

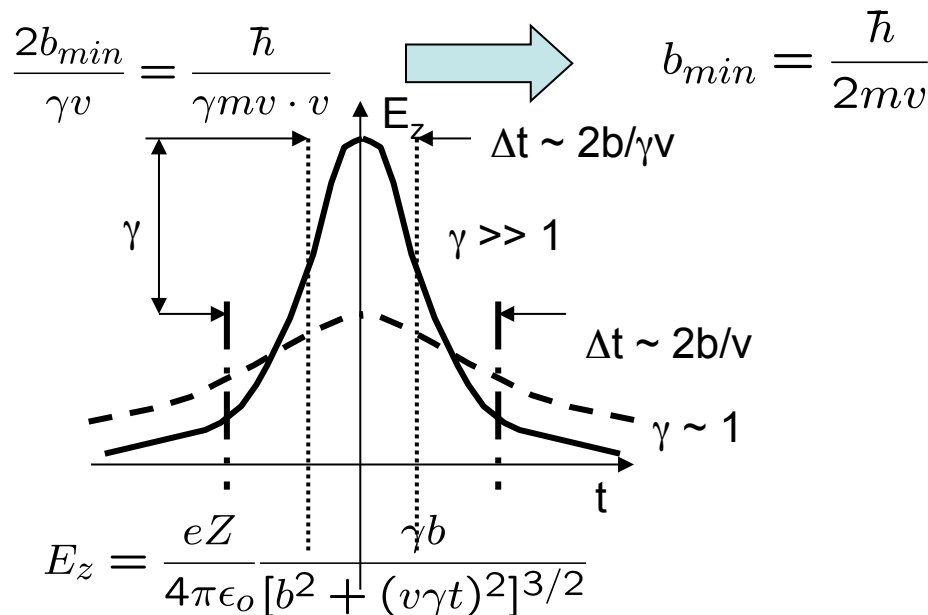
# Lecture 10 091118

- Il pdf delle lezioni puo' essere scaricato da
- [http://www.fisgeo.unipg.it/~fiandrin/didattica\\_fisica/cosmic\\_rays1819/](http://www.fisgeo.unipg.it/~fiandrin/didattica_fisica/cosmic_rays1819/)

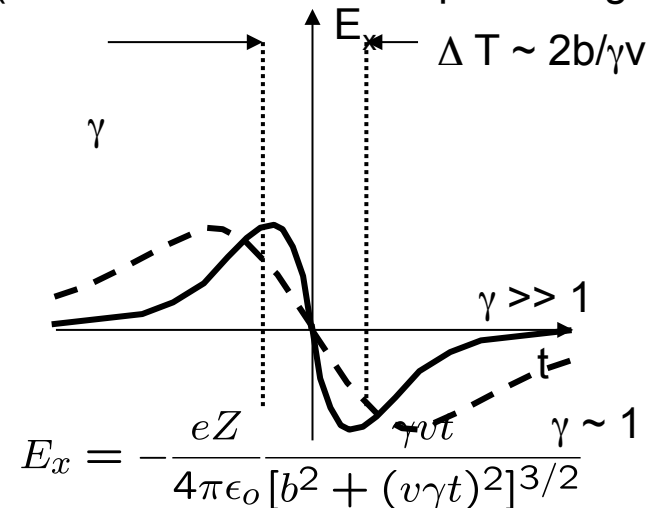
# Brems: caso relativistico

L'affermazione di prima puo' essere rifraseda dicendo che la durata dell'impulso di radiazione deve essere piu' lunga del tempo impiegato dall'e- a percorrere una lunghezza pari al suo "raggio"  $\Delta x_e$  (come nel caso di atomi o molecole in cui la lunghezza di coerenza e' fissata dalla durata dell'emissione; pacchetti d'onda emessi da sistemi a distanza maggiori di quella di coerenza,  $L=cT$ , non hanno alcuna relazione di fase e non sono coerenti –p.es. non danno interferenza

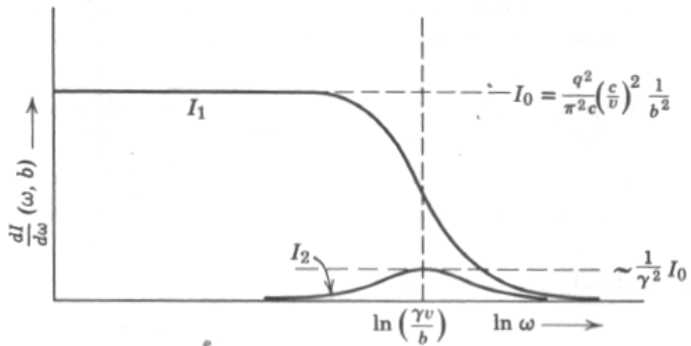
$$\Delta T \geq (\Delta x)_e/v \quad \longrightarrow \quad \Delta T_{min} = (\Delta x)_e/v \quad \text{ma} \quad \Delta T_{min} = \frac{2b_{min}}{\gamma v} \quad \Delta x_e = \frac{\hbar}{\Delta p} = \frac{\hbar}{\gamma m v}$$



Alla distanza di max avvicinamento a  $t=0$ ,  $E_z = \gamma E_z(\text{NR})$ , ma la durata dell'interazione e' contratta di un fattore  $\gamma$  (contrazione di Lorentz per b lungo x)



# Brems relativistica



L'analisi fatta dell'emissione spettrale e' del tutto relativistica e lo spettro di emissione di un singolo elettrone su un singolo nucleo **ionizzato** e'

$$I(\omega) = \left( \frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left( \frac{\omega^2}{\gamma^2 v^4} \right) \left[ \frac{K_0^2(y)}{\gamma^2} + K_1^2(y) \right]$$

$\omega b / \gamma v \gg 1$

$$\approx \left( \frac{e^6 Z^2}{48\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left( \frac{\omega}{\gamma b v^3} \right) e^{-2\frac{\omega b}{\gamma v}} \left[ \frac{1}{\gamma^2} + 1 \right]$$

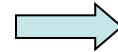
$\omega b / \gamma v \ll 1$

$$\approx \left( \frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left( \frac{1}{v^2 b^2} \right)$$

Il valore max di b e' quello a cui c'e' il cutoff exp

$$2 \frac{\omega b_{max}}{\gamma v} \approx 1 \quad \Rightarrow \quad b_{max} \approx \frac{\gamma v}{2\omega}$$

Quindi  $\frac{b_{max}}{b_{min}} \approx \frac{\gamma v}{2\omega} \times \frac{2mv}{\hbar} = \frac{\gamma m v^2}{\hbar \omega}$



$$\frac{dI'(\omega)}{dt'} = \left( \frac{e^6 Z^2 \gamma N}{12\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 v'} \right) \ln \frac{\gamma m v^2}{\hbar \omega}$$

$\vec{v}' = -\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{dI'(\omega)}{dt'} = \left( \frac{e^6 Z^2 \gamma N}{12\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 v} \right) \ln \frac{\gamma m v^2}{\hbar \omega}$

Abbiamo espresso tutte le quantita' a destra nel labo

# Brems relativistica

Dobbiamo trasformare le quantita' a sx dal K' a K del labo

Nel labo  $\frac{dI}{dt} = \frac{dE}{dt d\omega}$       ma       $dE = \frac{dE}{dE'} dE'$        $d\omega = \frac{d\omega}{d\omega'} d\omega'$        $dt = \frac{dt}{dt'} dt'$

$$= \frac{dE}{dE'} dE' \frac{1}{\frac{dt}{dt'} dt' \frac{d\omega}{d\omega'} d\omega'} = \frac{dE}{dE'} \frac{dt'}{dt} \frac{d\omega'}{d\omega} \frac{dE'}{dt' d\omega'} = \frac{dE}{dE'} \frac{dt'}{dt} \frac{d\omega'}{d\omega} \frac{dI'}{dt'}$$

Dalle trasf di Lorentz  $dE = \gamma dE' (1 + \beta \cos \theta')$       Poiche' non siamo interessati alla distribuzione angolare e l'emissione e' isotropa in K', mediamo su  $\theta' \rightarrow \cos \theta$  sparisce

$$\begin{aligned} dE &= \gamma dE' \\ d\omega &= \gamma d\omega' \\ dt &= \gamma dt' \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{dt} = \gamma \frac{1}{\gamma} \frac{1}{\gamma} \frac{dI'}{dt'} = \frac{1}{\gamma} \frac{dI'}{dt'} = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{e^6 Z^2 \gamma N}{12 \pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 v} \right) \ln \frac{\gamma m v^2}{\hbar \omega}$$

$$\frac{dI}{dt} = \left( \frac{e^6 Z^2 N}{12 \pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 v} \right) \ln \frac{\gamma m v^2}{\hbar \omega} \quad \text{Rimane solo una debole dipendenza da } \gamma \text{ nel log}$$

NB:  $\ln(\gamma m v^2 / \hbar \omega)$  '  $G_{ff}$ , fattore di gaunt, come nel caso non relativistico

Il fattore davanti al log e' lo stesso del caso non relativistico



# Brems relativistica

$$\frac{dI}{dt} = \left( \frac{e^6 Z^2 N}{12\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 v} \right) G_{ff}^{rel}$$

Nel caso ultra relativistico  $v \sim c$

$$\frac{dI}{dt} \approx \left( \frac{e^6 Z^2 N}{12\pi^3 \epsilon_0^3 m_e^2 c^4} \right) G_{ff}^{rel}$$

E' lo spettro di potenza emesso da un e-

NB: la dipendenza da  $v$  e'  $G_{ff}$

Nel caso relativistico, la distribuzione termica di equilibrio e' ancora una maxwelliana, ma stavolta relativistica

Per particelle ultra-relativistiche  $E \sim cp \rightarrow f(\vec{p}) d^3p = 4\pi A e^{-cp/kT} p^2 dp$

$$A = \left( 4\pi \int e^{-cp/kT} p^2 dp \right)^{-1} \quad \text{Tenendo conto che} \quad \int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = a^{-1-n} \Gamma(n+1)$$

$$\text{e che} \quad \Gamma(n+1) = n! \text{ se } n \text{ intero} \quad \Rightarrow \quad A = (8\pi c/kT)^{-3} = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{c}{kT} \right)^3$$

$$f(\vec{p}) d^3p = \frac{1}{2} \left( \frac{c}{kT} \right)^3 e^{-cp/kT} p^2 dp \quad \Rightarrow \quad dn = N_e \frac{1}{2} \left( \frac{c}{kT} \right)^3 e^{-cp/kT} p^2 dp$$

E' la densita' di volume delle particelle ultra relativistiche con  $p$  fra  $p$  e  $p+dp$

# Brems relativistica:materia neutra

Fino ad ora abbiamo considerato emissione su nuclei completamente ionizzati.

Tuttavia, nelle galassie in particolare e' presente una grande quantita' di materia neutra (atomica e molecolare). p.es. sotto forma di HI (idrogeno atomico), H<sub>2</sub> e molte altre molecole che formano regioni compatte e dense.

Nel caso di materia neutra di numero atomico Z e di massa A, occorre tenere conto dello screening della carica nucleare da parte degli elettroni atomici

In un approccio naive, si puo' sostituire al campo coulombiano, quello di Fermi-Thomas

$$V = \frac{eZ^2}{4\pi\epsilon_0 r} \longrightarrow V = \frac{eZ^2}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/a}$$
$$a = 1.4a_0 Z^{-1/3}$$
$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = 0.53 \times 10^{-10} m$$

E approssimare con una step function  $\theta(\mathbf{r}/\mathbf{a})$ , i.e. non c'e campo a distanze  $r > a$

$$\longrightarrow$$
$$\mathbf{b}_{\max} = \mathbf{a}$$

# Brems relativistica: materia neutra

Fra i due limiti di  $b_{\max}$ , quello "ionizzato" e quello "neutro" di FT occorre scegliere il più piccolo

$$\frac{b_{FT}}{b_{ion}} = \frac{1.4a_o \omega}{Z^{1/3} \gamma v} \quad \text{Quando } \omega \geq \frac{\gamma v Z^{1/3}}{1.4a_o} \rightarrow b_{ion}$$

Nel limite  $\gamma \rightarrow \infty$  occorre usare il limite di FT

$$b_{max} = 1.4a_o Z^{-1/3} \quad b_{min} = \frac{\hbar}{2mv}$$

$$\frac{dI'(\omega)}{dt} = \left( \frac{e^6 Z^2 \gamma N}{12\pi^3 \epsilon_o^3 c^3 m_e^2 v'} \right) \ln \frac{1.4 \cdot 2mva_o}{\hbar Z^{1/3}}$$

La frequenza max di emissione corrisponde alla (solita) condizione che l'e- non può emettere fotoni con energie superiori alla sua energia cinetica

$$\omega_{max} = \frac{mc^2(\gamma - 1)}{\hbar}$$

Lo spettro è piatto fino a  $\omega_{\max}$

# Brems relativistica: materia neutra

$$\frac{dI'(\omega)}{dt} = \left( \frac{e^6 Z^2 \gamma N}{12\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 v'} \right) \ln \frac{1.4 \cdot 2mva_o}{\hbar Z^{1/3}} \quad \omega_{max} = \frac{mc^2(\gamma - 1)}{\hbar}$$

Ora dobbiamo trasformare la potenza spettrale nel laboratorio

$$\frac{dI(\omega)}{dt} = \frac{d}{d\omega} \left( \frac{dE}{dt} \right)$$

La potenza totale  $dE/dt$  e' un invariante relativistico

→

Basta trasformare il differenziale in  $\omega$

$$\omega' = \frac{1}{T'} \quad T' = \gamma T \quad 1/T' = 1/(\gamma T) \quad \omega' = \frac{\omega}{\gamma}$$

$$\frac{d}{d\omega} = \frac{d\omega'}{d\omega} \frac{d}{d\omega'} \quad \frac{d\omega'}{d\omega} = \frac{1}{\gamma} \quad \frac{d}{d\omega} = \frac{1}{\gamma} \frac{d}{d\omega'}$$

$$\frac{dI(\omega)}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{d}{d\omega'} \left( \frac{dE}{dt} \right) = \frac{1}{\gamma} \frac{dI'(\omega')}{dt'} \approx \left( \frac{e^6 Z^2 N}{12\pi^3 \epsilon_0^3 c^4 m_e^2} \right) \ln \frac{1.4 \cdot 2mca_o}{\hbar Z^{1/3}}$$

Per e- ultrarelativistici  $v \sim c$

# Brems relativistica: materia neutra

$$\frac{dI(\omega)}{dt} \approx \left( \frac{e^6 Z^2 N}{12\pi^3 \epsilon_0^3 c^4 m_e^2} \right) \ln \frac{1.4 \cdot 2mc\alpha_o}{\hbar Z^{1/3}} \quad \omega_{max} = \frac{mc^2(\gamma - 1)}{\hbar}$$

La potenza totale emessa e'

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^{E_k/\hbar} \frac{dI(\omega)}{dt} d\omega = (E_k/\hbar) \frac{dI(\omega)}{dt} d\omega$$

$$\frac{dE}{dt} = \left( \frac{e^6 Z^2 N}{12\pi^3 \epsilon_0^3 c^4 m_e^2 \hbar} \right) E_k \ln \frac{192}{Z^{1/3}}$$

Il calcolo esatto da'

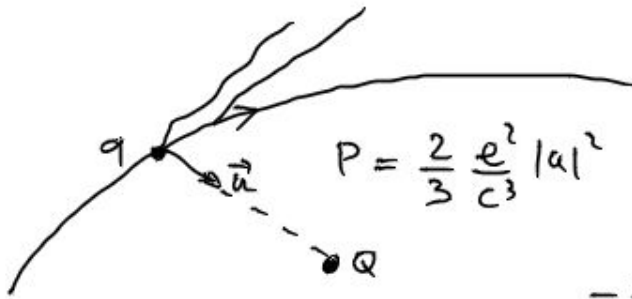
$$\frac{dE}{dt} = \frac{Z(Z + 1.3)e^6 N}{16\pi^3 \epsilon_0^3 c^4 m_e^2 \hbar} E_k \ln \left( \frac{183}{Z^{1/3}} + \frac{1}{8} \right)$$

Nonostante le approx fatte il risultato e' sostanzialmente corretto. La forma funzionale della potenza emessa e'

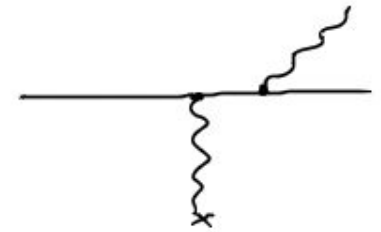
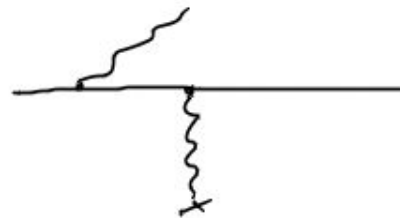
$$\frac{dE}{dt} = (cost.) \cdot Z(Z + 1.3) N E_k$$

# Brems

- Emissione di fotoni nel campo elettrico di una carica



$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} |\dot{a}|^2$$



$$-\frac{1}{E} \left( \frac{dE}{dt} \right)_{br} = 4 N Z^2 r_e^2 \alpha c \bar{g}$$

- $N$  = densità dei nuclei su cui gli elettroni fanno scattering
- $r_e = \frac{e^2}{m_e c^2}$  raggio class. dell' $e^-$ ,  $\alpha$  = cost. di strutt. fine
- $\bar{g}$  = fattore di Gaunt - parametrizza le correzioni quant. alla formula classica

Si ha bremsstrahlung ogni volta che particelle leggere cariche attraversano un gas di particelle pesanti – tipicamente protoni dell'ISM

# Brems

◦  $\bar{g}$  tiene conto del fatto che ci può essere screening nucleare degli elettroni atomici

- no screening, i.e. plasma completamente ionizzato

$$\bar{g} = \ln(2\gamma) + \frac{1}{3} = \ln\gamma + 0.36$$

- screening totale, i.e. H freddo  $\bar{g} = \ln(183Z^{-1/3}) - 1/18$

$$-\frac{1}{E} \left( \frac{dE}{dt} \right)_{Br} = \begin{cases} 7.0 \times 10^{-23} N (\ln\gamma + 0.36) & \text{No scr.} \\ 3.6 \times 10^{-22} N & \text{Tot. scr.} \end{cases} \quad s^{-1}$$

◦ Entro un intervallo  $100 \lesssim \gamma \lesssim 10^5$  coincidono entro un fattore 2

◦ In entrambi i casi  $\left( \frac{dE}{dt} \right)_{Br} \propto E$

# Brems

La potenza di singola particella emessa per bremsstrahlung ha una distribuzione spettrale caratteristica.

