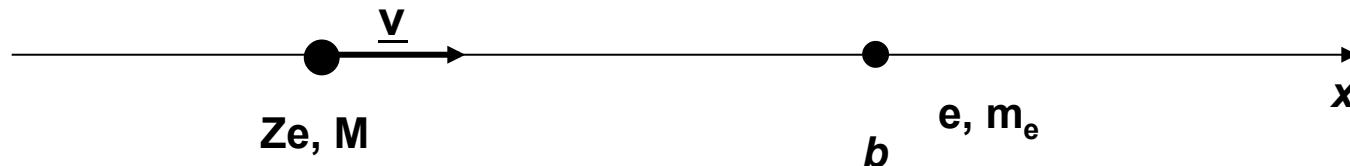


Lecture 9 071118

- Il pdf delle lezioni puo' essere scaricato da
- http://www.fisgeo.unipg.it/~fiandrin/didattica_fisica/cosmic_rays1819/

Esempio Classico: Urto centrale



La cinematica fissa momento ed energia della stato finale

$$Mv = Mv' + m_e v_e \quad v' = (Mv - m_e v_e) / M$$

$$Mv^2 = Mv'^2 + m_e v_e^2 \quad Mv^2 = M[(Mv - m_e v_e) / M]^2 + m_e v_e^2$$

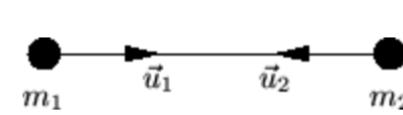
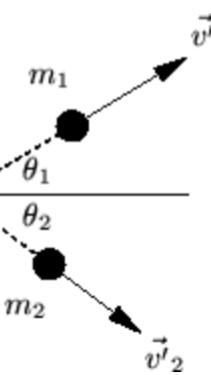
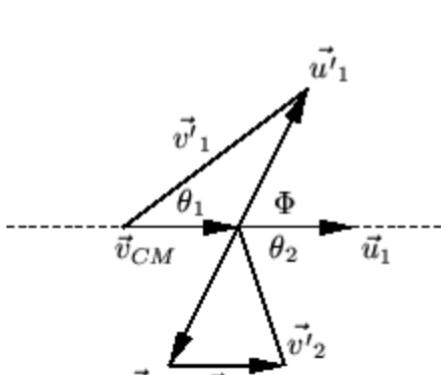
$$\cancel{Mv^2} = \cancel{Mv^2} + m_e^2 v_e^2 / M - 2m_e v v_e + m_e v_e^2 \quad 0 = m_e v_e / M - 2v + v_e$$

$$v_e = 2v / (1 + \frac{m_e}{M}) \simeq 2v \quad \text{La perdita di energia della particella incidente e'}$$

$$\Delta E_{inc} = (1/2)m_e v_e^2 = (1/2)m_e [2v / (1 + \frac{m_e}{M})]^2$$

$$\frac{\Delta E_{inc}}{E_{inc}} = \frac{(1/2)m_e [2v / (1 + \frac{m_e}{M})]^2}{(1/2)Mv^2} = 4m_e \frac{M}{(m_e + M)^2} \simeq 4m_e / M$$

Se $m_e \ll M$, $E_{inc} \approx \text{costante} \rightarrow$ la particella incidente prosegue indisturbata ($\theta \approx \Delta p_t / p$) (trascurando il rinculo del nucleo), mentre l'e- riceve un kink a causa dell'interazione elettrostatica. Facciamolo vedere nelle prossime slides

Sistema di laboratorio	Sistema del centro di massa
Prima dell'urto	Prima dell'urto
 $\vec{v}_{CM} = \frac{m_1}{M} \vec{v}_1$ $M = m_1 + m_2$	 $\vec{u}_1 = \frac{m_2}{M} \vec{v}_1 \quad \vec{u}_2 = -\frac{m_1}{M} \vec{v}_1 = -\vec{v}_{CM}$
Dopo l'urto	Dopo l'urto
 $\vec{v}_1 = \vec{v}_{CM} + \vec{u}_1$ $0 = \vec{v}_{CM} + \vec{u}_2$	 $\vec{v}'_1 = \vec{v}_{CM} + \vec{u}'_1$ $\vec{v}'_2 = \vec{v}_{CM} + \vec{u}'_2$

L'angolo di scattering nel centro di massa non ha limitazioni mentre gli angoli e nel sistema di laboratorio subiscono restrizioni a causa delle leggi di conservazione. Consideriamo il diagramma dell'urto nel centro di massa:

$$\tan \theta_1 = \frac{\vec{u}'_1 \sin \Phi}{\vec{v}_{CM} + \vec{u}'_1 \cos \Phi}$$

Poichè l'urto è elastico $u'_1 = u_1$ quindi, dividendo per u_1 otteniamo:

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \Phi}{\frac{\vec{v}_{CM}}{u_1} + \cos \Phi}$$

ma $u_1 = \frac{m_2}{M} v_1 \quad \vec{v}_{CM} = \frac{m_1}{M} \vec{v}_1$

quindi $\frac{\vec{v}_{CM}}{u_1} = \frac{m_1}{m_2}$

Da cui $\tan \theta_1 = \frac{\sin \Phi}{\frac{m_1}{m_2} + \cos \Phi}$

Φ ovviamente dipende dai dettagli dell'interazione e, in linea di principio può assumere qualsiasi valore. θ_1 invece a seconda del rapporto m_1/m_2 può o non può avere delle limitazioni.

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \Phi}{\frac{m_1}{m_2} + \cos \Phi}$$

Se $m_1 < m_2$, cioè $V_{cm} < u_1$, θ_1 non ha limitazioni, perchè il denominatore della frazione si può annullare.

Se $m_1 \ll m_2$, allora $\tan \theta_1 \approx \tan \Phi$ ovvero $\theta_1 \approx \Phi$. Il secondo corpo risente in questo caso molto poco dell'interazione. m_2 si comporta essenzialmente come un centro di scattering fisso.

Se $m_1 > m_2$, cioè $V_{cm} > u_1$, il denominatore non si può annullare e θ_1 ha un valore massimo θ_{max} , che si trova facilmente derivando ed imponendo la derivata uguale a zero

$$1 + \frac{m_1}{m_2} \cos \Phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan \theta_{MAX} = \frac{m_2}{\sqrt{m_1^2 - m_2^2}} \quad \Rightarrow \quad \sin \theta_{MAX} = \frac{m_2}{m_1}$$

Se $m_1 \gg m_2$ allora $\theta_{max} \approx 0$. Fisicamente ciò significa che una particella leggera non può deviare significativamente una particella molto più massiva.

Vi è poi il caso particolare $m_1 = m_2$

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \Phi}{\frac{m_1}{m_2} + \cos \Phi} = \frac{\sin \Phi}{1 + \cos \Phi} = \tan \left(\frac{\Phi}{2} \right) \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = \frac{\Phi}{2}$$

L'angolo di scattering di laboratorio è la metà dell'angolo di scattering dal centro di massa. Poichè il valore massimo di Φ è di 180° allora se $m_1 = m_2$ l'angolo massimo di scattering nel sistema di laboratorio non può essere altro che di 90°

Vediamo ora cosa si può dire su θ_2 . Dal diagramma per il moto nel riferimento del centro di massa vediamo subito che:

$$\begin{cases} u'_2 \sin \Phi = v'_2 \sin \theta_2 \\ v'_2 \cos \theta_2 = v_{CM} - u'_2 \cos \Phi \end{cases}$$

Procedendo in modo analogo a prima si ricava: $\tan \theta_2 = \frac{u'_2 \sin \Phi}{v_{CM} - u'_2 \cos \Phi} = \frac{\sin \Phi}{\frac{v_{CM}}{u'_2} - \cos \Phi}$

Nel caso del secondo corpo la semplificazione è ora ancora più banale perché $u'_2 = u_2 = V_{cm}$ per cui, dividendo per u_2

$$\tan \theta_2 = \frac{\sin \Phi}{1 - \cos \Phi} = \cot \frac{\Phi}{2} \quad \Rightarrow \quad \tan \theta_2 = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Phi}{2} \right) \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = \frac{\pi - \Phi}{2}$$

$$\text{Se } m_1 = m_2 = m, \text{ sappiamo già che} \quad \theta_1 = \frac{\Phi}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

Infine presentiamo le espressioni di v'_1 e v'_2 in funzione di v_1 e di Φ

$$\begin{cases} v'_1 = \frac{v_1}{M} \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos \Phi} \\ v'_2 = \frac{2m_1}{M} v_1 \sin \frac{\Phi}{2} \end{cases}$$

Perdita di energia: cinematica caso relativistico

- Local interactions conserve total 4-momentum
 - i.e., total energy and total 3-momentum are conserved

$$p^\mu = \sum_{s=1}^n p_s^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) \iff E = \sum_{s=1}^n E_s \quad \mathbf{p} = \sum_{s=1}^n \mathbf{p}_s$$

- We know how to Lorentz transform it

$$p'^\mu = \sum_s p_s'^\mu = \sum_s L_\nu^\mu p_s^\nu = L_\nu^\mu p^\nu \quad \text{as usual}$$

- Define the **center-of-momentum** frame in which $\mathbf{p} = 0$
 - It's the frame in which the total 3-momentum is zero
 - Or, the center of mass is at rest
 - Often called center-of-mass frame as well

Perdita di energia: cinematica

$$p^\mu = \sum_{s=1}^n p_s^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) \xrightarrow{\text{CoM frame}} p'^\mu = \left(\frac{E'}{c}, \mathbf{0} \right)$$

- There are two particularly useful quantities
- CoM energy E'
 - Lorentz invariance $p^\mu p_\mu = p'^\mu p'_\mu \xrightarrow{} \frac{E'^2}{c^2} = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2$
 - E' is the smallest possible E
- Boost β of CoM frame relative to the lab. frame
 - Lorentz transformation

$$p^\mu = L_\nu^\mu p'^\nu = \left(\frac{\gamma E'}{c}, \frac{\gamma \beta E'}{c} \right) \xrightarrow{} \beta = \frac{\mathbf{p}c}{E} \quad \gamma = \frac{E}{E'}$$

Perdita di energia: cinematica

- Consider collision of particle 1 on particle 2 at rest



$$p_1 = (E_1/c, \mathbf{p}_1)$$

$$p_2 = (m_2 c, \mathbf{0})$$

Fixed-target collision

- Total 4-momentum is $p = (E_1/c + m_2 c, \mathbf{p}_1)$
- Total CoM energy

$$E'^2 = p^\mu p_\mu c^2 = (m_1^2 + m_2^2)c^4 + 2E_1 m_2 c^2$$

- Boost of CoM frame is

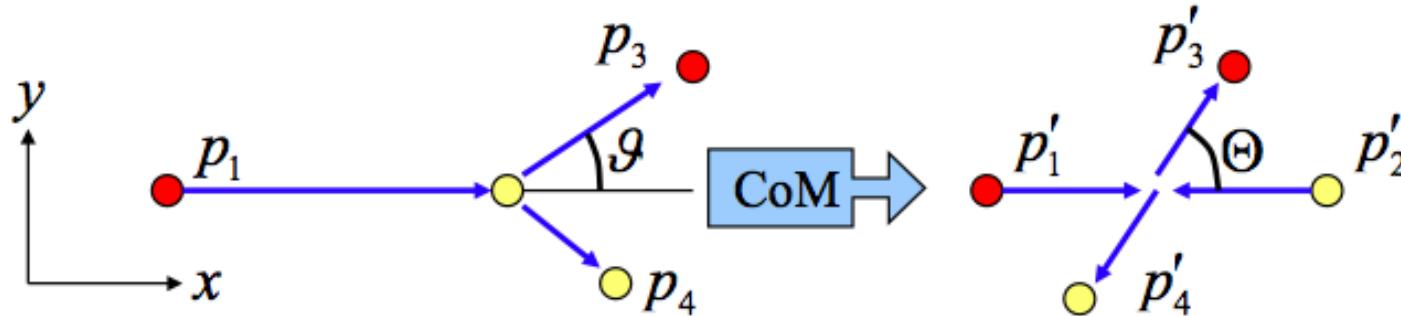
E' grows slowly with E_1

$$\beta = \frac{\mathbf{p}_1}{E_1/c + m_2 c} = \frac{m_1 \gamma_1 \mathbf{v}_1}{m_1 \gamma_1 c + m_2 c}$$

Approaches \mathbf{v}_1/c for large E_1

Perdita di energia: cinematica max trasferimento di energia

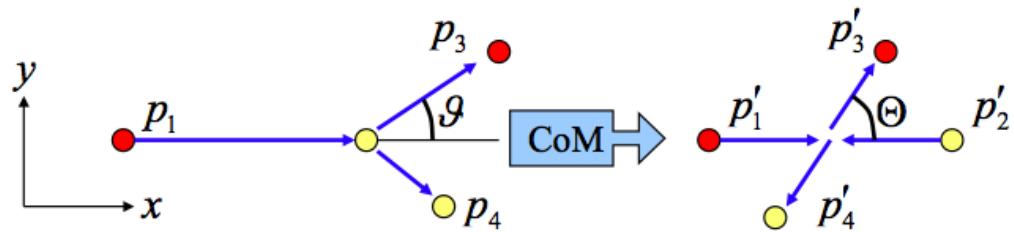
- Particle 1 hits particle 2 and get elastically scattered



- Cross section is calculated in CoM frame
 - By treating it as a central-force problem
- Experiment is done in the laboratory frame
- We need to learn how to translate between the CoM and the laboratory frames

It is more convenient to study the collision in the CM frame wrt the LAB frame since everything is symmetric and the particle momenta dont change length but only direction

Perdita di energia: cinematica



- Total momentum is $p^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu = (E_1/c + m_2 c, \mathbf{p}_1)$

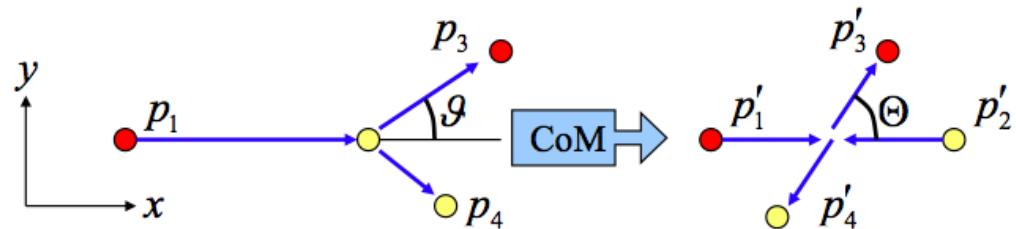
$$\rightarrow \beta = \frac{\mathbf{p}}{p^0} = \frac{\mathbf{p}_1 c}{E_1 + m_2 c^2} \quad p^0 = E/c$$

- Let's get γ as well

$$E_{\text{cm}}^2/c^2 = (E_1/c + m_2 c)^2 - \mathbf{p}_1^2 = m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2E_1 m_2$$

$$\rightarrow \gamma = \frac{E_{\text{lab}}}{E_{\text{cm}}} = \frac{E_1 + m_2 c^2}{\sqrt{m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2E_1 m_2 c^2}}$$

Perdita di energia: cinematica



- Now we can boost p_1 to CoM

$$p_1^\mu = (E_1/c, p_1, 0, 0) \rightarrow p_1'^\mu = (E'_1/c, p'_1, 0, 0)$$

$$\rightarrow E'_1 = \gamma(E_1 - \beta p_1 c) \quad p'_1 = \gamma(p_1 - \beta E_1/c)$$

- p_3' is given by rotating p_1' by Θ

$$p_3'^\mu = (E'_1/c, p'_1 \cos \Theta, p'_1 \sin \Theta, 0) \quad \text{Since the collision is elastic}$$

- Boost this back to get p_3

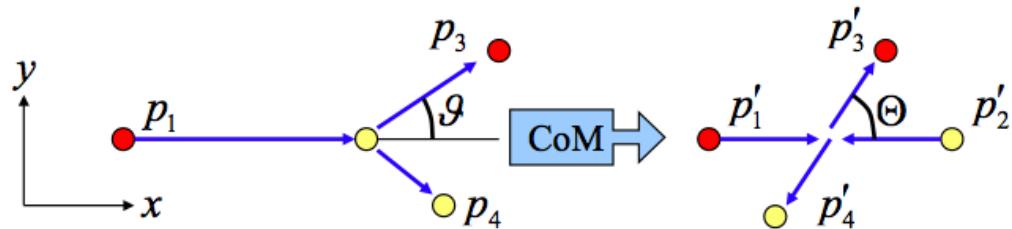
$$E_3 = \gamma(E'_1 + \beta p'_1 c \cos \Theta) \quad p_3^1 = \gamma(p'_1 \cos \Theta + \beta E'_1/c) \quad p_3^2 = p'_1 \sin \Theta$$

- Scattering angle in lab frame is

$$\tan \vartheta = \frac{p_3^2}{p_3^1} = \frac{\sin \Theta}{\gamma(\cos \Theta + \beta E'_1/(p'_1 c))} = \frac{\sin \Theta}{\gamma(\cos \Theta + \beta/\beta'_1)}$$

Velocity of
1 in CoM

Perdita di energia: cinematica



- What happens to the kinetic energy?

$$E_3 = \gamma^2 \left[(1 - \beta^2 \cos \Theta) E_1 - \beta (1 - \cos \Theta) p_1 c \right]$$

- At $\Theta = 0$ $E_3 = \gamma^2 (1 - \beta^2) E_1 = E_1$ Makes sense
- With a little bit of work

Kinetic energies

$$\frac{T_3}{T_1} = 1 - \frac{2\rho(1 + \mathcal{E}_1/2)}{(1 + \rho)^2 + 2\rho\mathcal{E}_1} (1 - \cos \Theta)$$
$$\mathcal{E}_1 = T_1 / m_1 c^2$$
$$\rho = m_1 / m_2$$

- Worst case is $\Theta = \pi$

$$\frac{(T_3)_{\min}}{T_1} = \frac{(1 - \rho)^2}{(1 + \rho)^2 + 2\rho\mathcal{E}_1}$$

This corresponds to the max energy transfer to the target $\Delta E_{\max} = T_1 - T_{3\min}$

The min energy transfer corresponds to $\cos \Theta = 1$ where $T_3 = T_1$ and therefore $\Delta E_{\min} = 0$

Perdita di energia: cinematica

$$\frac{(T_3)_{\min}}{T_1} = \frac{(1-\rho)^2}{(1+\rho)^2 + 2\rho\mathcal{E}_1}$$

- Non-relativistic limit $T_1 \ll m_1 c^2, m_2 c^2$
$$\frac{(T_3)_{\min}}{T_1} = \frac{(1-\rho)^2}{(1+\rho)^2}$$
 If $m_1 \ll m_2$, almost no energy lost in the collision, as if $m_2 \ll m_1$, max loss for $m_1 = m_2$, ie $T_{3\min} = 0$
- Ultra-relativistic limit $T_1 \gg m_1 c^2, m_2 c^2$
$$\frac{(T_3)_{\min}}{T_1} = \frac{(1-\rho)^2}{2\rho\mathcal{E}_1} = \frac{(m_2 - m_1)^2 c^2}{2m_2 T_1}$$
 $(T_3)_{\min}$ is independent of T_1

Perdita di energia: cinematica

We are interested to energy transferred to the target

The energy lost by the projectile is transferred to the target (initially at rest)

The max energy of the target after the collision is

$$T_{\max target} = T_1 - T_{1\min} = T_1(1 - T_{1\min}/T_1)$$

Making the substitution $T_1 = m_1 c^2(\gamma - 1)$, with very little algebra we get

$$T_{\min target} = 0 \quad \text{for } \cos\Theta = 1, \Theta = 0 \quad \text{where } m_1 \rightarrow m \text{ e } m_2 \rightarrow M$$

$$T_{\max target} = \frac{2m(\beta\gamma)^2}{1 + \left(\frac{m}{M}\right)^2 + 2\gamma\frac{m}{M}} \quad \text{for } \cos\Theta = -1, \Theta = \pi$$

e.g. protons on electrons $\frac{m}{M} \rightarrow 0$ e $\frac{\gamma m}{M} \rightarrow 0$

$$\Rightarrow T_{\max target} \approx 2m(\beta\gamma)^2 = 2m\left(\frac{p_0}{M}\right)^2$$

Elastic scattering

- Conservation of momentum alone dictates some features of projectile-target elastic scattering
 - Target mass \gg incoming energy implies momentum transfer but nearly no energy transfer to target; incoming particle can scatter at large angles
 - Target mass \ll incoming energy implies potentially large energy transfer to target, but little change in direction of incoming particle
- As a result, scattering off electrons and off nuclei have very different characteristics

Collisions of charged particles

In a medium a particle with mass \gg of e^- collides on:

- **Nuclei** → small energy transferred to the nucleus, but significative scattering angle.
- **Atomic Electrons** → incident particle loses energy on electrons, but get negligible deviation.

Collisioni fra particelle cariche.

- Quando una particella attraversa un mezzo continuo siamo interessati a conoscere:
 - **quanta E deposita**
 - che deviazione subisce
- Tratteremo i due processi in maniera indipendente (anche se perdite di energia e deviazione NON sono in realta' indipendenti)

Perdite di energia: Ionizzazione

Dei due processi elettromagnetici, le collisioni inelastiche con gli e- atomici sono praticamente le sole responsabili delle perdite continue di energia di particelle pesanti nella materia.

In queste collisioni ($\sigma \approx 10^{-17} - 10^{-16} \text{ m}^2$), la particella proiettile cede E all'atomo.

Le perdite nelle singole collisioni sono piccole, ma il # e' grande per unita' di lunghezza \rightarrow effetto cumulativo osservabile anche nel caso di spessori sottili (e.g. Un p di 10 MeV perde tutta la sua energia in 0.25 mm di Cu).

Le perdite per ionizzazione comprendono:

- Collisioni *soft* \leftrightarrow Eccitazione di stati atomici o ionici, $\Delta E < E_{\text{ionizz}}$
- Collisioni *hard* \leftrightarrow Ionizzazione di atoni o ioni, $\Delta E > E_{\text{ionizz}}$
se $E \gg E_{\text{ionizz}}$ \rightarrow e- energetici, raggi δ

lo scattering elastico su nucleo avviene frequentemente ma le perdite di energia sono trascurabili se la massa del bersaglio e' << di quella del proiettile.

Energy loss

La perdita totale di energia per una particella che attraversa un mezzo e'

$$-\Delta E = \sum_{i=1}^N \delta E_i$$

dove N e' il numero di collisioni e δE_i e' la perdita di energia nello i'esimo urto

Il processo di perdita e' stocastico: il numero di urti e la perdita di energia in ciascun urto non sono note a priori. Cioe' facendo attraversare ad N particelle lo stesso spessore di materiale in generale la perdita di energia sara' differente in ciascun evento, poiche' il # di urti e' diverso per ogni particella e in ciascun urto la particella perde energie diverse.

Tuttavia, se N e' grande, e' possibile calcolare la perdita MEDIA di energia e la sua deviazione standard ("fluttuazioni")

- we want to know the energy lost by a particle when crossing a medium:
 - correct approach: get diff cross section as a function of E $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} d\varepsilon$
 - calculate the average energy loss
 - $dE = nZdx \int_{\varepsilon_{cut}}^{\varepsilon_{max}} \varepsilon \frac{d\sigma}{d\varepsilon} d\varepsilon$
 - This is the Bethe-Bloch approach
 - We can get most of results from a classical calculation of energy loss in a medium

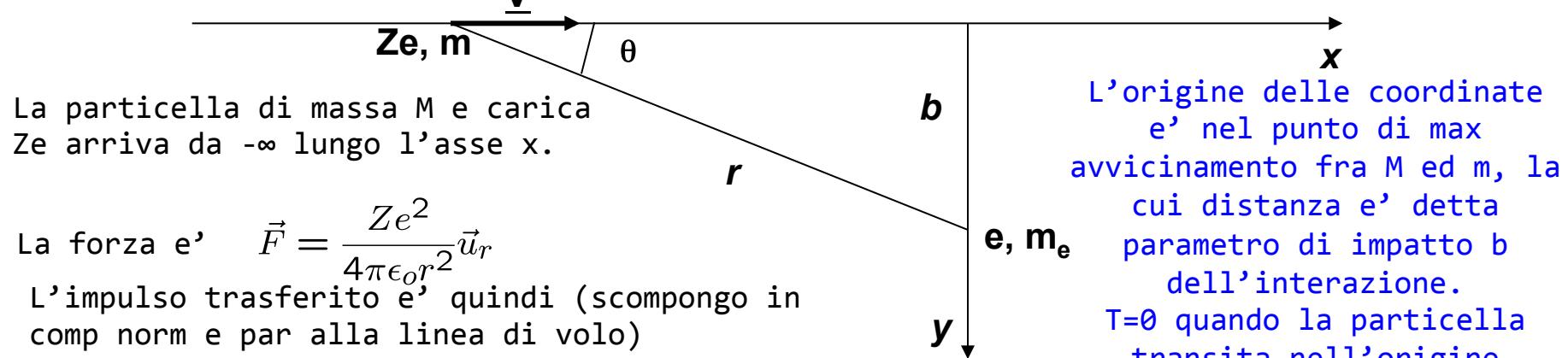
Energy loss - classical approach

La trattazione rigorosa richiede l'uso della meccanica quantistica ma e' possibile ottenere le caratteristiche principali con una trattazione semiclassica

Useremo l'approssimazione M proiettile $\gg M$ bersaglio, cosi' che nell'interazione il proiettile (veloce) non viene deviato (in maniera apprezzabile) e prosegue indisturbato.

