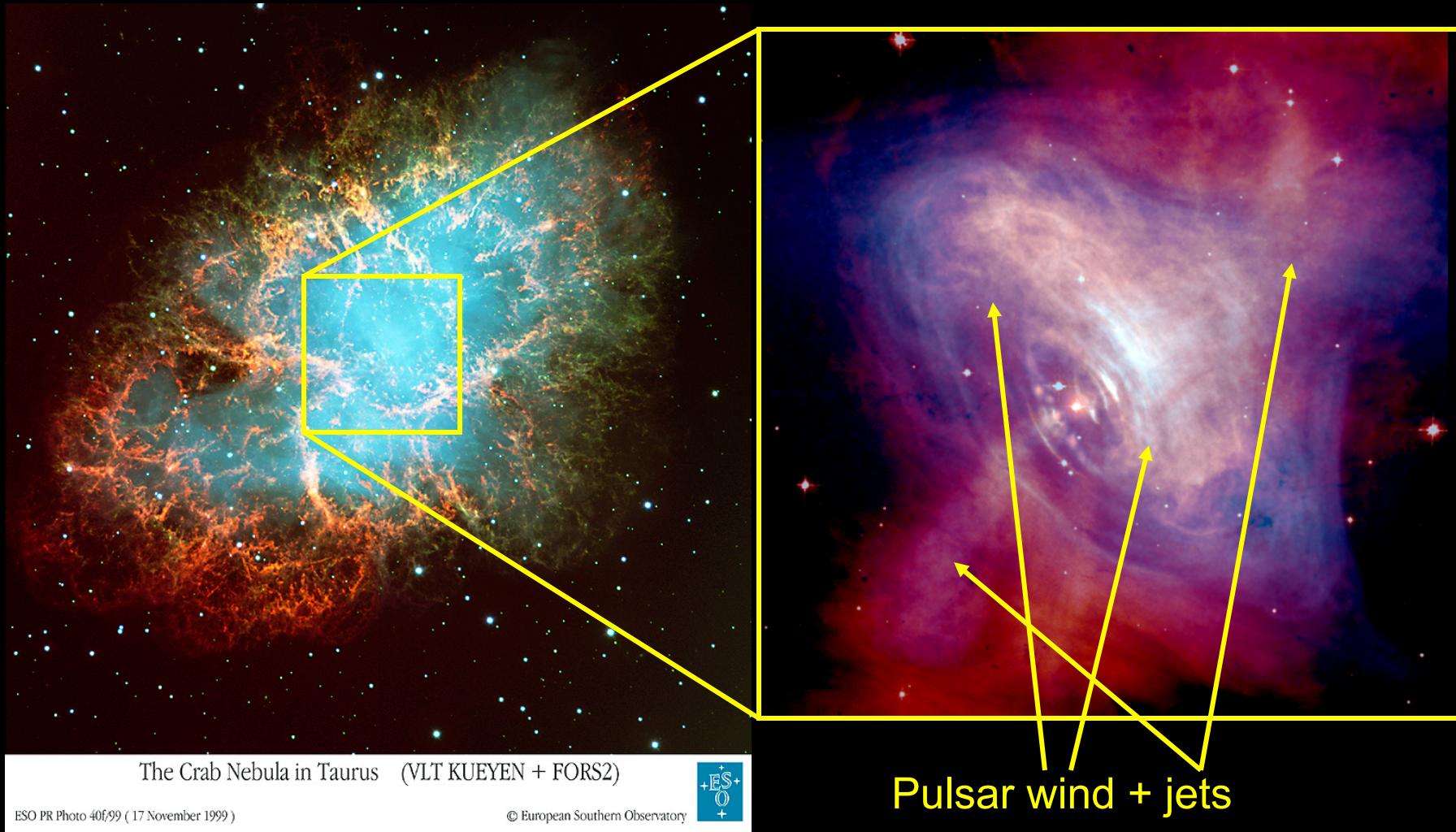
Emitted beams



Images of Pulsars and other Neutron Stars

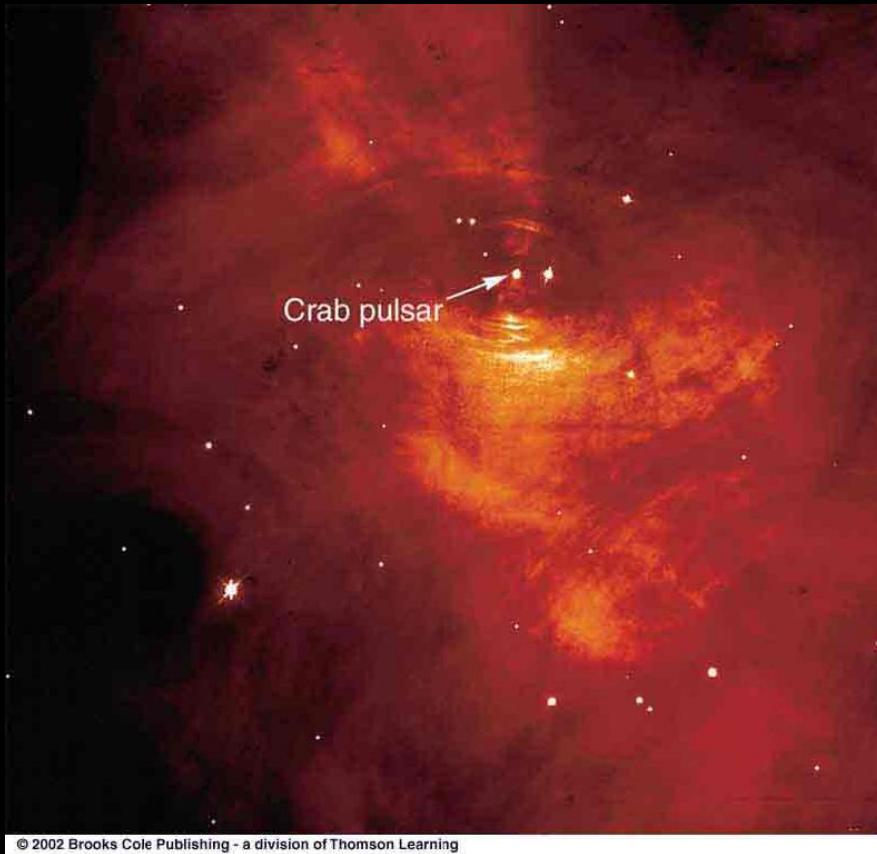


The Crab Pulsar



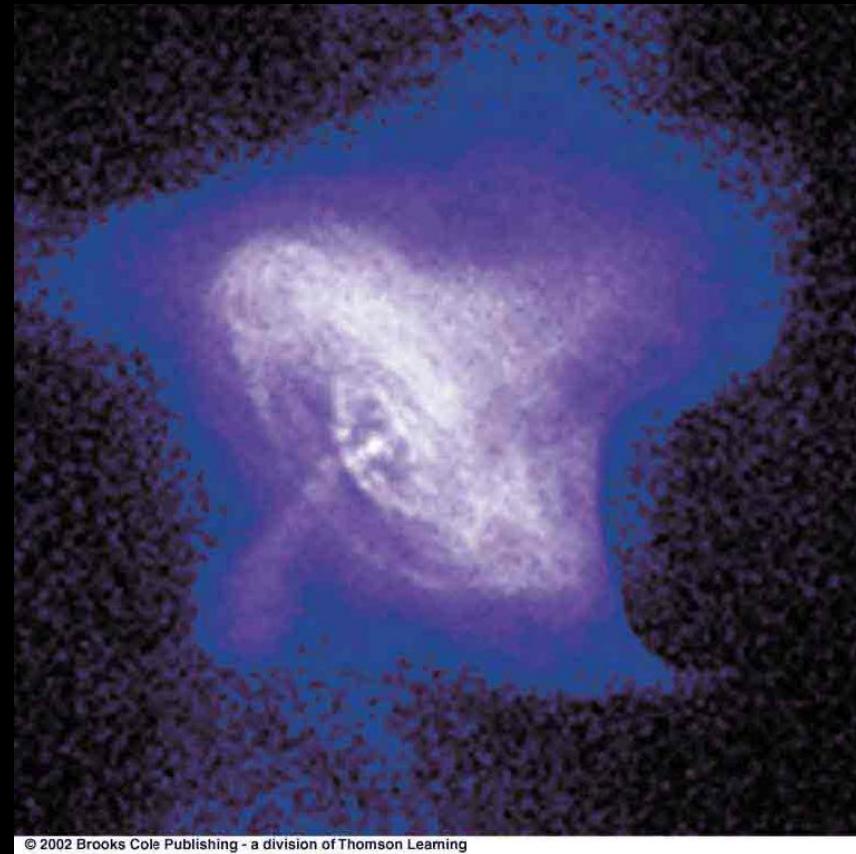
Remnant of a supernova observed in A.D. 1054

The Crab Pulsar



© 2002 Brooks Cole Publishing - a division of Thomson Learning

Visual image