Un elettrone di energia  $E$  può emettere solo fotoni con un'energia  $h\omega < E$

Lo spettro di frequenza è piatto fino alla frequenza max

Il calcolo dello spettro di frequenza da bremsstrahlung è lungo e laborioso. Fisicamente è dovuto alla forma del campo elettrico che interviene nell'interazione.



# Brems classica: emissivita'

L'emissione totale per unita' di volume di una popolazione di elettroni, detta emissivita'  $k_\omega$  (PHz<sup>-1</sup>L<sup>-3</sup>) si ottiene integrando l'emissione di singola particella sulla distribuzione di particelle

$$k_\omega \equiv \frac{dE(\omega)}{d\omega dt dV} = \int \frac{dI(\omega)}{dt} dn \quad [\text{PL}^{-3}\text{Hz}^{-1}] \quad \frac{dI(\omega)}{dt} = \left( \frac{e^6 Z^2 N}{12\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 v} \right) \ln \Lambda$$

Fino a  $\hbar\omega = E$

La densita'  $dn$  rappresenta la densita' di volume di elettroni e puo' rappresentare **qualsunque** distribuzione, i.e.  $dn = n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) d\mathbf{x}_1 \cdots d\mathbf{x}_n$  con  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  variabili nello spazio delle fasi appropriato: p. es.  $v$  od  $E$

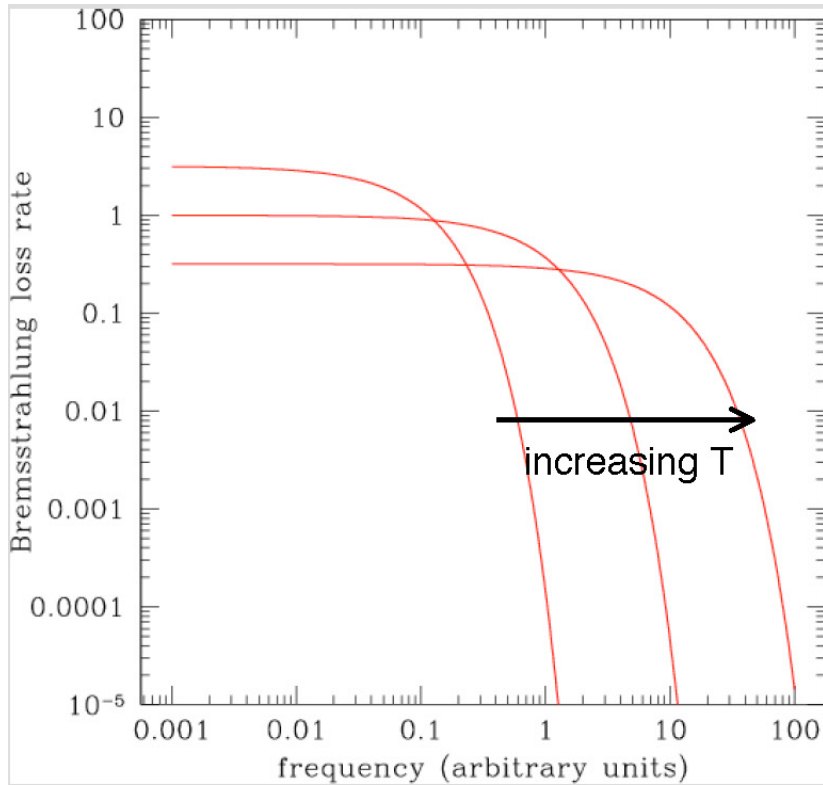
I casi piu' comuni sono quelli in cui la distribuzione e' una legge di potenza in energia

$$n(E)dE \propto E^{-\gamma}dE$$

o una maxwelliana (non relativistica)

$$n(v)dv = 4\pi N_e \left( \frac{m_e}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \exp(-mv^2/2kT) dv$$

$$k_{\omega} = 6.8 \times 10^{-51} T^{-1/2} Z^2 N N_e e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} G(\omega, T) \quad \text{WHz}^{-1}\text{m}^{-3}$$



La pendenza della curva ci da la temperatura della sorgente

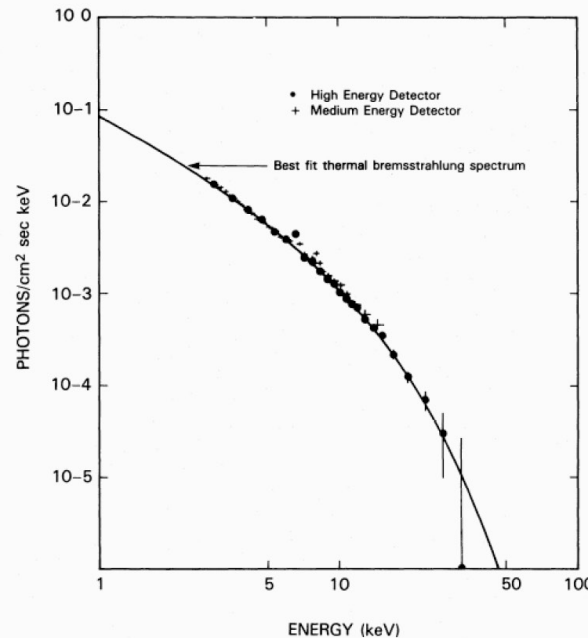
Nota T, se conosciamo la distanza della sorgente, possiamo calcolare anche  $NN_e$

Assumendo  $N \approx N_e$ ,  $N^2 \approx N_e^2$  possiamo calcolare la densita' del gas che emette

$$k_{\omega} = 2.75 \times 10^2 \frac{T^{-1/2} Z^2 N N_e}{E} e^{-\frac{E}{kT}} G(E/\hbar, T)$$

# fotoni  $\text{s}^{-1}(\text{eV})^{-1}\text{m}^{-3}$

### X-ray spectrum of Coma

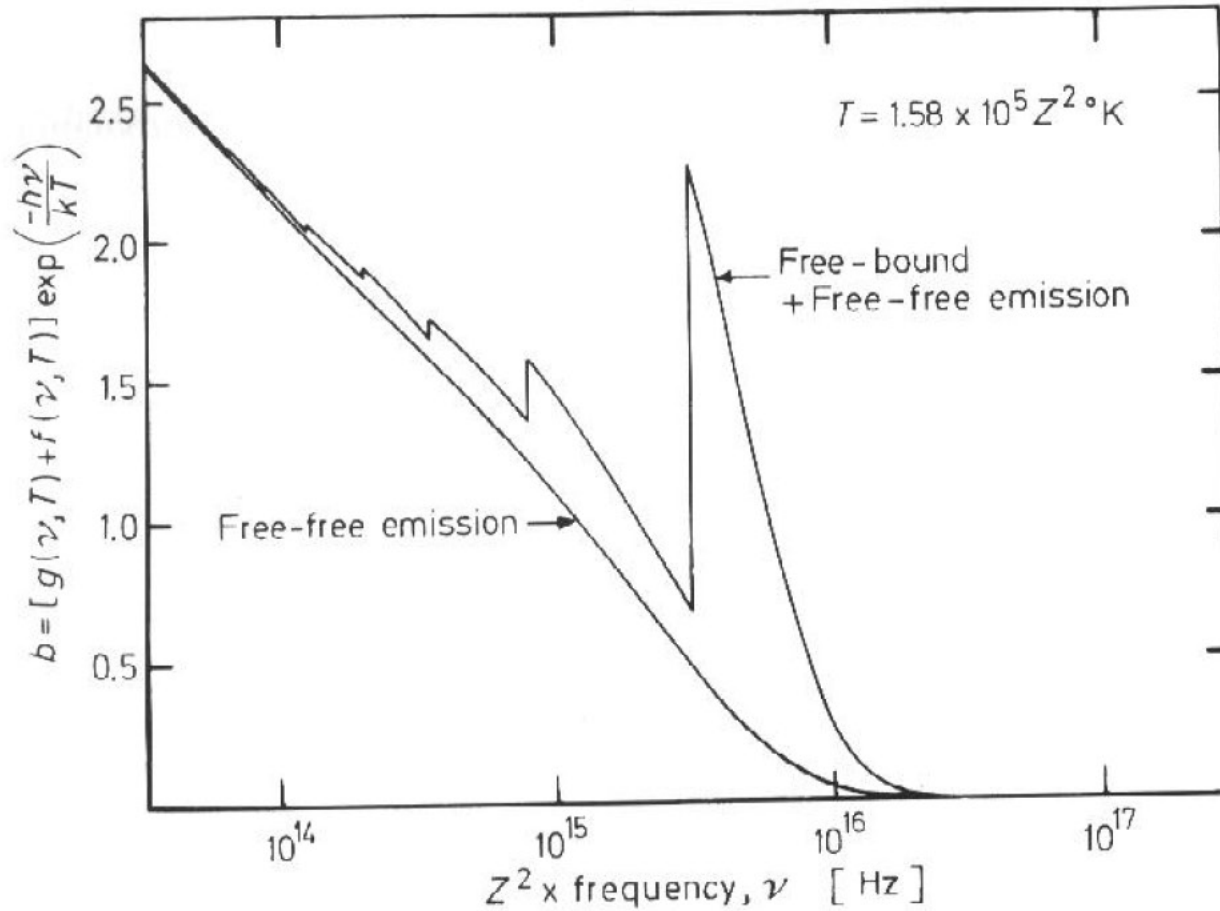


Shape of spectrum gives the temperature.

Intensity (for a known distance) gives the density of the gas.

Galaxy cluster: find  $T = 10 - 100$  million K.

$$F_{\omega} = \frac{k_{\omega} V}{4\pi d^2}$$



**Fig. 1.5.** The emission spectrum of a Maxwellian distribution of electrons at a temperature of  $T = 2\pi^2 m e^4 Z^2 / (h^2 k) = 1.58 \times 10^5 Z^2 \text{ }^\circ\text{K}$  with exact Gaunt factors taken into account [after Brussard and van de Hulst, 1962]. The lower curve illustrates the spectrum of thermal bremsstrahlung emission, whereas the upper curve illustrates the combined spectrum of thermal bremsstrahlung and recombination radiation. The volume emissivity,  $\epsilon_\nu$ , is related to  $b$  by Eq. (1.237)

# Spettro da una distr non termica

Se la popolazione di  $e^-$  e' non termica, p. es.  $n(E)dE = AE^{-p}dE \rightarrow$

Elettroni ultrarelat  $\rightarrow v \approx c$

Fattore di Gaunt  $\approx 1$

## ■ Spettro di singola particella piatto in frequenza

$$\frac{dI(\omega)}{dt} \approx \left( \frac{e^6 Z^2 N}{12\pi^3 \epsilon_0^3 c^4 m_e^2} \right)$$

■ Fino a  $\omega_{\max} = E_{e^-}$

$$k_\omega \equiv \frac{dE(\omega)}{d\omega dt dV} = \int \frac{dI(\omega)}{dt} dn \quad \text{■ Dato che solo } e^- \text{ con } E > \hbar\omega \text{ contribuiscono all'emissione}$$

$$k(\omega) = \frac{aB}{(p-1)} (\hbar\omega)^{-p+1}$$

$$N_\gamma(\omega) = \frac{k}{\hbar\omega} = \frac{aB}{\hbar(p-1)} (\hbar\omega)^{-p}$$

■ I fotoni emessi hanno lo stesso indice spettrale delle particelle che emettono

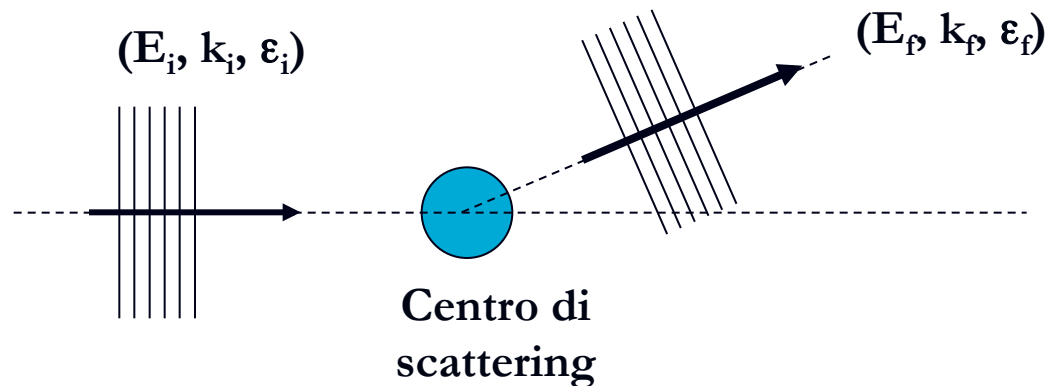
# Diffusione Thomson/Compton

In astrofisica non e' tanto interessante l'effetto Compton quanto piuttosto il cosiddetto Compton inverso in cui l'elettrone perde energia a favore del campo di fotoni che vengono energizzati

- Tratteremo in dettaglio il processo nella parte dedicata ai processi di radiazione elettromagnetica
- In termini semplificati, si ha compton inverso quando un elettrone di alta energia urta un fotone di bassa energia: nell'urto l'e- cede energia al fotone in un urto relativistico inelastico
- Nel singolo urto l'energia max che un elettrone puo' cedere e' t.c.  $\epsilon_{\text{fotone dopo}}^{\text{fotone}} / \epsilon_{\text{fotone prima}}^{\text{fotone}} = 4\gamma^2$

# Scattering di radiazione elm

Ogni volta che un'onda elm interagisce con una particella carica, le sue proprietà (direzione, energia, polarizzazione,...) vengono alterate, insieme a quelle della particella colpita.



# Diffusione di fotoni

Tradizionalmente si parla di diffusione Thomson e Compton a seconda dell'intervallo di energie in gioco:

Quando  $(h/2\pi)\omega \ll mc^2$  si parla di diffusione Thomson,  
mentre quando  $(h/2\pi)\omega \gg mc^2$  si parla di diffusione Compton.

Tuttavia da un punto di vista fisico non c'è alcuna differenza poiché il processo è esattamente lo stesso.

Quello che cambia è l'approccio: classico per Thomson, quantistico per Compton

# Diffusione Thomson

Il problema e' seguente: data un'onda elm incidente su un elettrone, bisogna trovare l'intensita' della radiazione diffusa dalla particella.