Quello che vogliamo fare e' ottenere la perdita di energia per unita' di lunghezza percorsa ("perdita specifica") in un mezzo dE/dx

Ionizzazione: caso non relativistico



$$\vec{p}_t = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}_p dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}_n dt$$

$$\vec{p}_t = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\theta dx}{r^2} \right) \vec{u}_x + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\theta dx}{r^2} \right) \vec{u}_y \right]$$

$$\text{Elimino } r: b = r \sin\theta \rightarrow r = b / \sin\theta$$

$$x = r \cos\theta \rightarrow x = b \cos\theta / \sin\theta \rightarrow dx = -b d\theta / \sin^2\theta$$

$$\vec{p}_t = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_0^\pi \frac{\cos\theta \sin^2\theta}{b^2} \frac{-bd\theta}{v \sin^2\theta} \vec{u}_x + \int_0^\pi \frac{-b}{\sin^2\theta} \frac{d\theta \sin^3\theta}{v} \vec{u}_y \right]$$

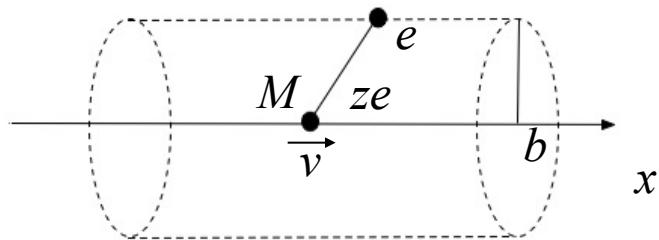
Il primo integrale e' zero per simmetria

$$\vec{p}_t = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 bv} \left[\int_0^\pi \sin\theta d\theta \vec{u}_y \right] = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 bv} \vec{u}_y$$

E' l'impulso trasferito dalla particella incidente all'e-

Another way to get p_t

- Consider heavy particle, mass M , charge ze , velocity v .
- Atomic electron at distance b from particle trajectory:



- Impulse transferred to the electron:

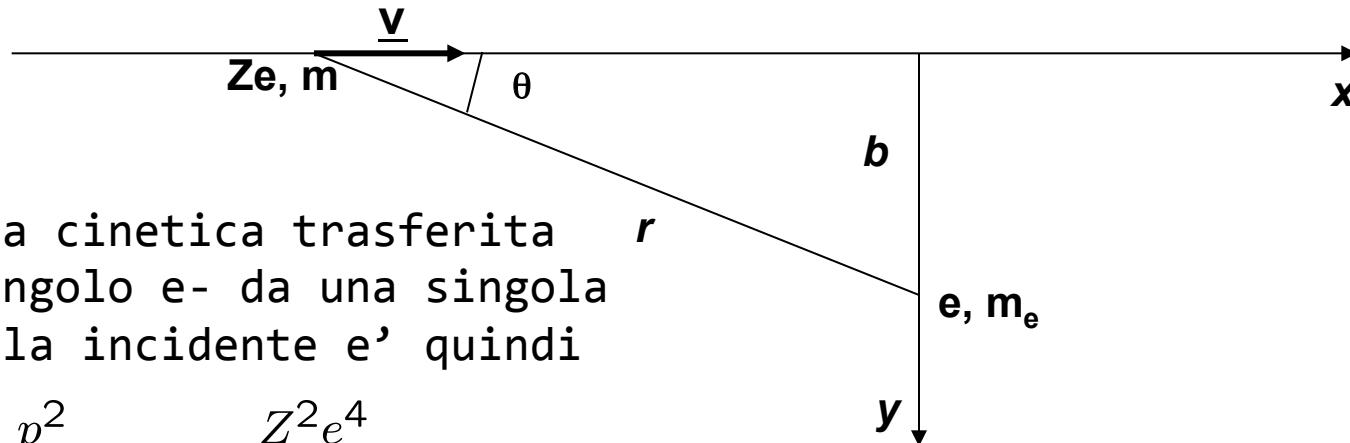
$$p_t = \int \mathbf{F} dt = e \int E_{\perp} dt = e \int E_{\perp} \frac{dt}{dx} dx = e \int E_{\perp} \frac{dx}{v}$$

- by symmetry only the component \perp to line of flight contributes

$$\text{Gauss Law: } \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \int E_{\perp} 2\pi b dx = \frac{ze}{\epsilon_0} \Rightarrow \int E_{\perp} dx = \frac{2ze}{4\pi\epsilon_0 b}$$

$$\Rightarrow p_t = \frac{2ze^2}{4\pi\epsilon_0 bv}$$

Ionizzazione: caso non relativistico



L'energia cinetica trasferita ad un singolo e- da una singola particella incidente e' quindi

$$\Delta E_{cin} = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{Z^2 e^4}{8\pi^2 \epsilon_0^2 b^2 v^2 m_e}$$

Se abbiamo una densita' di volume di e- N_e , allora l'energia trasferita per unita' di volume e'

$$U_{cin} = N_e \Delta E_{cin} = \frac{N_e Z^2 e^4}{8\pi^2 \epsilon_0^2 b^2 v^2 m_e} = \left(\frac{e^4 N_e}{8\pi^2 \epsilon_0^2 m_e} \right) \frac{Z^2}{b^2 v^2}$$

L'energia trasferita dipende dal parametro d'impatto b , dalla velocita' e dalla carica della particella incidente

NB: questa e' l'energia trasferita all'elettrone (positiva), che corrisponde a quella persa dalla particella incidente (negativa): $E_{e,fin} = \Delta E$, $E_{fin,M} = E_{inc,M} - \Delta E$

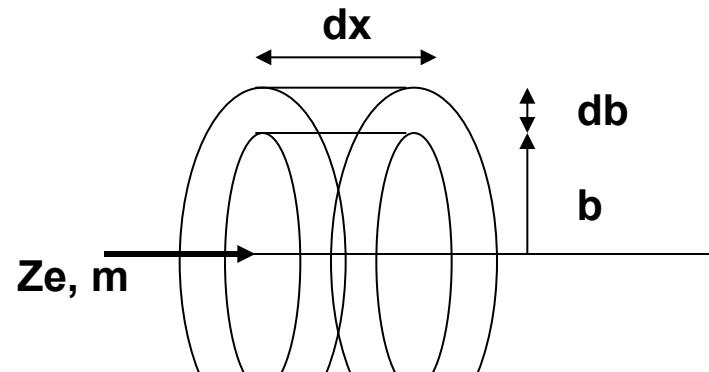
Ionizzazione: caso non relativistico

Nel percorrere un tratto dx , particella cede energia a tutti gli e^- con parametro di impatto fra b e $b+db$, contenuti nel volume $dV=2\pi bdbdx$ quindi

$$-dE = U_{cin} \times dV = U_{cin} \times 2\pi bdbdx$$

$$\downarrow$$

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi U_{cin} bdb$$



$$U_{cin} = \left(\frac{e^4 N_e}{8\pi^2 \epsilon_0^2 m_e} \right) \frac{Z^2}{b^2 v^2}$$

La perdita totale media di energia si ottiene integrando sui parametri d'impatto (NB: b non e' un osservabile).

Si potrebbe pensare che $b_{min}=0$ e $b_{max}=+\infty$, ma ci sono argomenti che suggeriscono che non sia così'

$$-\frac{dE}{dx} = \int_{b_{min}}^{b_{max}} 2\pi \left(\frac{e^4 N_e}{8\pi^2 \epsilon_0^2 m_e} \right) \frac{Z^2}{b^2 v^2} bdb$$

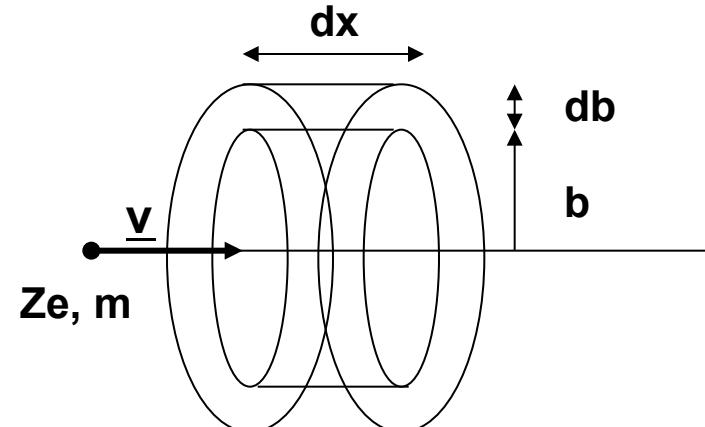
Argomenti: $b > \lambda_{DeBroglie}$, i.e. principio di indeterminazione, $b < \infty$ a causa dello screening della carica

Ionizzazione: caso non relativistico

Quindi occorre stabilire valori finiti degli estremi con qualche argomento fisico

$$-\frac{dE}{dx} = \int_{b_{min}}^{b_{max}} 2\pi \left(\frac{e^4 N_e}{8\pi^2 \epsilon_0^2 m_e} \right) \frac{Z^2}{b^2 v^2} b db$$

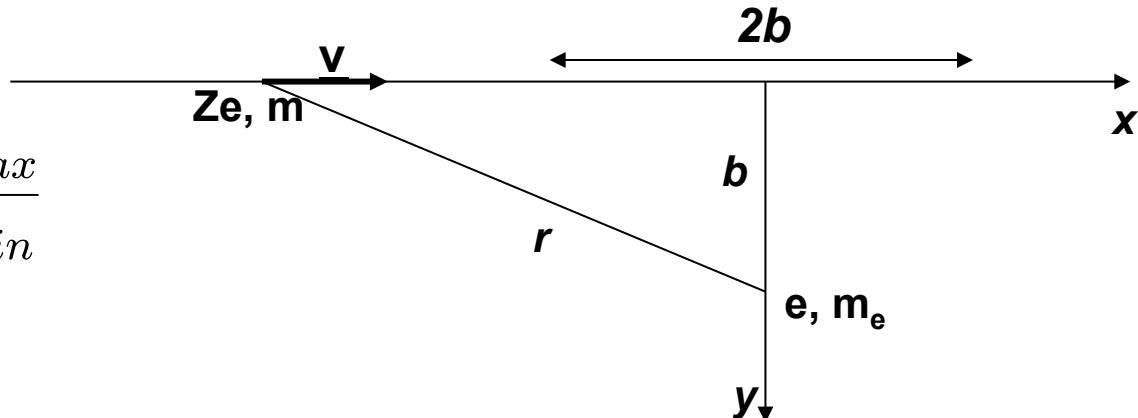
$$-\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi \epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{b_{max}}{b_{min}}$$



La dipendenza log viene dal fatto che $p \propto b^{-2}$, ma $dN \propto N_e b db$, quindi per piccoli b , p e' grande ma dN e' piccolo e viceversa. Dato che la dipendenza da b (inosservabile) e' solo log, non e' necessario conoscere con grande precisione il loro rapporto

Ionizzazione: caso non relativistico

$$-\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{b_{max}}{b_{min}}$$



Il limite superiore b_{max} puo' essere ottenuto considerando il limite superiore alla durata dell'interazione, oltre il quale l'e- non puo' piu' essere considerato in quiete, cioe' quando la durata dell'interazione τ e' dello stesso ordine del periodo orbitale dell'e-.

La durata dell'interazione puo' essere calcolata nel seguente modo:

La forza elettrostatica alla distanza di max avvicinamento e'

$$F = \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 b^2}$$

Se la durata dell'interazione e' τ , allora $\Delta p \sim F(b)\tau$

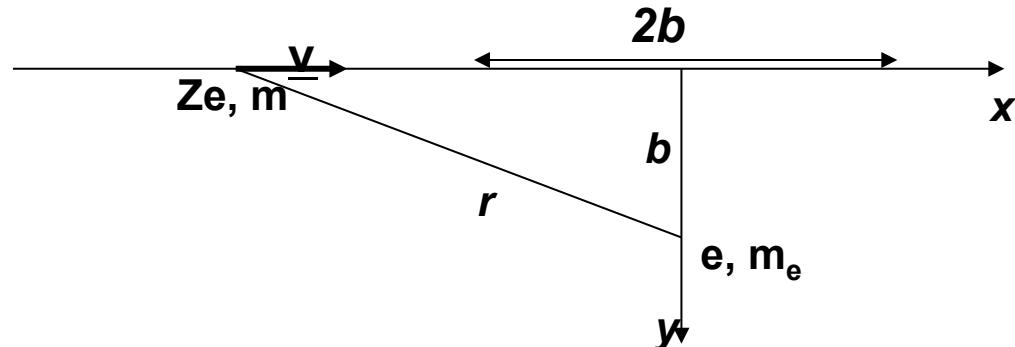
confrontando con $\Delta p = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 bv}$ si vede che e' "come se" l'interazione durasse $\tau = 2b/v$

$$\text{Così' } \tau_{max} \sim 1/v_0 \rightarrow 2b_{max}/v \sim 2\pi/\omega_0 \rightarrow b_{max} = \pi v/\omega_0$$

Per durate maggiori, l'interazione e' adiabatica \rightarrow non c'e' trasferimento netto di energia

Ionizzazione: caso non relativistico

$$-\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{b_{max}}{b_{min}}$$



Per il limite inferiore b_{min} ci sono due possibilità a seconda che sia valido un approccio classico o quantistico.

Classicamente, b è minimo quando è \max il trasferimento di energia, che, come si è visto, è, per urti centrali:

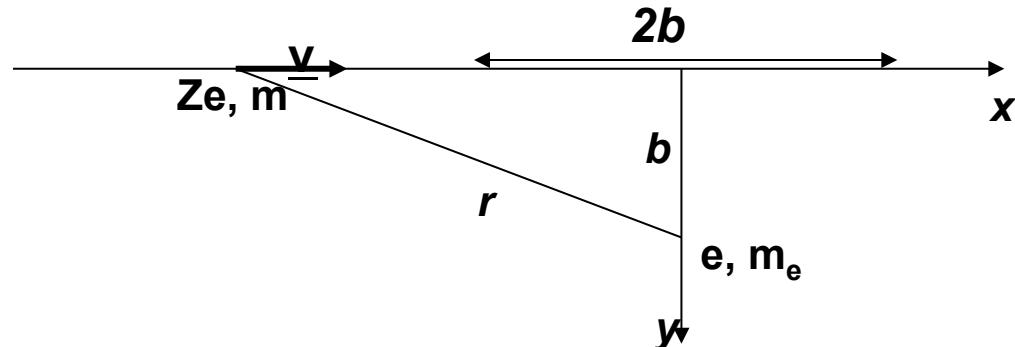
$$\Delta E_{inc} = (1/2)m_e v_e^2 \simeq (1/2)m_e(2v)^2 = 2m_e v^2$$

La distanza di minimo avvicinamento è quella per cui l'energia potenziale elettrostatica di interazione è uguale alla energia cinetica trasferita:

$$\frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 b_{min}} \simeq 2m_e v^2 \quad \longrightarrow \quad b_{min} \simeq \frac{e^2 Z}{8\pi\epsilon_0 m_e v^2}$$

Ionizzazione: caso non relativistico

$$-\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{b_{max}}{b_{min}}$$



L'altra possibilita' viene dal fatto che dovremmo usare la meccanica quantistica per descrivere le interazioni a piccole distanze.

La max velocita' dell'e- e' $v_e \approx 2v$ per cui la variazione di impulso e' $\Delta p \approx 2m_e v$ e quindi dal principio di indeterminazione $\Delta x \approx \hbar/2m_e v \rightarrow$

$$b_{min} = \hbar/2m_e v$$

Se b_{min} e' quello quantistico, dovremmo calcolare propriamente dE/dx con la meccanica quantistica. Fatto salvo questo, b_{min} ci dice il minimo valore per il quale i calcoli fatti fanno *senso*

Bisogna avere un criterio per la scelta di b_{min}

Ionizzazione: caso non relativistico

Il criterio di scelta e' quello di prendere il piu' grande b_{min} fra quello classico e quello quantistico per il problema in questione

$$\frac{b_{min}(QU)}{b_{min}(CL)} \simeq \frac{\hbar}{2m_e v} \frac{8\pi\epsilon_0 m_e v^2}{e^2 Z} = \frac{4\pi\hbar\epsilon_0 v}{e^2 Z}$$

Ponendo $\alpha = \frac{e^2}{4\pi c \epsilon_0 \hbar} \approx \frac{1}{137}$ Si ottiene

$$a \equiv \frac{b_{min}(QU)}{b_{min}(CL)} = \left(\frac{1}{\alpha Z}\right) \frac{v}{c} \simeq \left(\frac{137}{Z}\right) \frac{v}{c}$$

Se $v/c < Z/137 \rightarrow a < 1 \rightarrow$ limite classico

Se $v/c > Z/137 \rightarrow a > 1 \rightarrow$ limite quantistico

Per particelle con $v/c \approx 0.01Z$, occorre usare il limite QU, ma ci sono casi in cui si puo' applicare il caso classico, p. es. nel caso di nubi di H caldo nella galassia

Ionizzazione: caso non relativistico

Assumendo che si applichi il limite quantistico si ha

$$-\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2}\right) \ln \frac{2\pi m_e v^2}{\hbar\omega_0}$$

La frequenza puo' essere espressa come potenziale di ionizzazione I : L'energia dello stato fondamentale (in un modello naive alla Bohr) e' $E=(1/2) \hbar\omega_0$, che e' anche l'energia minima per liberare l'e- $\rightarrow \hbar\omega_0 = 2I$

$$-\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2}\right) \ln \frac{\pi m_e v^2}{I}$$

Tenendo conto che in un atomo ci sono Z elettroni, I e' in realta' una media pesata sui vari livelli di E degli e- che possono essere espulsi dall'atomo (difficile da calcolare eccetto che per gli atomi piu' semplici e va trovata empiricamente): $I \rightarrow \bar{I}$ $\pi/2$ per convenzione \rightarrow

$$-\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2}\right) \ln \frac{2m_e v^2}{\bar{I}} \quad \longrightarrow \quad -\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2}\right) \ln \frac{E_{max}}{\bar{I}}$$

Ionizzazione: spettro degli e-

Gli elettroni di rinculo hanno una distribuzione di energia caratteristica. Puo' essere facilmente calcolata

Il # di e- con b fra b e b+db e' $dN = 2\pi N_e b db dx$
 → devo esprimere b in funzione di E

$$E_{cin} = \left(\frac{e^4 Z^2}{8\pi^2 \epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \frac{1}{b^2} = \frac{k}{b^2}$$

$$\text{Quindi } dE = -\frac{2kdb}{b^3} \quad \rightarrow \quad db = -\frac{b^3 dE}{2k}$$

$$dN = 2\pi N_e b db dx \quad \rightarrow \quad dN = -2\pi N_e dx \frac{b^4 dE}{2k}$$

$$dN = -\pi N_e dx \left(\frac{k}{E} \right)^2 \frac{dE}{E}$$

$$dN = -\pi N_e \frac{k}{E^2} dE dx$$

$$dN = -\pi N_e \left(\frac{e^4 Z^2}{8\pi^2 \epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \frac{1}{E^2} dE dx$$

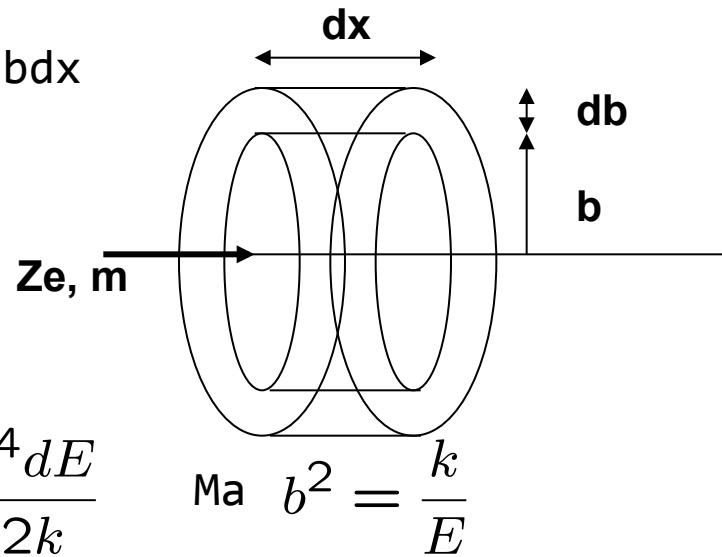
E' il # di e- emessi con E fra E ed E + dE nel tratto di lunghezza dx

$$n(E) = -\frac{dN}{dE dx} = \pi N_e \left(\frac{e^4 Z^2}{8\pi^2 \epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \frac{1}{E^2}$$

Lo spettro degli e- emessi segue una legge di potenza E^{-2}
 $[n(E)] = [E^{-1} L^{-1}]$

Con $I < E < E_{max}$

Gli elettroni emessi con $E \approx E_{max}$ vengono detti **raggi δ**



Ionizzazione: caso non relativistico

La perdita media di energia per unita' di lunghezza si ottiene da

$$\langle \frac{dE}{dx} \rangle = \int_{E_{min}=\bar{I}}^{E_{max}} En(E) dE \quad \rightarrow \quad \frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{E_{max}}{\bar{I}}$$

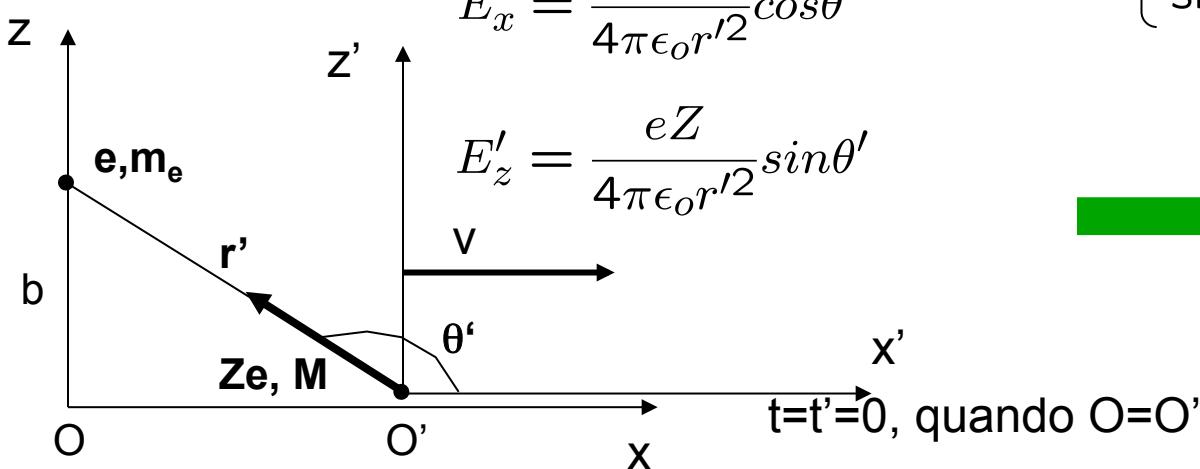
Questa e' la formula **classica**, in cui ci sono le dipendenze corrette dalle variabili e costanti fondamentali:

- ❖ la perdita specifica non dipende dalla massa della particella incidente,
- ❖ dipende dalla m^{-1} della particella bersaglio \rightarrow perdite per ionizzazione trascurabili per interazione di ionizzazione con particelle pesanti (i.e. su nuclei),
- ❖ dipende da v^{-2} della particella incidente \rightarrow particelle "lente" perdono piu' energia

Ionizzazione: caso relativistico

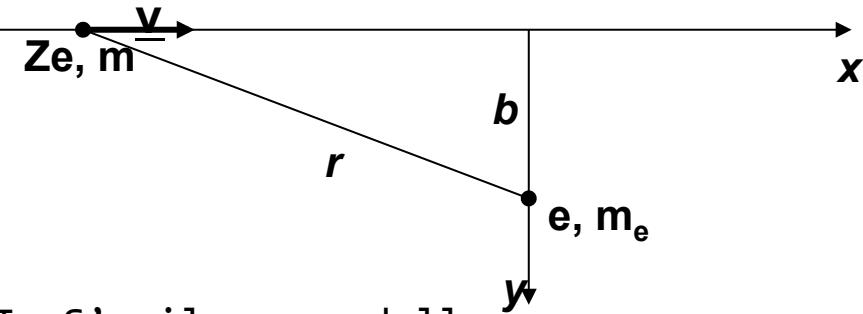
L'estensione al caso relativistico e' semplice.