© 2002 Brooks Cole Publishing - a division of Thomson Learning

X-ray image

Properties of Neutron Stars

Typical size: $R \sim 10$ km

Mass: $M \sim 1.4 - 3 M_{\text{sun}}$

Density: $\rho \sim 4 \times 10^{14}$ g/cm³

→ 1 teaspoon full of NS matter has a mass of ~ 2 billion tons!!!

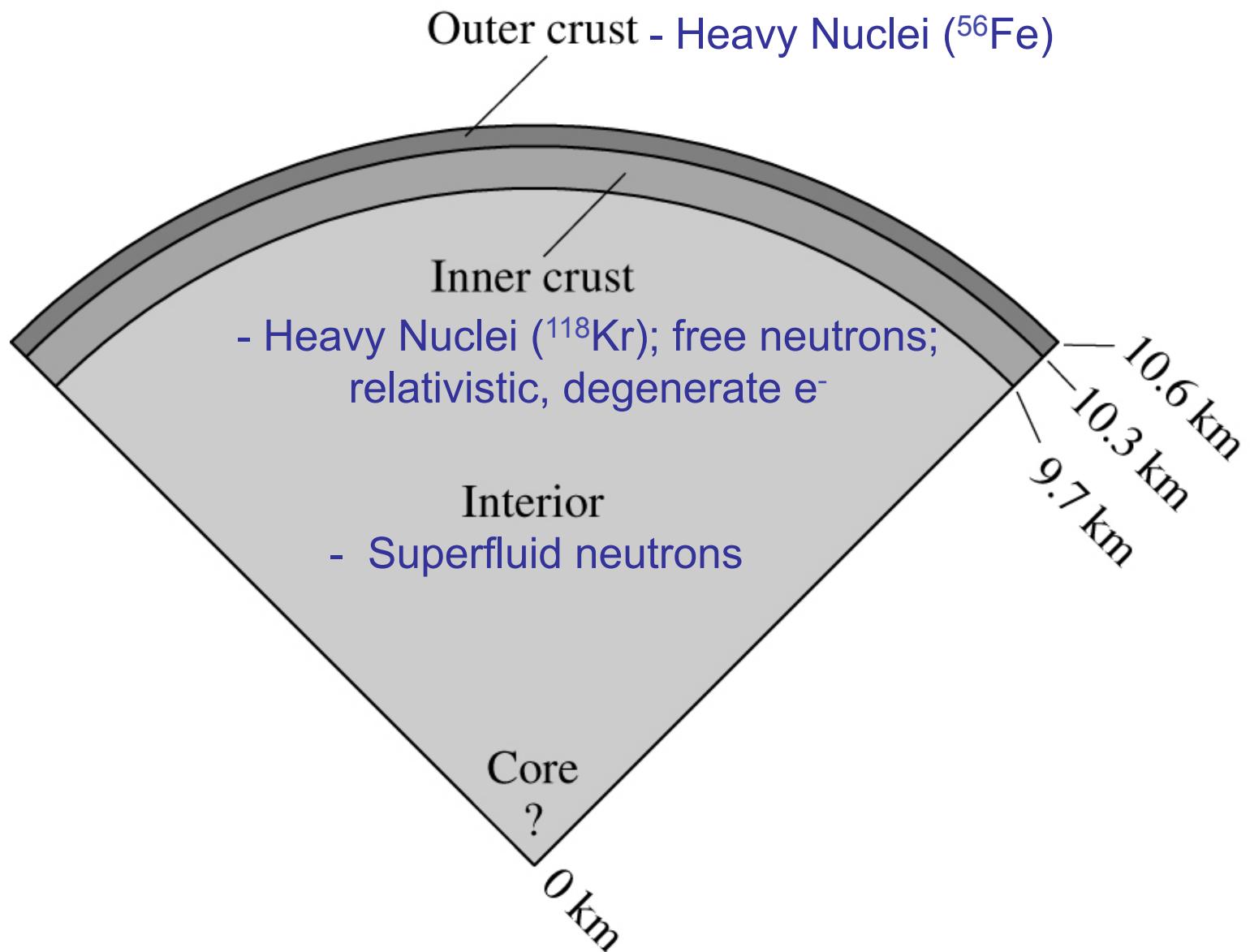
Rotation periods: \sim a few ms – a few s