Quando  $\hbar\omega \ll mc^2$  si puo' usare il formalismo semi-classico

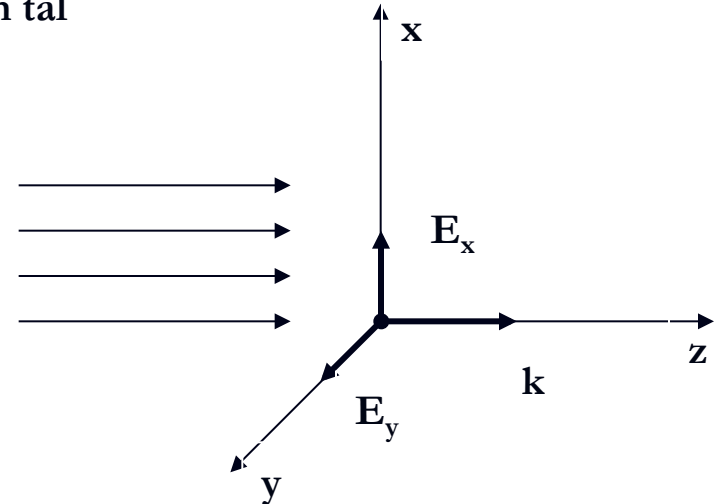
Supponiamo che l'onda viaggi lungo la direzione positiva di  $z$  e che l'e- atomico sia posto in quiete nell'origine. In tal caso

$$E = \hbar\omega \quad \vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{u}_z \quad \vec{p} = \frac{\hbar\omega}{c}\vec{u}_z = \hbar\vec{k}$$

Supponiamo anche l'onda non sia polarizzata → il campo oscilla nel piano x-y

$$E_x = E_{ox}e^{i(kz-\omega t)}$$

$$E_y = E_{oy}e^{i(kz-\omega t)}$$



Con  $E_{xo} = E_{yo}$  dato che l'onda non e' polarizzata (in realta' dovrei aggiungere una fase arbitraria)



# Diffusione Thomson

$$E_x = E_{ox} e^{i(kz - \omega t)}$$

Per semplificare la matematica, scegliamo la geometria dello scattering in modo tale che l'angolo di scattering  $\alpha$  giaccia nel piano x-z

$$E_y = E_{oy} e^{i(kz - \omega t)}$$

La potenza emessa e' quella di Larmor nel limite non relativistico

Le componenti dell'accelerazione sono

$$a_x = \frac{e}{m} E_x \quad a_y = \frac{e}{m} E_y$$

I campi di radiazione e la potenza emessa sono

$$\vec{E}_a = \frac{e}{c} \left[ \frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta})}{R} \right]$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \vec{S} \cdot \vec{n} R^2 = \frac{cE^2}{4\pi} R^2$$

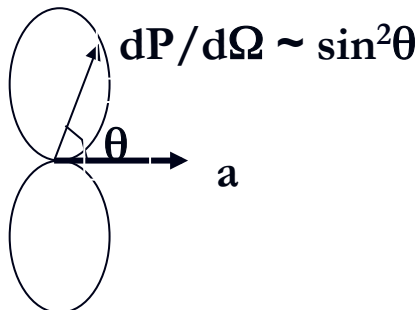
$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} |\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta})|^2$$

$$\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta}) = \vec{n} \cdot \vec{\beta} - \vec{\beta}$$

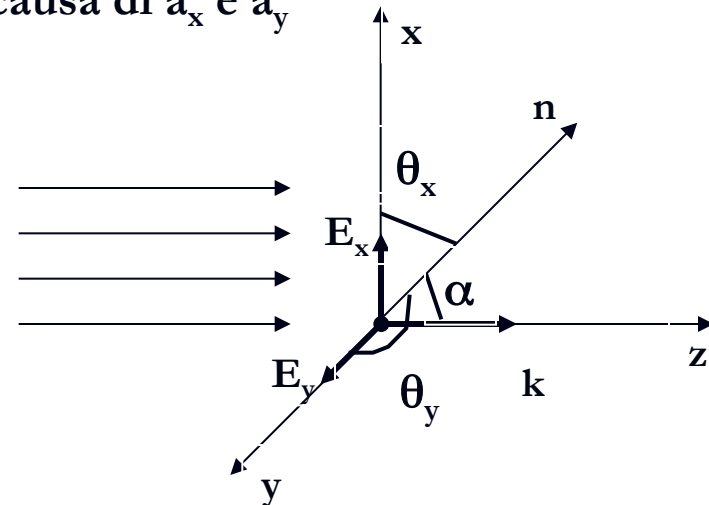
$$|\vec{\beta}_{\perp n}| = \beta \sin \theta$$

La potenza totale e' la somma delle potenza emessa a causa di  $a_x$  e  $a_y$

$$\frac{dP_i}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \dot{\beta}_i^2 \sin^2 \theta = \frac{e^2}{4\pi c^3} a_i^2 \sin^2 \theta_i \quad i=x, y$$



$$\frac{dP_{tot}}{d\Omega} = \frac{dP_x}{d\Omega} + \frac{dP_y}{d\Omega}$$



# Diffusione Thomson

L'elettrone e' nell'origine →

$$E_x(0, t) = E_{ox} e^{-i\omega t}$$

$$a_x = \frac{e}{m} E_x$$

$$E_y(0, t) = E_{oy} e^{-i\omega t}$$

$$a_y = \frac{e}{m} E_y$$

Per cui  $\frac{dP_i}{d\Omega} = \frac{e^4}{4\pi c^3} \frac{E_i^2(0, t)}{m^2} \sin^2 \theta_i \quad i=x, y$

Usualmente si calcola la potenza media in un periodo →  $\langle E_i^2(0, t) \rangle_T = E_{oi}^2/2$

$$\langle \frac{dP_i}{d\Omega} \rangle = \frac{e^4}{4\pi m^2 c^3} \frac{E_{oi}^2}{2} \sin^2 \theta_i$$

L'intensita' incidente lungo le 2 dir coordinate e' data dai risp. vettori di Poynting  $S_i$

$$\langle S_i \rangle = \frac{c}{4\pi} \frac{E_{oi}^2}{2}$$

$$\langle \frac{dP_i}{d\Omega} \rangle = \frac{e^4}{m^2 c^4} \langle S_i \rangle \sin^2 \theta_i$$

Abbiamo espresso la potenza emessa in funzione dell'intensita' incidente  $S_i$

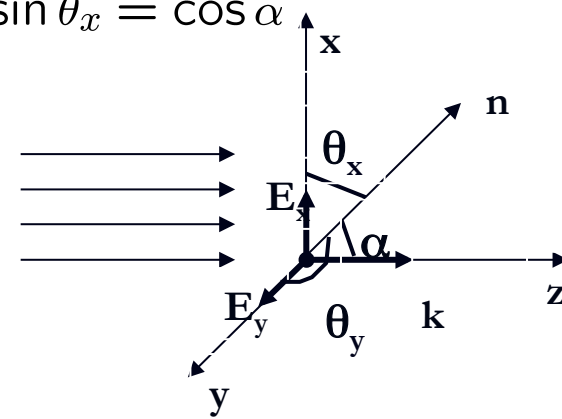
$\theta$  e' l'angolo con a, ma noi vogliamo esprimere la potenza emessa rispetto alla direzione di propagazione della radiazione incidente →

$$\sin \theta_x = \cos \alpha$$

Con la scelta degli assi fatta  $\theta_y = \pi/2$  →

$$\langle \frac{dP_y}{d\Omega} \rangle = \frac{e^4}{m^2 c^4} \langle S_y \rangle$$

$$\langle \frac{dP_x}{d\Omega} \rangle = \frac{e^4}{m^2 c^4} \langle S_x \rangle \cos^2 \alpha$$



# Diffusione Thomson

Come si e' visto prima 
$$\frac{dP_{tot}}{d\Omega} = \frac{dP_x}{d\Omega} + \frac{dP_y}{d\Omega} = \frac{e^4}{m^2 c^4} (\langle S_y \rangle + \langle S_x \rangle \cos^2 \alpha)$$

Il raggio classico dell'elettrone e' 
$$r_e = \frac{e^2}{mc^2} \rightarrow \frac{dP_{tot}}{d\Omega} = r_e^2 (\langle S_y \rangle + \langle S_x \rangle \cos^2 \alpha)$$

Dato che  $|\mathbf{E}_x| = |\mathbf{E}_y|$ ,  $S_x = S_y$  (l'onda incidente non e' polarizzata),  $\mathbf{E}_{tot} = \mathbf{E}_x + \mathbf{E}_y$  e  $\vec{S} = \vec{S}_y + \vec{S}_x$

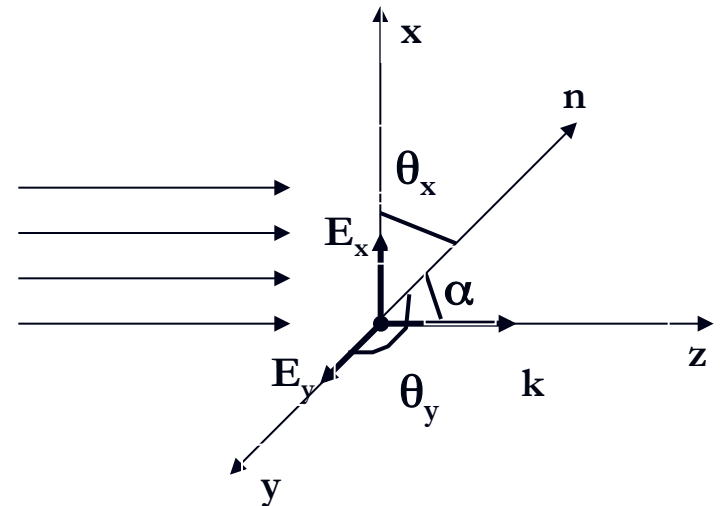
$$\rightarrow \langle S \rangle = \langle S_y \rangle + \langle S_x \rangle$$

$$\rightarrow \langle S \rangle / 2 = \langle S_i \rangle$$

quindi 
$$\frac{dP_{tot}}{d\Omega} = r_e^2 (1 + \cos^2 \alpha) \frac{\langle S \rangle}{2}$$

$$\frac{dP_{tot}}{d\Omega} = \frac{d}{d\Omega} \left( \frac{dE}{dt} \right)$$

= energia per unita' di tempo e di angolo solido



# Diffusione Thomson

Per definizione la sezione d'urto differenziale e'

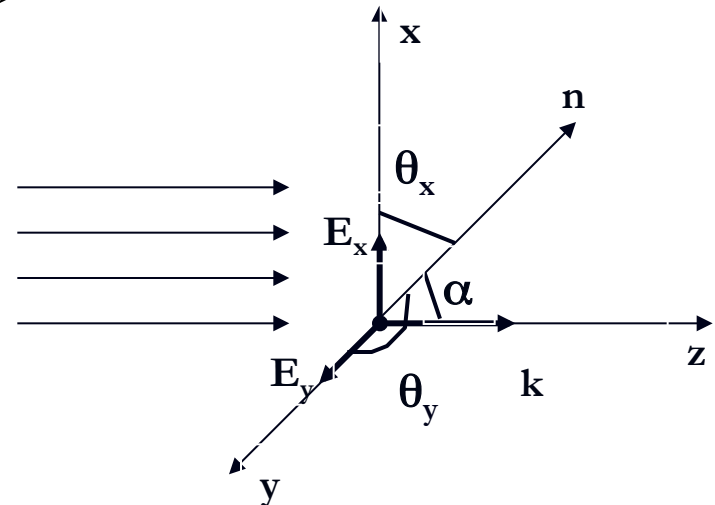
$$d\sigma = \frac{\text{energia per unita' di tempo nell'angolo solido } d\Omega}{\text{energia per unita' di tempo e superficie}}$$

Cioe' 
$$d\sigma = \frac{\frac{d}{d\Omega} \left( \frac{dE}{dt} \right) d\Omega}{I_{inc}} \quad r_e = \frac{e^2}{mc^2}$$

Ma I e' S  $\rightarrow d\sigma = r_e^2 (1 + \cos^2 \alpha) \frac{\langle S \rangle}{2 \langle S \rangle} d\Omega$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_e^2 (1 + \cos^2 \alpha)$$

E' la sezione d'urto differenziale per la diffusione di Thomson di onde non polarizzate



# Diffusione Thomson

La sezione d'urto totale si ottiene integrando sull'angolo solido

$$\begin{aligned}\sigma_T &= \int_{4\pi} \frac{1}{2} r_e^2 (1 + \cos^2 \alpha) d\Omega = -\frac{1}{2} r_e^2 \int_1^{-1} (1 + \cos^2 \alpha) 2\pi d(\cos \alpha) \\ &= -\pi r_e^2 (x + x^3/3) \Big|_{+1}^{-1} = \frac{8}{3} \pi r_e^2\end{aligned}$$

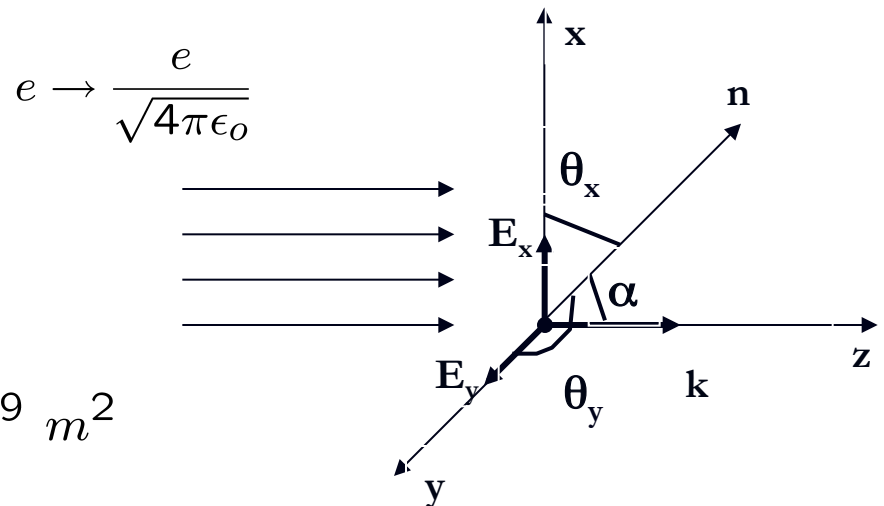
Sostituendo  $r_e = \frac{e^2}{mc^2}$  si ha  $\sigma_T = \frac{8}{3} \pi \frac{e^4}{m^2 c^4}$

Per passare al sistema MKSA

$$\sigma_T = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0^2 m^2 c^4}$$

Numericamente  $\sigma_T = 6.653 \times 10^{-29} \text{ m}^2$   
 $= 0.6653 \text{ barn}$

$$1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2$$

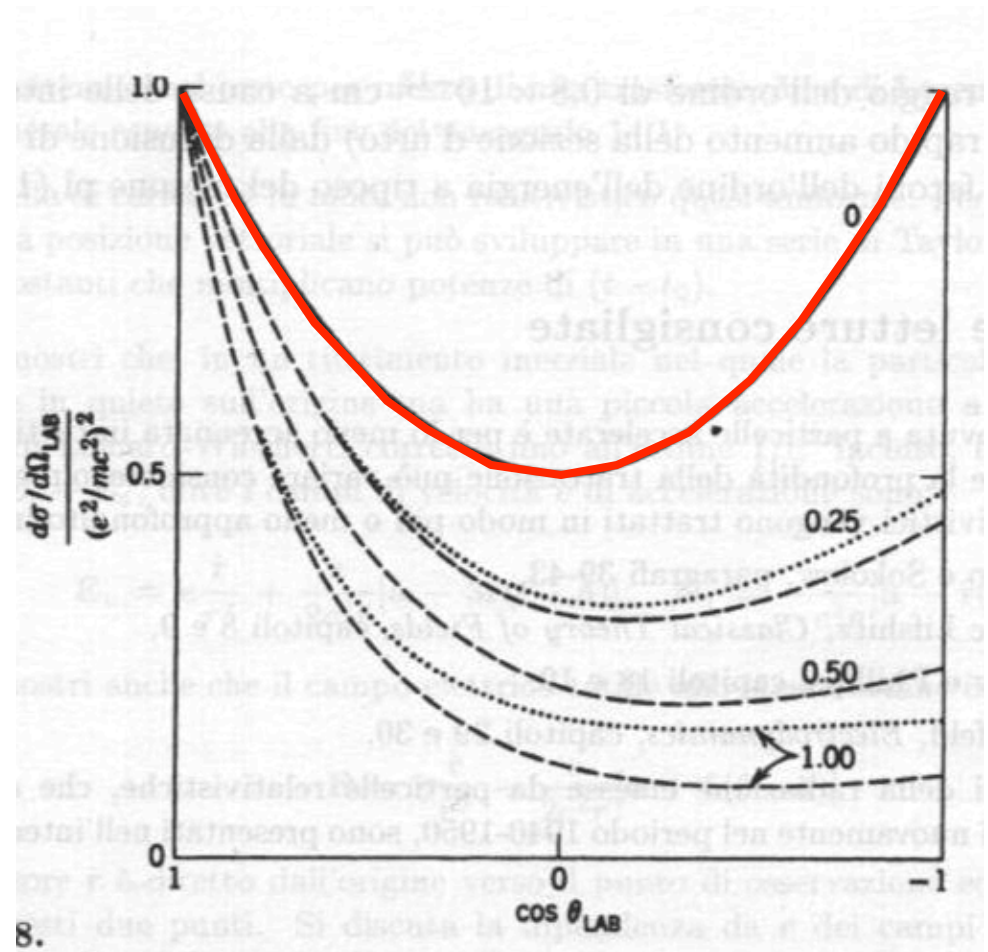
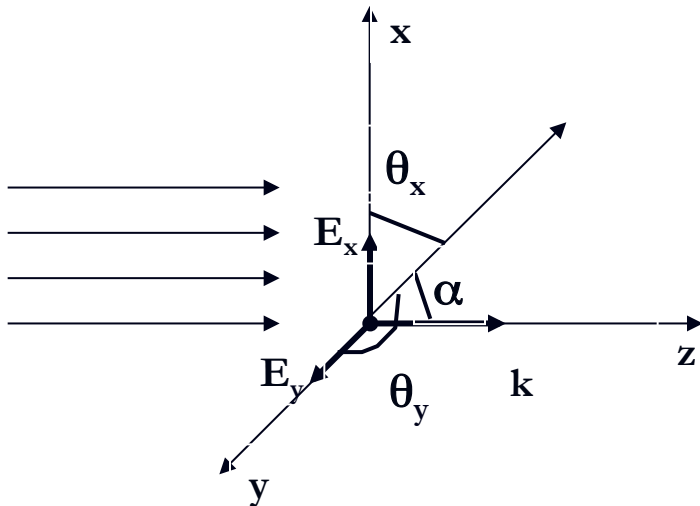