In questo caso, il campo della particella incidente che viene misurato alla posizione dell'e- e' un campo relativistico, ma se ci mettiamo nel riferimento in cui la particella incidente e' quiete, il campo e' quello eletrostatico di Coulomb \rightarrow facciamo una trasformazione di Lorentz dal riferimento del "laboratorio" S, in cui l'e- e' in quiete, a quello di quiete della particella incidente, S'



$$E'_x = \frac{eZ}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \cos\theta'$$

$$E'_z = \frac{eZ}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \sin\theta'$$



In S' , il campo della particella incidente sull'elettrone e' $\vec{E}' = \frac{eZ}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \vec{u}'_r$

$$\begin{cases} \cos\theta' = -x'/r' \\ \sin\theta' = z'/r' \end{cases}$$

$$E'_x = -\frac{eZ}{4\pi\epsilon_0 r'^3} x'$$

$$E'_z = \frac{eZ}{4\pi\epsilon_0 r'^3} z'$$

Ionizzazione: caso relativistico

In S' , l'e- ha coordinate $(-vt', 0, b, t')$ $\rightarrow r' = \sqrt{b^2 + (vt')^2}$

I tempi misurati in S' e da un osservatore in S sono connessi dalla trasformazione

$$t' = \gamma(t - \frac{vx}{c^2}) \quad \text{Ma in } S, \text{ le coordinate dell'e- sono } (0, 0, b, t) \quad t' = \gamma t$$

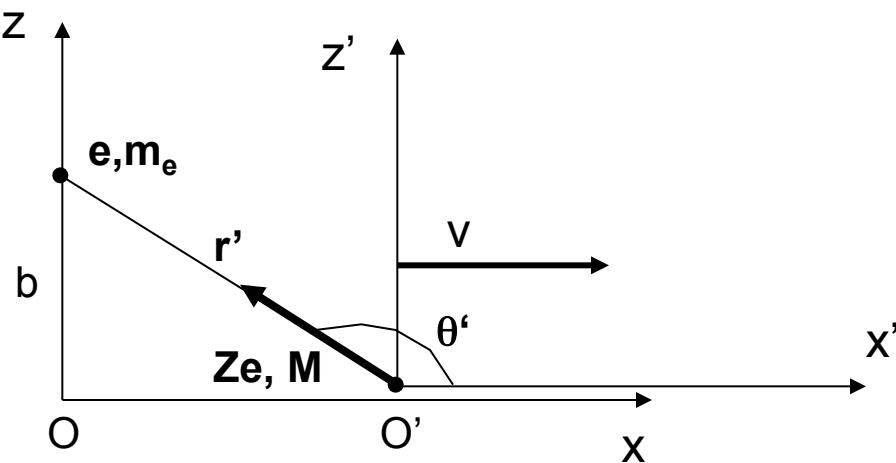
$$r' = \sqrt{b^2 + (v\gamma t)^2}$$

e' la distanza in S' tra M ed l'e- espressa in funzione delle coordinate in S



$$E'_x = -\frac{eZ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma vt}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}}$$

$$E'_z = \frac{eZ}{4\pi\epsilon_0} \frac{b}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}}$$



In questo modo abbiamo espresso i campi in S' in funzione delle coordinate misurate in S , ma questi NON sono i campi in S . Per trovarli dobbiamo trasformare i campi da S' ad S

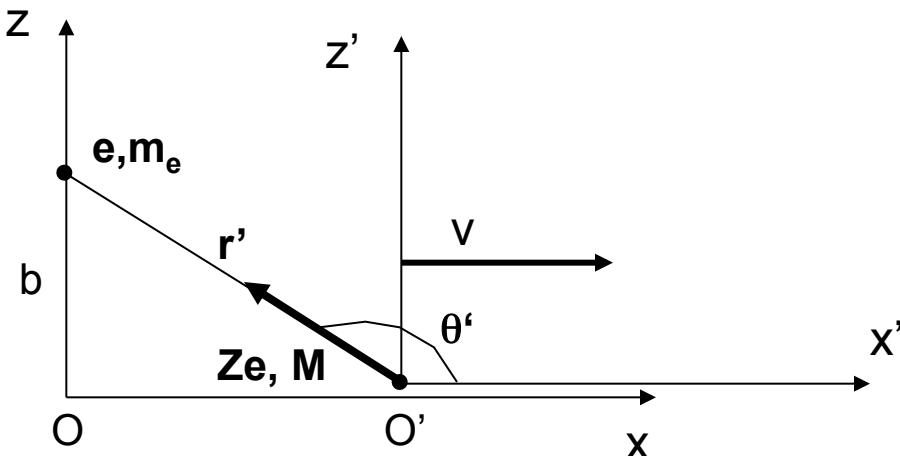
Ionizzazione: caso relativistico

Per ottenere i campi in S , dobbiamo fare le trasformazioni da S' ad S , cioè dobbiamo trovare i campi misurati in un rif in moto con velocità $-v$ lungo x'

I campi trasformano come le componenti del tensore doppio di Maxwell

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta F_{\alpha\beta}$$



$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} \quad \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}$$

$$\vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} + \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}_{\perp})$$

$$\vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} - \vec{v} \times \vec{B}_{\perp})$$

Queste sono le trasformazioni standard che danno i campi in S' , noti quelli in S

Ionizzazione: caso relativistico

A noi servono le trasf inverse, che si ottengono semplicemente scambiando gli apici e trasformando \mathbf{v} in $-\mathbf{v}$

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel} \quad \vec{E}_{\perp} = \gamma(\vec{E}'_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}'_{\perp})$$

$$\vec{B}_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel} \quad \vec{B}_{\perp} = \gamma(\vec{B}'_{\perp} - \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}'_{\perp})$$

$$B_x = B'_{x'} = 0$$

$$B_z = -(\gamma \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}'_{\perp})_z = -\gamma v E'_y = 0$$

$$B_y = -(\gamma \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}'_{\perp})_y = -\frac{eZ}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\gamma bv}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}}$$

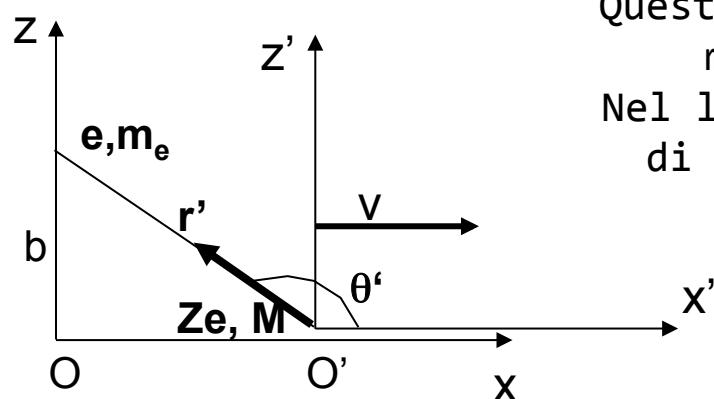
In S' , $\mathbf{B}' = 0 \rightarrow$

$$E_x = E'_{x'} \quad E_z = \gamma E'_z \quad E_y = \gamma E'_y = 0$$

$$E_x = -\frac{eZ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma vt}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}}$$

$$E_z = \frac{eZ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma b}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}}$$

$$B_y = -\frac{v}{c^2} E_z$$



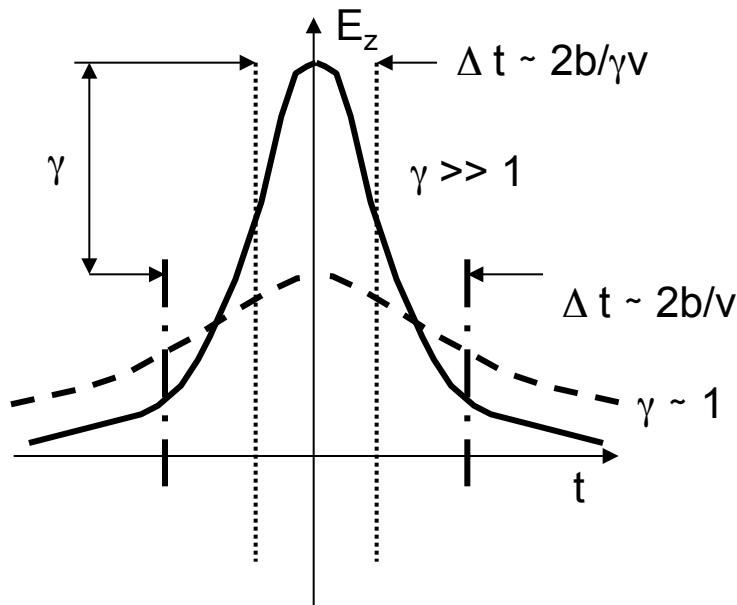
Questi sono i campi dovuti ad una particella in moto, misurati in una posizione fissa nello spazio
 Nel limite $v \rightarrow c$, $E_z = -cB_y$, indistinguibile da quello di un'onda polarizzata linearmente che si propaga lungo x

Ionizzazione: caso relativistico

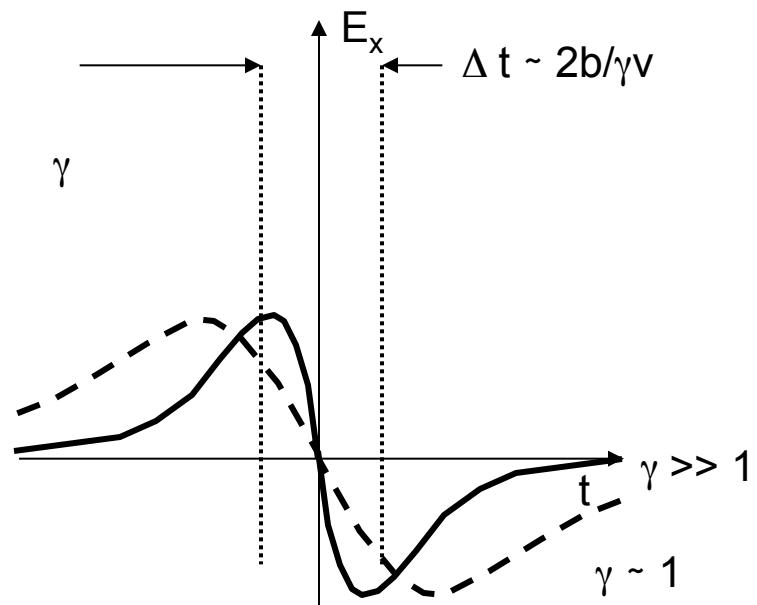
$$E_z = \frac{eZ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma b}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}}$$

$$E_x = -\frac{eZ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma vt}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}}$$

Alla distanza di max avvicinamento a $t=0$, $E_z = \gamma E_z(\text{NR})$, ma la durata dell'interazione $2b/v$ in S' e' contratta di un fattore γ (contrazione di Lorentz per b lungo x) in S



Alla distanza di max avvicinamento a $t=0$, $E_x = 0$



Ionizzazione: caso relativistico

Ora si procede esattamente come nel caso non rel. p trasferito e'

$$\vec{p}_t = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}_{\parallel} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}_{\perp} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}_x dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}_z dt$$

Come prima la comp. \parallel da contributo nullo perche' dispari in t

$$\vec{p}_t = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e E_z dt \right) \vec{u}_z \quad \vec{p}_t = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^2 Z \gamma b dt}{4\pi\epsilon_0 [b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}} \right) \vec{u}_z$$

$$\vec{p}_t = \frac{e^2 Z \gamma b}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}} \right) \vec{u}_z = \frac{e^2 Z \gamma b}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{b^3 [1 + (v\gamma t/b)^2]^{3/2}} \right) \vec{u}_z$$

Pongo $x = \gamma v t / b \rightarrow dx = (\gamma v / b) dt \rightarrow dt = (b / \gamma v) dx$

$$= \frac{e^2 Z \gamma}{4\pi\epsilon_0 b^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(b / \gamma v) dx}{[1 + x^2]^{3/2}} \right) \vec{u}_z = \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 b v} 2 \left(\int_0^{+\infty} \frac{dx}{[1 + x^2]^{3/2}} \right) \vec{u}_z$$

$$= \frac{e^2 Z}{2\pi\epsilon_0 b v} \cdot 1 \cdot \vec{u}_z$$

L'impulso trasferito e' \perp alla traiettoria di volo

Ionizzazione: caso relativistico

$$p_t = \frac{e^2 Z}{2\pi\epsilon_0 b v}$$

Il risultato e' esattamente lo stesso del caso non relativistico, dato che $E_z \rightarrow \gamma E_z$ ma $\tau \rightarrow \tau/\gamma$ e $p=F(b)\tau$

Procedo come prima e ottengo

$$-\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{b_{max}}{b_{min}}$$

Nel caso relativistico $\tau_{max} = 2b_{max}/\gamma v$

Così $\tau_{max} \sim 1/v_0 \rightarrow 2b_{max}/\gamma v \sim 2\pi/\omega_0 \rightarrow b_{max} = \pi v \gamma / \omega_0 = \gamma b_{max} (NR) = \pi \hbar v \gamma / 2I$

Per b_{min} , dal principio di indeterminazione di Heisenberg, si ha

$$\Delta x = \hbar / \Delta p = \hbar / \gamma \Delta p (NR) \rightarrow b_{min} = b_{min} (NR) / \gamma$$

Quindi $b_{max}/b_{min} = \gamma^2 2m_e v^2 / I$

$$-\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^4 N_e Z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \right) \ln \frac{2\gamma^2 m_e v^2}{I}$$

Bethe-Bloch

Il calcolo corretto e' quello quantistico, che non faremo (ma per i soliti entusiasti e' disponibile, se lo chiedete).

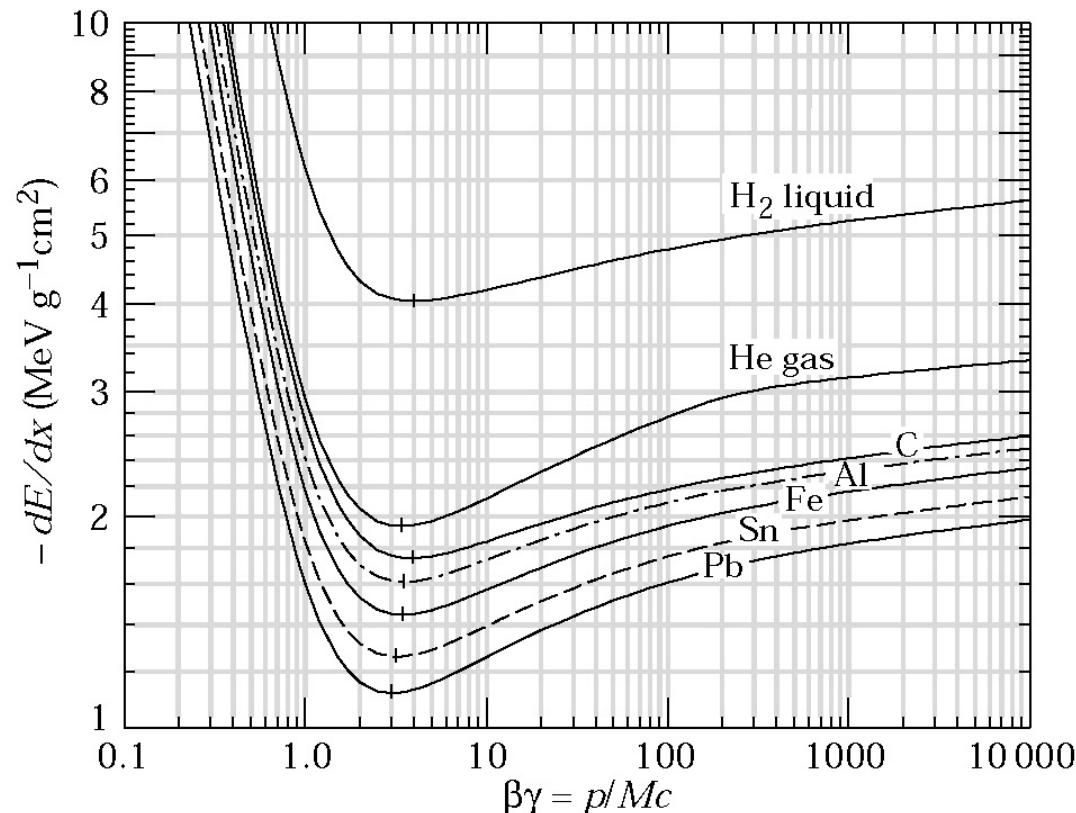
Il risultato ottenuto da Bethe e Bloch e'

$$\frac{dE}{dx} = \frac{z^2 e^4 N_e}{4\pi \epsilon_0^2 m_e v^2} \left[\ln\left(\frac{2\gamma^2 m_e v^2}{I}\right) - \frac{v^2}{c^2} \right]$$

La relazione corretta e' molto simile a quella ricavata, con solo un termine di ordine $O(1)$ che non c'e' in quella "classica". Compare quando si tiene conto dello spin dell'elettrone: la sez d'urto non e' quella di Rutherford ma quella di Mott

$$d\sigma/d\Omega = (d\sigma/d\Omega)_R (1 - \beta^2 \sin^2(\theta/2))$$

Valida per particelle non troppo relativistiche in mezzi non troppo densi



Ionizzazione: Bethe-Bloch

$$\frac{dE}{dx} = \frac{z^2 e^4 N_e}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} \left[\ln\left(\frac{2\gamma^2 m_e v^2}{I}\right) - \frac{v^2}{c^2} \right] \quad [\text{E/cm}]$$

Eliminiamo la densità di elettroni. La densità di numero di atomi del mezzo è $n = \rho/m_{\text{mezzo}}$

La massa m_{mezzo} si ottiene dalla relazione $m_{\text{mezzo}} = M_{\text{mol}}/N_A = A/N_A$, $M_{\text{mol}} =$ massa molare (Kg/mol) = A kg/mol \rightarrow

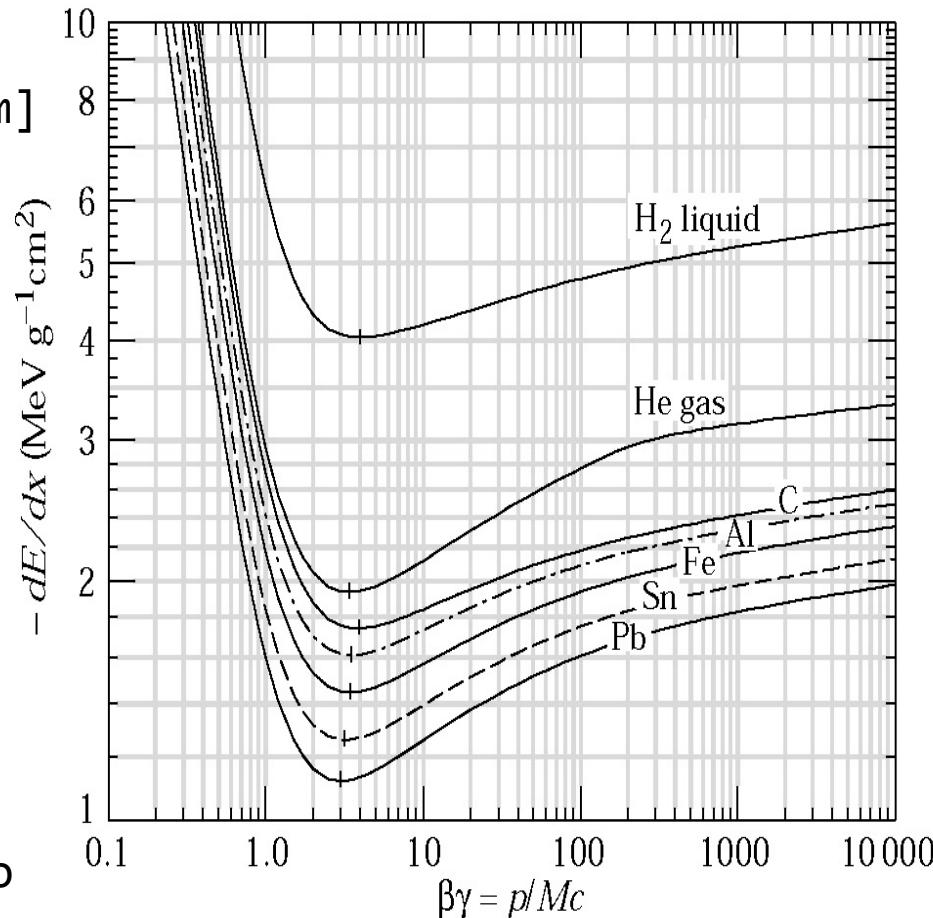
$$n_{\text{mezzo}} = \rho N_A/A,$$

Il numero atomico è Z quindi ci sono $N_e = Zn_{\text{Be}} = \rho N_A (Z/A)$ elettroni

$$\frac{dE}{dx} = \frac{N_A e^4 z^2}{4\pi\epsilon_0 m_e v^2} \frac{Z}{A} \rho \left\{ \ln\left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I}\right) - \beta^2 \right\}$$

La perdita dE non dipende SOLO dallo spessore, ma dal prodotto ρdx (gcm^{-2}). Posto quindi $X = \rho x$ si ha

$$\frac{dE}{dX} = \frac{N_A e^4 z^2}{4\pi\epsilon_0 m_e v^2} \frac{Z}{A} \rho \left\{ \ln\left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I}\right) - \beta^2 \right\} \quad [\text{E}/(\text{g/cm}^{-2})]$$



Per cui dE/dX NON dipende dalla densità del mezzo ed è “universale”. Le differenze osservate sono legate al potenziale di ionizzazione I , che varia da elemento ad elemento

Material thickness

- Thickness of material (x) is usually measured in gm/cm^2
- Related to distance (y) traversed via density:
- $x = y \rho$
- Used because relevant issue in determining interaction in matter is **how many scattering centres are traversed**
- Benchmark values for traversing 1 cm of material:
 - Lead: $x = 11.4 \text{ gm}/\text{cm}^2$
 - Iron: $x = 7.9 \text{ gm}/\text{cm}^2$
 - Water: $x = 1.0 \text{ gm}/\text{cm}^2$
 - Liquid H_2 $x = 0.07 \text{ gm}/\text{cm}^2$
 - Air: $x \sim 0.001 \text{ gm}/\text{cm}^2$

Ionizzazione: Bethe-Bloch

$$\frac{dE}{d\xi} = K \frac{z^2 Z}{\beta^2 A} \left[\ln\left(\frac{2m_e c^2 \gamma^2 \beta^2}{I}\right) - \beta^2 \right]$$

Misurando $\gamma = E/Mc^2$
e contemporaneamente
 $dE/d\xi$ si misura z

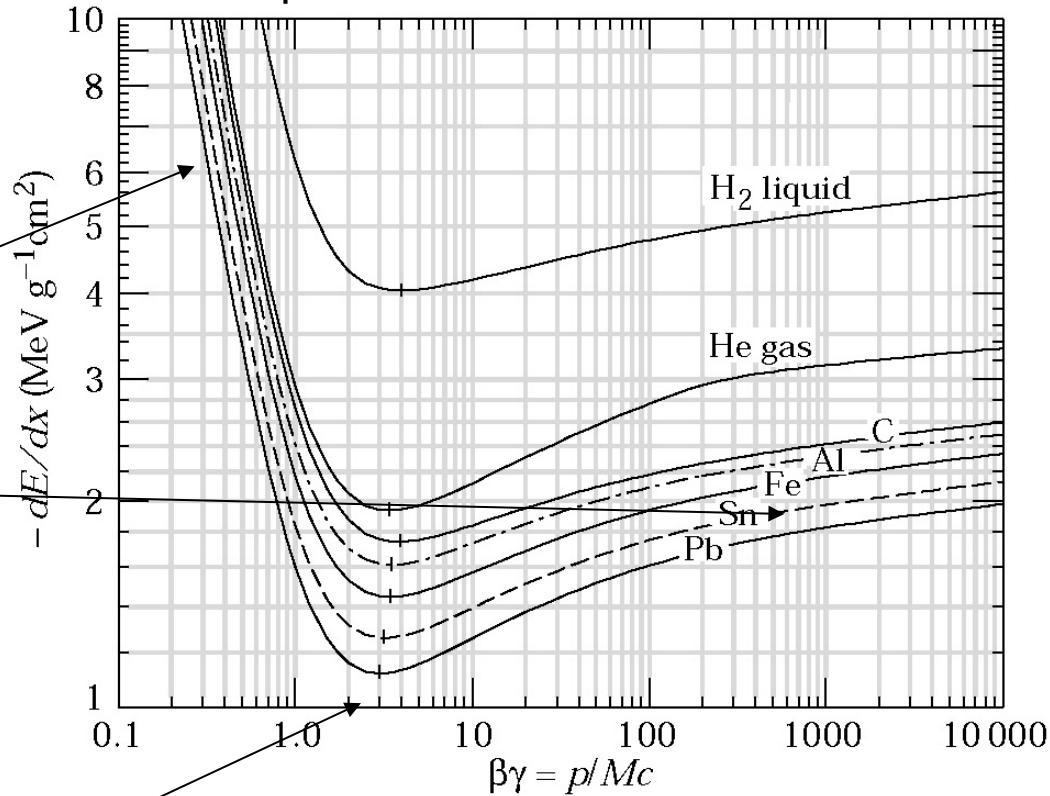
A bassa energia $\propto \beta^{-2}$

Ad alta energia $\propto \ln \gamma^2$

Minimo a $\beta\gamma \approx 2-3$,
corrispondente a $E \approx Mc^2$, oltre
questo limite la particella è
relativistica

(Minimum Ionizing Particle=MIP).

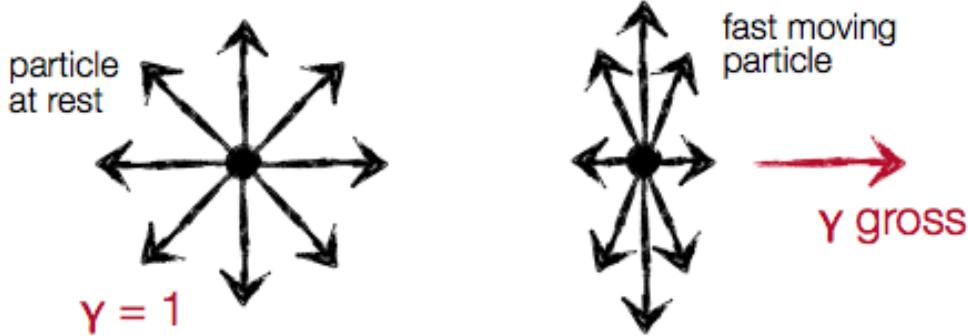
- Non dipende dalla massa della particella incidente
- Dipende dal quadrato della carica della particella incidente



Relativistic rise for $\beta\gamma > 4$

Important at high energies. BB over-estimates the energy loss at high momentum of the incident particle.

High energy particle: transversal electric field increases due to Lorentz transform; $E_y \rightarrow \gamma E_y$. Thus interaction cross section increases ...