Magnetic fields: $B \sim 10^8 - 10^{15}$ G

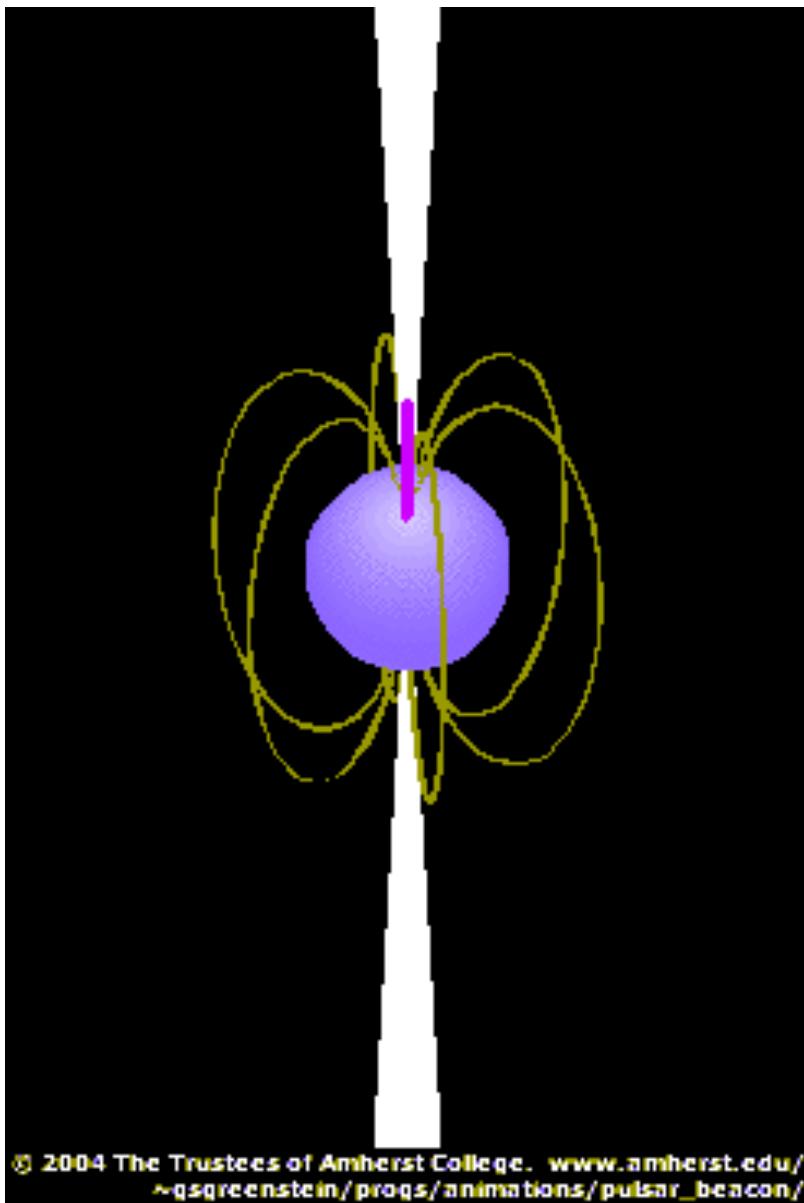
(Atoll sources;
ms pulsars)

(magnetars)

Radial Structure of a Neutron Star



The Lighthouse Model of Pulsars



A Pulsar's magnetic field has a dipole structure, just like Earth.

Radiation is emitted mostly along the magnetic poles.

Rapid rotation along axis not aligned with magnetic field axis

→ Light house model of pulsars

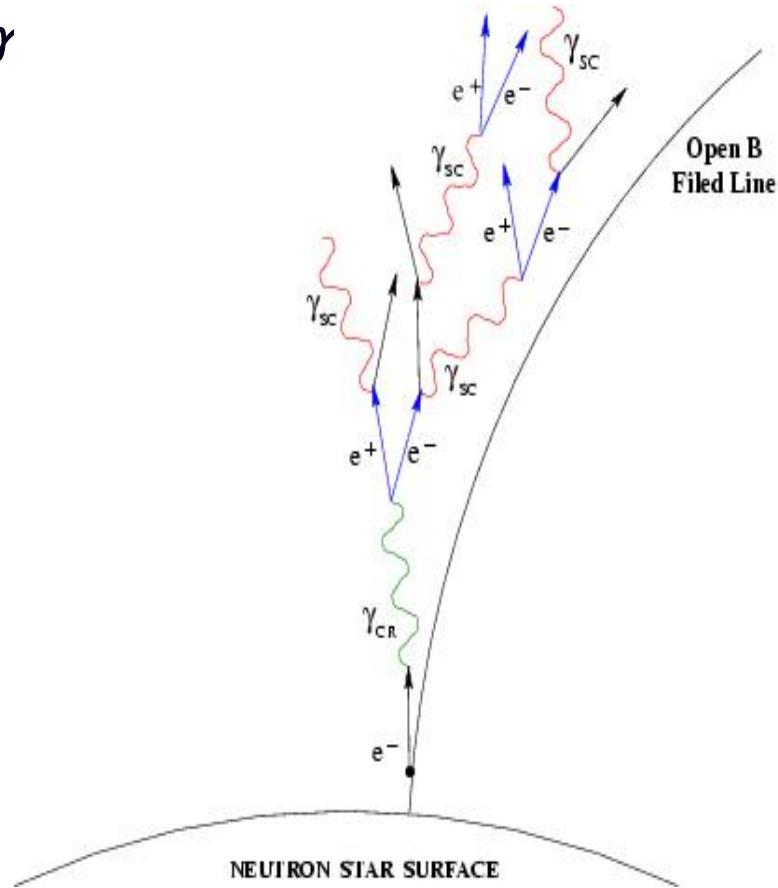
Pulses are not perfectly regular

→ gradual build-up of average pulse profiles

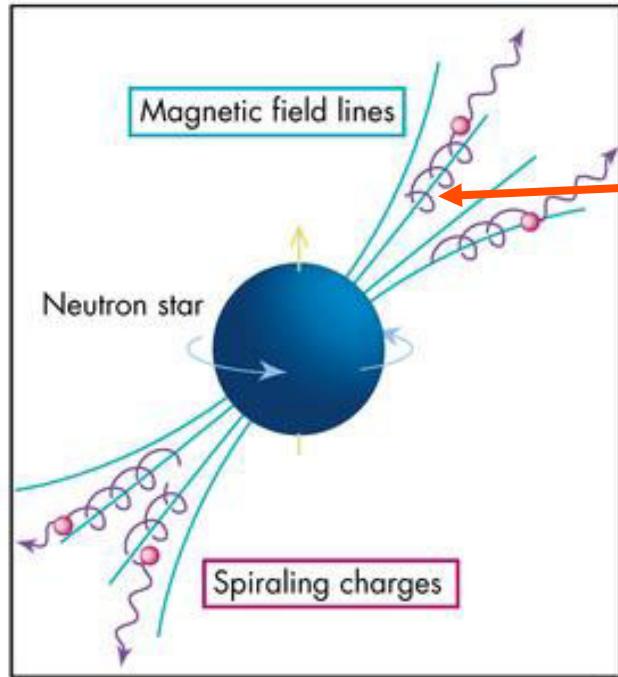
e+e- production in neutron stars

Mechanism: the spinning B of the pulsar strips e^- that accelerated at the polar cap or at the outer gap emit γ that make production of e^\pm that are trapped in the cloud, further accelerated and later released at $\tau \sim 10^5$ years.

In both models of polar gap and outer gap, electrons can be accelerated in different regions of the pulsar magnetosphere due to induced electric fields and produce an electromagnetic cascade through the emission of curvature radiation, which in turn results in production of photons which are above threshold for pair production in the strong pulsar magnetic field. This process results in lower energy electrons and positrons that can escape the magnetosphere either through the open field lines [25] or after joining the pulsar wind. In this second case, the electrons and positrons lose part of their energy adiabatically because of the expansion of the wind.