# Diffusione Thomson

- La sezione d'urto Thomson compare in tutti i processi di radiazione

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2}r_e^2(1 + \cos^2 \alpha) \quad \sigma_T = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0^2 m^2 c^4} = \frac{8\pi}{3}r_e^2 = 0.6653 \text{ barn} \quad \blacksquare 1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2$$

L'emissione e' simmetrica rispetto alla direzione di incidenza dato che  $d\sigma/d\Omega \approx \cos^2 \alpha$  e la frequenza della radiazione emessa e' la stessa di quella incidente, dato che  $a \approx E$



# Diffusione Thomson

■ La potenza totale emessa può essere espressa in termini della densità di energia elettromagnetica incidente

■ Integrando la distribuzione angolare di potenza trovata prima si ha la potenza totale

$$\frac{dP_{tot}}{d\Omega} = r_e^2 (1 + \cos^2 \alpha) \frac{\langle S \rangle}{2}$$

$$\frac{dE_{tot}}{dt} = \int_{4\pi} \frac{dP_{tot}}{d\Omega} d\Omega$$

$$\frac{dE_{tot}}{dt} = 2\pi r_e^2 \frac{\langle S \rangle}{2} \int (1 + \cos^2 \alpha) d(\cos \alpha) = 2\pi r_e^2 \frac{\langle S \rangle}{2} \frac{8}{3} = \sigma_T \langle S \rangle$$

■ con  $S = \frac{c}{4\pi} E^2$        $u_{rad} = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) = \frac{1}{4\pi} E^2$       ■ Perché' E=B

■ quindi  $S = cu_{rad}$

$$\frac{dE_{tot}}{dt} = \sigma_T cu_{rad}$$

# Diffusione Thomson: spessore ottico

Dal punto di vista di un fascio di radiazione che attraversa un mezzo con un plasma di elettroni si ha attenuazione dell'intensita' poiche' ciascun elettrone si comporta come un re-radiatore che diffonde la radiazione in tutte le direzioni senza che vi sia trasferimento di energia dalla radiazione alle particelle

Dal punto di vista dei fotoni, essi urtano elasticamente gli elettroni e vengono deviati casualmente come "normali" particelle prive di massa di riposo e seguono quindi un random walk

Dalla definizione di sezione d'urto, il # di fotoni rimossi,  $n$ , (i.e. diffusi) da un fascio di densita'  $N$  incidente su un singolo elettrone  $e$

$$dn = -N\sigma_T c dt$$

Cosi' nel caso di un plasma con densita'  $N_e$  si ha un rate di interazione per unita' di volume

$$dN = -N_e N \sigma_T c dt \quad \longrightarrow \quad dN/dt = -N_e N \sigma_T c$$



# Diffusione Thomson: spessore ottico

$$dN/dt = -N_e N \sigma_T c \quad dN/N = -N_e \sigma_T c dt \quad dN/N = -N_e \sigma_T ds \quad ds = c dt$$

$$\text{Per cui } N(s) = N_o e^{-\int N_e \sigma_T ds}$$

$$\text{Dalla definizione di spessore ottico} \quad \tau = \int N_e \sigma_T ds \quad \text{si ha} \quad N(s) = N_o e^{-\tau}$$

Si puo' definire anche un coeff di scattering  $\chi_s = N_e \sigma_T$

L'attenuazione del fascio dipende dallo spessore ottico Thomson del plasma

Il libero cammino medio  $\lambda_T$  tra due interazioni di un fotone e'  $\lambda_T = 1/N_e \sigma_T$

la probabilita' di interazione di un fotone e' proporzionale a  $dp \propto ds/\lambda_T$

$$\text{ma} \quad d\tau = ds/\lambda_T \quad \longrightarrow \quad dp \propto d\tau$$

Ad ogni interazione il fotone viene diffuso. Se  $N_e$  e' suff. alto ovvero  $\tau$  grande, i fotoni seguono un random walk nel mezzo

La diffusione Thomson e' responsabile dell'opacita' dell'interno delle stelle (e causa p.es. del fatto che un fotone prodotto nel nucleo del sole impiega circa  $10^5$  anni prima di raggiungere la fotosfera ed essere irraggiato nello spazio)

# Compton inverso

Tradizionalmente si parla di diffusione Thomson e Compton a seconda dell'intervallo di energie in gioco:

quando  $\hbar\omega/2\pi \ll mc^2$  si parla di diffusione Thomson,  
mentre quando  $\hbar\omega/2\pi \gg mc^2$  si parla di diffusione Compton.

Tuttavia da un punto di vista fisico non c'è alcuna differenza poiché il processo è esattamente lo stesso.

Quello che cambia è l'approccio: classico per Thomson, quantistico per Compton

# Diffusione Thomson/Compton

La sezione d'urto Thomson descrive bene la diffusione della radiazione nel laboratorio in cui l'e- e' stazionario finche' l'energia del fotone e'  $h\omega \ll mc^2$

Piu' in generale  $\sigma_T$  descrive bene la diffusione della radiazione finche' l'energia del fotone e'  $h\omega \ll mc^2$  nel sistema di riferimento di quiete dell'elettrone

Quando questa condizione non e' piu' verificata, il formalismo classico non si puo' piu' usare poiche' c'e' trasferimento di energia fra fotone e particella carica, l'aspetto corpuscolare del fotone diventa importante e si parla di effetto Compton

# Diffusione Compton: Klein-Nishina

Nel caso in cui l'energia del fotone  $e'$  dell'ordine dell'energia di riposo dell'e- la sezione d'urto Thomson non vale piu', ma occorre usare la QED



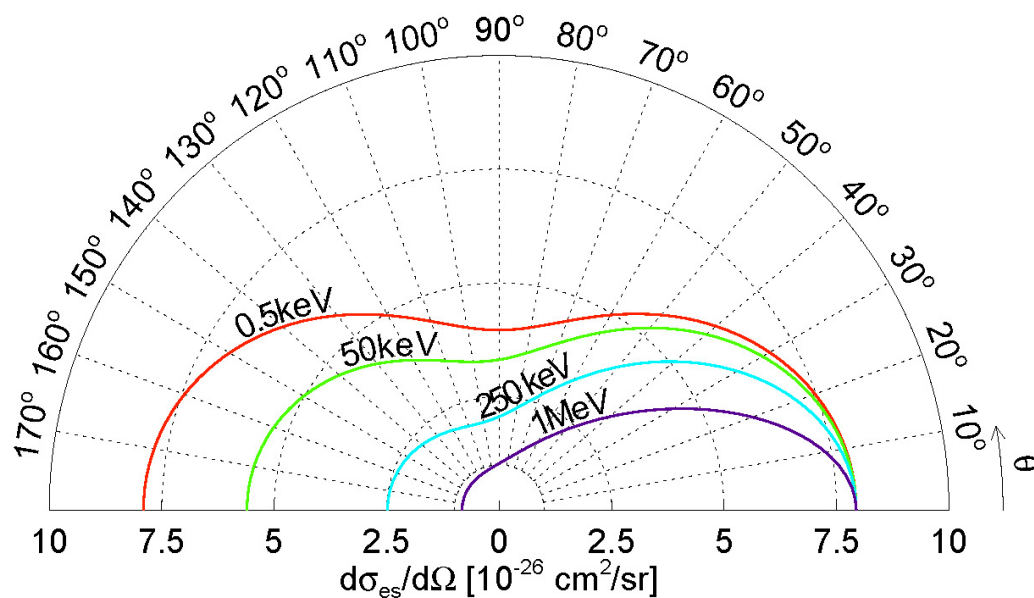
Per fotoni non polarizzati incidenti su e- stazionari la sezione d'urto differenziale e':

$$\frac{d\sigma_{KN}}{d\Omega} = \frac{3}{16\pi} \sigma_T \left(\frac{E'}{E}\right)^2 \left(\frac{E'}{E} + \frac{E}{E'} - \sin^2 \alpha\right)$$

Con la condizione che

$$E' = \frac{E}{\left[\frac{E}{mc^2}(1 - \cos \alpha) + 1\right]}$$

Per la conservazione del 4-impulso



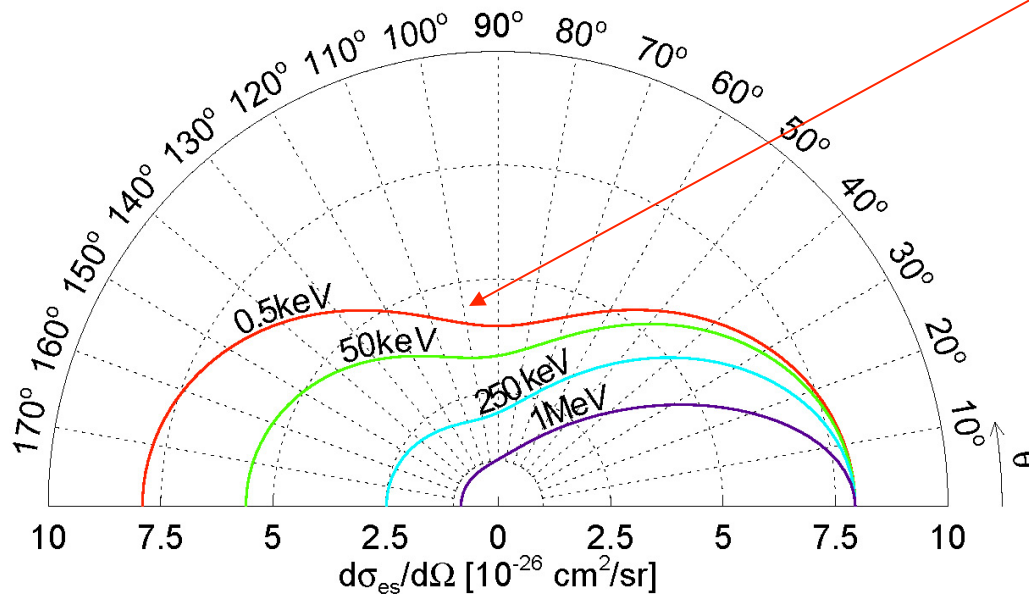
La distribuzione angolare viene piccata in avanti al crescere dell'energia del fotone incidente

# Diffusione Compton: Klein-Nishina

■ La sezione d'urto di KN si riduce a quella thomson quando  $E' \rightarrow E$ , cioè quando  $E \ll mc^2$

$$\frac{d\sigma_{KN}}{d\Omega} = \frac{1}{2}r_e^2\left(\frac{E'}{E}\right)^2\left(\frac{E'}{E} + \frac{E}{E'} - \sin^2\alpha\right) \quad \rightarrow \quad \frac{d\sigma_{KN}}{d\Omega} = \frac{1}{2}r_e^2(1 + 1 - \sin^2\alpha)$$

$$= \frac{1}{2}r_e^2(1 + \cos^2\alpha)$$



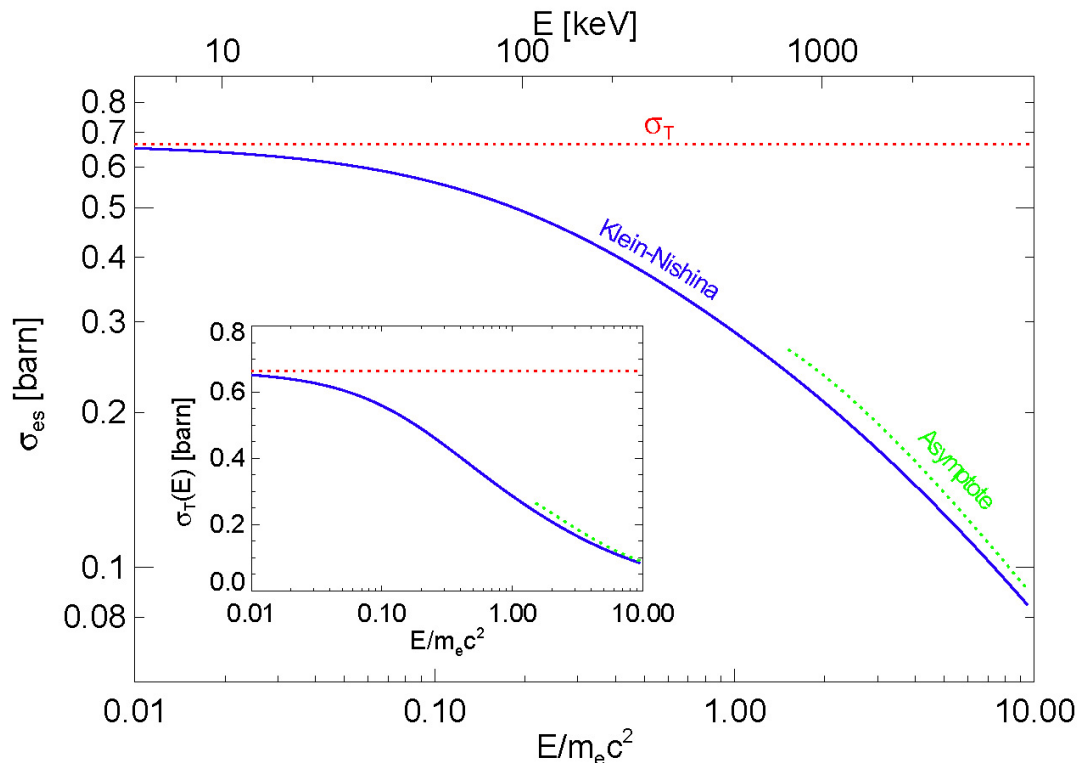
# Diffusione Compton: Klein-Nishina

■ La sezione d'urto totale si ottiene integrando sull'angolo solido  $d\Omega$ , tenendo conto della condizione

$$E' = \frac{E}{[\frac{E}{mc^2}(1 - \cos \alpha) + 1]}$$

$$\sigma_{KN} = \int_{4\pi} \frac{1}{2} r_e^2 \left(\frac{E'}{E}\right)^2 \left(\frac{E'}{E} + \frac{E}{E'} - \sin^2 \alpha\right) \delta\left(E' - \frac{E}{[\frac{E}{mc^2}(1 - \cos \alpha) + 1]}\right) d\Omega$$

$$\sigma_{KN} = \frac{3}{4} \sigma_T \left\{ \frac{1+x}{x^3} \left[ \frac{2x(1+x)}{1+2x} - \ln(1+2x) \right] + \frac{1}{2x} \ln(1+2x) - \frac{1+3x}{(1+2x)^2} \right\} \quad \blacksquare X = h\nu/mc^2$$



# Diffusione Compton: Klein-Nishina

$$\sigma_{KN} = \frac{3}{4}\sigma_T \left\{ \frac{1+x}{x^3} \left[ \frac{2x(1+x)}{1+2x} - \ln(1+2x) \right] + \frac{1}{2x} \ln(1+2x) - \frac{1+3x}{(1+2x)^2} \right\}$$

$$E' = \frac{E}{\left[ \frac{E}{mc^2} (1 - \cos \alpha) + 1 \right]}$$

I valori asintotici sono

Limite non relativistico per  $x \ll 1$

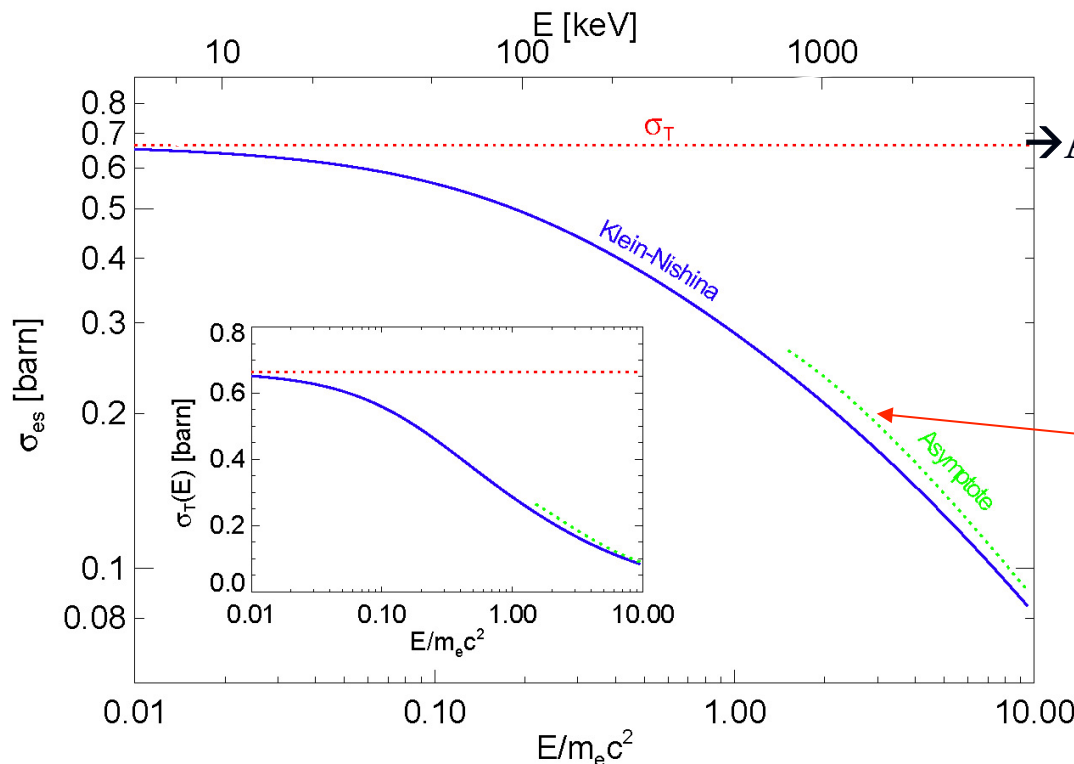
$$\sigma_{KN} \approx \sigma_T \left( 1 - 2x + \frac{26x^2}{5} \right)$$