Experimental curve increases less rapidly than $\ln \gamma^2$

But rather as $\sim \ln \gamma$ and then it reaches a plateau, named “Fermi plateau”

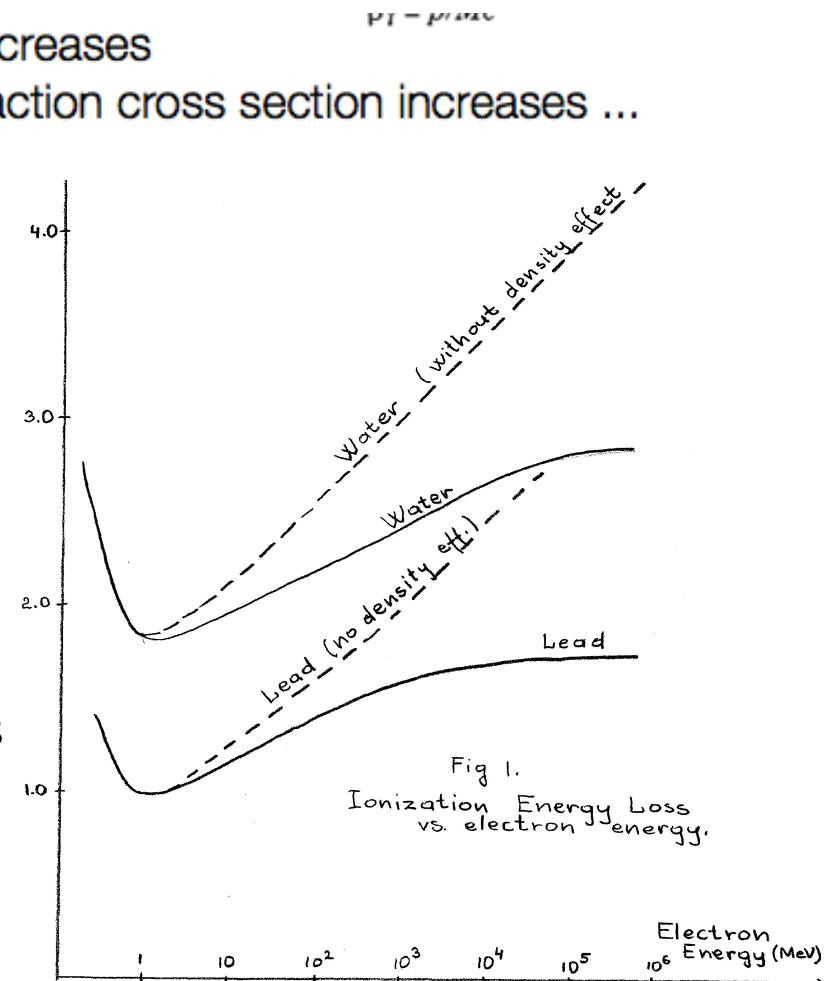
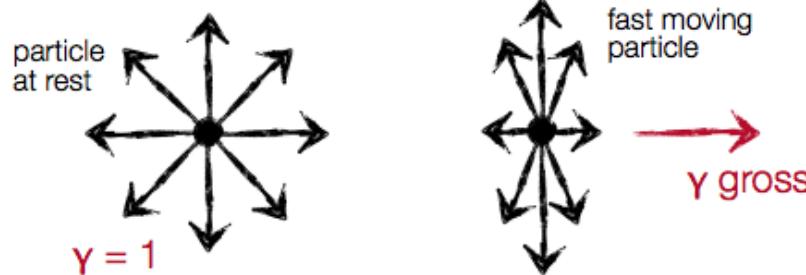


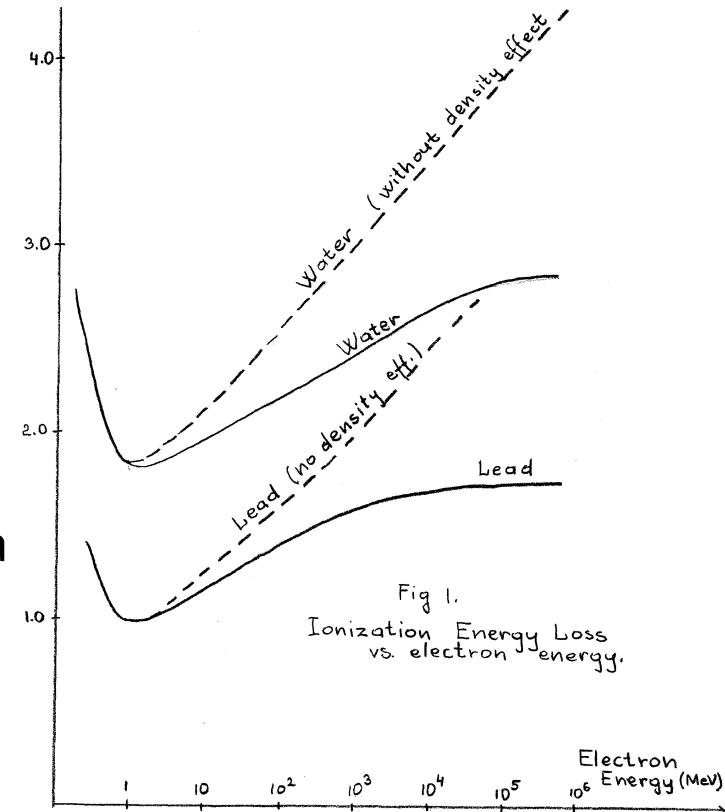
Fig 1.
Ionization Energy Loss
vs. electron energy.

effetto densita'

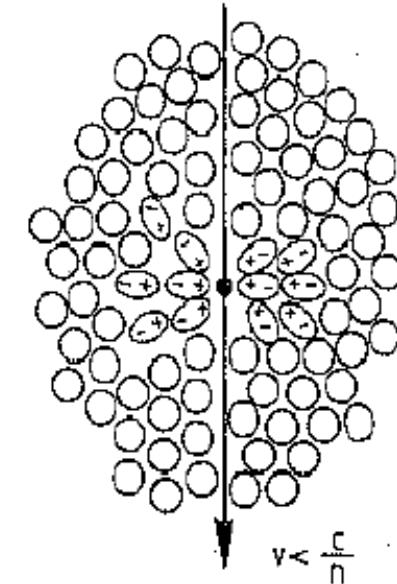
High energy particle: transversal electric field increases due to Lorentz transform; $E_y \rightarrow \gamma E_y$. Thus interaction cross section increases ...



- per part relativistiche, la dE/dX tende al cosiddetto plateau di Fermi, mentre la BB prevede che dE/dX cresca
- Per part incidenti ad alta E viene meno una delle ipotesi (sottintese) fatte per la BB, cioe' che fosse possibile calcolare l'effetto dei campi elm della part incidente su ciascun e- di ciascun atomo e quindi sommare in modo incoerente le E cedute a tutti gli e-di tutti gli atomi per i quali $b_{min} < b < b_{max}$



Effetto densità'



- Ora $b_{\max} = \pi v \gamma / \omega_0 \gg R_{\text{atomo}}$, specie quando $\gamma \gg 1$
- Percio' in un mezzo denso ci saranno molti atomi interposti fra la part incidente e l'atomo preso in considerazione, per $b \sim b_{\max}$
- Questi atomi, perturbati dai campi della part incidente, produrranno campi perturbanti nella posizione occupata dall'atomo, modificando la risposta ai campi della part veloce
- In altre parole, nei mezzi densi la polarizzazione dielettrica del materiale altera i campi della particella veloce rispetto al valore che avrebbero nello spazio vuoto ai valori caratteristici dei campi macroscopici entro un dielettrico

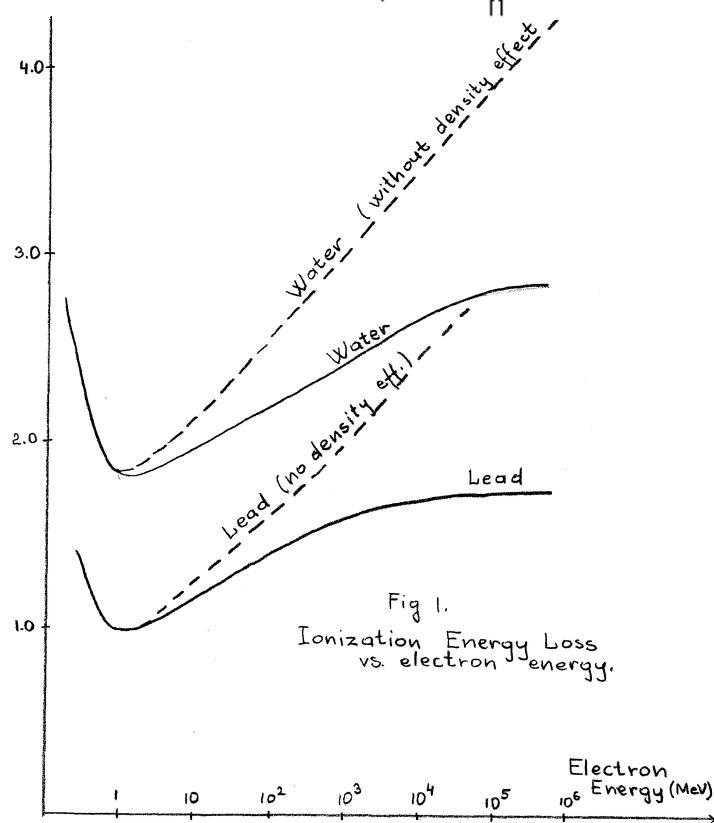
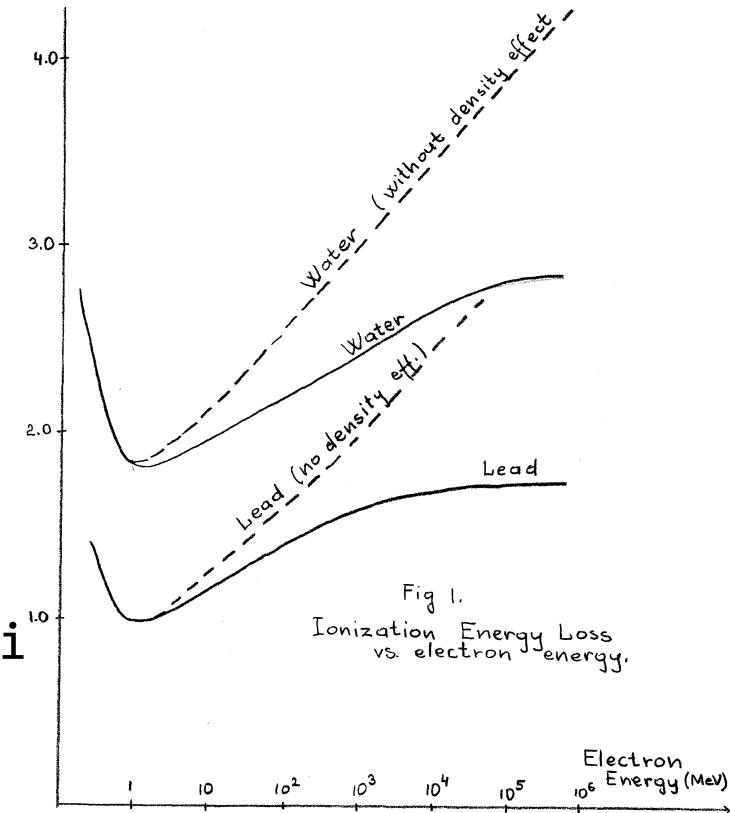


Fig. 1.
Ionization Energy Loss
vs. electron energy.

Effetto densita'

- Nel calcolo delle energia trasferite negli urti lontani ($b \gg R_{atomo}$) occorre tenere conto di tali modificazioni, dovute alla polarizzazione del mezzo: negli urti stretti ($b \ll R_{atomo}$) la particella interagisce soltanto con atomo alla volta e si puo' usare l'approssimazione di e- liberi, senza polarizzazione
- Per urti lontani assumiamo che i campi nel mezzo si possano calcolare nell'approx del continuo, nella quale le proprietà dielettriche si possono descrivere mediante una costante dielettrica $\epsilon(\omega)$
- Calcolo complicato (gli entusiasti dei conti lo possono trovare in "Elettrodinamica classica", Jackson, 2° edition, cap. 13)



NB: la polarizzazione si oppone al campo perturbante, cioe' lo diminuisce

Correzioni di densità

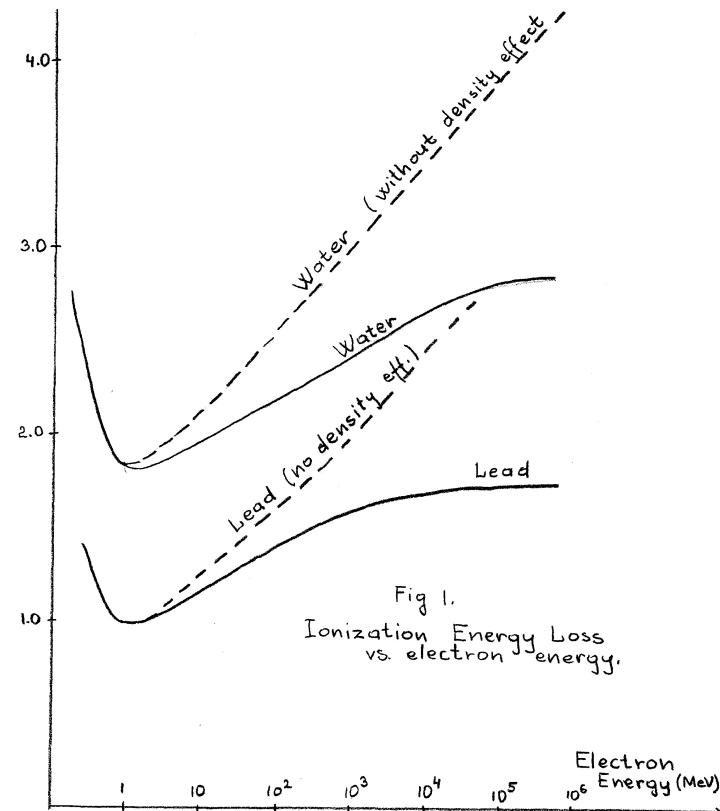
Fermi ha calcolato le perdite di energia dovute a urti lontani per particelle ultrarelativistiche ($\beta \approx 1$)

$$\left(\frac{dE}{dX}\right)_{b>a} = \frac{(ze)^2 \omega_p^2}{c^2} \ln\left(\frac{1.123c}{a\omega_p}\right)$$

con $\omega_p = (4\pi N Ze^2/m)^{1/2}$ frequenza di plasma elettronico e a =raggio atomico

senza le correzioni di densità si avrebbe

$$\left(\frac{dE}{dX}\right)_{b>a} = \frac{(ze)^2 \omega_p^2}{c^2} \ln\left(\frac{1.123\gamma c}{a\langle\omega\rangle}\right)$$



- La perdita di energia non dipende più dai dettagli della struttura atomica attraverso $\langle\omega\rangle = 2\langle I\rangle/h$, ma solo dalla densità di elettroni.
- Nel limite ultrarelativistico diventa costante.
- Due materiali con strutture atomiche molto diverse avranno la stessa perdita di energia per particelle ultrarelativistiche se le loro densità sono tali che la densità di elettroni è la stessa.

Correzioni di densità

Per mantenere la forma della bethe bloch, calcolata senza l'effetto di schermo, ed eliminare il raggio atomico a , si parametrizza l'effetto della polarizzazione con un parametro δ che è pari alla differenza tra la perdita di energia calcolata con effetto di polarizzazione e quello che si ha senza la polarizzazione
 $\delta/2 = (dE/dX)_{pol} - (dE/dX)_{nopol}$ così che nel limite di alte energie

$$\delta/2 \rightarrow \ln(\hbar\omega/I) + \ln\beta\gamma - 1/2$$
$$\beta \approx 1$$

E La perdita di energia diventa

$$-\frac{dE}{dx} = \rho K z^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\ln \frac{2mc^2\beta^2\gamma^2}{I} - \beta^2 - \frac{\delta(\gamma)}{2} \right]$$

NB: la forma di δ è complicata. Solo nel limite asintotico di $\beta\gamma \gg 1$ assume questa forma semplice.

Nella pratica si usano formule parametriche con costanti che dipendono dal materiale (es. formula di Sternheimer)

Con queste correzioni si vede subito che ad alti $\beta\gamma$ dE/dX cresce come $\ln(\beta\gamma/\hbar\omega_p)$ piuttosto che come $\ln((\beta\gamma)^2/I)$ (ie risalita relativistica) → Dato che ω_p dipende da $N_e^{1/2}$, materiali con la stessa densità di e^- hanno la stessa perdita indipendentemente dal potenziale di ionizzazione.

Dato che $N_e = \rho N_A (Z/A)$, la risalita è più rapida per materiali meno densi, p. es. gas rispetto a liquidi e solidi e da cui il nome “effetto densità”

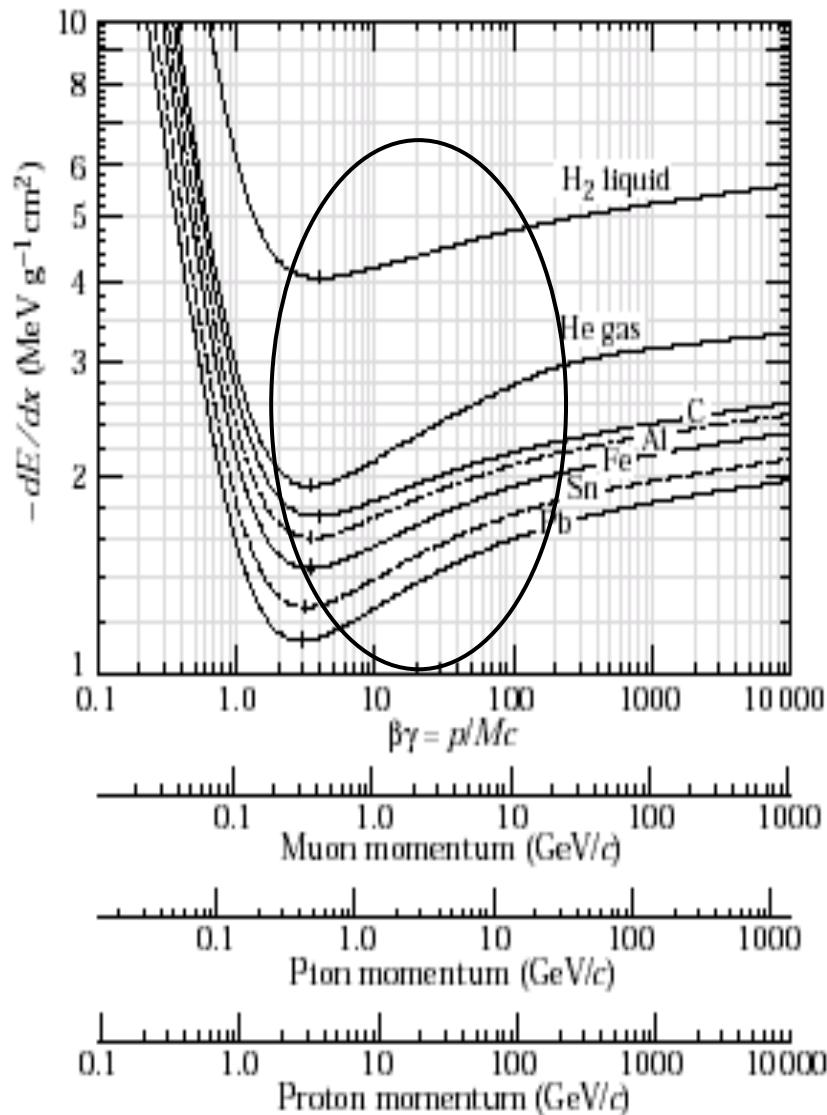
Bethe Bloch: effetto densita'

$$-\frac{dE}{dx} = \rho K z^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\ln \frac{2mc^2\beta^2\gamma^2}{I} - \beta^2 - \frac{\delta(\gamma)}{2} \right]$$

La salita relativistica satura crescendo $\gamma \rightarrow$ **plateau di Fermi**.

Più denso è il mezzo tanto prima si raggiunge il plateau di Fermi \rightarrow **la salita relativistica è più importante nei gas che nei liquidi e nei solidi**.

Funziona fino al % per particelle fino al nucleo di α per $\beta = 0.1 - 1.0$. Per basse velocità ($\beta \sim 0.05$) non è più valida in quanto non sono più valide molte delle assunzioni di Bethe Block (ie non posso più trascurare l'energia di legame degli e^-).



Bethe Bloch: effetto densità-formule pratiche

Nella pratica δ viene tabulato in funzione di $\beta\gamma$ per differenti materiali

$$-\frac{dE}{dx} = \rho K Z^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\ln \frac{2mc^2\beta^2\gamma^2}{I} - \beta^2 - \frac{\delta(\gamma)}{2} \right]$$

Al plateau di Fermi,

- $(dE/dX)_{\text{plateau}} \approx 1.05-1.1 (dE/dX)_{\text{MIP}}$ per i solidi
- $(dE/dX)_{\text{plateau}} \approx 1.5-1.1 (dE/dX)_{\text{MIP}}$ per i gas

$$\delta = \begin{cases} 0 & X < X_0 \\ 4.0652X + C + a(X_1 - X)^m & X_0 < X < X_1 \\ 4.0652X + C & X > X_1 \end{cases}$$

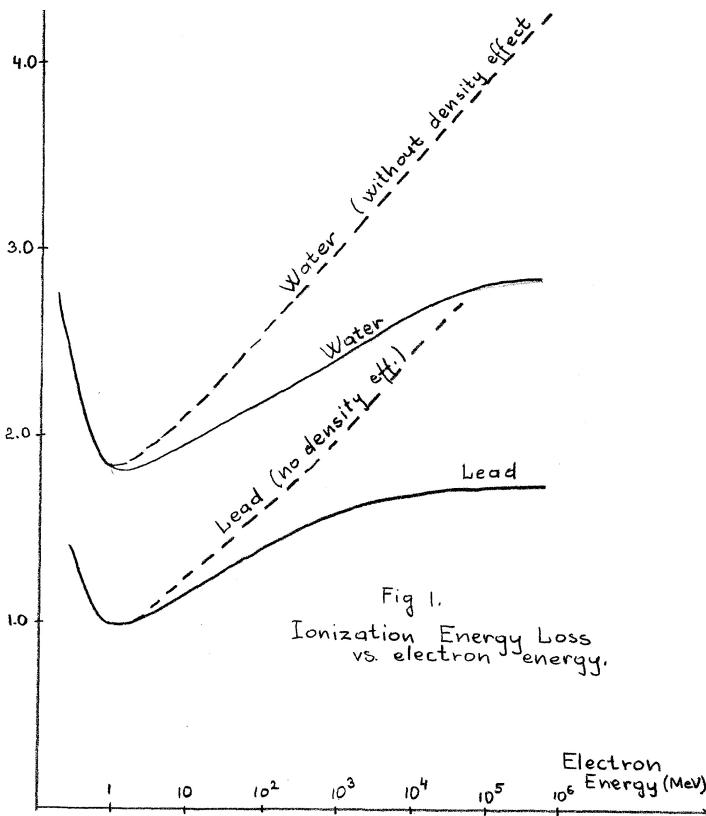


Table 2.1. Constants for the density effect correction

Material	I [eV]	$-C$	a	m	X_1	X_0
Graphite density = 2	78	2.99	0.2024	3.00	2.486	-0.0351
Mg	156	4.53	0.0816	3.62	3.07	0.1499
Cu	322	4.42	0.1434	2.90	3.28	-0.0254
Al	166	4.24	0.0802	3.63	3.01	0.1708
Fe	286	4.29	0.1468	2.96	3.15	-0.0012
Au	790	5.57	0.0976	3.11	3.70	0.2021
Pb	823	6.20	0.0936	3.16	3.81	0.3776
Si	173	4.44	0.1492	3.25	2.87	0.2014
NaI	452	6.06	0.1252	3.04	3.59	0.1203
N ₂	82	10.5	0.1534	3.21	4.13	1.738
O ₂	95	10.7	0.1178	3.29	4.32	1.754
H ₂ O	75	3.50	0.0911	3.48	2.80	0.2400
Lucite	74	3.30	0.1143	3.38	2.67	0.1824
Air	85.7	10.6	0.1091	3.40	4.28	1.742
BGO	534	5.74	0.0957	3.08	3.78	0.0456
Plastic Scint.	64.7	3.20	0.1610	3.24	2.49	0.1464

Bethe Bloch Formula

Bethe-Bloch law for “stopping power”:

NB: it has a slightly different but equivalent form

$$-\frac{dE}{dX} = 4\pi N_A r_e^2 m_e c^2 z^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{2m_e c^2 \gamma^2 \beta^2 T_{\max}}{I^2} - \beta^2 - \frac{\delta}{2} \right] \text{ Units: MeV g}^{-1} \text{ cm}^2$$

Where:

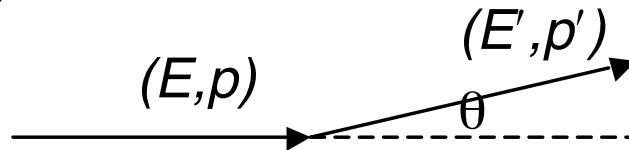
constant $4\pi N_A r_e^2 m_e c^2 = 0.31 \text{ MeV g}^{-1} \text{ cm}^2$

- $X = \rho x$, where ρ is the density of the absorber material
- N_A = Avagadro no.
- $r_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e c^2} = \text{classical electron radius} = 2.82 \times 10^{-13} \text{ cm}$
- z = charge of incident particle in units of e
- Z, A = atomic no. and atomic weight of the absorber
- T_{\max} = maximum kinetic energy which can be imparted to a free electron in a single collision. For heavy particles ($m \gg m_e$), $T_{\max} = 2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2$

Quantum Approach

As a particle goes through matter it suffers many “soft” or “glancing” collisions.