Pulsar Emission Models:Polar Cap model



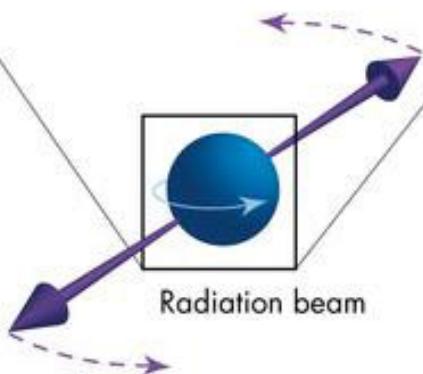
Particle acceleration along magnetic field lines

Synchrotron emission

Curvature radiation

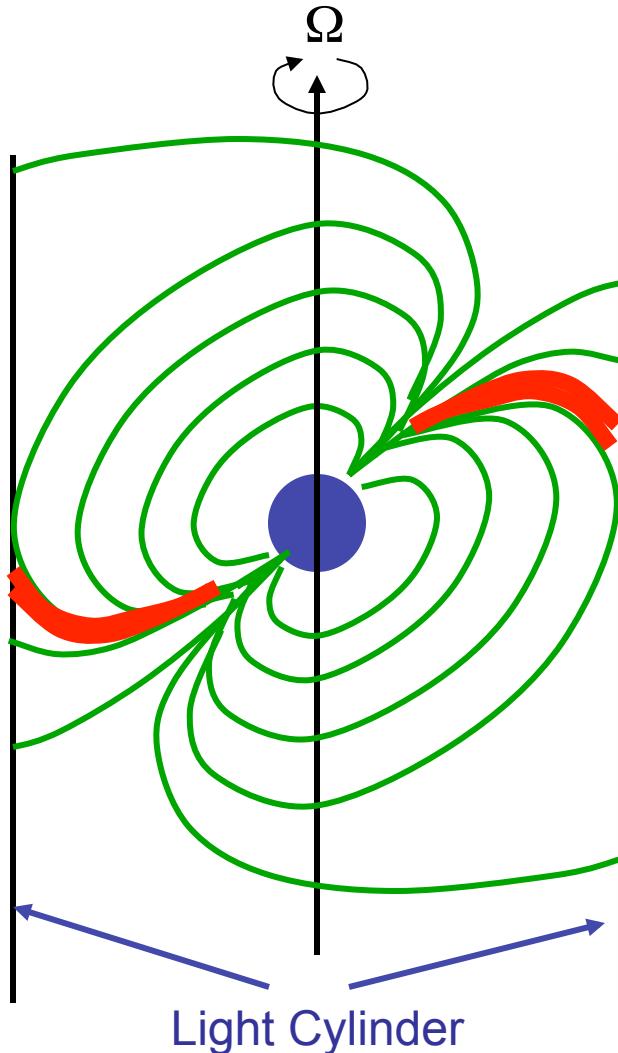
Pair production

Electromagnetic cascades



Pulsar Emission Models:

Outer Gap model



Electrons are bound to magnetic fields co-rotating with the pulsar

At a radial distance $r = c/\Omega$
co-rotation at the speed of light
→ “light cylinder”

→ Particles ripped off magnetic fields

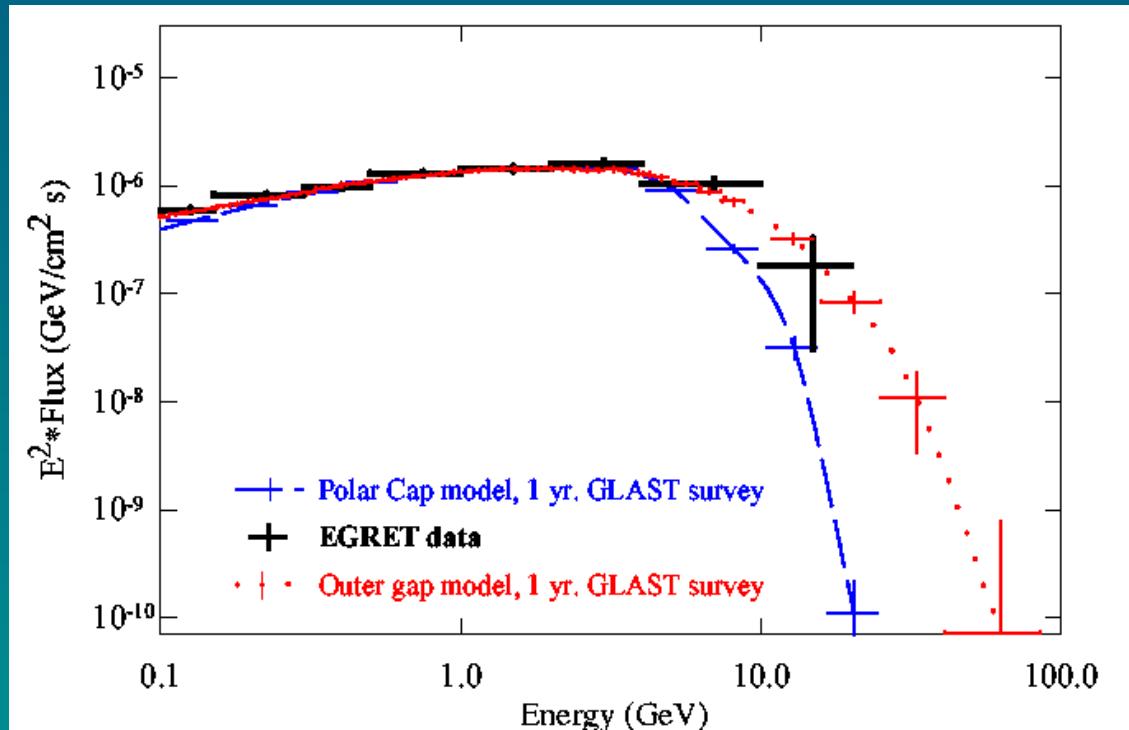
Synchrotron emission

Curvature radiation

Where do γ -rays come from? Outer gap or polar cap?

Discrimination between models

- Different models predict different spectral cutoff.
- Measuring the spectral tail is possible to distinguish between models.



- La velocità di rotazione delle pulsar è nota sperimentalmente, e può essere facilmente stimata:

$$\frac{GM^2}{R^2} = M\omega_{NS}^2 R \longrightarrow \omega_{NS} \approx 10^3 - 10^4 \text{ s}^{-1}$$

La Pulsar fornisce energia tramite induzione EM.