→ A basse energie si ha scattering Thomson

Limite ultra -relativistico per  $x \gg 1$

$$\sigma_{KN} \approx \frac{3}{8}\sigma_T \frac{1}{x} \left( \frac{1}{2} + \ln 2x \right)$$

Ad alte energie la sezione d'urto  $\rightarrow 0$ ,  
quindi gli elettroni diventano centri di  
scattering meno efficienti per fotoni di  
alta energia



# Diffusione Compton: cinematica

Tralasciando per ora la dinamica del processo, i.e. la probabilita' che avvenga, dal punto di vista semi-classico, la cinematica dell'interazione fra un fotone ed un elettrone puo' essere descritta come l'urto relativistico fra due particelle materiali

E' sufficiente quindi considerare la conservazione del 4-impulso

$$P + K = P' + K' \quad (\text{a})$$

$$P_\mu = (m\gamma c^2/c, m\gamma \vec{v}) \quad P'_\mu = (m\gamma' c^2/c, m\gamma' \vec{v}')$$

Devo risolvere rispetto a  $K'$

$$K_\mu = (\hbar\omega/c, (\hbar\omega/c)\vec{i}_k) \quad K'_\mu = (\hbar\omega'/c, (\hbar\omega'/c)\vec{i}_{k'})$$

Elevando al quadrato  $(P + K)^2 = (P' + K')^2 \Rightarrow P^2 + K^2 + 2K \cdot P = P'^2 + K'^2 + 2K' \cdot P'$

$$\text{Ma } P^2 = P'^2 = m^2 c^2 \quad K^2 = K'^2 = 0 \Rightarrow K \cdot P = K' \cdot P' \quad (\text{b})$$

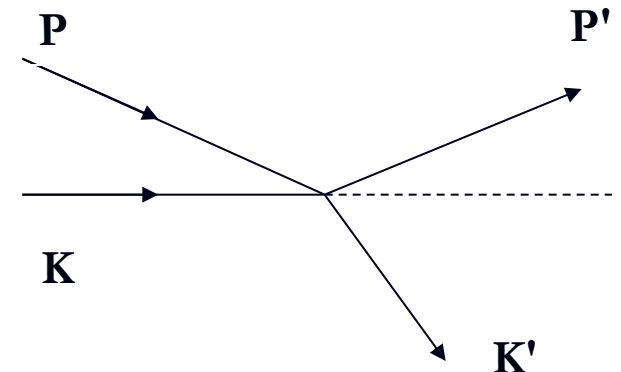
Moltiplico (a) scalarmente per  $K'$

$$K' \cdot (P + K) = K' \cdot (P' + K')$$

$$K' \cdot P + K' \cdot K = K' \cdot P' + K' \cdot K'$$

$$K' \cdot P + K' \cdot K = K' \cdot P' \quad \text{Perche' } K'^2=0$$

$$K' \cdot P + K' \cdot K = K \cdot P \quad \text{Da (b)}$$





# Diffusione Compton: cinematica

$$K' \cdot P + K' \cdot K = K \cdot P \quad \text{Sviluppiamo il 4-prodotto scalare}$$

$$K \cdot K' = \frac{\hbar\omega}{c} \cdot \frac{\hbar\omega'}{c} - \frac{\hbar\omega}{c} \cdot \frac{\hbar\omega'}{c} \vec{i}_k \cdot \vec{i}_k = \frac{\hbar^2}{c^2} \omega\omega' (1 - \vec{i}_k \cdot \vec{i}_k) = \frac{\hbar^2}{c^2} \omega\omega' (1 - \cos \alpha)$$

$$K' \cdot P = \frac{\hbar\omega'}{c} \cdot mc\gamma - \hbar\omega' \gamma m \vec{i}_k \cdot \frac{\vec{v}}{c} = m\gamma \hbar\omega' (1 - \frac{v}{c} \cos \theta')$$

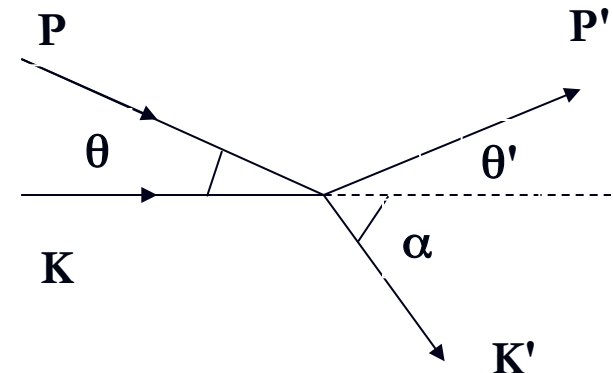
$$K \cdot P = \frac{\hbar\omega}{c} \cdot mc\gamma - \hbar\omega \gamma m \vec{i}_k \cdot \frac{\vec{v}}{c} = m\gamma \hbar\omega (1 - \frac{v}{c} \cos \theta)$$

$$\frac{\hbar^2}{c^2} \omega\omega' (1 - \cos \alpha) + m\gamma \hbar\omega' (1 - \frac{v}{c} \cos \theta') = m\gamma \hbar\omega (1 - \frac{v}{c} \cos \theta)$$

**Divido per  $m\gamma$**

$$\frac{\hbar}{c^2} \frac{\omega\omega'}{m\gamma} (1 - \cos \alpha) + \omega' (1 - \frac{v}{c} \cos \theta') = \omega (1 - \frac{v}{c} \cos \theta)$$

$$\omega' \left[ \frac{\hbar}{c^2} \frac{\omega}{m\gamma} (1 - \cos \alpha) + (1 - \frac{v}{c} \cos \theta') \right] = \omega (1 - \frac{v}{c} \cos \theta)$$



# Diffusione Compton

$$\omega' \left[ \frac{\hbar}{c^2 m \gamma} \omega (1 - \cos \alpha) + \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta'\right) \right] = \omega \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)$$

$$\omega' = \frac{\omega \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)}{\left[ \frac{\hbar}{c^2 m \gamma} \omega (1 - \cos \alpha) + \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta'\right) \right]} \quad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)}{\left[ \frac{\hbar}{c^2 m \gamma} \omega (1 - \cos \alpha) + \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta'\right) \right]}$$

**E' il rapporto delle frequenze prima e dopo l'urto**

**Usualmente si considera  $v=0$  per l'e-**

**In termini di  $\lambda$  si ha**

$$\frac{2\pi c}{\lambda} = \omega$$



$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\lambda}{\lambda'}$$

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{2\pi c}{\lambda} \frac{\hbar}{mc^2} (1 - \cos \alpha) + 1$$

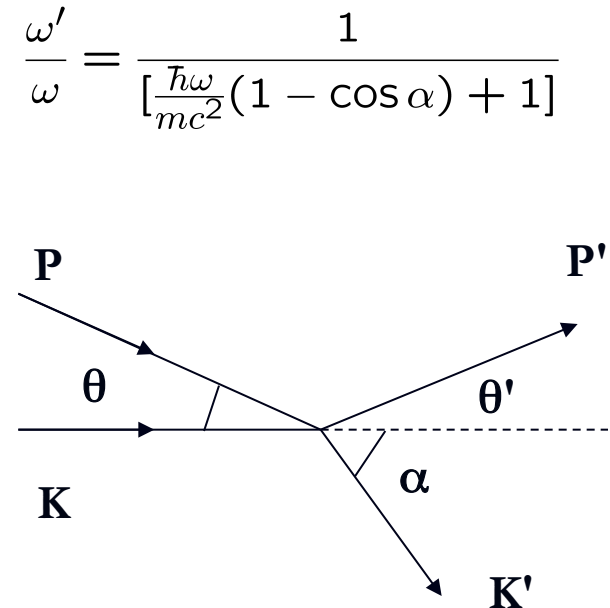
$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{h}{mc\lambda} (1 - \cos \alpha) + 1 = \frac{\lambda_c}{\lambda} (1 - \cos \alpha) + 1$$

$$\lambda_c = \frac{h}{mc} = 3.86 \times 10^{-13} \text{ m}$$

**Lunghezza d'onda Compton**

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{\lambda'}{\lambda} - 1 = \frac{\lambda_c}{\lambda} (1 - \cos \alpha)$$

**La variazione assoluta di lunghezza d'onda e' al max  $2\lambda_c \rightarrow$  se  $\lambda \gg \lambda_c$ , lo scattering e' elastico**



# Diffusione Compton

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{\left[\frac{\hbar\omega}{mc^2}(1 - \cos \alpha) + 1\right]}$$

Nel caso di elettrone stazionario l'energia del fotone dopo l'urto e' sempre minore di quella iniziale dato che il denominatore e' sempre >1

In questo caso, la radiazione cede energia all'elettrone che rincula, acquistandone

cosi' la radiazione si "raffredda" e l'elettrone si "scalda"

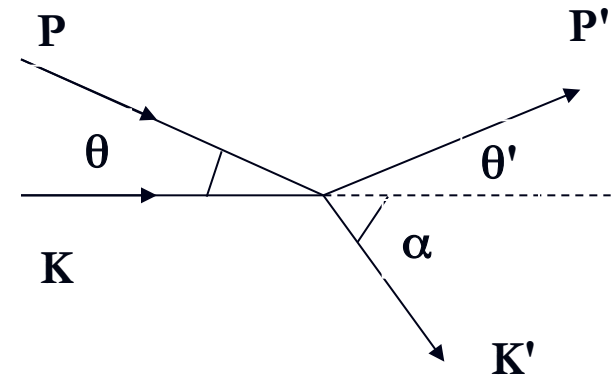
La situazione cambia se l'elettrone **NON** e' stazionario

$$\begin{aligned} \frac{\omega' - \omega}{\omega} &= \frac{\omega'}{\omega} - 1 = \frac{(1 - \frac{v}{c} \cos \theta)}{\left[\frac{\hbar}{c^2} \frac{\omega}{m\gamma}(1 - \cos \alpha) + (1 - \frac{v}{c} \cos \theta')\right]} - 1 \\ &= \frac{(1 - \frac{v}{c} \cos \theta) - \left[\frac{\hbar}{c^2} \frac{\omega}{m\gamma}(1 - \cos \alpha) + 1 - \frac{v}{c} \cos \theta'\right]}{\left[\frac{\hbar}{c^2} \frac{\omega}{m\gamma}(1 - \cos \alpha) + (1 - \frac{v}{c} \cos \theta')\right]} = \frac{-\frac{v}{c} \cos \theta - \frac{\hbar}{c^2} \frac{\omega}{m\gamma}(1 - \cos \alpha) + \frac{v}{c} \cos \theta'}{\left[\frac{\hbar}{c^2} \frac{\omega}{m\gamma}(1 - \cos \alpha) + (1 - \frac{v}{c} \cos \theta')\right]} \\ &= \frac{\frac{v}{c}(-\cos \theta + \cos \theta') - \frac{\hbar}{c^2} \frac{\omega}{m\gamma}(1 - \cos \alpha)}{\left[\frac{\hbar}{c^2} \frac{\omega}{m\gamma}(1 - \cos \alpha) + (1 - \frac{v}{c} \cos \theta')\right]} \end{aligned}$$

# Diffusione Compton

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\frac{v}{c}(-\cos\theta + \cos\theta') - \frac{\hbar}{c^2 m \gamma} \omega (1 - \cos\alpha)}{[\frac{\hbar}{c^2 m \gamma} \omega (1 - \cos\alpha) + (1 - \frac{v}{c} \cos\theta')]}$$

Se  $\hbar\omega/2\pi \ll mc^2\gamma$   $\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx \frac{v}{c} \frac{(-\cos\theta + \cos\theta')}{(1 - \frac{v}{c} \cos\theta')}$



La variazione relativa di frequenza del fotone in un singolo urto e' del primo ordine in  $v/c$

D'altra parte, se gli angoli di scattering  $\theta$  e  $\theta'$  sono distribuiti casualmente, la variazione media di frequenza e' zero poiche' il fotone ha la stessa probabilita' di avere  $\Delta\omega > 0$  o  $\Delta\omega < 0$ , come accade nel caso di una popolazione di elettroni in un plasma

$$\left\langle \frac{\Delta\omega}{\omega} \right\rangle_{\theta, \theta'} = 0$$

Per avere un guadagno netto di energia da parte del fotone in un plasma di elettroni occorre andare al secondo ordine in  $v/c$  (come nel caso del Compton inverso che vedremo tra poco)

# Compton Inverso

Nel sistema di quiete dell'elettrone

$$E' = \frac{E}{[\frac{E}{mc^2}(1 - \cos \alpha) + 1]} \qquad \frac{\Delta E}{E} = \frac{-\frac{E}{mc^2}(1 - \cos \alpha)}{[\frac{E}{mc^2}(1 - \cos \alpha) + 1]}$$

$$\text{Se } E \ll mc^2 \qquad \frac{\Delta E}{E} \approx -\frac{E}{mc^2}(1 - \cos \alpha)$$

$$\text{Mediando sugli angoli del fotone} \qquad \langle \frac{\Delta E}{E} \rangle \approx -\frac{E}{mc^2}$$

**Il fotone perde sempre energia urtando e- stazionari**

# Diffusione Compton

Gli effetti quantistici compaiono in due modi:

(a) nella cinematica della diffusione  $\rightarrow$  quando  $h\omega/2\pi \approx mc^2$ , la diffusione non e' piu' elastica a causa del rinculo della carica,  $\omega \neq \omega'$

(b) la sezione d'urto del processo cambia da quella di Thomson, indipendente da  $\omega$  a quella di Klein-Nishina, piu' piccola, che invece e' funzione di  $\omega$

# Diffusione Compton

Il processo di scattering Compton e' descritto dalla QED

Ci chiediamo quando il processo puo' essere  
descritto adeguatamente dalla sezione d'urto  
Thomson

Consideriamo un e- stazionario

Il processo di diffusione di Thomson e' elastico:  $\omega' = \omega$

La natura quantistica del fotone entra in gioco quando  
$$\hbar\omega/2\pi \approx mc^2$$

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{\left[\frac{\hbar\omega}{mc^2}(1 - \cos\alpha) + 1\right]} \neq 1$$

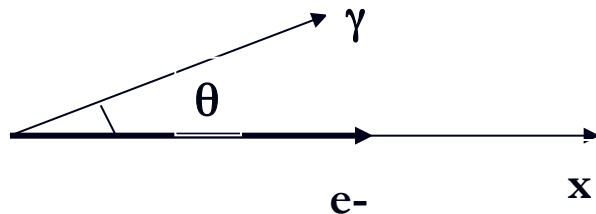
Il processo non e' piu' elastico e non puo' piu' essere descritto dalla  
diffusione Thomson → sezione d'urto dalla QED

# Diffusione Compton

Un caso importante e' quello di fotoni di bassa energia ( $\ll mc^2$ ) che diffondono su elettroni ultra-relativistici con  $\gamma \gg 1$  e  $v \approx c$

Il caso piu' generale di fotone che diffonde su un elettrone in moto, puo' essere ridotto a quello stazionario con una trasformazione di Lorentz nel sistema  $K'$  di quiete dell'e-

L'energia del fotone in  $K'$  e'



$$E'/c = \gamma(E/c - \beta p_x) = \gamma(E/c - \beta p \cos \theta)$$

$$= \gamma(E/c)(1 - \beta \cos \theta)$$

Per una distribuzione isotropa nel labo, il valor medio  $\langle \cos \theta \rangle = 0$

E quindi  $E' \sim \gamma E = \gamma \hbar \omega$

Così se il fotone incidente e' tale che  $\gamma \hbar \omega \ll mc^2$ , possiamo applicare il limite di Thomson alla sezione d'urto in  $K'$ , altrimenti occorre usare la sezione d'urto QED



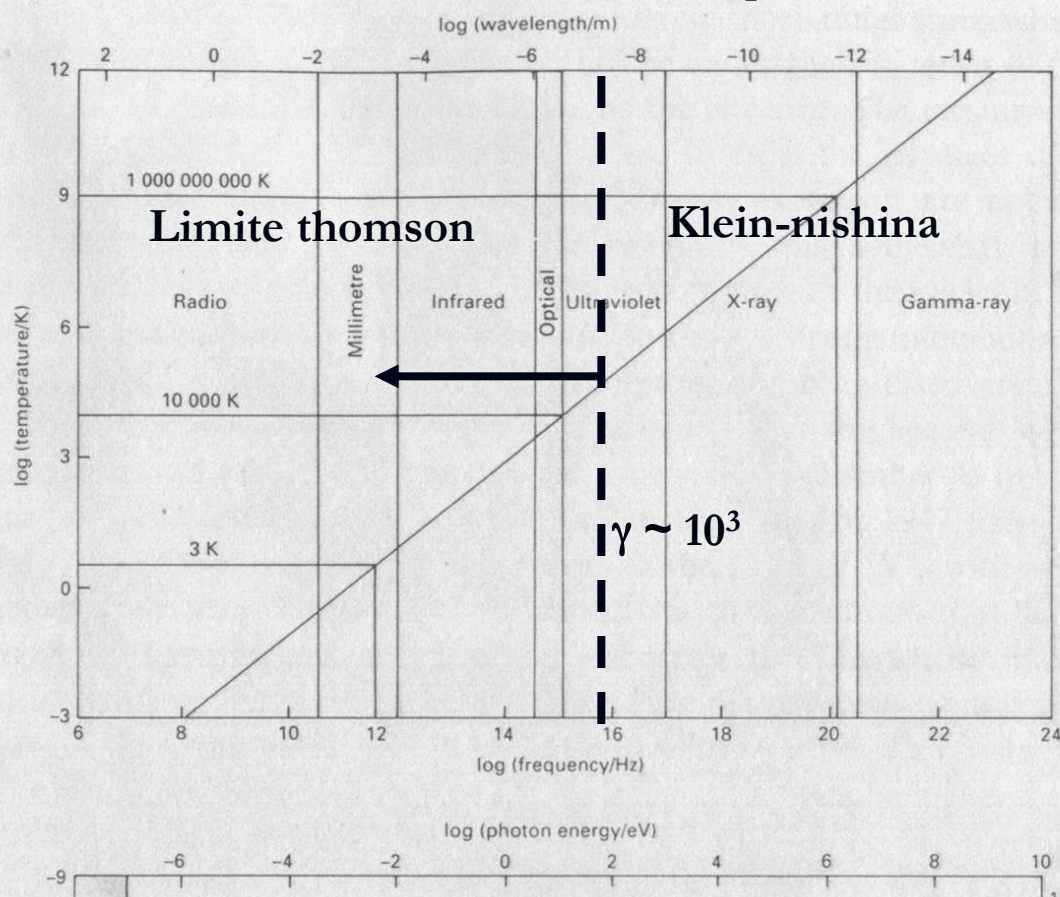
# Compton Inverso: limite di Thomson

In S' il fotone ha energia  $\hbar\omega' \sim \gamma\hbar\omega$

Se  $\gamma\hbar\omega \ll mc^2$  (aa)

In S' la sezione d'urto di Thomson descrive correttamente il processo

A quali fotoni si puo' applicare questa approssimazione?