In each collision the particle loses energy $\varepsilon = E' - E$ and changes direction slightly



- we want to know the energy lost by a particle
 - correct approach: get diff cross section as a function of ε , $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} d\varepsilon$
 - calculate the average energy loss when crossing a layer dx of material with number density n and atomic number Z

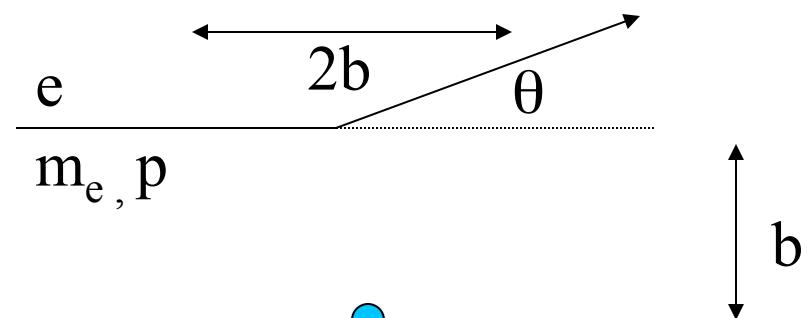
$$-dE = nZdx \int_{\varepsilon_{\min}}^{\varepsilon_{\max}} \varepsilon \frac{d\sigma}{d\varepsilon} d\varepsilon$$

Where ε_{\max} is the max energy that can be transferred in a single collision and ε_{\min} is the minimum energy, fixed by the ionization/excitation energy of the atom I ($\sim 5\text{-}100 \text{ eV}$)

Classical EM Scattering – Impact parameter, b

- Consider small angle scattering:

- Force $F(b) = (ze)e/b^2$
- Assume force acts for $t = 2b/v$



- Momentum change

$$\Delta p_t \sim F(b)t = 2ze^2/bv = 2z\alpha/bv$$

(fine structure constant: $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$)

- Scattering angle, $\theta \sim \Delta p_t / p = 2z\alpha/pb v$

- In terms of K.E. of incoming particle, T

$$\theta \sim (z\alpha/b)/T$$

Classical EM Scattering – Cross-section

- Have just “derived” the relationship between impact parameter and scattering angle.
- In practice can’t measure impact parameter – so we need to find the relationship between the scattering probability and the scattering angle.

Scattering Probability vs. Scattering Angle

- All areas equally likely to be hit.
 $dP = d\sigma$ ($dP = \text{prob of scattering}$)
- Every particle with an impact parameter b will have the same scattering angle therefore $d\sigma = b \, db \, d\phi$

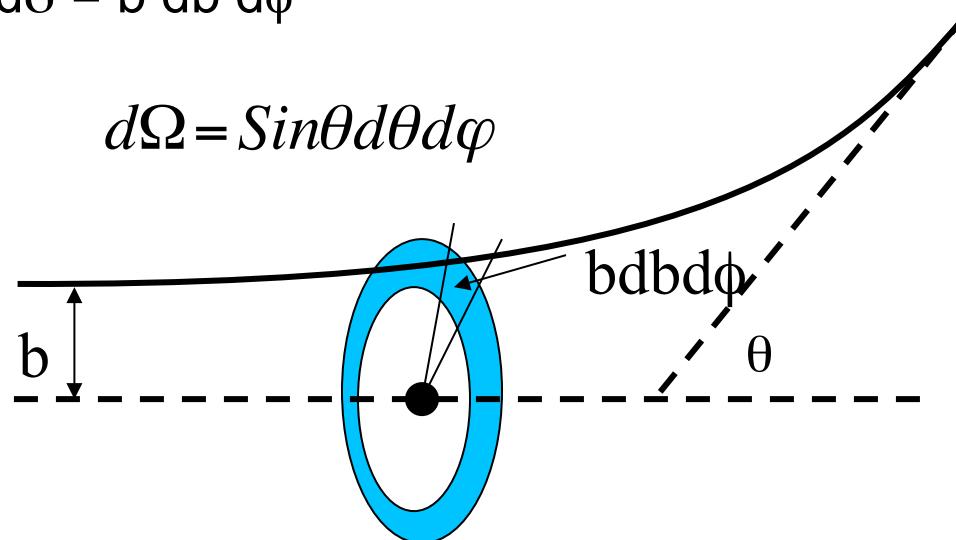
- Use $d\sigma = \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$ and $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$

- Want to get $d\sigma(\theta)/d\Omega$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta} \left(\frac{db}{d\theta} \right)$$

$$b \sim 2z\alpha/\theta p v, \sin\theta \sim \theta$$

$$db/d\theta = z\alpha/\theta^2 p v$$



Which gives the Rutherford scattering for small angles

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \left(\frac{z\alpha}{T} \right)^2 \frac{1}{\theta^4}$$

Approximate, Non-Relativistic Model

- Energy transferred to target:
$$\Delta E = (\Delta p_t)^2/M \sim z^2 \alpha^2 / b^2 v^2$$
- Integrating over impact parameter will add a constant, but not change dependence on z, α, v . So for a single scatter:
$$\Delta E \sim z^2 \alpha^2 / v^2$$

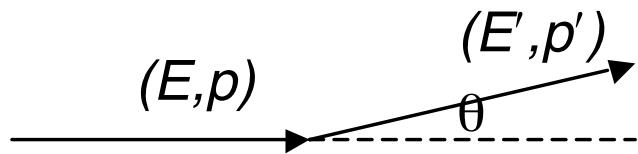
Scattering – approx. model

- Almost all energy loss will be to electrons ($m_e \ll m_N$)
- Number of electrons that a projectile passes per unit length $\sim \rho_{elec} = Z \rho_{atoms}$
- $\rho_{atoms} = \rho_{mass}/A$, so $\rho_{elec} = Z \rho_{mass}/A$
- So, energy loss per unit length:

$$-\frac{dE}{dx} \sim K Z^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2}$$

Kinematics of energy loss via scattering

- NB. Not necessarily elastic



Energy loss $\varepsilon = E - E'$

- Substitute for E' and p' :

$$E' = E - \varepsilon$$

$$p' = \left((E - \varepsilon)^2 - M^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= p \left[1 - \frac{2E\varepsilon}{p^2} + \frac{\varepsilon^2}{p^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

- (Taylor expansion in terms of ε/E to 2nd order, valid for small ε/E)

$$\approx \frac{p^2 - E\varepsilon}{p} - \frac{\varepsilon^2 M^2}{2p^3}$$

Energy Loss via Scattering

- Use $-q^2 = 2M^2 - 2EE' + 2pp' \cos\theta$ and our approximation for p'
- For small angles, $\cos\theta \sim 1 - \frac{1}{2}\theta^2$
- Hence, for small θ , ε/E : $-q^2 = p^2\theta^2 + \frac{\varepsilon^2}{(\beta\gamma)^2}$
- At finite angles, the first term dominates. The second term defines a minimum q^2 for a given energy loss ε .

Towards a Model of Energy Loss by ionization

- Energy loss of charged particle through scattering will mainly be from scattering from electrons
 - $m_e \ll M_{\text{nucleus}}$, maximum energy exchange is higher for electrons than nuclei.
- We are interested in particles of mass M (normally $M \gg m_e$), charge Z , scattering from stationary electrons.
- However, cross-section the same as for electrons scattering from stationary particle.

$$-\frac{dE}{dx} = nZ \int_{\varepsilon_{\min}}^{\varepsilon_{\max}} \varepsilon \frac{d\sigma}{d\varepsilon} d\varepsilon = nZ \left[\int_{\varepsilon_{\text{cut}}}^{\varepsilon_{\max}} \varepsilon \frac{d\sigma}{d\varepsilon} d\varepsilon + \int_{\varepsilon_{\min}}^{\varepsilon_{\text{cut}}} \varepsilon \frac{d\sigma}{d\varepsilon} d\varepsilon \right]$$

Depending on the 4-momentum q exchanged, the process can be separated in “close” and “distant” collisions by setting an arbitrary energy scale ε_{cut} .

Collisions with $\varepsilon > \varepsilon_{\text{cut}}$ are “close”, while those with $\varepsilon < \varepsilon_{\text{cut}}$ are “distant”

Large Energy Loss Scatters.

- “Close” collisions (\sim large q^2 , small b)
 - Large angle and/or ε
 - Large q^2 can resolve electrons in atom
- Minimum energy exchange to consider a collision as “close” , ε_{cut} , set arbitrarily (it’s just a working energy which will cancel at the end)
- Maximum energy loss (T_{max}) set by kinematics

Small Energy Loss Scatters.

- “Distant” collisions (\sim low q^2 , large b)
 - Low energy loss ε
 - Low q^2 photons will interact with atom as a whole.
- Maximum energy loss set by boundary with “close” collisions
- Minimum energy loss set by smallest available excitation energy of medium

Rutherford Cross-section

- Consider the electron moving and the projectile stationary. (“Close” collisions)
- Earlier we “derived” the Rutherford scattering cross-section:
 - z = electron charge = 1
 - m_p = electron mass
 - T = projectile kinetic E
- The complete result is:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{z\alpha}{T}\right)^2 \frac{1}{\theta^4} = \left(\frac{2z\alpha}{m_e \beta c}\right)^2 \frac{1}{\theta^4}$$

$$\frac{d\sigma^{Ruth.}}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c z \alpha}{2 p \beta}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

Relativistic Corrections – Mott Scattering Formula

- As $\beta \rightarrow 1$, Rutherford formula becomes inaccurate. Simplest modifications give Mott formula.
 - First order perturbation theory
 - Assumes no recoil of target
 - No spin or structure effects.

$$\frac{d\sigma^{\text{Mott}}}{d\Omega} = \frac{z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2}{4 p_e^2 \beta^2} \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \left[1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

Mott Cross-Section as a Function of q^2

Can write Mott formula in terms of q^2 , rather than θ so that it's invariant

- put $q^2=4p_e^2\sin^2(\theta/2)$ (neglect e- mass)

Hence:

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \frac{4\pi z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2}{q^4 \beta^2} \left(1 - \beta^2 \frac{q^2}{4p_e^2} \right)$$

Back to Stationary Electron and Moving Projectile

- Eliminate electron momentum
 - $p_e = \beta \gamma m_e$
- Have Mott Scattering formula for moving electron. Now move back to lab frame, where electron is stationary.
 - For free electron at rest $q^2 = 2m_e \varepsilon$
 - Hence

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \frac{1}{2m_e} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{4\pi z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2}{(2m_e \varepsilon)^2 \beta^2} \left[1 - \frac{\varepsilon}{2\gamma^2 m_e} \right]$$

Energy Loss from “Close” collisions

- In summary, cross-section for transfer of energy in the range ε to $\varepsilon + d\varepsilon$

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} d\varepsilon = \frac{2\pi z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2}{m_e \beta^2} \frac{1}{\varepsilon^2} \left[1 - \frac{\varepsilon}{2\gamma^2 m_e} \right] d\varepsilon$$

Energy Loss Per Unit Distance

- So the energy $-dE$ lost by a particle passing through distance dx in a material is:

$$-dE = nZdx \int_{\varepsilon_{cut}}^{\varepsilon_{max}} \varepsilon \frac{d\sigma}{d\varepsilon} d\varepsilon$$

- The number density, n , is

$$n = \rho N_A / A$$

(ρ =density, N_A =Avogadro's number, A =molar mass)

de/dx From “Close” Interactions

- Putting in the differential cross-section and integrating gives

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{close}} = \left(\frac{2\pi N_A \alpha^2 (\hbar c)^2}{m_e}\right) Z^2 \frac{\rho Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\ln\left(\frac{\varepsilon_{\max}}{\varepsilon_{\text{cut}}}\right) - \left(\frac{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\text{cut}}}{2\gamma^2 m_e}\right) \right]$$

- Recall expression for ε_{\max} :

$$\varepsilon_{\max} = \frac{p^2}{s} m_e = \frac{2(\beta\gamma)^2 m_e}{1 + 2\gamma m_e/M + (m_e/M)^2}$$

- For γ small compared to M/m_e $\varepsilon_{\max} \approx 2(\beta\gamma)^2 m_e$

de/dx From “Close” Interactions

- Putting in expression for ε_{\max} and assuming that $\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\text{cut}} \sim \varepsilon_{\max}$

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{close}} = \left(\frac{2\pi N_A \alpha^2 (\hbar c)^2}{m_e}\right) z^2 \frac{\rho Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\ln\left(\frac{\varepsilon_{\max}}{\varepsilon_{\text{cut}}}\right) - \beta^2 \right]$$

dE/dx for “Distant” collisions

- Can no longer treat electrons as free.
→ rather more complicated (but result looks rather similar)
- Get a term $\ln(q^2_{\min} / q^2_{\text{cut}})$
- $q^2_{\min} = I^2 / (\beta\gamma)^2$
- Lower energy limit I , represents some typical ionisation energy
 - ($I \sim 10Z$ eV for $Z > 10$)

dE/dx for “Distant” collisions

- $q^2_{\max} = 2m_e \varepsilon_{\text{cut}}$ (any energy exchange larger than ε_{cut} is counted as “close”)
- Get:

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{distant}} = \left(\frac{2\pi N_A \alpha^2 (\hbar c)^2}{m_e}\right) Z^2 \frac{\rho Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\ln\left(\frac{2(\beta\gamma)^2 m_e \varepsilon_{\text{cut}}}{I^2}\right) - \beta^2 - \delta \right]$$

- The “ δ ” term models the “density effect” (polarization of the medium)

$$\delta = 2 \ln(\hbar \omega_p / I) + \ln(\beta\gamma)^2 - 1/2$$

dE/dx – the Bethe-Bloch Equation

- Adding contributions from “close” and “distant” collisions we get the Bethe-Bloch equation:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi\alpha^2 N_A (\hbar c)^2}{m_e} z^2 \frac{\rho Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2\beta^2 \gamma^2 m_e \epsilon_{\max}}{I^2} \right) - \beta^2 - \frac{\delta}{2} \right]$$

- Where: $\frac{4\pi\alpha^2 N_A (\hbar c)^2}{m_e} \frac{\rho}{A} = 0.307 \text{ MeV cm}^{-1} \times \frac{\rho (\text{g cm}^{-3})}{A (\text{g mol}^{-1})}$

Bethe-Bloch References

- References:
 - Rossi, “High-Energy Particles”, chap. 2
 - Jackson, “Classical Electrodynamics”, chap. 13
 - Fano, Ann. Rev. Nucl. Sci., Vol. 13 (1963), p.1
 - Particle Data Group (PDG), in the WWW edition of “Review of Particle Properties”, via link from the course Web site

Ionizzazione: tempo scala

Se mettiamo dentro i numeri otteniamo

$$-\frac{dE}{dt} \approx 7.64 \times 10^{-15} N(3\ln\gamma + 19.8) [eVs^{-1}]$$

NB: $\gamma = E_{\text{cin}}/mc^2 + 1 \rightarrow$ le perdite per ionizz dipendono debolmente da E

Un e- perde tutta la sua energia per ionizzazione in un tempo scala

$$\tau \sim \frac{E}{(dE/dt)_i}$$

cioè $\tau \sim \frac{E}{7.64 \times 10^{-15} N(3\ln\gamma + 19.8)} \text{ [s]}$

Per esempio, un e- di 3 GeV ($\gamma \approx 6000$), perde tutta la sua energia in $3 \times 10^{14} / N$ anni

Assumendo $N \approx 10^6$ protoni m^{-3} , $\tau \approx 10^8$ anni

Emissione di radiazione (richiamo)

NB: i calcoli dettagliati sono facoltativi

Larmor (3): potenza totale

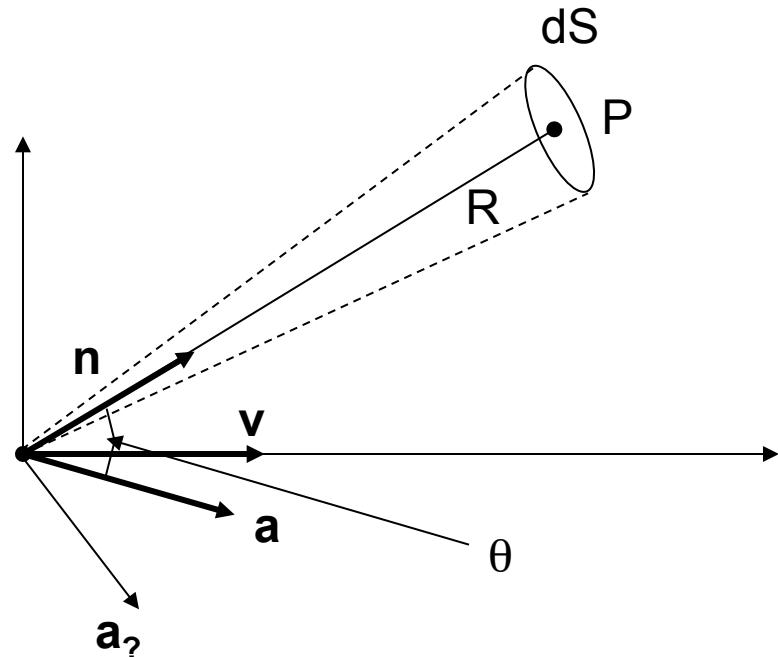
La potenza totale emessa si ottiene integrando sull'angolo solido $\frac{dE}{dt} = \int \frac{dP}{d\Omega} d\Omega$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q^2}{4\pi c^3} a^2 \int \sin^2 \theta d\Omega = \frac{q^2}{4\pi c^3} a^2 \int_{-1}^{+1} (1 - \cos^2 \theta) 2\pi d(\cos \theta)$$

$$= \frac{q^2}{4\pi c^3} a^2 2\pi (4/3) = \frac{2q^2}{3c^3} a^2$$

Formula di Larmor per la potenza emessa da una carica accelerata in moto non relativistico.

E' valida in tutti i casi in cui $v \ll c$



Generalizz. relativistica

Per ottenere la generalizzazione relativistica, potremmo prendere i campi nel caso generale e applicare la formula per la potenza

Ma e' piu' facile ed elegante usare le trasformazioni relativistiche per trovare la potenza emessa da un particella in moto relativistico

L'idea e' di lavorare nel sistema di quiete istantanea della particella, in cui $\beta=0$. La particella non rimane ferma in tale riferimento poiche' puo' accelerare, ma almeno per intervalli di tempo infinitesimi intorno a t essa si muove a velocita' non relativistiche e quindi si puo' applicare la formula di Larmor classica

Generalizz. relat.

Supponiamo che nel rif. di quiete istant. K' la particella emetta un'energia dE' in un tempo $d\tau$

Se l'emissione e' isotropa nel riferimento di quiete, l'impulso della radiazione emessa e' $dp' = 0$, poiche' l'emissione e' simmetrica rispetto ad una qualsiasi direzione e a quella opposta (e' l'impulso ist. della particella che e' sempre nullo, NON quello della radiazione) e lo spostamento della particella e' $dx' = 0$ perche' $\beta_{ist} = 0$

Nel "laboratorio", che si muove a velocita' $-\mathbf{v}$ rispetto alla particella (i.e. visto dal riferimento di quiete della particella), si ha per la radiazione emessa

$$dt = \gamma(d\tau + \beta dx'/c) = \gamma d\tau$$

$$\rightarrow \frac{dE'}{dt'} = \frac{dE}{dt}$$

La potenza totale emessa e' un invariante relativistico per ogni emettitore con simmetria backward-forward nel suo rif. di quiete istantaneo

Nel caso di un riferimento in moto con velocita' β rispetto a quello in cui la particella si muove con velocita' β_p

$$\frac{dE'}{c} = \gamma\left(\frac{dE}{c} - \beta dp_x\right)$$

$$dt' = \gamma(dt - \beta dx/c)$$

ma $dx = c\beta_p dt$ perche' si tratta di "fotoni"
 $dp_x = \beta_p dE/c$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dE'}{c} &= \gamma\left(\frac{dE}{c} - \beta\beta_p dE/c\right) = \gamma\frac{dE}{c}(1 - \beta\beta_p) \\ dt' &= \gamma(dt - \beta\beta_p dt) = \gamma dt(1 - \beta\beta_p) \end{aligned} \right\}$$

$$\rightarrow \frac{dE'}{dt'} = \frac{dE}{dt}$$

Generalizz. Relativ.

Nel sist di quiete la potenza e' $\frac{dE}{dt} = \frac{2q^2}{3c^3} |\vec{a}|^2$

La 4-vel. della particella e' $v_\mu = (c\gamma, \gamma\mathbf{v})$, cosi' in K' $v'_\mu = (c, 0)$ e quindi il modulo e' $v^2 = c^2$

$$\rightarrow \frac{dv_\mu^2}{d\tau} = 0 \rightarrow v^\mu \frac{dv_\mu}{d\tau} = 0 \rightarrow v^\mu a_\mu = 0 \quad (\text{somma sottintesa})$$

Nello spazio-tempo 4-velocita' e 4-accelerazione sono sempre "perpendicolari"

Da questa condizione applicata nel riferimento K' di quiete istantanea si ha

$$ca'_o = 0 \rightarrow a'_o = 0 \quad \text{Percio' in } K' \quad a^\mu a_\mu = |\vec{a}'|^2$$

Così possiamo scrivere la potenza in forma manifestamente covariante in K' e generalizzare ad ogni riferimento

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2q^2}{3c^3} a^\mu a_\mu$$

Generalizz. relat.

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2q^2}{3c^3} a^2 \quad \text{Puo' essere generalizzata al caso relativistico sostituendo} \quad a \rightarrow \frac{1}{m} \frac{dp_\mu}{d\tau}$$

ad \mathbf{a} la 4-accelerazione \mathbf{a}_μ

Con $\mathbf{p}_\mu = (E/c, \mathbf{p}) = (mc\gamma, m\gamma\mathbf{v})$ e $d\tau = dt/\gamma$ tempo proprio della particella

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2q^2}{3m^2c^3} \frac{dp_\mu}{d\tau} \frac{dp^\mu}{d\tau} = -\frac{2q^2}{3c^3} \frac{dv_\mu}{d\tau} \frac{dv^\mu}{d\tau}$$

Calcolo la derivata in τ

$$\frac{dv_\mu}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}(\gamma c, \gamma \vec{v}) \quad \frac{dv_\mu}{d\tau} = \gamma \left(c \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \vec{v} + \gamma \frac{d\vec{v}}{dt} \right)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2})}} = \gamma^3 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2}$$

$$\frac{dv_\mu}{d\tau} = \left(c\gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2}, \gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{v} + \gamma^2 \vec{a} \right)$$

E' la 4-accelerazione della particella in un riferimento generico

Larmor (5)

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2q^2}{3c^3} \frac{dv_\mu}{d\tau} \frac{dv^\mu}{d\tau}$$

$$\frac{dv_\mu}{d\tau} = (c\gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2}, \gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{v} + \gamma^2 \vec{a})$$

$$\begin{aligned}
 a_\mu a^\mu &= a_o^2 - \vec{a}^2 = (c\gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2})^2 - [\gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{v} + \gamma^2 \vec{a})]^2 = (c\gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2})^2 - [\gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{v} + \gamma^2 \vec{a})]^2 \\
 &= c^2 \gamma^8 (\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2})^2 - \gamma^8 (\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2})^2 \vec{v}^2 \frac{c^2}{c^2} - 2\gamma^6 (\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2}) (\vec{v} \cdot \vec{a}) - \gamma^4 \vec{a}^2 \\
 &= c^2 \gamma^8 (\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2})^2 (1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}) - 2\gamma^6 (\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2}) (\vec{v} \cdot \vec{a}) - \gamma^4 \vec{a}^2 \\
 &= c^2 \gamma^8 (\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2})^2 \frac{1}{\gamma^2} - 2\gamma^6 (\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2}) (\vec{v} \cdot \vec{a}) \frac{c^2}{c^2} - \gamma^4 \vec{a}^2 \\
 &= -c^2 \gamma^6 (\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2}) (\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2}) - \gamma^4 \vec{a}^2 \quad = -\gamma^6 \frac{(\vec{v} \cdot \vec{a})^2}{c^2} - \gamma^4 \vec{a}^2 \quad = -\gamma^4 [\gamma^2 \frac{(\vec{v} \cdot \vec{a})^2}{c^2} + \vec{a}^2]
 \end{aligned}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2q^2}{3c^3} \gamma^4 [\gamma^2 \frac{(\vec{v} \cdot \vec{a})^2}{c^2} + \vec{a}^2]$$

E' la formula di Larmor relativistica per la potenza totale emessa

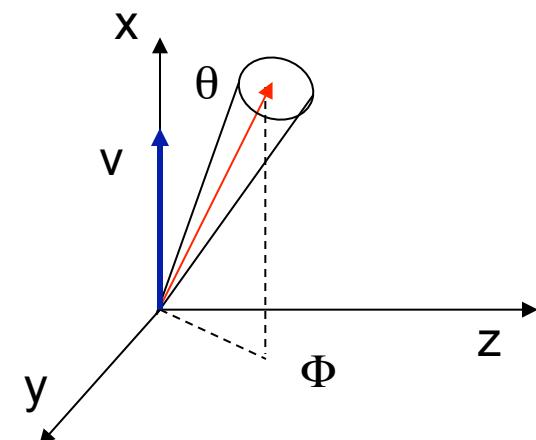
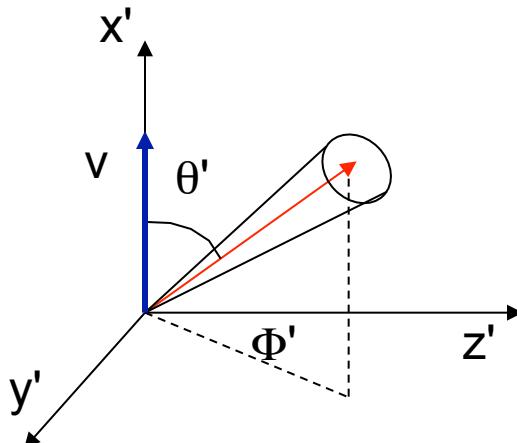
Distr. Angolare

La distribuzione angolare della potenza emessa si puo' ottenere a partire da quella nel rif. K' di quiete istantanea utilizzando le proprieta' di trasformazione relativistiche delle direzioni

Consideriamo in K' l'emissione di un'energia dE' in un angolo solido $d\Omega' = \sin\theta' d\theta' d\Phi' = d\cos\theta' d\Phi' = d\mu' d\Phi'$ con $\mu' = \cos\theta'$, intorno a θ' , angolo con l'asse x', diretto come la velocita' della particella nel sistema K del labo

Nel laboratorio l'energia e' emessa dE e' emessa in un angolo solido $d\Omega = d\mu d\Phi$

Nota la distribuzione in K' possiamo calcolare la distribuzione in K, conoscendo le proprieta' di trasformazione dell'energia e dell'angolo solido



Distr. Angolare

L'energia emessa (i.e. i fotoni) trasforma come la comp. temp. del 4-impulso p_{μ}' ($E/c, \mathbf{p}$)