L'energia massima fornita ad una particella di carica Ze:

$$\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \longrightarrow \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{L} = \frac{B\omega_o}{c}$$

($\boldsymbol{\varepsilon}$ = campo elettrico indotto su una regione lineare L)

$$E_{Max} = \int Z e \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot dx = Z e \cdot B \omega_o L \cdot L / c$$

PULSAR: Massima energia acquisita dalla particella accelerata nel caso di p (Z=1), B=10⁸ T, ω=10³ s⁻¹, R=10 km

$$\begin{aligned} E_{Max} &= Z e \cdot B \omega_o L^2 / c = \\ &= 1.6 \times 10^{-19} (C) \cdot 10^8 (T) \cdot 10^3 (s^{-1}) \cdot [10^4 (m)]^2 \\ &= 1.6 (J) = 10^{19} eV \end{aligned}$$

The energy spectrum injected by a single pulsar depends on the environmental parameters of the pulsar, but some attempts to calculate the average spectrum injected by a population of mature pulsars suggest that the spectrum may be relatively hard, having a slope of ~ 1.5 - 1.6 . This spectrum, however, results from a complex interplay of individual pulsar spectra, of the spatial and age distributions of pulsars in the Galaxy, and on the assumption that the chief channel for pulsar spin down is magnetic dipole radiation. Due to the related uncertainties, variations from this injection spectra cannot be ruled out.

$$\frac{dN_e}{dE_e} \approx 8.6 \times 10^{38} N_{100} (E_e/\text{GeV})^{-1.6} \exp(-E_e/E_c \text{ GeV}) \text{ GeV}^{-1} \text{ s}^{-1},$$

With $E_c \sim 10\text{-}1000 \text{ GeV}$ and N_{100} is rate of pulsar generation per century
 This expression corresponds to an average energy output in electron-positron pairs of approximately $6 \times 10^{46} \text{ erg}$ per pulsar, to be compared with the energy injected by the pulsar of the order of 10^{49} erg

- For details of derivation: Cosmic-ray positrons from mature gamma-ray pulsars, L. Zhang And K.S. Cheng, *Astronomy&Astrophysics*, 368, 1063-1070 (2001),

Pulsars as the sources of high energy cosmic ray positrons, Dan Hooper,^{a,b} Pasquale Blasie,^{c,d} and Pasquale Dario Serpico, *Journal of cosmology and astrophysics*, 2009

- This cutoff is determined by the details of the development of the electromagnetic cascade in the pulsar magnetosphere and, even more importantly, by the distribution of periods, magnetic fields, and radii of mature pulsars. The exact value of the cutoff energy should, therefore, not be considered to be a robust prediction of the theory, although it represents a good estimate of the order of magnitude of the cutoff energy. For instance, in some models it is argued that the typical energy of electrons and positrons in the cascade associated with the polar gap is $E_e \approx 8B_{12}^{5/7} P_o^{-17/7}$ GeV which, for a period of 200 ms, would yield a maximum energy of the resulting pairs of ~ 400 GeV. On the other hand, other models lead to different maximum energies (~80 GeV) and even different scalings of the cutoff with the parameters of the pulsar.

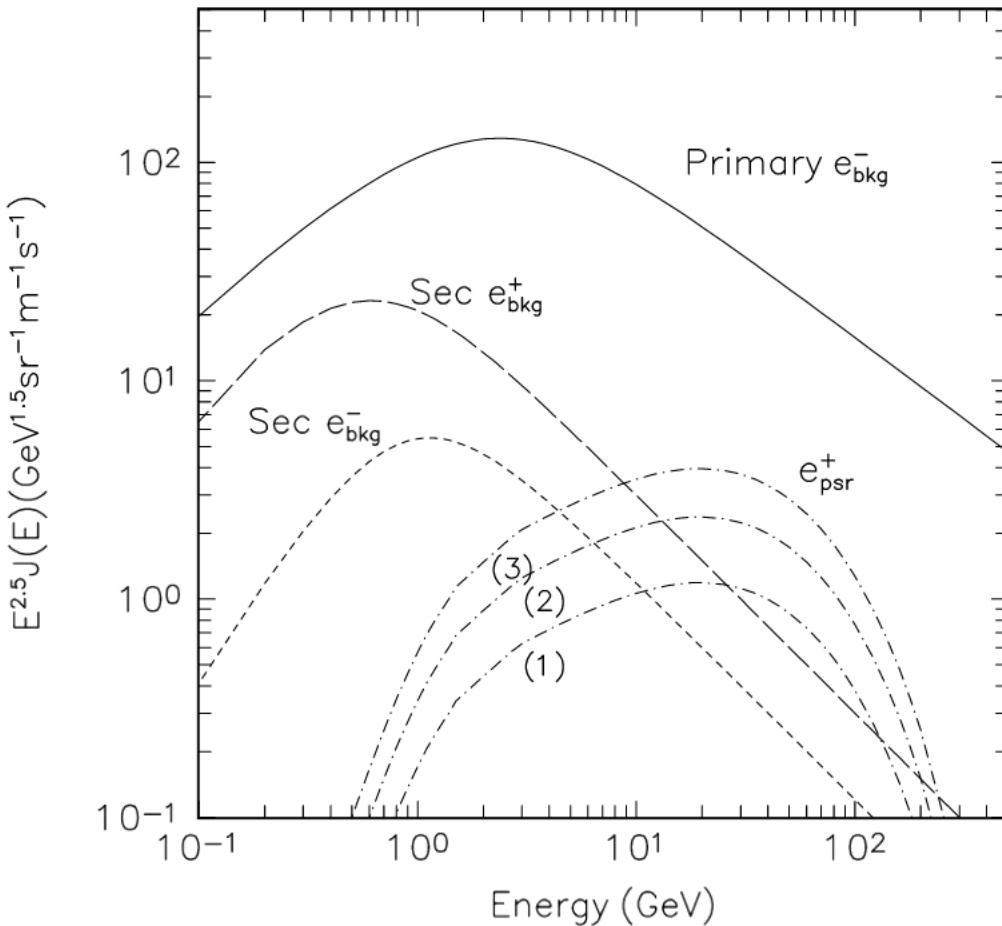


Fig. 2. The spectra of cosmic-ray electrons and positrons. The background of cosmic-ray electrons and positrons are approximated by those given by Moskalenko & Strong (1998): primary e_{bkg}^- (solid curve), secondary e_{bkg}^- (short-dashed curve) and secondary e_{bkg}^+ (long-dashed curve). The positron spectra from the mature γ -ray pulsars for various birth rate of the neutron stars in the Galaxy are labeled as (1) ($\dot{N}_{100} = 1$), (2) ($\dot{N}_{100} = 2$) and (3) ($\dot{N}_{100} = 10/3$)