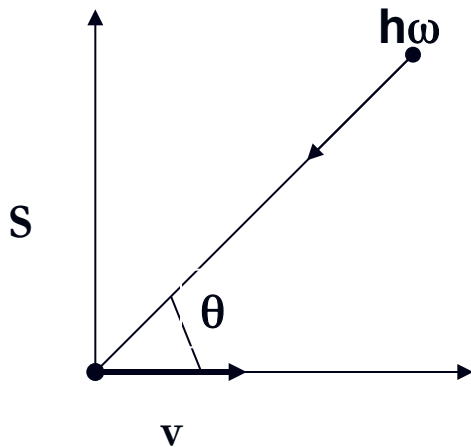
La condizione (aa) e' soddisfatta da fotoni che nel laboratorio hanno energie  $\ll mc^2/\gamma$

P. Es. Elettroni con  $\gamma = 10^3$  la condizione e' soddisfatta da fotoni con  $E < 0.5 \text{ keV}$ , i.e. E' valida per fotoni dall'ottico fino a frequenze radio

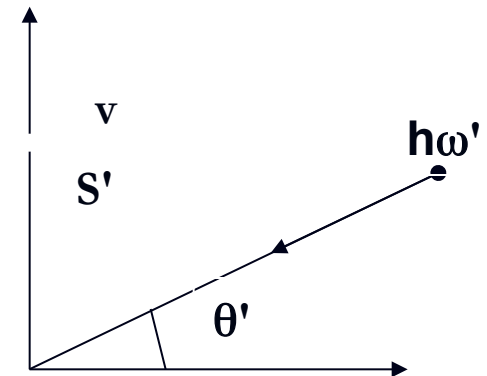
# Compton Inverso: aberrazione e shift doppler

Esaminiamo il caso di fotoni di bassa energia ( $\hbar\omega \ll mc^2$ ) che diffondono su e-ultrarelativistici

Vediamo prima come trasforma la frequenza e l'energia dei fotoni quando si passa dal laboratorio ad un sistema  $S'$  in moto



Se l'angolo di incidenza nel sistema del laboratorio  $S$  è  $\theta$ , in quello di quiete dell'elettrone  $S'$  è  $\theta'$  a causa dell'aberrazione relativistica, e anche l'energia del fotone cambia a causa dello shift doppler



# Aber. e shift doppler: metodo B

Le formule di aberrazione e shift doppler si possono ottenere facilmente anche dalle trasformazioni di Lorentz applicate ai fotoni

$$p'_x = \gamma(p_x - \beta E/c) \quad p'_y = p_y \quad E'/c = \gamma(E/c - \beta p_x)$$

Nel caso dei fotoni la relazione energia impulso e'  $E = cp$  e  $p_x = p \cos \theta$

$$p' \cos \theta' = \gamma(p \cos \theta - \beta p) \quad p' \sin \theta' = p \sin \theta \quad E'/c = \gamma(E/c - \beta(E/c) \cos \theta)$$

$$p' \cos \theta' = \gamma p (\cos \theta - \beta) \quad E' = \gamma E (1 - \beta \cos \theta)$$

Ma per i fotoni  $p'/p = E'/E = \gamma(1 - \beta \cos \theta)$  

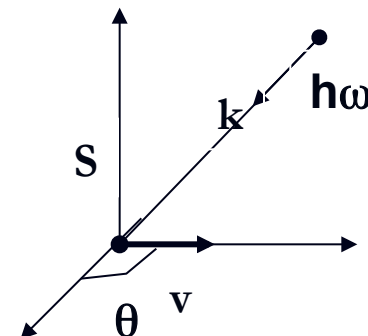
**aberrazione**

$$\cos \theta' = \gamma(p/p')(\cos \theta - \beta) = \frac{(\cos \theta - \beta)}{1 - \beta \cos \theta}$$

$$\sin \theta' = (p/p') \sin \theta = \frac{\sin \theta}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)}$$

**Shift doppler**

$$\omega' = \gamma \omega (1 - \beta \cos \theta)$$



# Aber. e shift doppler: nota

Usualmente quando si parla di effetto Doppler si considera lo shift in frequenza rispetto a quella emessa nel sistema di quiete della carica, per cui occorre usare le inverse, scambiando  $v \rightarrow -v$  e gli apici

## Aberrazione

$$\cos \theta = \frac{(\cos \theta' + \beta)}{1 + \beta \cos \theta'}$$

$$\sin \theta = \frac{\sin \theta'}{\gamma(1 + \beta \cos \theta')}$$

## Shift doppler

$$\omega = \gamma \omega' (1 + \beta \cos \theta')$$

# Compton Inverso

L'energia del fotone in S' e' quindi  $\hbar\omega' = \gamma\hbar\omega(1 - \frac{v}{c}\cos\theta)$

L'angolo di incidenza e'  $\tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - \frac{v}{c})}$

Per elettroni ultrarelativistici, il fotone nel sistema di riposo della particella colpisce l'elettrone ad angoli molto piccoli anche se in S arriva in direzione trasversale ( $\theta = \pi/2$ )

→ nel caso di una distribuzione isotropa di fotoni in S, quella risultante in S' e' concentrata in un cono di apertura  $1/\gamma$  intorno alla direzione della velocita' dell'elettrone

Quando  $\gamma \gg 1$   $\beta \approx 1 - \frac{1}{2}\gamma^{-2}$   $\Rightarrow \tan\theta' \approx \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - 1 + \frac{1}{2}\gamma^{-2})} \approx \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - 1)}$

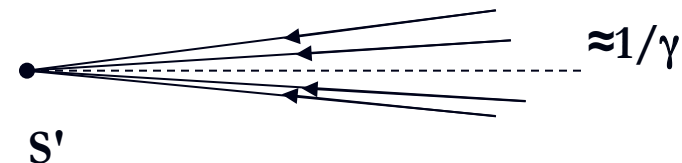
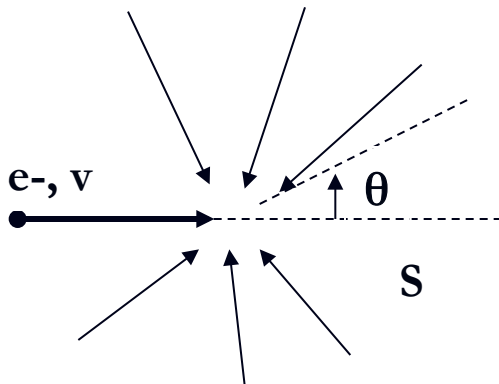
$$\sin\theta = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$$

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2(\theta/2)$$

$$\Rightarrow \tan\theta' \approx \frac{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}{\gamma(1 - 2\sin^2(\theta/2) - 1)} = -\frac{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}{2\gamma\sin^2(\theta/2)}$$

$$-\tan\theta' \approx \frac{\cotg(\theta/2)}{\gamma}$$

Gli angoli tali che  $\cotg(\theta/2) = 1$  e-  
i.e.  $\theta = \pi/2$  sono trasformati in  
 $\tan\theta' \approx 1/\gamma$



# IC: potenza totale nel limite di Thomson

In S' il fotone ha energia  $\hbar\omega' \sim \gamma\hbar\omega$  Se  $\gamma\hbar\omega \ll mc^2$  (aa)

in S' la sezione d'urto di Thomson descrive correttamente il processo

La potenza totale emessa e'  $(\frac{dE}{dt})' = c\sigma_T U'_{rad}$  con U' densita' di energia elm incidente in S'

Bisogna trovare  $U'_{rad}$  a partire dalle quantita' definite nel laboratorio

$$dU'_{rad} = E' dn' \quad \text{L'energia trasforma come} \quad E' = \gamma E (1 - \frac{v}{c} \cos \theta)$$

Per la densita' di volume  $dn'$  di particelle si fa nel seguente modo:

Il numero  $dN$  di particelle nel volume e' un invariante relativistico  $dN = dN'$

Il 4-volume  $d^4V = dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 = dx_0 dV$  e' un invariante relativistico

Cosi' la 4-densita'  $dN/d^4V$  e' un invariante relativistico

$$\left(\frac{dN}{d^4V}\right) = \left(\frac{dN}{dV dx_0}\right) \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{dN}{dV}\right) = \left(\frac{dN}{d^4V}\right) dx_0$$

La densita' di volume trasforma come la componente temporale di un 4-vettore, i.e. come E

# Compton Inverso: limite di Thomson

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)' = c\sigma_T U'_{rad} \quad U_{rad} = \left(\frac{dN}{dV}\right)E \quad E' = \gamma E \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)$$

$$\left(\frac{dN}{dV}\right)' = \left(\frac{dN}{d^4V}\right)dx'_o = \left(\frac{dN}{d^4V}\right)dx_o \gamma \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right) = \left(\frac{dN}{dV}\right) \gamma \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)$$

$$U'_{rad} = \left(\frac{dN}{dV}\right)' E' = \left(\frac{dN}{dV}\right) E [\gamma (1 - \frac{v}{c} \cos \theta)]^2 = U_{rad} [\gamma (1 - \frac{v}{c} \cos \theta)]^2$$

**Quindi la potenza in S' e'**  $\left(\frac{dE}{dt}\right)' = c\sigma_T U_{rad} [\gamma (1 - \frac{v}{c} \cos \theta)]^2$

**Se assumiamo una distribuzione isotropa di fotoni in S, possiamo mediare sugli angoli  $\theta$  per ottenere la potenza media in S'**

$$\langle \left(\frac{dE}{dt}\right)' \rangle = \frac{c\sigma_T U_{rad}}{4\pi} \int_{4\pi} [\gamma (1 - \frac{v}{c} \cos \theta)]^2 d\Omega$$

$$\langle \left(\frac{dE}{dt}\right)' \rangle = \frac{c\sigma_T U_{rad} 2\pi}{4\pi} \int_{-1}^{+1} [\gamma (1 - \frac{v}{c} \cos \theta)]^2 d \cos \theta$$

# Compton Inverso: limite di Thomson


$$\langle (\frac{dE}{dt})' \rangle = \frac{c\sigma_T\gamma^2 U_{rad}}{2} \int_{-1}^{+1} [(1 - \frac{v}{c} \cos \theta)]^2 d \cos \theta = \frac{c\sigma_T\gamma^2 U_{rad}}{2} \int_{-1}^{+1} [(1 - \frac{v}{c} x)]^2 dx$$

$$= \frac{c\sigma_T\gamma^2 U_{rad}}{2} \int_{-1}^{+1} (1 + \frac{v^2}{c^2} x^2 - 2\frac{v}{c} x) dx = \frac{c\sigma_T\gamma^2 U_{rad}}{2} (2 + \frac{2}{3}\beta^2)$$

$$\langle (\frac{dE}{dt})' \rangle = c\sigma_T\gamma^2 U_{rad} (1 + \frac{1}{3}\beta^2) = \frac{c\sigma_T U_{rad}}{3} [\gamma^2 (3 + \beta^2)]$$

**Riscriviamo il termine in parentesi quadra**

$$\gamma^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{1 - \beta^2} - \frac{1}{4} = \frac{4 - 1 + \beta^2}{4(1 - \beta^2)} = \gamma^2 \frac{3 + \beta^2}{4}$$

  $\gamma^2 (3 + \beta^2) = 4(\gamma^2 - \frac{1}{4})$  **Sostituisco nella potenza**

$$\langle (\frac{dE}{dt})' \rangle = \frac{4}{3} c\sigma_T U_{rad} (\gamma^2 - \frac{1}{4})$$

**Tenendo conto che la  
potenza e' un invariante  
relativistico →**

$$\langle (\frac{dE}{dt})' \rangle = \langle (\frac{dE}{dt}) \rangle$$

**In questo modo abbiamo ottenuto l'energia guadagnata dal campo di fotoni dopo l'urto**



# Compton Inverso: limite di Thomson

Energia media guadagnata dal campo di fotoni  $\langle \left(\frac{dE}{dt}\right) \rangle = \frac{4}{3}c\sigma_T U_{rad}(\gamma^2 - \frac{1}{4})$

Per ottenere il guadagno netto di energia del campo di fotoni occorre sottrarre l'energia persa nell'urto sugli elettroni, che e' data dal numero di fotoni con energia E rimossi dal fascio per unita' di tempo, che nel caso di distribuzione isotropa e'

$$\frac{dN_{ph}}{dt} = -c\sigma_T n_{ph} \quad \text{Ma} \quad n_{ph} = U_{rad}/E \quad \longrightarrow \quad \frac{dN_{ph}}{dt} = -c\sigma_T U_{rad}/E$$

$$\langle \left(\frac{dE}{dt}\right) \rangle = E \times \frac{dN_{ph}}{dt} = -c\sigma_T U_{rad}$$

$$\langle \left(\frac{dE}{dt}\right)_{tot} \rangle = \frac{4}{3}c\sigma_T U_{rad}(\gamma^2 - \frac{1}{4}) - c\sigma_T U_{rad} = c\sigma_T U_{rad}[\frac{4}{3}(\gamma^2 - \frac{1}{4}) - 1]$$

$$= c\sigma_T U_{rad}[\frac{4}{3}(\gamma^2 - 1)] \quad \text{ma} \quad \gamma^2 - 1 = \gamma^2 \beta^2$$

$$\langle \left(\frac{dE}{dt}\right)_{tot} \rangle = \frac{4}{3}c\sigma_T U_{rad} \gamma^2 \beta^2$$

E' la potenza media guadagnata dal campo di fotoni in un urto con singolo elettrone

# IC: guadagno medio dei fotone

La potenza totale (media) puo' essere scritta come  $\frac{dE}{dt} = \langle \epsilon_1 \rangle \frac{dN}{dt}$

ma  $\frac{dE}{dt} = \frac{4}{3} c \sigma_T \gamma^2 \beta^2 U_{rad,iso}$  e  $\frac{dN}{dt} = c \sigma_T n_{iso} = c \sigma_T U_{rad,iso} / \langle \epsilon \rangle$

Con  $\langle \epsilon \rangle$  energia media del gas di fotoni prima dello scattering

$$\frac{4}{3} c \sigma_T \gamma^2 \beta^2 U_{rad,iso} = \langle \epsilon_1 \rangle c \sigma_T U_{rad,iso} / \langle \epsilon \rangle$$

$$\frac{4}{3} \gamma^2 \beta^2 = \langle \epsilon_1 \rangle / \langle \epsilon \rangle$$

Nel caso di una distribuzione di corpo nero dei fotoni  $n(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{1}{[e^{h\nu/kT} - 1]} d\nu$

$\langle \epsilon \rangle = [3\zeta(4)/\zeta(3)] kT = 2.7 \times kT$   $\zeta$  funzioni di Riemann

$$\langle \epsilon_1 \rangle = \frac{4}{3} \gamma^2 \beta^2 \times 2.7 kT \approx \frac{18}{5} \gamma^2 \beta^2 kT$$

# IC: conseguenze astrofisiche

Il processo Compton inverso da parte di elettroni ultrarelativistici e' di profonda importanza in astrofisica.