$dE/c = \gamma(dE'/c + \beta dp'_x)$ (il segno + compare perche' il labo si muove con vel $-v$ rispetto alla particella)

Nel caso della rad elm $dE'/c = dp'$ $dp'_x = \cos \theta' dp' = \mu' dp'$ (a)

→ $dE = dE' \gamma(1 + \beta \mu')$

Per l'angolo solido basta vedere come trasformano le direzioni

La quantita' di moto dei fotoni trasforma come

(b) $\begin{cases} dp_z = dp'_z \\ dp_y = dp'_y \end{cases}$

(c) $dp_x = \gamma(dp'_x + \beta dE'/c)$

Da (b) segue che $d\Phi' = d\Phi$

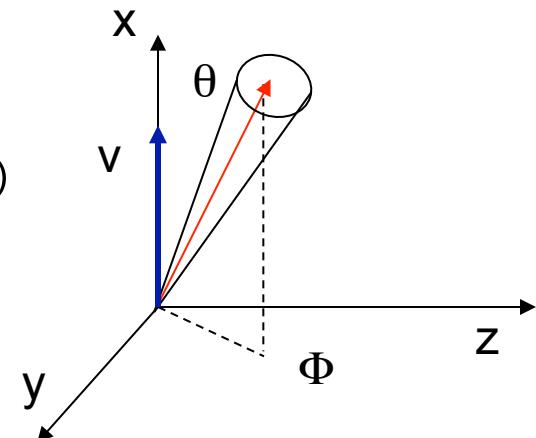
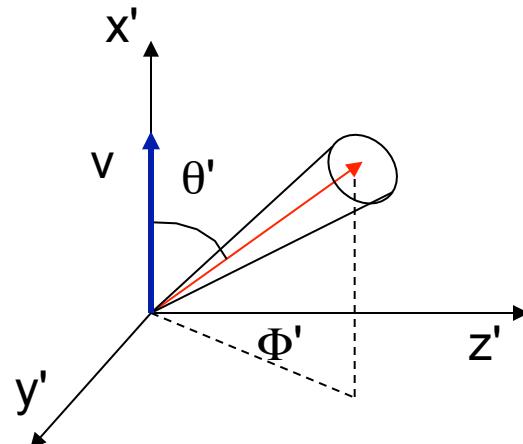
Sostituendo (a) in (c) $\mu dp = \gamma(\mu' + \beta) dp'$

$$\mu = \gamma(\mu' + \beta)(dp'/dp)$$

$$dp'/dp = dE'/dE = 1/\gamma(1 + \beta \mu')$$

$$\mu = (\mu' + \beta)/(1 + \beta \mu')$$

E' l'aberrazione relativistica delle direzioni



Distr. Angolare

$$dE = dE' \gamma (1 + \beta \mu')$$

$$\mu = (\mu' + \beta) / (1 + \beta \mu')$$

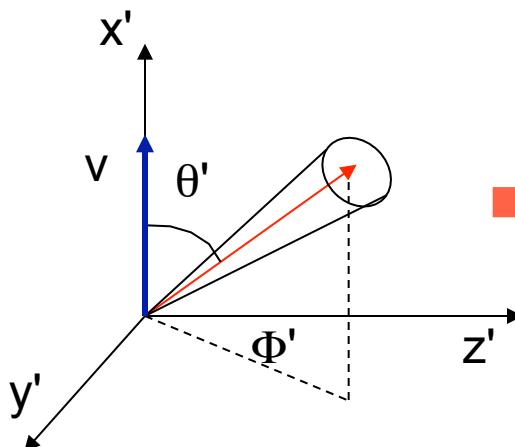
Calcolo $d\Omega = d\mu d\Phi$

$$d\mu = [(1 + \beta\mu' - \beta\mu' - \beta^2) / (1 + \beta\mu')^2] d\mu'$$

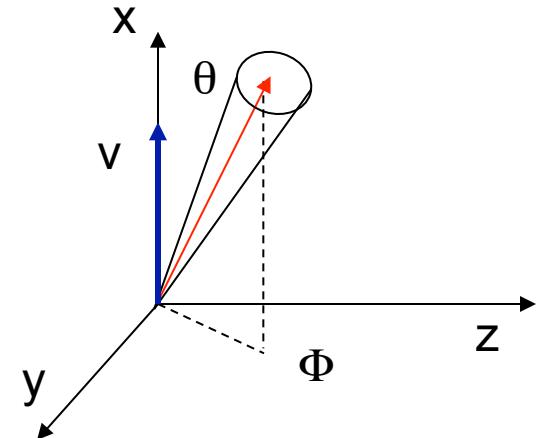
$$= [(1 - \beta^2) / (1 + \beta\mu')^2] d\mu' = \frac{d\mu'}{\gamma^2 (1 + \beta\mu')^2}$$

$$d\Phi = d\Phi'$$

→ $d\Omega = d\mu d\Phi = \frac{d\mu' d\Phi'}{\gamma^2 (1 + \beta\mu')^2} = \frac{d\Omega'}{\gamma^2 (1 + \beta\mu')^2}$



→ $\frac{dE}{d\Omega} = \gamma^3 (1 + \beta\mu')^3 \frac{dE'}{d\Omega'}$



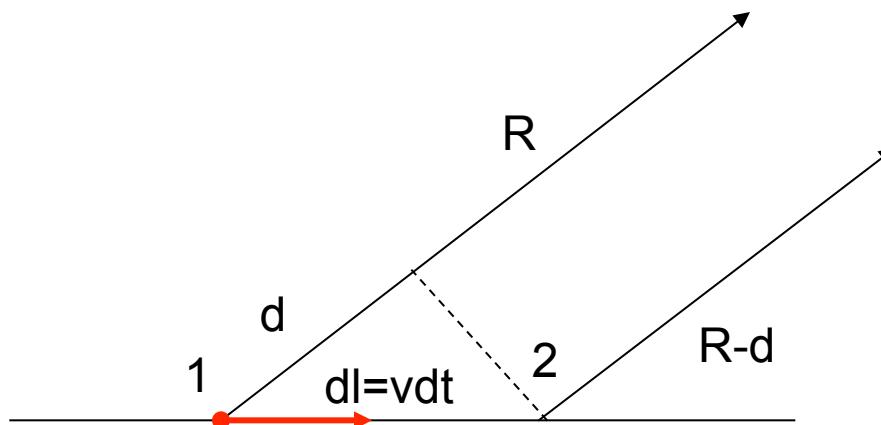
Distr. Angolare

$$\frac{dE}{d\Omega} = \gamma^3(1 + \beta\mu')^3 \frac{dE'}{d\Omega'}$$

Per ottenere la distribuzione angolare della potenza occorre calcolare la relazione fra la durata dt' e dt dell'emissione in K' e K

Supponiamo che ci sia un osservatore stazionario in K posto a grande distanza così che la direzione della radiazione emessa sia costante

La particella in K comincia ad emettere in 1 e cessa in 2, qual'è la durata dell'emissione misurata dall'osservatore distante in K ?



$$\frac{dE}{d\Omega} = \gamma^3(1 + \beta\mu')^3 \frac{dE'}{d\Omega'}$$

Distr. Angolare

L'osserv. comincia a ricevere la radiazione a $t_1 = R/c + t$ dall'inizio dell'emissione

Nel tempo dt la particella viaggia una distanza $l = vdt$

→ la radiazione emessa a $t+dt$ deve percorrere una distanza $R-d$

→ viene ricevuta dopo un tempo $t_2 = t+dt + (R-d)/c$

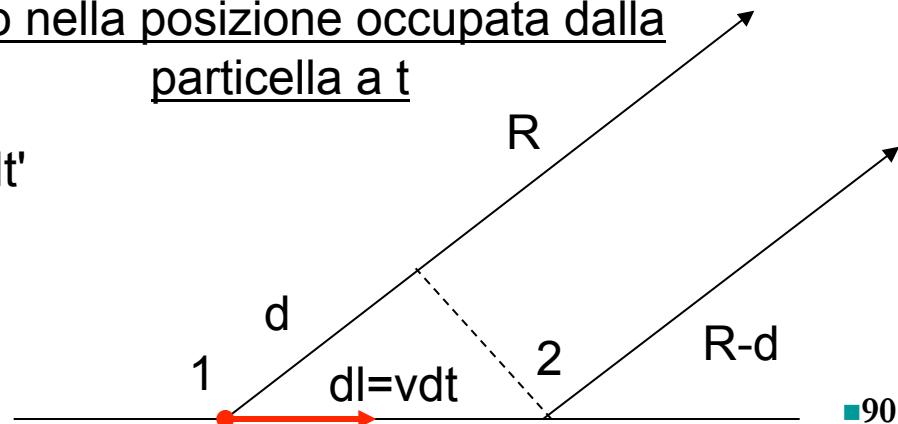
La durata misurata dall'osservatore distante è quindi $dt_o = t_2 - t_1$

$$= t + dt + (R - d)/c - R/c - t = dt - d/c \quad \text{ma } d = dl \cos \theta = vdt \cos \theta$$

→ $dt_o = dt[1 - (v/c) \cos \theta]$
 dt è l'intervallo misurato da un orologio in K posto nella posizione occupata dalla particella a t

→ la relazione con il tempo proprio della particella (i.e. **quello misurato in K'**) è $dt = \gamma dt'$

$$dt_o = \gamma[1 - (v/c) \cos \theta]dt' = \gamma(1 - \beta\mu)dt'$$



$$\frac{dE}{d\Omega} = \gamma^3(1 + \beta\mu')^3 \frac{dE'}{d\Omega'}$$

$$dt_o = \gamma(1 - \beta\mu)dt'$$

Distr. Angolare

L'inversa e' semplicemente (le trasf di Lorentz sono reciproche)

$$dt' = \gamma(1 + \beta\mu')dt_o$$

Per ottenere la potenza bisogna derivare rispetto al tempo misurato in K da O

$$\frac{d}{dt_o} \frac{dE}{d\Omega} = \frac{d}{dt_o} [\gamma^3(1 + \beta\mu')^3 \frac{dE'}{d\Omega'}] = \gamma^3(1 + \beta\mu')^3 \left(\frac{dt'}{dt_o} \right) \frac{d}{dt'} \frac{dE'}{d\Omega'} = \gamma^4(1 + \beta\mu')^4 \frac{d}{dt'} \frac{dE'}{d\Omega'}$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \gamma^4(1 + \beta\mu')^4 \frac{dP'}{d\Omega'}$$

Per esprimere tutto in funzione delle quantita' misurate in K (i.e. Labo) basta considerare le trasformazioni inverse

$$\frac{dP'}{d\Omega'} = \gamma^4(1 - \beta\mu)^4 \frac{dP}{d\Omega}$$



$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{\gamma^4(1 - \beta\mu)^4} \frac{dP'}{d\Omega'}$$

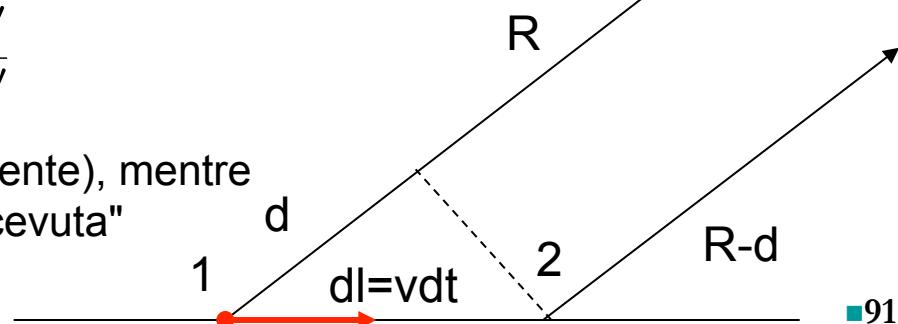
Se l'osservatore e' "vicino" (ie nella posizione occupata dalla particella all'emissione) il fattore di ritardo dovuto alla propagazione non compare

$$dt_o = \gamma dt'$$



$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{\gamma^4(1 - \beta\mu)^3} \frac{dP'}{d\Omega'}$$

Si parla in tal caso di potenza "emessa" (alla sorgente), mentre nel caso precedente si parla di potenza "ricevuta" dall'osservatore distante



Distr. Angolare

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{\gamma^4(1 - \beta\mu)^4} \frac{dP'}{d\Omega'}$$

Se la radiazione e' isotropa in K' , la distribuzione angolare nel labo e' fortemente piccata in avanti per particelle relativistiche ($\beta \gg 1$) a causa del fattore al denominatore.

Infatti $\gamma^2 = \frac{1}{(1 - \beta)(1 + \beta)} \approx \frac{1}{2(1 - \beta)}$ perche' $1 + \beta \approx 2$ se $\beta \sim 1$

 $\beta \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$

Per piccoli angoli $\mu = \cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$$\frac{1}{\gamma^4(1 - \beta\mu)^4} \approx \frac{1}{\gamma^4[1 - (1 - 1/2\gamma^2)(1 - \theta^2/2)]^4} = \frac{1}{\gamma^4[\theta^2/\gamma^2 - \theta^2/2 - 1/2\gamma^2]^4}$$
$$= \frac{1}{\gamma^4[(2\theta^2 - \theta^2\gamma^2 - 1)/2\gamma^2]^4} \approx \frac{2\gamma^4}{[(\theta^2\gamma^2 + 1)]^4}$$

Il fattore e' fortemente piccato a $\theta \sim 0$, con una scala angolare $\sim 1/\gamma$

Distr. Angolare

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{\gamma^4(1 - \beta\mu)^4} \frac{dP'}{d\Omega'}$$

Nel sistema di quiete ist. K', la potenza emessa e' quella di Larmor

$$\frac{dP'}{d\Omega'} = \frac{q^2}{4\pi c^3} |\vec{a}'|^2 \sin^2 \Theta'$$

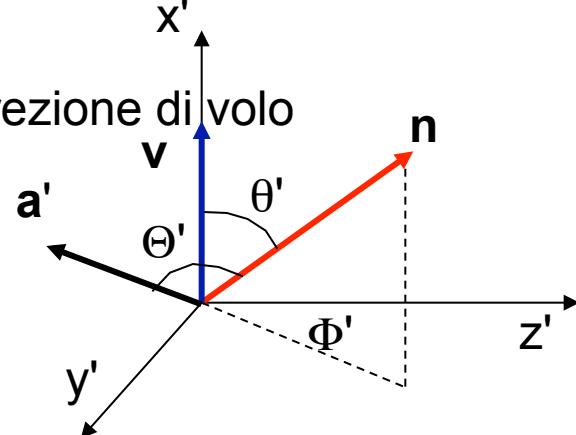
Bisogna esprimere solo a' e Θ' in funzione di quantita' misurate nel labo

Scrivo l'accel. a in termini di componente perp e par alla direzione di volo

$$|\vec{a}'|^2 = |\vec{a}'_{\parallel}|^2 + |\vec{a}'_{\perp}|^2$$

La relazione le componenti di a' ed a e'

$$|\vec{a}'_{\parallel}| = \gamma^3 |\vec{a}_{\parallel}| \quad |\vec{a}'_{\perp}| = \gamma^2 |\vec{a}_{\perp}|$$



come conseguenza delle trasf di Lorentz (cfr. Calcolate la variazione di vel. in 2 rif. generici con regola di somma rel. delle velocita' $du_i = F_i \mathcal{E} du'_i$, gli intervalli misurati nei 2 rif. dt e dt' –i.e. trasf. Lorentz- e ottenete la relazione tra du_i/dt e du'_i/dt' . Prendete il caso in cui $v'_{ist} = 0$ e ottenete le relazioni fra le accel. di cui sopra

$$|\vec{a}'|^2 = \gamma^6 |\vec{a}_{\parallel}|^2 + \gamma^4 |\vec{a}_{\perp}|^2$$

Distr. Angolare

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{\gamma^4(1-\beta\mu)^4} \frac{dP'}{d\Omega'}$$

$$\frac{dP'}{d\Omega'} = \frac{q^2}{4\pi c^3} |\vec{a}'|^2 \sin^2 \Theta'$$

$$|\vec{a}'|^2 = \gamma^6 |\vec{a}_\parallel|^2 + \gamma^4 |\vec{a}_\perp|^2$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3} \frac{(\gamma^2 |\vec{a}_\parallel|^2 + |\vec{a}_\perp|^2)}{(1-\beta\mu)^4} \sin^2 \Theta'$$

Ora bisogna trovare la relazione fra Θ' e gli angoli in K

Il caso generale e' complicato dal punto di vista matematico ma e' facile in due casi limite

Caso 1: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{v} \rightarrow \Theta' = \Theta$

Basta usare le formule di aberrazione relativistica

$$\cos \Theta = (\cos \Theta' + \beta) / (1 + \beta \cos \Theta')$$

$$\sin \Theta = dp_y / dp = \frac{dp'_y}{(dp/dp')dp'} = \frac{dp'_y}{dp'} \left(\frac{dp'}{dp} \right) = \frac{dp'}{dp} \sin \Theta'$$

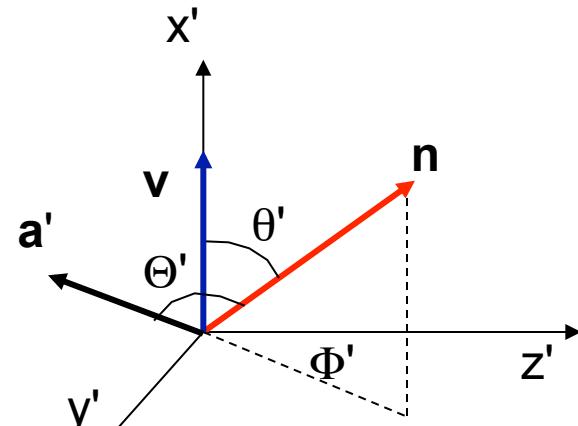
$$\sin \Theta = \frac{\sin \Theta'}{\gamma(1 + \beta\mu')}$$



$$\sin \Theta' = \frac{\sin \Theta}{\gamma(1 - \beta\mu)}$$

(le trasf di Lorentz sono reciproche)

$$\left(\frac{dP}{d\Omega} \right)_\parallel = \frac{q^2}{4\pi c^3} \frac{|\vec{a}_\parallel|^2}{(1 - \beta\mu)^6} \sin^2 \Theta$$



$$dp'/dp = 1/\gamma(1 + \beta\mu')$$

Distr. Angolare

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3} \frac{(\gamma^2 |\vec{a}_{\parallel}|^2 + |\vec{a}_{\perp}|^2)}{(1 - \beta\mu)^4} \sin^2 \Theta'$$

Caso 2: **a perp v**

a giace nel piano yz

→ scelgo il rif in modo che **a** osservazione sia diretta come z'

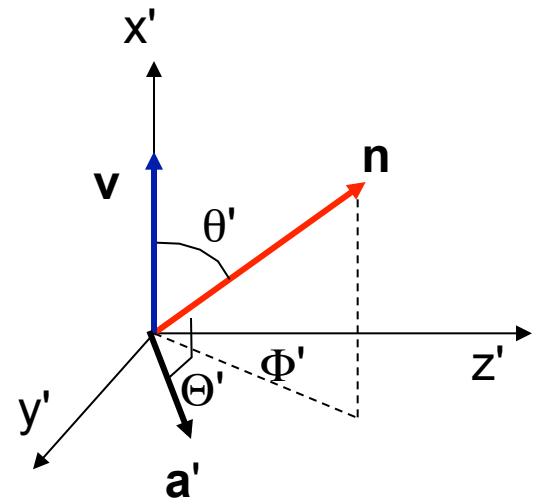
→ $\cos \Theta' = \frac{\vec{a}' \cdot \vec{n}}{a}$ → $\cos \Theta' = \sin \theta' \cos \Phi'$

$$\sin^2 \Theta' = 1 - \cos^2 \Theta' = 1 - \sin^2 \theta' \cos^2 \Phi'$$

$$\sin^2 \Theta' = 1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \Phi}{\gamma^2 (1 - \beta\mu)^2}$$

$$(\frac{dP}{d\Omega})_{\perp} = \frac{q^2}{4\pi c^3} \frac{|\vec{a}_{\perp}|^2}{(1 - \beta\mu)^4} \left(1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \Phi}{\gamma^2 (1 - \beta\mu)^2}\right)$$

$$\sin \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma (1 - \beta\mu)}$$



Distr. Angolare

$$\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)_{\perp} = \frac{q^2}{4\pi c^3} \frac{|\vec{a}_{\perp}|^2}{(1 - \beta\mu)^4} \left(1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \Phi}{\gamma^2(1 - \beta\mu)^2}\right)$$

$$\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)_{\parallel} = \frac{q^2}{4\pi c^3} \frac{|\vec{a}_{\parallel}|^2}{(1 - \beta\mu)^6} \sin^2 \Theta$$

La direzione di \mathbf{a} definisce i dettagli della distribuzione, il fattore di boost picca in avanti tutta la radiazione emessa

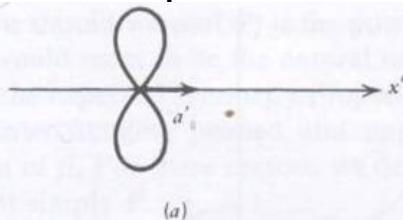


Figure 4.11a Dipole radiation pattern for particle at rest.

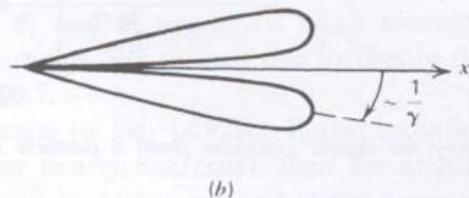


Figure 4.11b Angular distribution of radiation emitted by a particle with parallel acceleration and velocity.

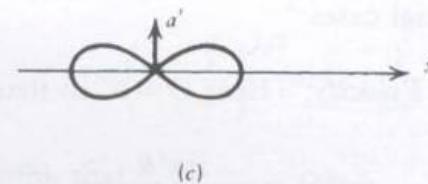


Figure 4.11c Same as a.

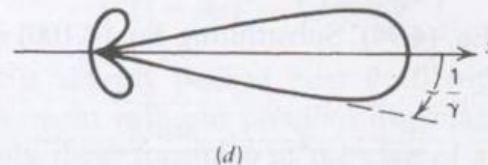


Figure 4.11d Angular distribution of radiation emitted by a particle with perpendicular acceleration and velocity.

Conversione da SI a MKSA

Per convertire le unita' di misura da SI a MKSA:

$$E(\text{SI}) \rightarrow (4\pi\epsilon_0)^{1/2} E(\text{MKSA})$$

$$B(\text{SI}) \rightarrow (\mu_0/4\pi)^{1/2} B(\text{MKSA})$$

$$q(\text{SI}) \rightarrow (4\pi\epsilon_0)^{-1/2} q(\text{MKSA})$$

$$c(\text{SI}) \rightarrow (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$$

$$\frac{dP}{d\Omega}(t') = \frac{q^2}{4\pi c} \frac{|\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \vec{\beta}]|^2}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^5} \quad \rightarrow \quad \frac{dP}{d\Omega}(t') = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{|\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \vec{\beta}]|^2}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^5}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2q^2}{3c^3} \gamma^4 \left[\gamma^2 \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \right) + \vec{a}^2 \right] \quad \rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \gamma^4 \left[\gamma^2 \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \right) + \vec{a}^2 \right]$$

Analisi di Fourier

In genere oltre che l'energia per unita' di tempo emessa e la sua distribuzione angolare, e' importante conoscere la distribuzione spettrale di energia, cioe' la sua distribuzione in frequenza.

P.es. L' emissione di radiazione in ambito astrofisico ha una distribuzione spettrale caratteristica che distingue differenti processi, come bremsstrahlung, compton, sincrotrone, corpo nero,...).

Dall'analisi dello spettro di frequenza (i.e. di energia $E=h\nu$) dei fotoni emessi si puo' risalire alla distribuzione di energia delle particelle che hanno emesso, alla distribuzione delle particelle (compresi i fotoni) che hanno causato l'emissione e la distribuzione dei campi magnetici nel mezzo interstellare (ISM).

Analisi di Fourier: Parseval

Il teorema di Parseval permette di correlare la distribuzione di energia emessa nel tempo con la sua distribuzione in frequenza.

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{dt} dt$$

$$E = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \int_{-\infty}^{+\infty} |a(t)|^2 dt$$

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} a(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$a(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} a(t) e^{i\omega t} dt$$

$$|a(t)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' a(\omega) a^*(\omega') e^{-it(\omega-\omega')}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |a(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' a(\omega) a^*(\omega') e^{-it(\omega-\omega')}$$

$$\delta(\omega - \omega') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it(\omega-\omega')} dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |a(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' a(\omega) a^*(\omega') \delta(\omega-\omega')$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |a(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |a(\omega)|^2 d\omega$$

Analisi di Fourier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |a(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |a(\omega)|^2 d\omega$$

A noi serve $\int_0^{+\infty} |a(\omega)|^2 d\omega$

Dato che **a** e' reale,  $\int_{-\infty}^{+\infty} |a(\omega)|^2 d\omega = 2 \int_0^{+\infty} |a(\omega)|^2 d\omega$


$$\int_{-\infty}^{+\infty} |a(t)|^2 dt = 2 \int_0^{+\infty} |a(\omega)|^2 d\omega$$

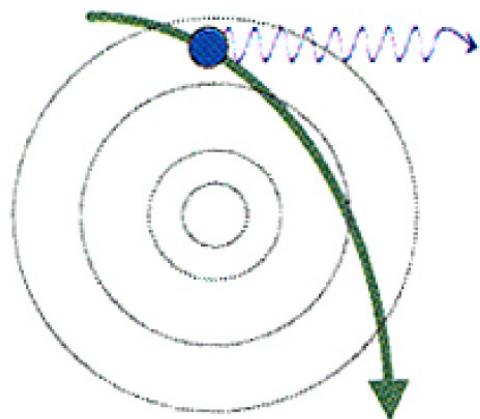
quindi $E = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \int_{-\infty}^{+\infty} |a(t)|^2 dt = \frac{q^2}{3\pi\epsilon_0 c^3} \int_0^{+\infty} |a(\omega)|^2 d\omega$

$$\frac{dE}{d\omega} = \frac{q^2}{3\pi\epsilon_0 c^3} |a(\omega)|^2 \equiv I(\omega) \quad [\text{EHz}^{-1}]$$

E' l'energia emessa per unita' di frequenza durante il periodo di accelerazione da una singola particella

Bremsstrahlung

La bremsstrahlung o radiazione di frenamento e' la radiazione associata con la variazione di quantita' di moto di una particella carica in un campo elettrico.