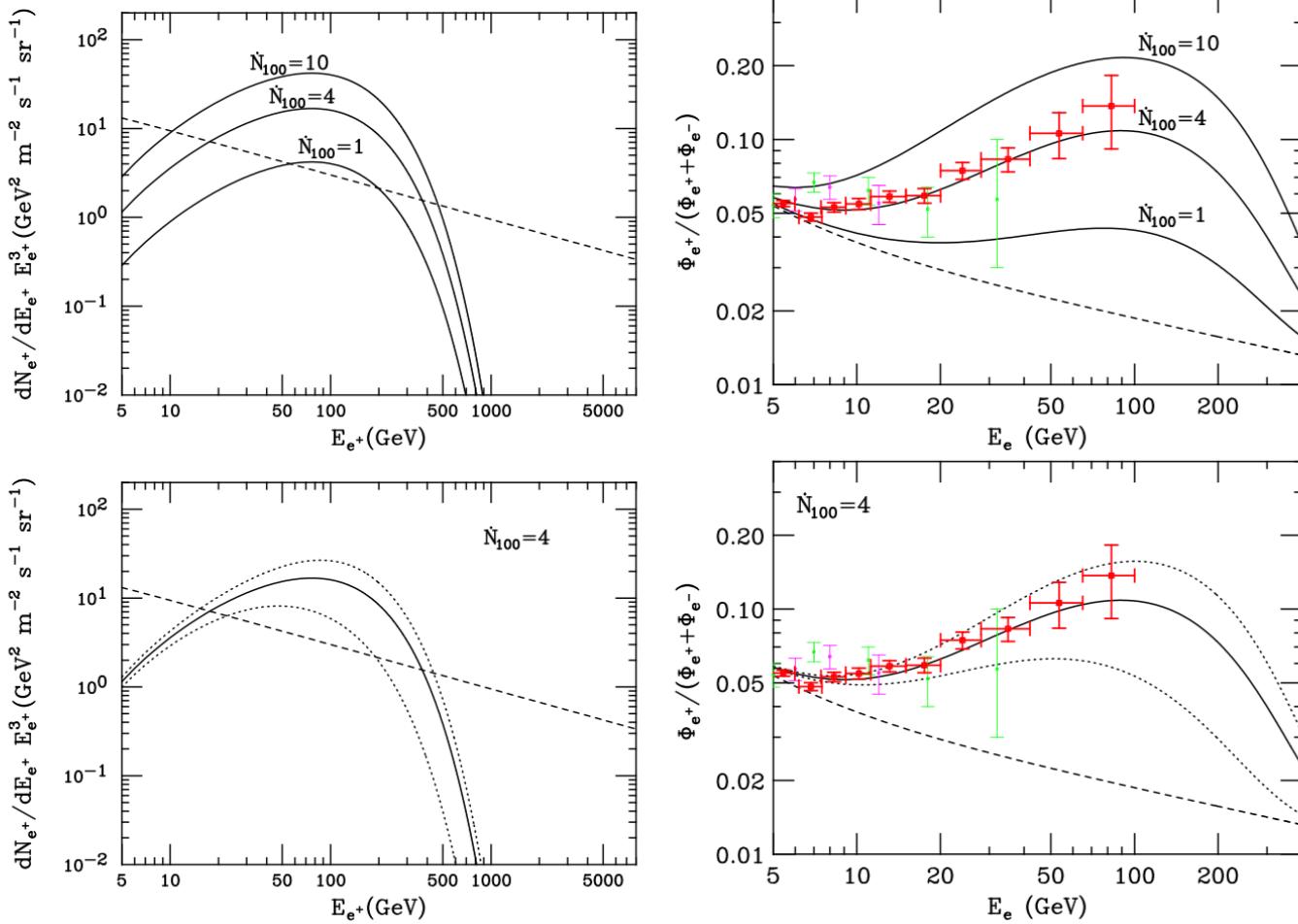


Figure 1: The spectrum of cosmic ray positrons (left) and the positron fraction (right) resulting from the sum of all pulsars throughout the Milky Way. Also shown as a dashed line is the prediction for secondary positrons (and primary and secondary electrons in the right frames) as calculated in ref. [27]. In the right frames, the measurements of HEAT [3] (light green and magenta) and measurements of PAMELA [2] (dark red) are also shown. We have used the injected spectrum reported in eq. (2.7). In the lower frames, the upper (lower) dotted line represents the case in which the injection rate within 500 parsecs of the Solar System is doubled (neglected), providing an estimate the variance resulting from the small number of nearby pulsars contributing to the spectrum.

Case study: Crab nebula

- La luminosita' totale della Crab e' $L=5 \times 10^{38} \text{ ergs}^{-1}$
- Da dove viene l'energia irraggiata?
- Se si considera la pulsar come una sfera rigida di raggio $R \gg 10 \text{ km}$ e massa $M=1$ massa solare= $1.988 \times 10^{33} \text{ gr}$, l'energia rotazionale e'

$$I = \frac{3}{5}MR^2 = 1.2 \times 10^{45} \text{ gr cm}^2 \quad E = \frac{1}{2}I\omega^2 = 4.8 \times 10^{49} \text{ erg}$$

- La frequenza di rotazione misurata e' $\omega = 190 \text{ s}^{-1}$

- Il tasso di diminuzione di velocita' angolare $\frac{d\omega}{dt} = -2.4 \times 10^{-9} \text{ s}^{-2}$

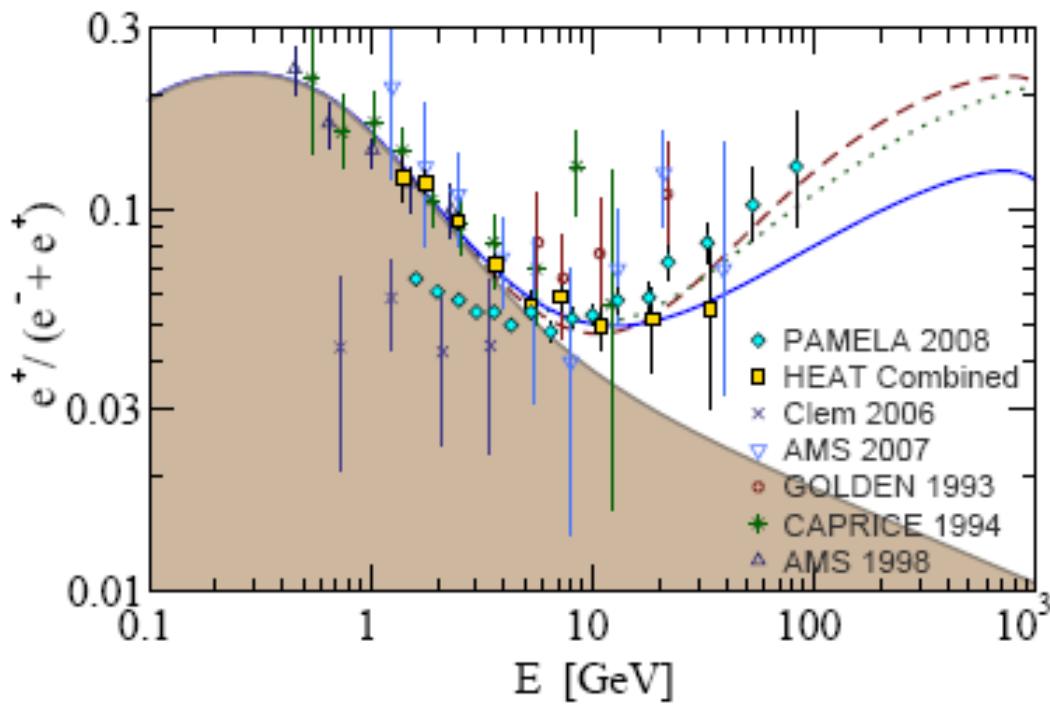
- L'energia dissipata (che viene trasferita al mezzo circostante) e' quindi $\frac{dE}{dt} = I\omega \frac{d\omega}{dt}$