Dalle osservazioni dei raggi cosmici, sappiamo che ci sono elettroni con energie superiori a  $O(100 \text{ MeV}) \rightarrow$  con fattori di Lorentz  $\gamma \approx 10\text{-}1000$ , per esempio negli aloni galattici

Questi elettroni diffondono fotoni di bassa energia ad energie molto piu' alte

P. Es. Se si considerano elettroni con  $\gamma \approx 1000$ , la frequenza dei fotoni diffusi aumenta: di un fattore  $10^6$ .

Fotoni radio, tipici dell'emissione da aloni galattici, con  $\nu \approx 10^9 \text{ Hz}$  diventano fotoni UV con  $\nu \approx 10^{15} \text{ Hz}$

Fotoni nell'IR lontano con  $\nu \approx 10^{12} \text{ Hz}$ , emessi dai nuclei galattici ricchi di stelle, diventano fotoni X con  $\nu \approx 10^{18} \text{ Hz}$ , cioe-  $E \approx 1 \text{ KeV}$

Fotoni ottici con  $\nu \approx 10^{14} \text{ Hz}$  diventano raggi  $\gamma$  con  $\nu \approx 10^{20} \text{ Hz}$ , cioe' con  $E \approx \text{MeV}$

# IC: perdita di E delle particelle

Il processo Compton inverso rappresenta una sorgente di energia per i fotoni nello spazio ambiente, mentre rappresenta un pozzo di energia per le particelle su cui i fotoni diffondono

$$\frac{dE_{fotoni}}{dt} = -\frac{dE_{ele}}{dt}$$

La sezione d'urto Compton e' prop a  $m^{-2}$  della particella su cui i fotoni diffondono → le uniche particelle per le quali il processo e' importante sono gli elettroni (a parita' di energia)

Dato che  $dE/dt \sim \gamma^2 = E^2/(mc^2)^2 \rightarrow$  il processo Compton inverso costituisce la sorgente dominante di perdita di energia per gli elettroni in tutti i casi in cui e' presente nella stessa regione un gas di fotoni

Insieme alle perdite per emissione di sincrotrone (che vedremo), il Compton inverso e' il processo che limita fortemente la vita media degli elettroni cosmici dato che

$$\tau_e = \int \frac{dE}{dE_{ele}/dt}$$

e che  $(dE/dt)_{ion} \approx \text{cost.}$  e che  $(dE/dt)_{bremss} \approx E$

Si pensi, p. es., al fondo cosmico a microonde di fotoni a 2.7 K: esso permea tutto l'universo e non c'e' modo per nessun elettrone di evitarlo durante la sua propagazione

# IC: guadagno medio dei fotone

La potenza totale (media) puo' essere scritta come  $\frac{dE}{dt} = \langle \epsilon_1 \rangle \frac{dN}{dt}$

ma  $\frac{dE}{dt} = \frac{4}{3} c \sigma_T \gamma^2 \beta^2 U_{rad,iso}$  e  $\frac{dN}{dt} = c \sigma_T n_{iso} = c \sigma_T U_{rad,iso} / \langle \epsilon \rangle$

Con  $\langle \epsilon \rangle$  energia media del gas di fotoni prima dello scattering

$$\frac{4}{3} c \sigma_T \gamma^2 \beta^2 U_{rad,iso} = \langle \epsilon_1 \rangle c \sigma_T U_{rad,iso} / \langle \epsilon \rangle$$

$$\frac{4}{3} \gamma^2 \beta^2 = \langle \epsilon_1 \rangle / \langle \epsilon \rangle$$

Nel caso di una distribuzione di corpo nero dei fotoni  $n(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{1}{[e^{h\nu/kT} - 1]} d\nu$

$$\langle \epsilon \rangle = [3\zeta(4)/\zeta(3)] kT = 2.7 \times kT \quad \zeta \text{ funzioni di Riemann}$$

$$\langle \epsilon_1 \rangle = \frac{4}{3} \gamma^2 \beta^2 \times 2.7 kT \approx \frac{18}{5} \gamma^2 \beta^2 kT$$

# Compton inverso: limiti cinematici

La cinematica dell'urto fissa la max energia che il fotone puo' acquistare

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon(1 - \frac{v}{c} \cos \theta)}{[\frac{E}{mc^2\gamma}(1 - \cos \alpha) + (1 - \frac{v}{c} \cos \theta_1)]} \quad \epsilon_1 \ll \gamma mc^2 \quad \epsilon_1 \approx \epsilon \frac{1 - \beta \cos \theta}{1 - \beta \cos \theta_1}$$

$\theta$  e  $\theta'$  sono gli angoli dell'elettrone rispetto alla linea di volo del fotone incidente prima e dopo l'urto

Così il max si ha quando  $\cos \theta = -1$  e  $\cos \theta_1 = +1$  (collisione head-on)

$$(\epsilon_1)_{max} \approx \epsilon \frac{1 + \beta}{1 - \beta}$$

Nel limite UR ( $\gamma \gg 1$ )

$$1 - \beta = \frac{1}{\gamma^2(1 + \beta)} \approx \frac{1}{2\gamma^2} \quad \rightarrow \quad (\epsilon_1)_{max} \approx 4\gamma^2 \epsilon$$

$$1 + \beta \approx 2$$

Il min si ha quando  $\cos \theta = 1$  e  $\cos \theta_1 = -1$  (collisione follow-on)

$$(\epsilon_1)_{min} = (1 - \beta)/(1 + \beta) = 1/4\gamma^2$$

# Compton inverso: limiti cinematici

Nel sistema di quiete dell'elettrone l'energia prima dello scattering  $\epsilon'$   $\epsilon' = \gamma\epsilon(1 - \frac{v}{c} \cos \theta)$

**E' min quando  $\cos\theta=1$ , ie  $\theta=0$**

$$\epsilon'_{min} = \gamma\epsilon(1 - \frac{v}{c}) \approx \gamma\epsilon(1/2\gamma^2) = \epsilon/2\gamma$$

**i.e. fotoni soft in K'**

**E' max quando  $\cos\theta=-1$ , ie  $\theta=\pi$**

$$\epsilon'_{max} = \gamma\epsilon(1 + \frac{v}{c}) \approx 2\gamma\epsilon \quad \text{i.e. fotoni hard}$$

Nel sistema di quiete dell'e-, il fotone  $\epsilon'$  diffuso ad un angolo  $\theta'_1$  rispetto alla linea di volo iniziale in K' (NB: in K' i fotoni sono concentrati in un cono di larghezza  $1/\gamma$  intorno alla direzione della velocita' dell'e-)

**Nel labo l'energia dopo lo scattering  $\epsilon_1$**

$$\epsilon_1 = \gamma\epsilon'_1(1 + \frac{v}{c} \cos(\pi - \theta'_1)) = \gamma\epsilon'_1(1 - \frac{v}{c} \cos \theta'_1)$$

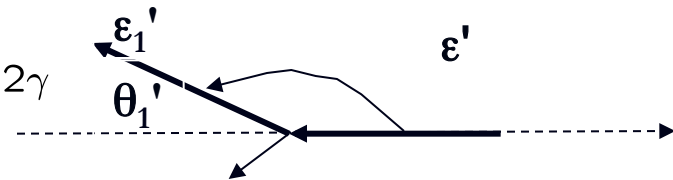
**Max quando  $\cos\theta'_1=-1$**

$$(\epsilon_1)_{max} = \gamma\epsilon'_1(1 + \frac{v}{c}) \approx 2\gamma\epsilon'_1$$

**Min quando  $\cos\theta'_1=1$**

$$(\epsilon_1)_{min} = \gamma\epsilon'_1(1 - \frac{v}{c}) \approx \epsilon'_1/2\gamma$$

NB:  $\theta'_1$  e' l'angolo rispetto alla linea di volo del fotone in K',  $\pi-\theta'_1$  e' l'angolo rispetto alla velocita' dell'e- nel labo, ie asse x, che entra nella trasf di Lorentz



**Nel limite di Thomson in K',  $\epsilon'=\epsilon'_1$**



$$\epsilon_1 = \gamma^2\epsilon(1 - \frac{v}{c} \cos \theta)(1 - \frac{v}{c} \cos \theta'_1)$$

$$(\epsilon_1)_{max} = 4\gamma^2\epsilon$$

$$(\epsilon_1)_{min} = \epsilon/4\gamma^2$$

**i fotoni piu' energetici guadagnano un fattore molto grande  $4\gamma^2$  che puo' essere  $\approx 10^6-10^7$**

# Spettro: stima della forma

Quindi:

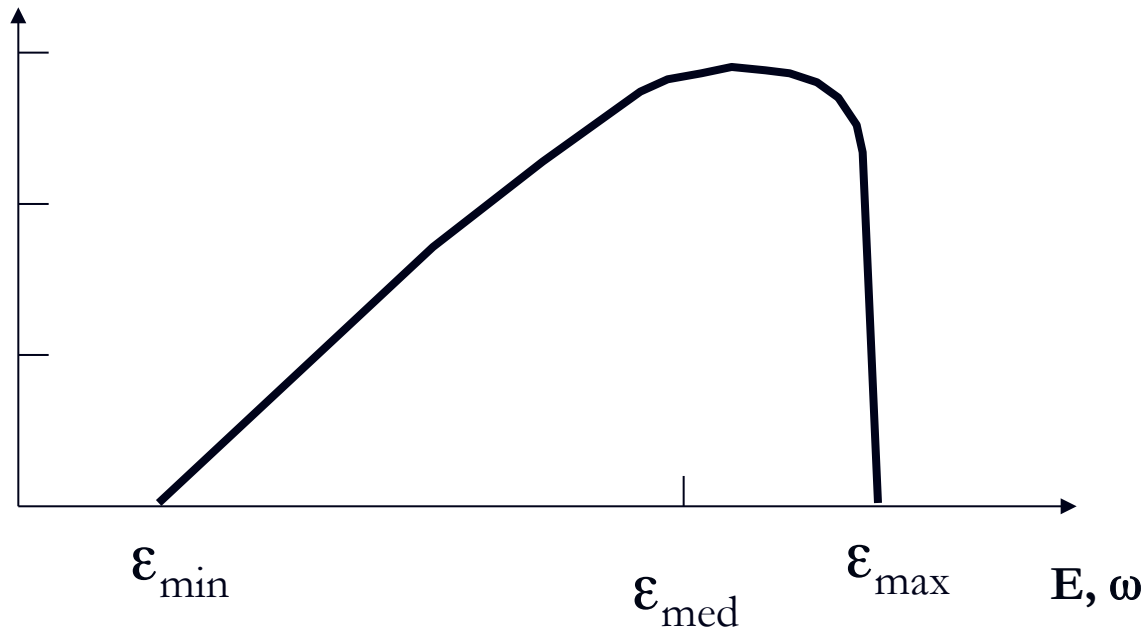
Il guadagno max e'  $A_{\max} = 4\gamma^2$

Il guadagno medio e'  $A_{\text{ave}} = 4\gamma^2/3 \rightarrow = A_{\max}/3$

Il guadagno min e'  $A_{\min} = 1/4\gamma^2 \rightarrow = A_{\max}/16\gamma^4 \ll A_{\max}$

Ne segue che lo spettro deve essere molto piccato vicino al valore max permesso cinematicamente

$dP/dE$  ( $dP/d\omega$ )



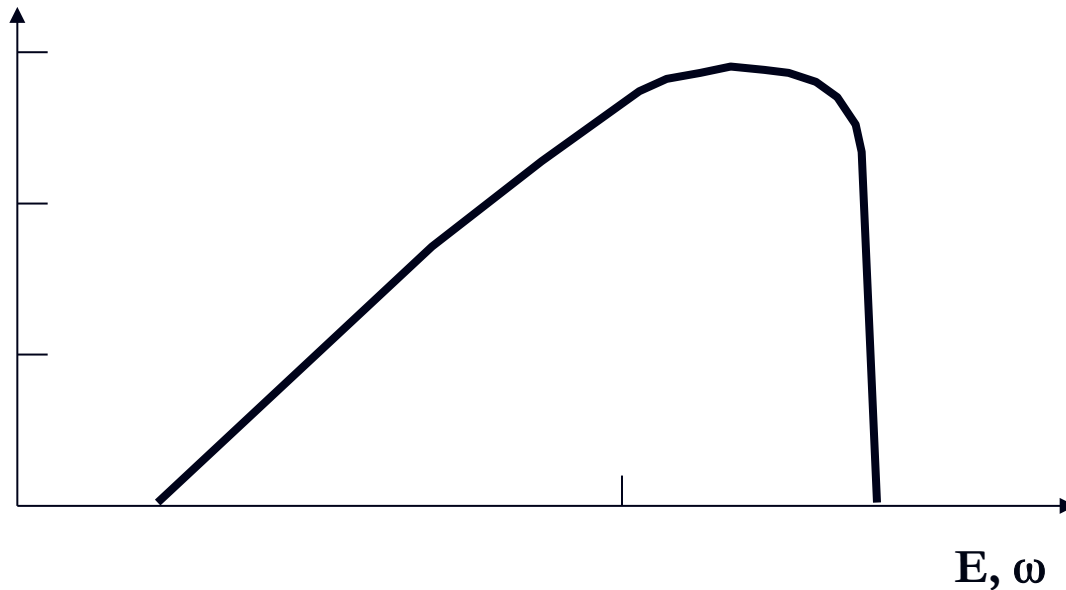


# Spettro Compton: limite di Thomson

## Calcolo esatto

$$\frac{dE}{dt d\omega_1} = \frac{3}{16} \hbar \sigma_T c \cdot \frac{n(\omega) d\omega}{\gamma^4 \omega^2} \cdot \omega_1 \cdot [\omega_1 + 4\gamma^2 \omega + 2\omega_1 \ln \frac{\omega_1}{4\gamma^2 \omega} - \frac{\omega_1^2}{2\gamma^2 \omega}]$$

$dP/dE$  ( $dP/d\omega$ )



Lo spettro ha una struttura ben definita e caratteristica

# Spettro Compton: limite di Thomson

$$\frac{dE}{dtd\omega_1} = \frac{3}{16} \hbar \sigma_{TC} \cdot \frac{n(\omega)d\omega}{\gamma^4 \omega^2} \cdot \omega_1 \cdot [\omega_1 + 4\gamma^2 \omega + 2\omega_1 \ln \frac{\omega_1}{4\gamma^2 \omega} - \frac{\omega_1^2}{2\gamma^2 \omega}]$$

Riscrivendo  $dP/d\omega_1$  in funzione della frequenza in  
 unita' di frequenza max di frequenza max  $z = \frac{\omega_1}{4\gamma^2 \omega}$

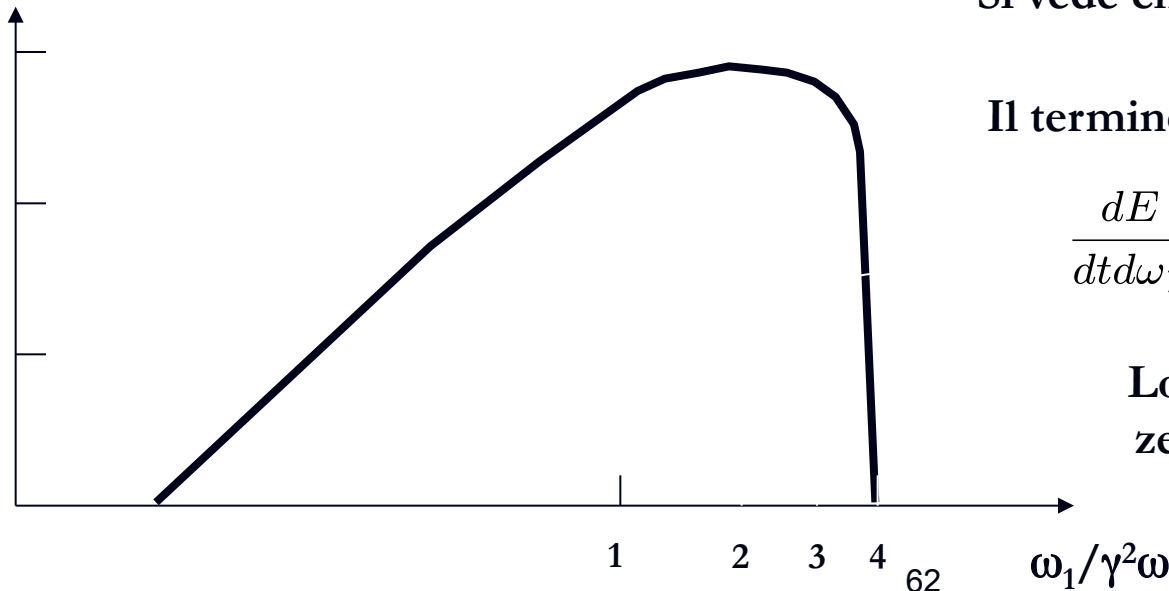
Si ottiene 
$$\frac{dE}{dtd\omega_1} = \frac{3}{16} \hbar \sigma_{TC} \cdot \frac{n(\omega)d\omega}{\gamma^4 \omega^2} \cdot 4\gamma^2 \omega \cdot \omega_1 \left[ \frac{\omega_1}{4\gamma^2 \omega} + 1 + 2 \frac{\omega_1}{4\gamma^2 \omega} \ln \frac{\omega_1}{4\gamma^2 \omega} - \frac{\omega_1^2}{8\gamma^4 \omega^2} \right]$$