La descrizione corretta e' quella quantistica poiche' possono essere emessi fotoni con energie paragonabili a quella della particella che emette, ma come nel caso della ionizzazione in molti casi si puo' usare un approccio classico o semi-classico (relativistico).

Bremsstrahlung

Ovunque ci sia gas di elettroni e nuclei si ha emissione di radiazione di frenamento o emissione free-free (per sottolineare il fatto che si tratta di una transizione fra due stati energetici non legati).

Questo accade per:

L' emissione radio da regioni compatte di HII (idrogeno ionizzato) con $T \sim 10^4$ K,

Emissione X da sistemi binari con $T \sim 10^7$ K,

Emissione diffusa da gas intergalattico con $T \sim 10^8$ K

Atmosfere stellari

Inoltre costituisce uno dei processi principali attraverso cui elettroni di alta energia perdono energia

Densità media del mezzo Interstellare

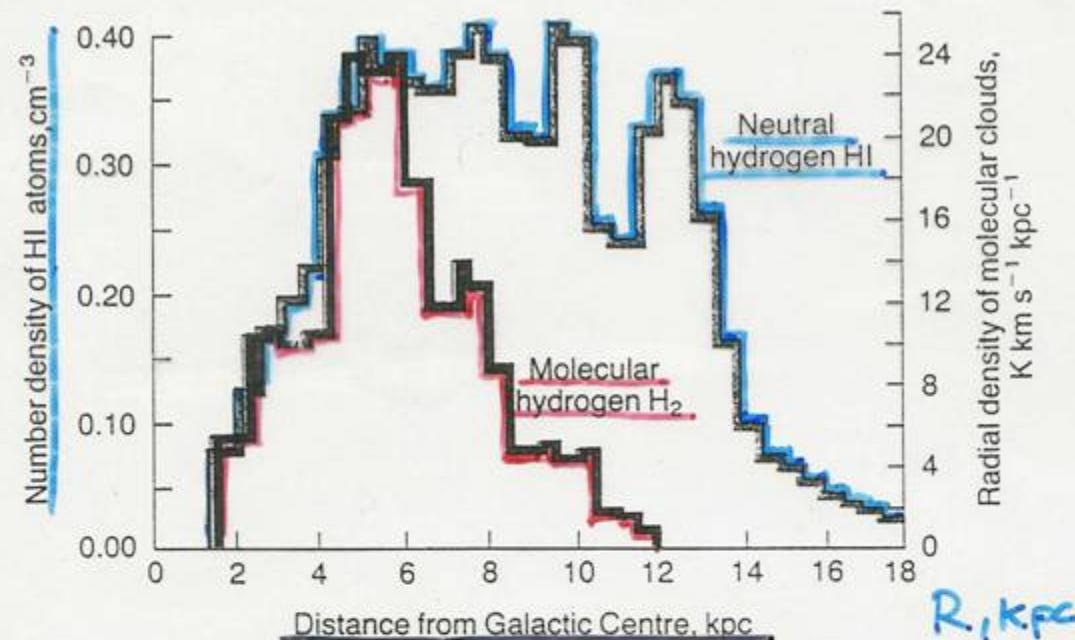


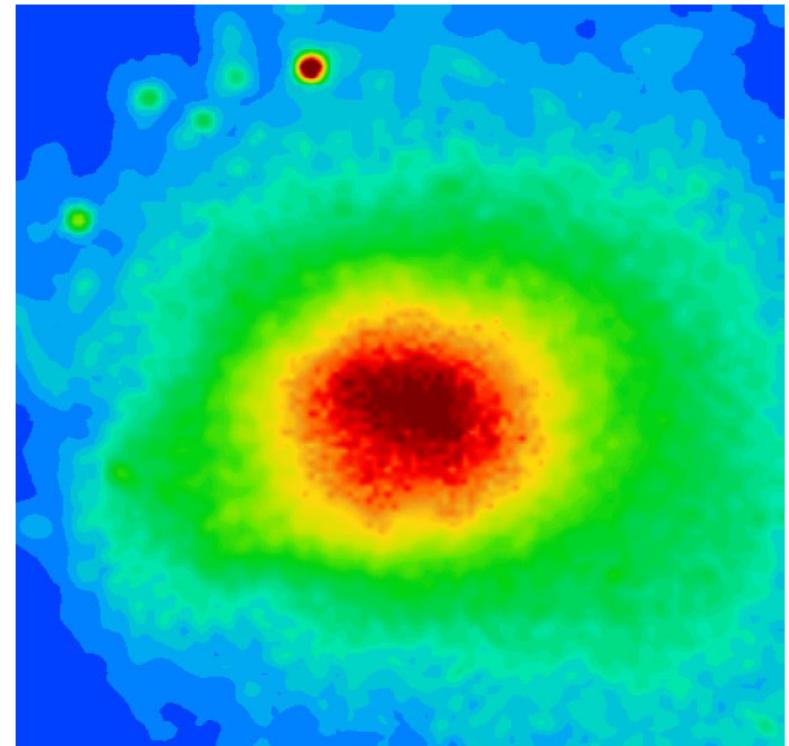
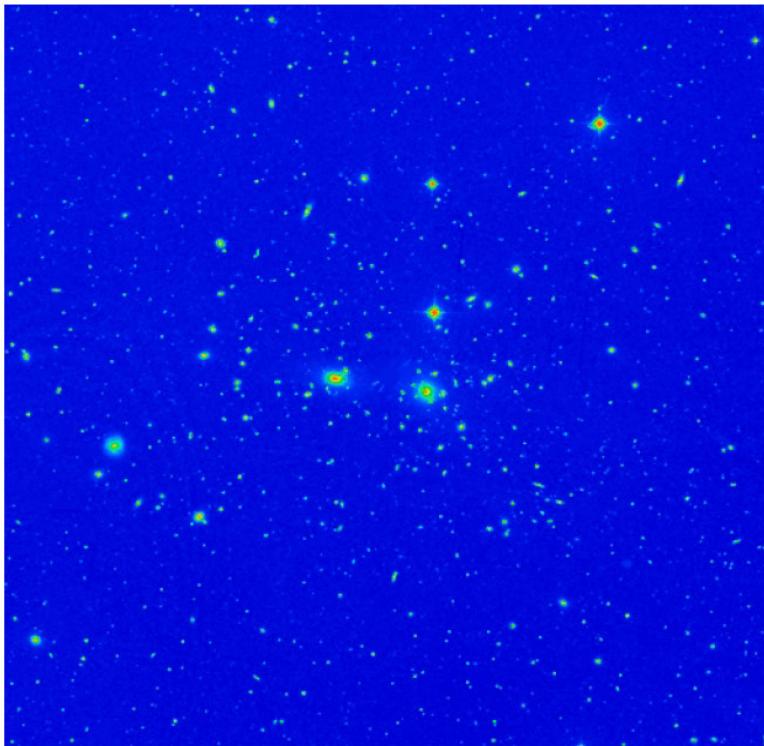
Figure 17.2. The radial distribution of atomic and molecular hydrogen as deduced from radio surveys of the Galaxy in the 21-cm line of atomic hydrogen and from millimetre surveys of the molecular emission lines of carbon monoxide, CO. (After D. Michalis and J. Binney (1981). *Galactic astronomy: structure and kinematics*, pp. 535, 554. San Francisco: W.H. Freeman and Co.)

$$\rho_{IG} = 1 \text{ p/cm}^3 = \\ = 1.67 \times 10^{-24} \text{ g/cm}^3$$

NAME	CONSTITUENTI	Rivelati da...	L'VOLUME e MASSA del Mezzo Int.	N cm^{-3}	T (K)
MOLECOLARI NUBI	H_2, CO CS etc.	linee molecolari Emiss. Polveri	~0.5% 40%	1000	10
NUBI DI H NUBI DIFFUSE	$\text{H}, \text{C}, \text{O}$ neutri	linea di 21 cm Linee Assorbim.	5% 40%	1-100	80
INTER NEBULE	$\text{H}, \text{H}^+, \text{e}^-$ (neutri: 10%)	21 cm + assorbim. Linee H	40% 20%	$0.1-1$	10^4
CORONE stellari	H^+, e^- ... O^{5+}	soft X (0.1-2 keV)	~50% 0.1%	1000	10^6

bremsstrahlung

X-Ray Gas in Galaxy Clusters

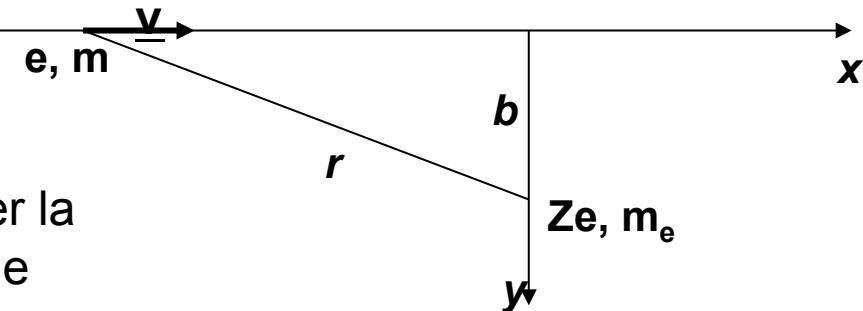


Coma cluster (left: optical image, right: X-ray image)

- An example of high energy thermal bremsstrahlung is the X-ray emission from giant elliptical galaxies and hot intercluster gas.

Bremsstrahlung classica

Per calcolare la radiazione emessa dobbiamo conoscere l'accelerazione dell'e- durante l'interazione.



La situazione e' analoga al caso discusso per la ionizzazione con il ruolo delle due particelle scambiato: ora e' l'e- che si avvicina al nucleo stazionario \rightarrow nel caso della ionizzazione avevamo calcolato il campo del nucleo sull'elettrone in quiete \rightarrow già conosciamo l'accelerazione dell'e- nel suo sistema di riferimento di quiete...possiamo usare la simmetria della situazione per ottenere il risultato

Come procederemo: lavoreremo nel sistema di riposo dell'elettrone e poi faremo le trasformazioni di Lorentz appropriate per ottenere l'emissione spettrale nel laboratorio

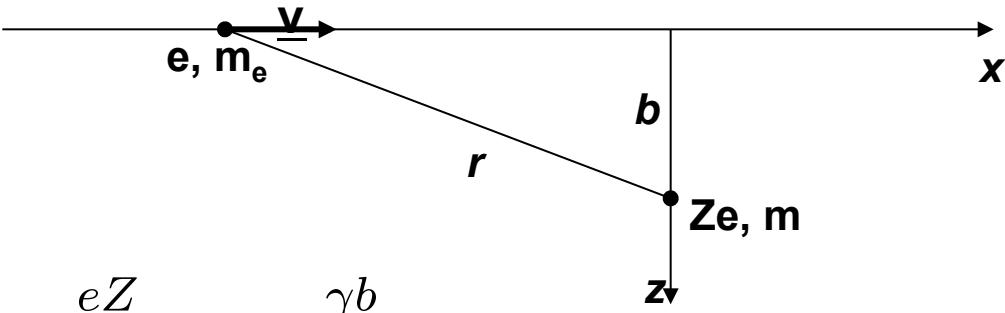
- nota \mathbf{a} , calcoliamo lo spettro della radiazione emessa $I(\omega)$ (EHz $^{-1}$)
- integriamo sui parametri d'impatto b
- trasformiamo nel sistema del nucleo nel caso relativistico

Brems classica (2): campi

Nel caso della ionizzazione avevamo un nucleo di alta energia che colpisce con un e- in quiete \rightarrow il campo elettrico che agisce su un e- stazionario (ie nel rif K' di quiete dell'e-)

e'

$$E_x = -\frac{eZ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma vt}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}} \quad E_z = \frac{eZ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma b}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}}$$



NB: V e' la vel dell'e- nel labo \rightarrow -v e' quella nucleo in K', i.e. dovremmo mettere gli apici alle quantita' che compaiono nelle equazioni...non le mettiamo per non appesantire la notazione ma e' chiaro che sono riferite in K'

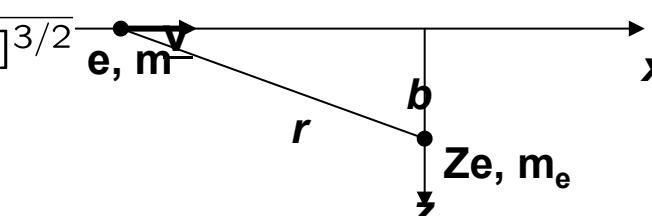
Quindi 'accelerazione a cui e' sottoposto e'

$$a_x = \frac{e}{m_e} E_x \quad a_z = \frac{e}{m_e} E_z$$

$$a_x = -\frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 m_e} \frac{\gamma vt}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}}$$

$$a_z = \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 m_e} \frac{\gamma b}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}}$$

Brems classica (3):trasf. di Fourier

$$a_x(t) = -\frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 m_e} \frac{\gamma v t}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}} \quad a_z(t) = \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 m_e} \frac{\gamma b}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}}$$


Le trasformate di Fourier sono

$$a_x(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 m_e} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma v t}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}} e^{i\omega t} dt$$

$$a_z(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 m_e} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma b}{[b^2 + (v\gamma t)^2]^{3/2}} e^{i\omega t} dt$$

Pongo $\mathbf{x} = \gamma v t / b \rightarrow dx = (\gamma v / b) dt$
 $\rightarrow dt = (b / \gamma v) dx$



$$a_z(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 m_e} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma b}{b^3 [1 + x^2]^{3/2}} e^{\frac{i\omega b}{\gamma v} x} (b / \gamma v) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 m_e b v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[1 + x^2]^{3/2}} e^{\frac{i\omega b}{\gamma v} x} dx$$

$$a_x(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 m_e} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma v (bx / \gamma v)}{b^3 [1 + x^2]^{3/2}} e^{\frac{i\omega b}{\gamma v} x} (b / \gamma v) dx$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 m_e b v \gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{[1 + x^2]^{3/2}} e^{\frac{i\omega b}{\gamma v} x} dx$$

Brems classica (4): emissione spettrale

$$a_z(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 m_e b v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[1+x^2]^{3/2}} e^{\frac{i\omega b}{\gamma v} x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 m_e b v} I_1\left(\frac{i\omega b}{\gamma v}\right) \quad \text{k comp}$$

$$a_x(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 m_e b v \gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{[1+x^2]^{3/2}} e^{\frac{i\omega b}{\gamma v} x} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 m_e b v \gamma} I_2\left(\frac{i\omega b}{\gamma v}\right) \quad ? \text{ comp}$$

NB: $a_x/a_z = I_2/\gamma I_1 \rightarrow a_x$ e' soppresso di un fattore γ rispetto ad a_z

Posto $y = \omega b / \gamma v$, le funzioni $I(y)$ possono essere espresse come funzioni di Bessel modificate di ordine 1 e 0 (...consultando tavole di integrali)

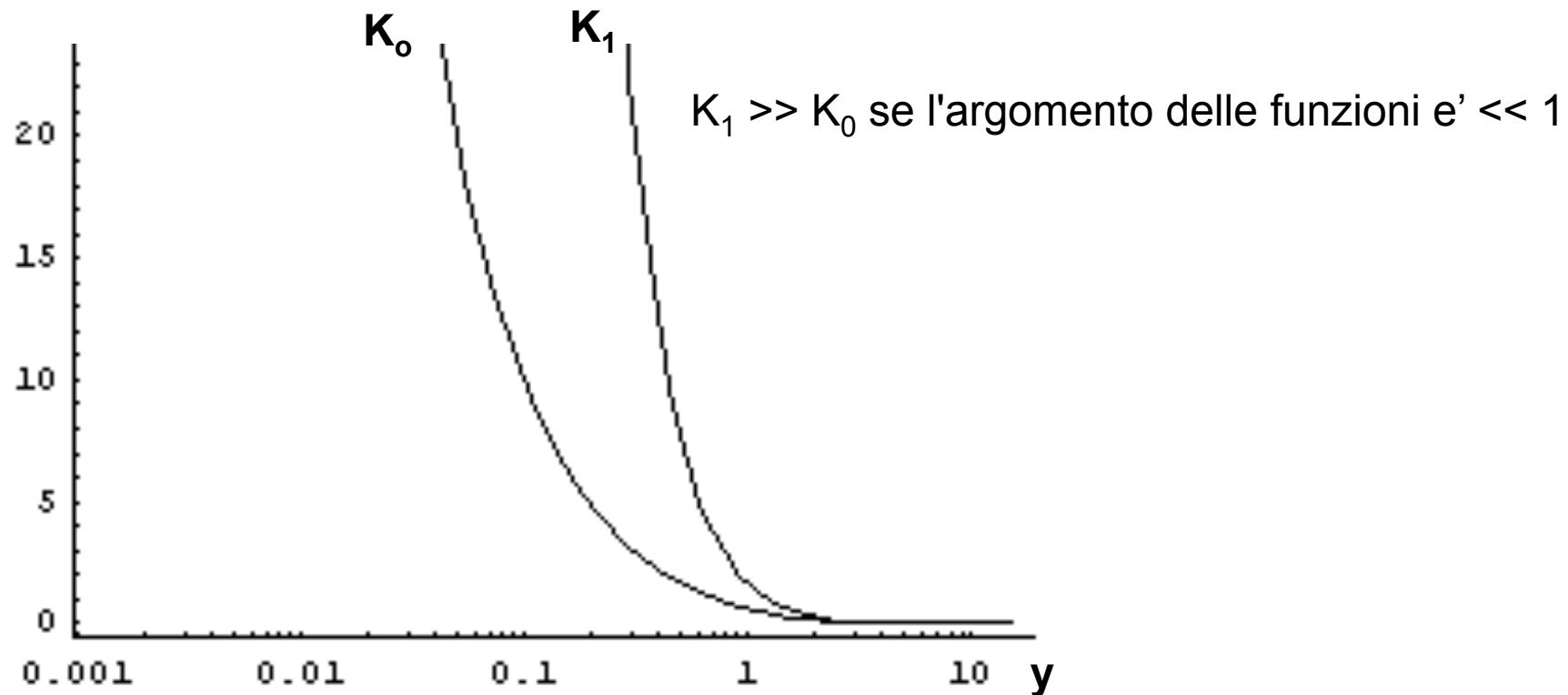
$$I_1 = 2yK_1(y)$$

$$I_2 = 2iyK_0(y)$$

I calcoli dettagliati dell'emissione spettrale sono facoltativi

Funzioni di Bessel: esempio

Le funzioni Bessel K modificate divergono per $y \rightarrow 0$ e tendono a zero molto rapidamente per $y \rightarrow +\infty$ e non sono esprimibili in termini finiti, ie analitici



Brems classica (4): emissione spettrale

Riprendiamo l'analisi dello spettro della radiazione di bremsstrahlung

$$a_z(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 m_e b v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[1+x^2]^{3/2}} e^{\frac{i\omega b}{\gamma v} x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 m_e b v} I_1\left(\frac{i\omega b}{\gamma v}\right)$$

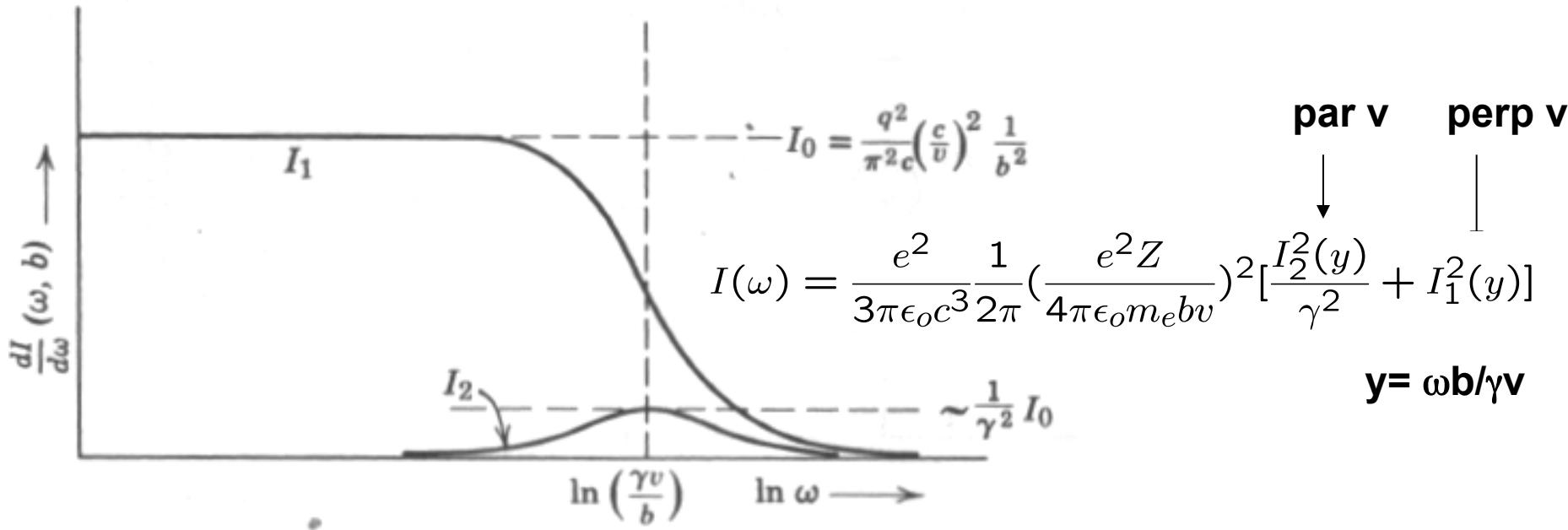
$$a_x(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 m_e b v \gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{[1+x^2]^{3/2}} e^{\frac{i\omega b}{\gamma v} x} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 m_e b v \gamma} I_2\left(\frac{i\omega b}{\gamma v}\right)$$

Posto $y = \omega b / \gamma v$, le funzioni I possono essere espresse come funzioni di Bessel modificate di ordine 1 e 0 (di solito espresse come somma di una serie)

$$I_1 = 2yK_1(y) \quad I_2 = 2iyK_0(y)$$

$$\begin{aligned} I(\omega) &= \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 c^3} |a(\omega)|^2 = \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 c^3} (|a_{\parallel}(\omega)|^2 + |a_{\perp}(\omega)|^2) = \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 c^3} (|a_x(\omega)|^2 + |a_z(\omega)|^2) \\ &= \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 c^3} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 m_e b v} \right)^2 \left[\frac{I_2^2(y)}{\gamma^2} + I_1^2(y) \right] \end{aligned}$$

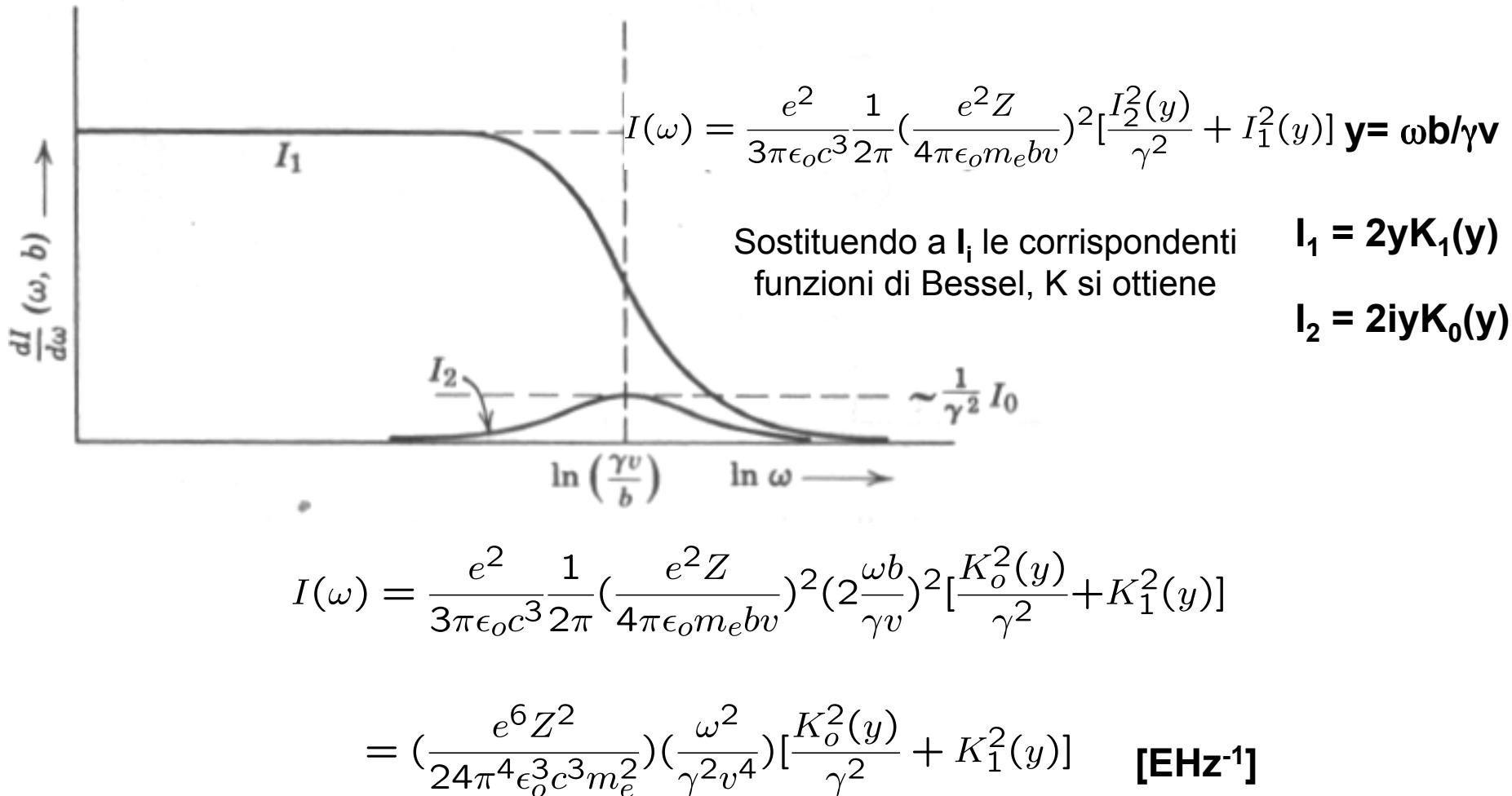
Brems classica (5): emissione spettrale



Il contributo della componente perp (I_1) domina l'emissione: anche nel caso non relativistico il contributo e' piuttosto trascurabile (cfr. Vedi funzioni di Bessel K_0 e K_1 : $K_1 \ll K_0$ per $y \ll 1$), nel caso relativistico e' ulteriormente soppresso di un fattore γ^2