- tramite processi che coinvolgono campi magnetici molto intensi e rapidamente variabili in prossimita' della superficie della pulsar

$$= (1.2 \times 10^{45}) \times (190) \times (2.4 \times 10^{-9}) \text{ ergs}^{-1} \approx 5.5 \times 10^{38} \text{ ergs}^{-1}$$

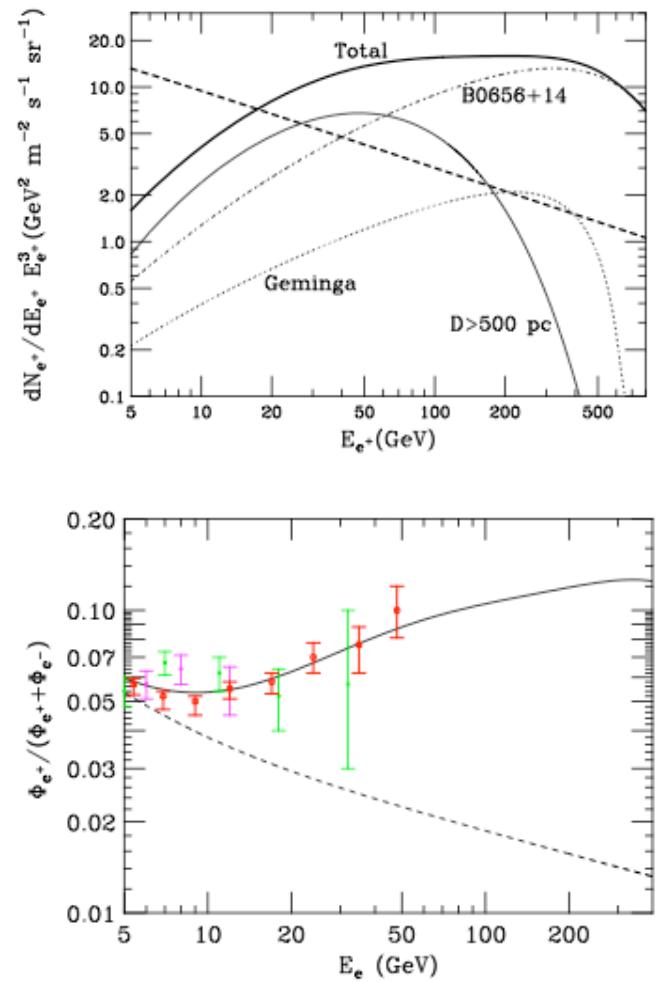
- Valore molto vicino alla potenza totale irraggiata dalla pulsar → la sorgente di energia e' proprio la rotazione della pulsar che rallenta il suo moto

Example: pulsars



H. Yüksak et al., arXiv:0810.2784v2

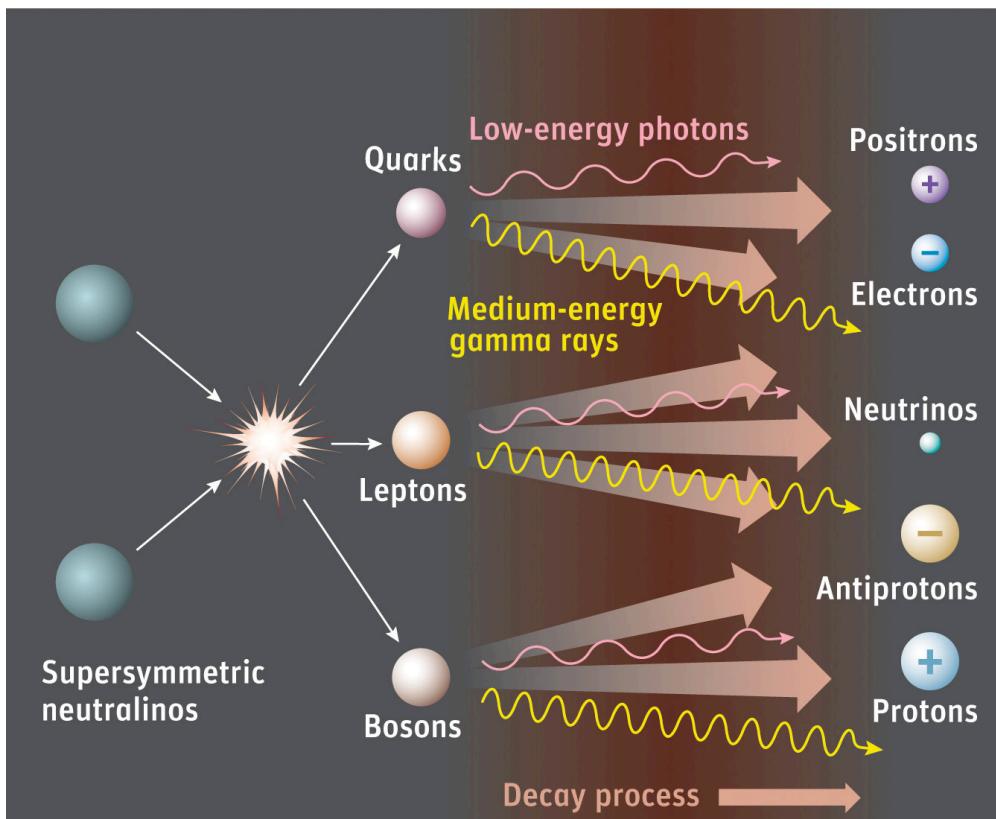
Contributions of e- & e+ from
Geminga assuming different distance,
age and energetic of the pulsar



Hooper, Blasi, and Serpico
arXiv:0810.1527

Dark Matter

- Dark matter in the halo annihilates producing a cascade of standard particles, as p, e+,e-, gammas, neutrinos, anti-p and so on
- Depends on: halo DM distribution (unknown) rates of decays of different channels of DM particles into standard particles (SUSY, Kaluza-Klein,...)