Si vede che quando  $\frac{\omega_1}{4\gamma^2 \omega} \ll 1$

Il termine in parentesi quadra [...] e'  $\ll 1$

$$\frac{dE}{dtd\omega_1} = \frac{3}{4} \hbar c \sigma_T \cdot \frac{n(\omega)d\omega}{\gamma^2 \omega} \cdot \omega_1$$

Lo spettro di frequenza tende a  
 zero come  $z$ , cioe' fissati  $\gamma$  e  $\omega$ ,  
 decresce come  $\omega_1$  a basse  
 frequenze

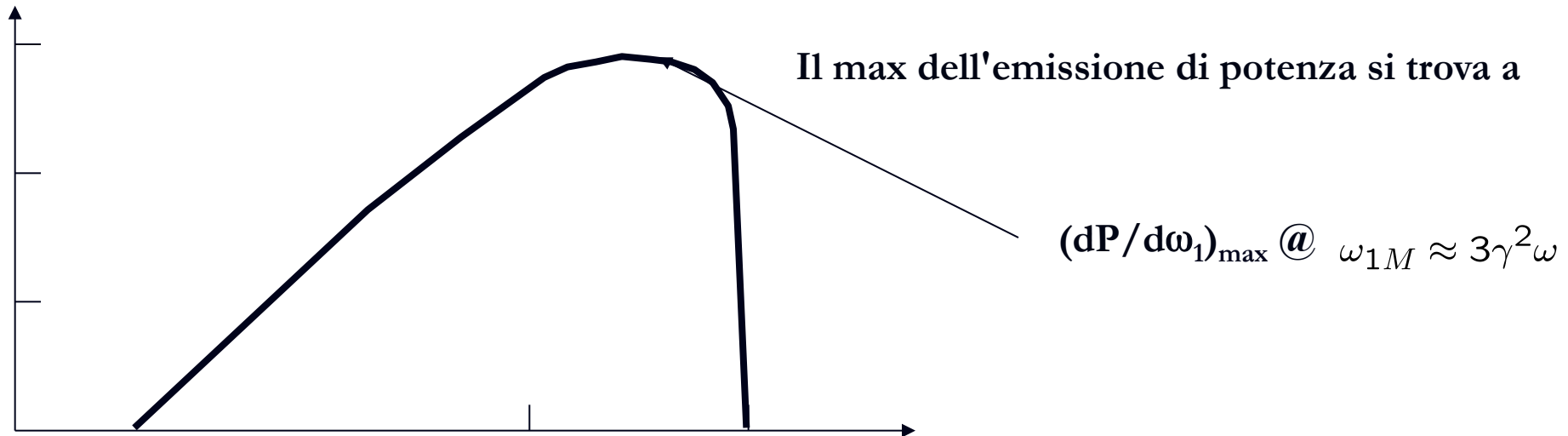


# Spettro Compton:limite di Thomson

$$\frac{dE}{dtd\omega_1} = \frac{3}{16} \hbar \sigma_T c \cdot \frac{n(\omega) d\omega}{\gamma^4 \omega^2} \cdot \omega_1 \cdot 4\gamma^2 \omega \left[ \frac{\omega_1}{4\gamma^2 \omega} + 1 + 2 \frac{\omega_1}{4\gamma^2 \omega} \ln \frac{\omega_1}{4\gamma^2 \omega} - \frac{\omega_1^2}{8\gamma^4 \omega^2} \right]$$

Lo spettro si deve annullare alla max frequenza di emissione  $(\omega_1)_{max} \approx 4\gamma^2 \omega$

$$\frac{dE}{dtd\omega_1}((\omega_1)_{max}) = \frac{3}{16} \hbar \sigma_T c \cdot \frac{n(\omega) d\omega}{\gamma^4 \omega^2} \cdot \omega_1 \cdot 4\gamma^2 \omega [1 + 1 + 2 \ln 1 - 2] = 0 \quad \text{OK}$$



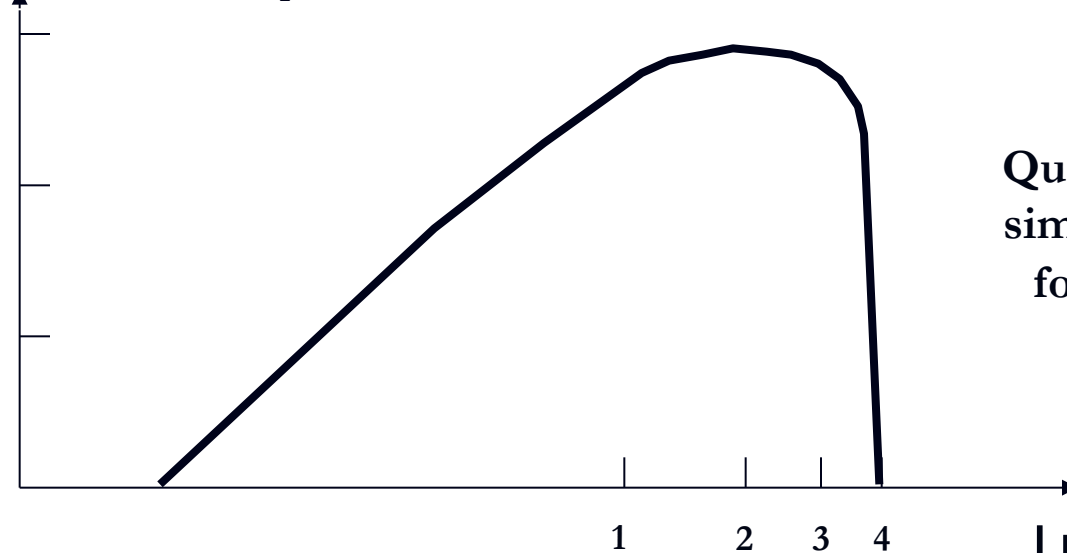
# Spettro Compton: limite di Thomson

$$\frac{dE}{dtd\omega_1} = \frac{3}{16} \hbar \sigma_T c \cdot \frac{n(\omega) d\omega}{\gamma^4 \omega^2} \cdot \omega_1 \cdot 4\gamma^2 \omega \left[ \frac{\omega_1}{4\gamma^2 \omega} + 1 + 2 \frac{\omega_1}{4\gamma^2 \omega} \ln \frac{\omega_1}{4\gamma^2 \omega} - \frac{\omega_1^2}{8\gamma^4 \omega^2} \right]$$

La distribuzione e' asimmetrica rispetto agli estremi: se prendiamo una distribuzione di fotoni monoenergetici, in media il campo di fotoni guadagna energia

**NB:** il guadagno medio di energia di un fotone su un e- ultrarel. e'  $\langle \epsilon_1 \rangle / \langle \epsilon \rangle \approx 4\gamma^2/3$

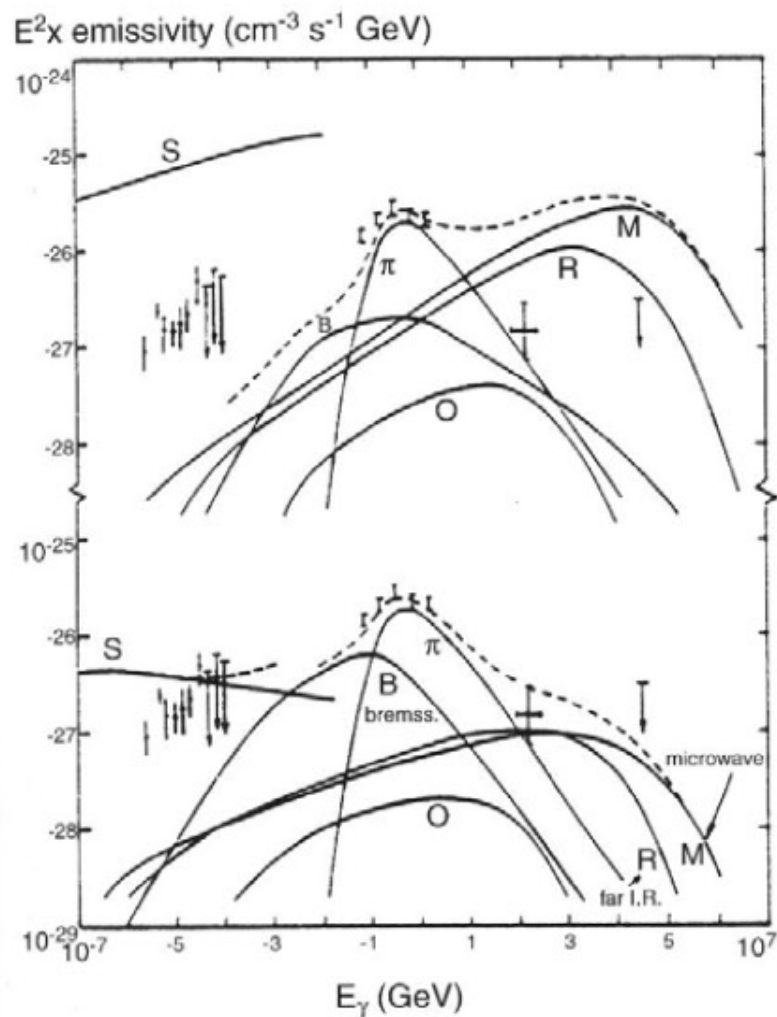
$\ln /dE/dtd\omega_1$



Così  $\langle \omega_1 / \gamma^2 \omega \rangle \sim 4/3$

Quando  $\gamma \rightarrow 1$  la distribuzione diventa simmetrica rispetto ad 1 e il campo di fotoni non guadagna energia netta

$\text{Ln}(\omega_1/\gamma^2\omega)$



**Fig. 6.13.** The predicted X-ray and  $\gamma$ -ray emissivity from various production processes: inverse Compton-interactions with the microwave background (**M**), far infrared radiation (**R**), starlight (**O**); synchrotron radiation (**S**); nonthermal bremsstrahlung (**B**); the decay of neutral pions produced in nuclear interactions of cosmic rays ( $\pi$ ). The total emissivity is shown as the **dashed curve**. The predictions are compared with the derived emissivity from observations in different energy bands. From Protheroe and Wolfendale (1980 [409])

# Compton inverso

Si ha compton inverso ogni volta che un  $e^-$  si propaga in un gas di fotoni, cioè in regioni in cui vi è radiazione elettromagnetica (eg CMB, luce stellare, radiazione radio,...)

Il calcolo dettagliato della perdita di energia di un singolo  $e^-$  (vedi proc. Emiss. Elm) che si propaga in un campo di radiazione omogeneo ed isotropo fornisce

$$\left\langle \left( \frac{dE}{dt} \right)_{tot} \right\rangle = \frac{4}{3} c \sigma_T U_{rad} \gamma^2 \beta^2$$

Dove  $U_{rad}$  è la densità di energia del campo di fotoni,  $\sigma_T = 8\pi r_e^2/3 = 0.66$  barn è la sez d'urto Thomson,  $\gamma = E/m_e c^2$  è l'energia dell'elettrone inc,  $\beta^{1/4} 1$  per part ultrarel

$$\left( \frac{dE}{dt} \right)_{IC} = 1.66 \times 10^6 \gamma^2 U_{rad} \quad \text{eV s}^{-1} \quad \beta \sim 1$$

$U_{rad}^{ottico} \sim 6 \times 10^5 \text{ eV m}^{-3}$  per fotoni ottici in un punto tipico della galassia,

$U_{rad}^{CMB} \sim 2.6 \times 10^5 \text{ eV m}^{-3}$  per il fondo di radiazione cosmico che permea tutto l'universo

# Spettro Compton totale

Per ottenere lo spettro fisico della radiazione Compton  $dN_1/dtd\epsilon_1$ , occorre che lo spettro prodotto da un segmento di popolazione di fotoni  $n(\epsilon)d\epsilon$  sia integrato sullo spettro di elettroni e dei fotoni iniziali

$$\frac{dN_{\gamma, \epsilon}}{dtd\epsilon_1} = \frac{3}{16} \sigma_{TC} \cdot \frac{1}{\gamma^4 \epsilon^2} \cdot [\epsilon_1 + 4\gamma^2 \epsilon + 2\epsilon_1 \ln \frac{\epsilon_1}{4\gamma^2 \epsilon} - \frac{\epsilon_1^2}{2\gamma^2 \epsilon}] n(\epsilon) d\epsilon = f(\gamma, \epsilon, \epsilon_1) n(\epsilon) d\epsilon$$

Data una distribuzione di elettroni  $dN_e = N_e(\gamma) d\gamma$  Lo spettro Compton e'

$$\left( \frac{dN_{tot}}{dtd\epsilon_1} \right) = \int_{\gamma, \epsilon} f(\gamma, \epsilon, \epsilon_1) n(\epsilon) d\epsilon N_e(\gamma) d\gamma$$

Il caso interessante e' quello di una distribuzione di elettroni  $dN_e = N_e(\gamma) d\gamma$

con una legge di potenza  $N_e(\gamma) = \begin{cases} K_e \gamma^{-p} & \gamma_o \leq \gamma \leq \gamma_m \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

# Spettro qualitativo

Qualitativamente poiche' lo spettro e' molto piccato intorno al max, il cui ordine di grandezza e'  $\varepsilon_{\text{max}} \approx \gamma^2 \varepsilon$ , possiamo pensare gli e- diffondano solo fotoni con  $E = \varepsilon_{\text{max}} \rightarrow$  all'energia  $\varepsilon_1$  contribuiscono solo gli e- con  $\gamma = (\varepsilon_1 / \varepsilon)^{1/2}$

$\rightarrow dN_\gamma \approx dn_e \approx \gamma^{-p} d\gamma \approx \varepsilon_1^{-(p+1)/2} d\varepsilon_1$



# Spettro Compton totale: Thomson

$$\left(\frac{dN_{tot}}{dtd\epsilon_1}\right) = \pi r_e^2 c K_e 2^{p+3} \frac{p^2 + 4p + 11}{(p+3)^2(p+1)(p+5)} \epsilon_1^{-(p+1)/2} \int \epsilon^{(p-1)/2} n(\epsilon) d\epsilon$$

L'intensita', i.e. la normalizzazione dello spettro fisico **OSSERVATO**, dipende dalla distribuzione iniziale dei fotoni

Ma l'indice spettrale dipende **SOLO** dalla distribuzione energetica degli elettroni

Nel caso di una distribuzione di corpo nero dei fotoni lo spettro osservato e'

$$\left(\frac{dN_{tot}}{dtd\epsilon_1}\right) = \pi^{-1} (r_e^2 / \hbar^3 c^2) K_e(kT)^{(p+5)/2} F(p) \epsilon_1^{-(p+1)/2}$$

TABLE I. The function  $F(p)$  in Eq. (2.66).

$$F(p) = 2^{p+3} [(p^2 + 4p + 11) / (p+3)^2(p+1)(p+5)] \times \Gamma[\frac{1}{2}(p+5)] \zeta[\frac{1}{2}(p+5)]. \quad (2.66)$$

L'espressione e' esatta finche'  $\epsilon_1$  e' **LONTANO** dagli end-points della distribuzione: il range di validita' dell'espressione e' infatti

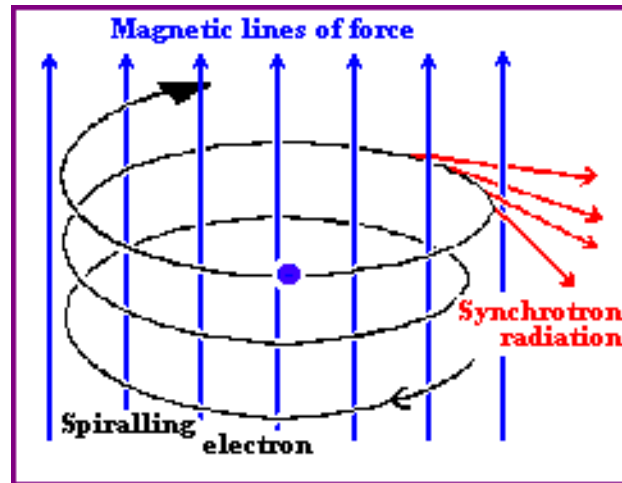
$$\gamma_o^2 kT \ll \epsilon_1 \ll \gamma_m^2 kT$$

Oltre alla condizione di Thomson  $\epsilon_1 \sim \gamma^2 kT \ll \gamma mc^2$

$p$	$F(p)$
0	3.48
0.5	3.00
1.0	3.20
1.5	3.91
2.0	5.25
2.5	7.57
3.0	11.54
3.5	18.44
4.0	30.62
4.5	52.57
5.0	92.90

# Radiazione di Sincrotrone (RS)

La radiazione di sincrotrone e' quella emessa da elettroni di alta energia che curvano in un campo magnetico



Questo processo e' quello che domina nella astrofisica delle alte energie

Storicamente fu osservato nei primi esperimenti con betatroni in cui gli e- erano accelerati ad energie relativistiche

Lo stesso meccanismo e' responsabile dell'emissione radio della galassia, di supernovae remnants e di oggetti extragalattici

E' anche responsabile, p.es., dell'emissione non termica osservata nella Crab nebula