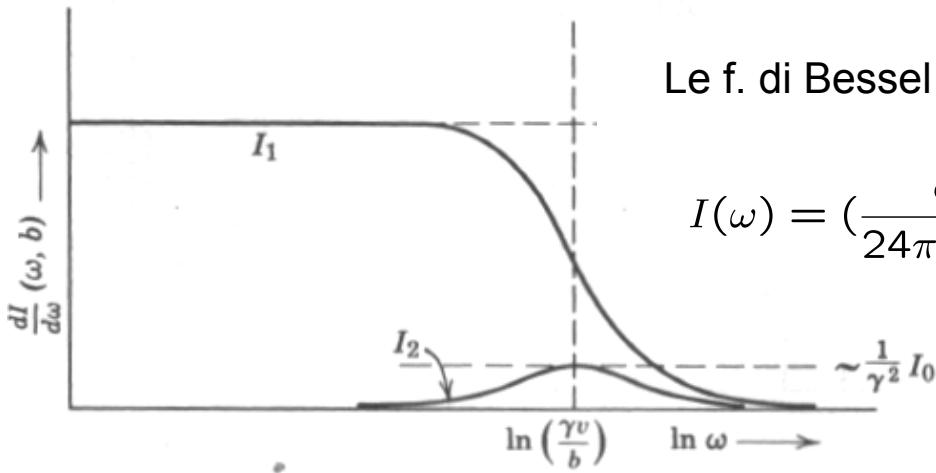
Il contributo di I_2 e' limitato a frequenze $\omega \sim \gamma v / b$, mentre quello di I_1 si estende e domina totalmente l'emissione a basse frequenze

Brems classica (6): emissione spettrale



Si vede chiaramente che la comp perp \gg comp par per $y \ll 1$ (ie $\omega \ll \gamma v/b$) poiche' $K_0 \ll K_1$ e il fattore $1/\gamma^2$ deprime ulteriormente nel caso relativistico

Brems classica(7): emiss. spettrale



Le f. di Bessel K_i non sono esprimibili in termini finiti ma come somma di una serie.

$$I(\omega) = \left(\frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_o^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{\omega^2}{\gamma^2 v^4} \right) \left[\frac{K_o^2(y)}{\gamma^2} + K_1^2(y) \right] \quad y = \omega b / \gamma v$$

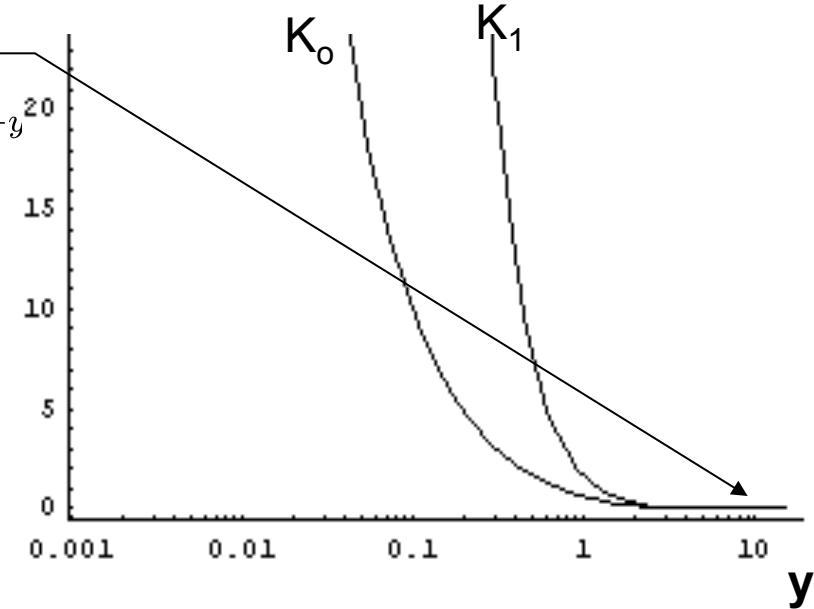
Pero' possiamo studiare il loro comportamento asintotico per $y \rightarrow 0$ e $y \rightarrow +\infty$

Limite $y = \omega b / \gamma v \gg 1$

$$K_o(y) = K_1(y) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2y}} e^{-y^{20}}$$

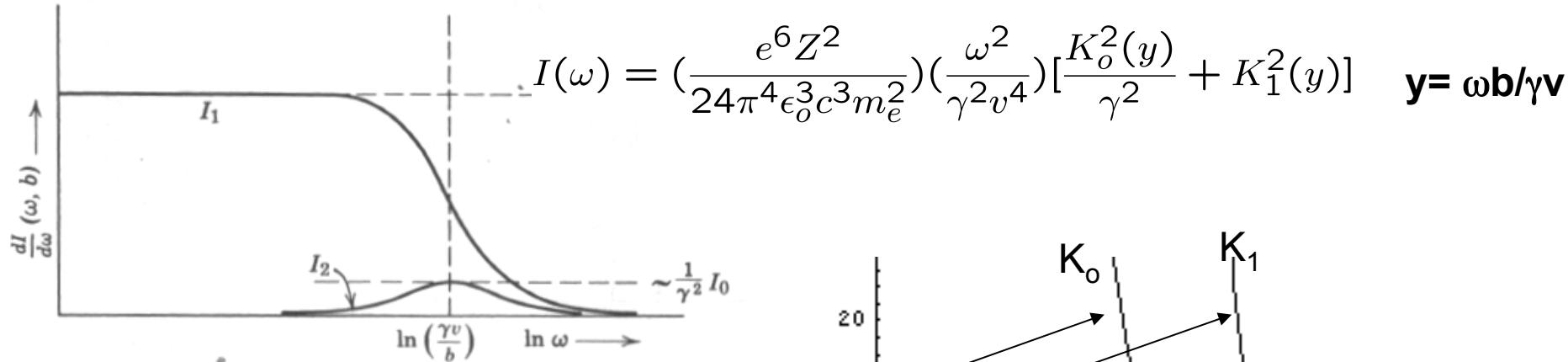
$$\begin{aligned} I(\omega) &= \left(\frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_o^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{\omega^2}{\gamma^2 v^4} \right) \frac{\pi}{2y} e^{-2y} \left[\frac{1}{\gamma^2} + 1 \right] \\ &= \left(\frac{e^6 Z^2}{48\pi^3 \epsilon_o^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{\omega^2}{\gamma^2 v^4} \right) \frac{\gamma v}{\omega b} e^{-2\frac{\omega b}{\gamma v}} \left[\frac{1}{\gamma^2} + 1 \right] \\ &= C \left(\frac{\omega}{\gamma b v^3} \right) e^{-2\frac{\omega b}{\gamma v}} \left[\frac{1}{\gamma^2} + 1 \right] \end{aligned}$$

C'e' un cutoff esponenziale a frequenze $\omega \sim \gamma v / b = \omega_{\text{cutoff}}$
 \rightarrow c'e' poca potenza emessa a frequenze superiori a $\gamma v / b$



NB: ω_{cutoff} dipende da $b \rightarrow$ frequenze di taglio diverse per diversi b

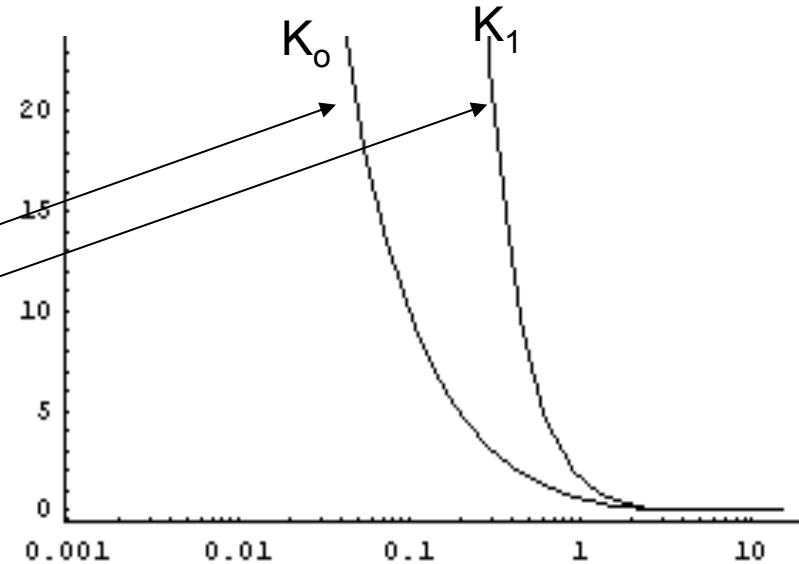
Brems classica (8): emiss. spettrale



Limite $y = \omega b / \gamma v \ll 1$

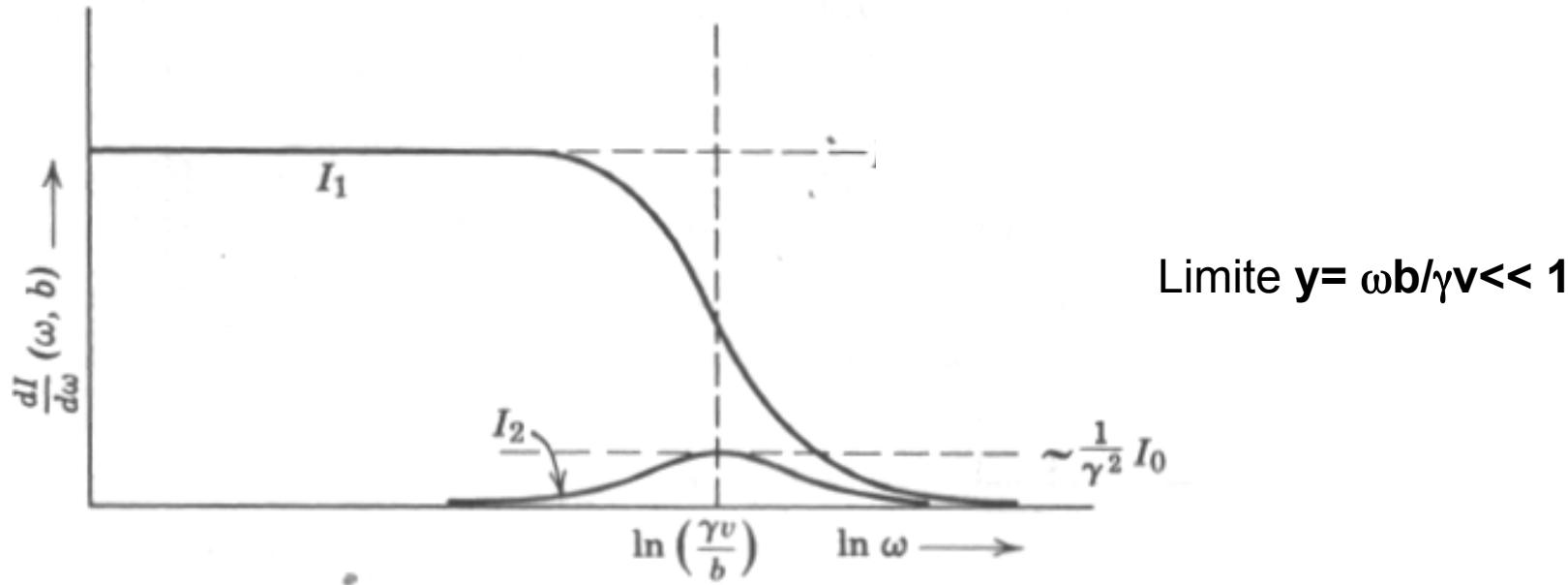
$$K_o(y) \approx -\ln y = \ln(1/y)$$

$$K_1(y) \approx 1/y$$



$$\begin{aligned}
 I(\omega) &= \left(\frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{\omega^2}{\gamma^2 v^4} \right) \left[\frac{K_o^2(y)}{\gamma^2} + K_1^2(y) \right] = \left(\frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{\omega^2}{\gamma^2 v^4} \right) \left[\frac{\ln^2(\omega b / \gamma v)}{\gamma^2} + \frac{\gamma^2 v^2}{\omega^2 b^2} \right] \\
 &= \left(\frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{\omega^2}{\gamma^2 v^4} \right) \frac{\gamma^2 v^2}{\omega^2 b^2} \left[1 + \left(\frac{\omega^2 b^2}{\gamma^2 v^2} \right) \frac{\ln^2(\omega b / \gamma v)}{\gamma^2} \right] = \left(\frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{1}{v^2 b^2} \right) \left[1 + \left(\frac{\omega^2 b^2}{\gamma^2 v^2} \right) \frac{\ln^2(\omega b / \gamma v)}{\gamma^2} \right]
 \end{aligned}$$

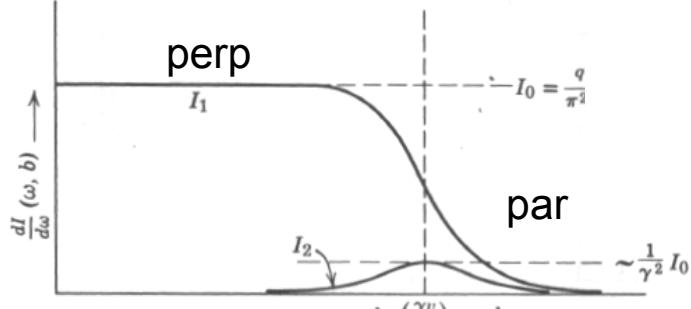
Brems classica (9): emiss. spettrale



$$I(\omega) = \left(\frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{1}{v^2 b^2} \right) \left[1 + \left(\frac{\omega^2 b^2}{\gamma^2 v^2} \right) \frac{\ln^2(\omega b / \gamma v)}{\gamma^2} \right] \approx \left(\frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{1}{v^2 b^2} \right)$$

- Lo spettro a bassa frequenza ($y \ll 1$) e' dovuto quasi totalmente alla componente perp dell'impulso rispetto alla linea di volo
- E' indipendente da ω
- E' indipendente da γ ← perche' $\Delta p_{t\text{perp}}$ non dipende da γ

Brems classica (10): em. spettrale

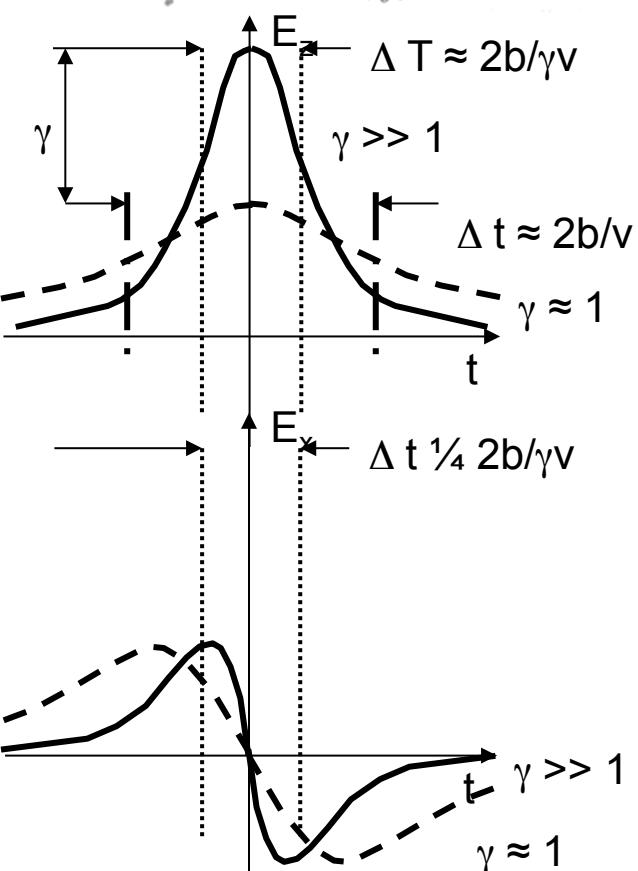


$$I(\omega) = \left(\frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{\omega^2}{\gamma^2 v^4} \right) \left[\frac{K_o^2(y)}{\gamma^2} + K_1^2(y) \right]$$

Qualitativamente l'andamento delle due componenti si spiega osservando la forma temporale dell'impulso

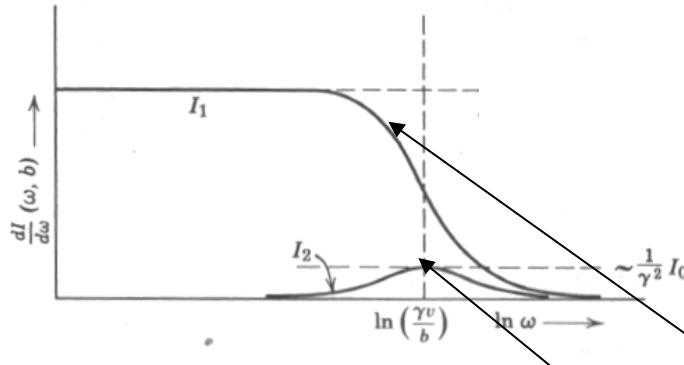
La componente perpendicolare ha la forma che "somiglia" ad una δ di Dirac per le componenti a bassa frequenza \rightarrow

lo spettro contiene tutte le frequenze con uguale peso fino a $\omega \approx 1/\Delta T = \gamma v/b$, oltre cui lo spettro decade exp



La componente parallela ha invece un andamento simile ad un'onda sinusoidale di dutata ΔT e quindi contiene solo poche frequenze intorno a ΔT

Brems classica (11): em. spettrale



$$I(\omega) = \left(\frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{\omega^2}{\gamma^2 v^4} \right) \left[\frac{K_o^2(y)}{\gamma^2} + K_1^2(y) \right]$$

$$\omega b / \gamma v \gg 1$$

$$\approx \left(\frac{e^6 Z^2}{48\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{\omega}{\gamma b v^3} \right) e^{-2\frac{\omega b}{\gamma v}} \left[\frac{1}{\gamma^2} + 1 \right]$$

$$\omega b / \gamma v \ll 1$$

$$\approx \left(\frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{1}{v^2 b^2} \right)$$

E' lo spettro di emissione di un singolo elettrone su un singolo nucleo

NB: siamo nel riferimento di quiete dell'elettrone

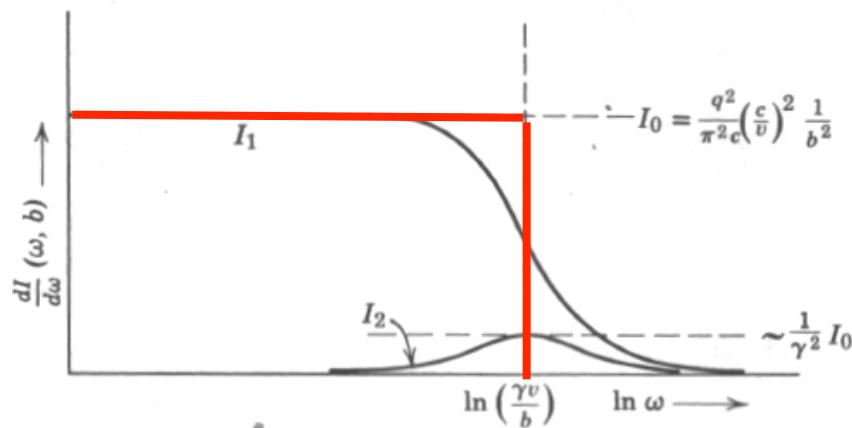
Brems classica (12): em. spettrale

Ora bisogna integrare sui parametri d'impatto

$$I(\omega) = \left(\frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{\omega^2}{\gamma^2 v^4} \right) \left[\frac{K_o^2(y)}{\gamma^2} + K_1^2(y) \right] \quad \text{NB: nel sist. di quiete dell'e-}$$

La componente par e' piccola rispetto a quella perp e contribuisce solo intorno a $\omega_0 = \gamma v / b \rightarrow$ si puo' trascurare in prima approssimazione

$$I(\omega) \approx \left(\frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{1}{v^2 b^2} \right) \quad \text{fino a } \omega = \gamma v / b, \text{ cioe' fino a } y \sim 1, \text{ i.e. I e' una step function con il gradino a } \omega = \gamma v / b$$



Brems classica (12): em. spettrale

$$I(\omega) \approx \left(\frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{1}{v^2 b^2} \right)$$

fino a $\omega = \gamma v/b$, cioe' fino a $y \sim 1$, i.e. I e' una step function con il gradino a $\omega = \gamma v/b$

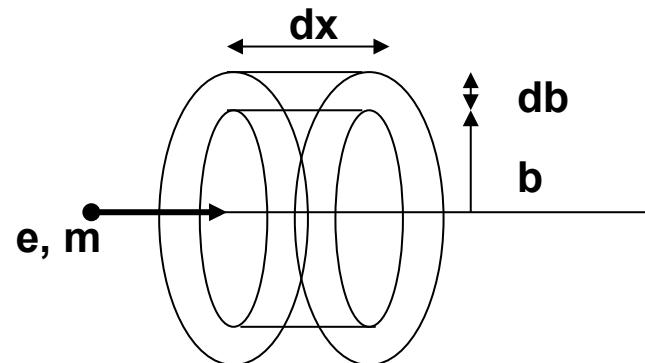
L'energia totale per unita' di frequenza da un singolo elettrone su una popolazione di nuclei di carica Z e'

$$I_t(\omega) = \int_{b_{min}}^{b_{max}} I(\omega) dN'$$

Il # di nuclei nel volume $dV = 2\pi b db dx$ e'
 $dN' = N' dV = 2\pi N' b db dx$, **N' = densita' dei nuclei in K'**

$$dI_t(\omega) = \left(\frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{1}{v^2 b^2} \right) dN'$$

$$= \left(\frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{1}{v^2 b^2} \right) 2\pi N' b db dx$$



Brems classica (13)

$$\begin{aligned}
 dI(\omega) &= \left(\frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{1}{v^2 b^2} \right) 2\pi N' b db dx &= \left(\frac{e^6 Z^2}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{1}{v^2 b^2} \right) 2\pi N' b db v dt \\
 &= \left(\frac{e^6 Z^2}{12\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{1}{vb} \right) N' db dt \quad [\text{EHz}^{-1}]
 \end{aligned}$$

L'energia emessa per unita' di tempo e frequenza
dovuta a nuclei con $b \div b+db$ e' quindi

$$d\left(\frac{dI(\omega)}{dt}\right) = \left(\frac{e^6 Z^2}{12\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{1}{vb} \right) N' db$$

$$\frac{dI(\omega)}{dt} = \left(\frac{e^6 Z^2 N'}{12\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 v} \right) \int_{b_{min}}^{b_{max}} \left(\frac{db}{b} \right) = \left(\frac{e^6 Z^2 N'}{12\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 v} \right) \ln \frac{b_{max}}{b_{min}} \quad [\text{WHz}^{-1}]$$

Nel caso generale, la densita' N' nel sistema di quiete dell'e- e' data da $\mathbf{N}' = \gamma \mathbf{N}$, con N = densita' nel sistema di quiete del nucleo, cioe' il laboratorio dato che $N = dN / dV$ e $dV' = dV / \gamma$

$$\frac{dI(\omega)}{dt} = \left(\frac{e^6 Z^2 \gamma N}{12\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 v'} \right) \ln \frac{b'_{max}}{b'_{min}}$$

Gli apici indicano esplicitamente che le quantita' sono valutate nel rif di quiete dell'e-

Bisogna scegliere i valori appropriati dei limiti di integrazione nel caso e- relativistici e non.

Brems relativistica

Lo spettro di potenza emesso nel sistema proprio dell'e- e', come si e' gia' visto:

$$\frac{dI'(\omega)}{dt'} = \left(\frac{e^6 Z^2 \gamma N}{12\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 v'} \right) \ln \frac{b'_{max}}{b'_{min}}$$

Gli apici indicano che le quantita' corrispondenti sono valutate nel rif dell'e-
Il fattore γ viene dalla trasformazione della densita' di particelle $N' = \gamma N$

Come al solito bisogna scegliere i valori appropriati per i limiti in b:
Dato che sono quantita' lineari perp a v sono invarianti per trasf di Lorentz
Nel caso della ionizz. per b_{min} , dato che $v/c > Z/137$ occorreva usare il limite
quantistico dettato dal principio di indeterminazione $b_{min} = h/\Delta p$

Nel caso della brems, in cui abbiamo a che fare con la radiazione emessa
dall'elettrone, il valore min di b e' fissato invece dalla condizione che l'emissione sia
coerente, cioe' che l'e- emetta "come un'unica carica". Per valori piu' piccoli, gli
effetti della nube di coppie virtuali e+e- intorno alla carica nuda (i.e. Effetti di
polarizzazione del vuoto) cominciano a diventare importanti e l'emissione non e' piu'
coerente