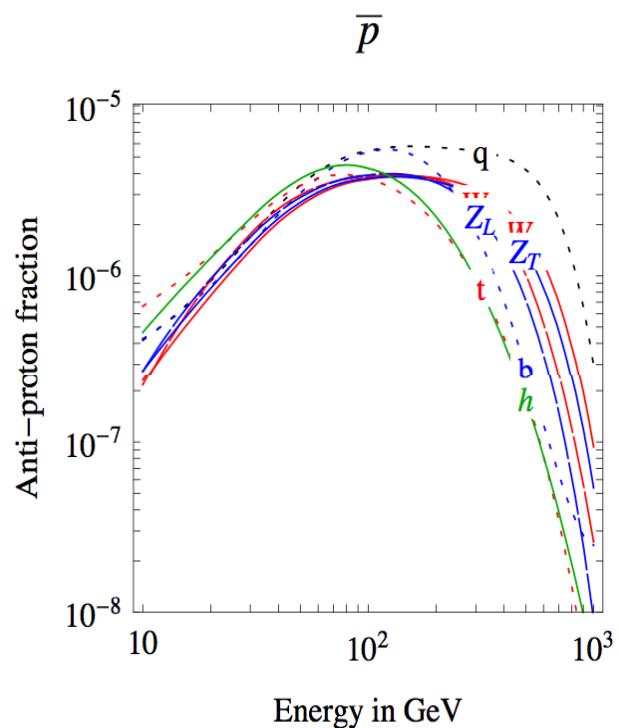
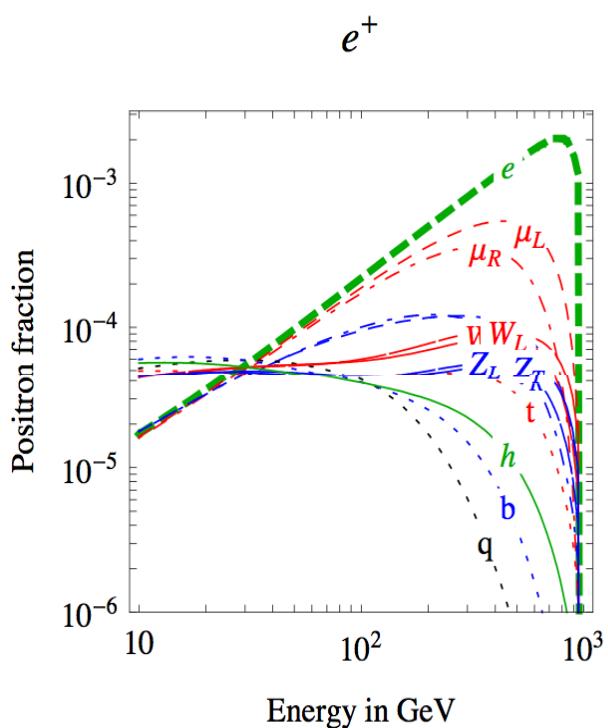


DM annihilations

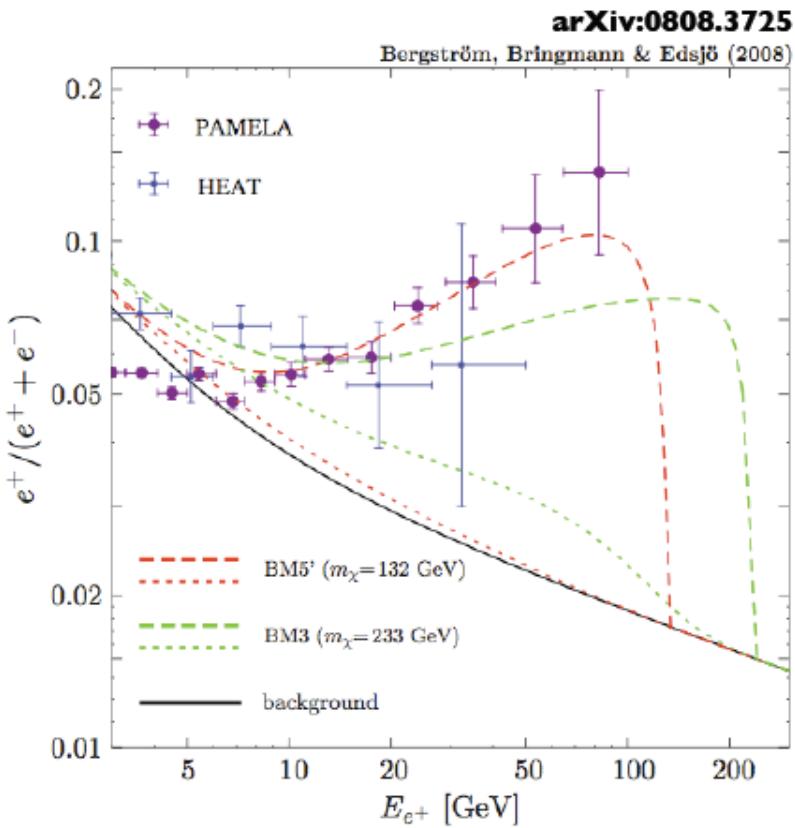
Resulting spectrum for positrons and antiprotons M= 1 TeV

The flux shape is completely determined by:

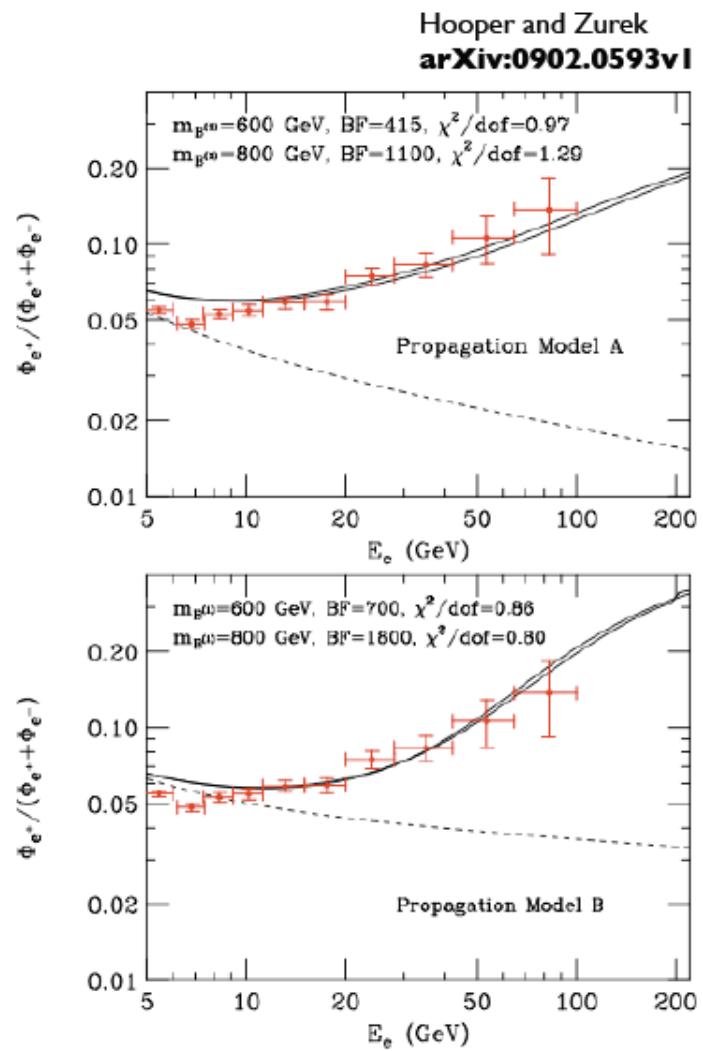
- 1) WIMP mass**
- 2) Annihilations channels**



Example: Dark Matter



Majorana DM with **new** internal bremsstrahlung correction. NB: requires annihilation cross-section to be 'boosted' by >1000.



Kaluza-Klein dark matter