Lecture 7 261018

- Il pdf delle lezioni puo’ essere scaricato da
- http://www.fisgeo.unipg.it/~fiandrin/didattica_fisica/cosmic_rays1819/

Cosmic Rays propagation as function of:

1) Diffusion $D = lv/3$

2) Rate of change of particle energy $b(E) = dE/dt$

3) Particle loss term due to interactions and decays

4) Particle gain from sources and all interactions and decays

Equazione di propagazione (1)

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} - \vec{\nabla}\cdot(\hat{D}_i \vec{\nabla} N_i) + \frac{\partial}{\partial E}(b_i N_i) + n v \sigma_i N_i + \frac{N_i}{T_i} = q_i + \sum_{j<i} n v \sigma_{ij} N_j + \sum_j \frac{N_j}{T_{ij}}$$

- I CR non sono accelerati nell'ISM, sono accelerati da sorgenti puntiformi
- La loro potenza e distribuzione spazio-temp. e' descritta dalle funzioni $q_i(t, \vec{r}, E)$ (per la specie i)

* $\hat{D}_i(\vec{r}, E)$ e' il tensore di diffusione

* $b_i(\vec{r}, E)$ caratterizza le perdite continue di energia delle <u>singole</u> particelle così che $dE/dt = b_i$ ($\equiv$ ionizz. + brems + sincrotr + Compton inverso)

* $\sigma_i(E)$ e' la sez. d'urto inelastica del nucleo i con i nuclei dell'ISM

* $n(\vec{r})$ e' la densità dell'ISM

* σ_{ij} e' la sez. d'urto di prod. di nuclei di tipo i da nuclei più pesanti

* T_i e' la vita media rispetto a decad. radioatt.

* N_j/T_{ij} descrive l'apparizione di nuclei di tipo i a causa del decad. di altri nuclei

Equazione di propagazione (2)

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \left(\hat{D}_i \vec{\nabla} N_i \right) + \frac{\partial}{\partial E}\left(b_i N_i \right) + n v \sigma_i N_i + \frac{N_i}{\tau_i} = q_i + \sum_{j<i} n v \sigma_{ij} N_j + \sum_j \frac{N_j}{\tau_{ij}}$$

* Una sol. completa richiede l'uso di equazioni di questo tipo per tutti i tipi di nuclei, i.e. un sistema di equ. accoppiate
* Dobbiamo assumere che le densità osservabili N_i, le σ di frammentazione e le vite medie τ siano note
* Dobbiamo anche conoscere la forma e il volume delle regioni di propagazione dei CR nella galassia, l'intensità e direzione del campo magnetico e la distribuzione del gas interstellare e delle sorgenti

Equazione di propagazione:esempio

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\nabla^2 n - \Gamma^{sp} n + Q \qquad \bullet\ \Gamma^{sp} = \frac{1}{\tau_{sp}} = n_{ISM}\,\sigma\, v$$

- Condizione al contorno $n(E, t, z = \pm H) = 0$
- Diffusione isotropa
- Perdite di energia trascurabili
- Sorgenti Q uniformemente distribuite nel disco: SNR che esplodono con un rate $\mathcal{R}$

Soluzione: introduco il propagatore (o funzione di Green) $G(\vec{r}, t; \vec{r}', t')$ t.c.

$$n(\vec{r}, t, E) = \int dt' \int d^3r'\, G(\vec{r}, t; \vec{r}', t')\, Q(E, r', t')$$

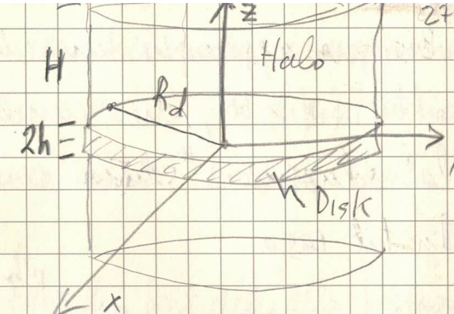
Sost. nell'equ di prop., si trova che G deve soddisfare l'equ.

$$\frac{\partial G}{\partial t} - D\nabla^2 G + \Gamma^{sp} G = \delta(t-t')\,\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$$

La distribuzione delle sorgenti è

$$Q(E, r', t') = N(E)\,\delta(t-t')\,\delta^3(r-r')\,\frac{\mathcal{R}}{2\pi R_d^2 h} \quad \mathrm{cm}^{-3}\mathrm{s}^{-1}$$

con $N(E)$ spettro alla sorgente



L'equ. si risolve "facilmente".

La soluzione generale senza le cond. al contorno è

$$G^{free}(\vec{r}, t; r', t') = \frac{N(E)\,\mathcal{R}}{2\pi R_d^2 h}\, e^{-\Gamma^{sp}(t-t')}\, \frac{e^{-[(\vec{r}-\vec{r}')^2/4D(t-t')]}}{[4\pi D(t-t')]^{3/2}}\,\theta(t-t')$$

La soluzione si estende su tutto lo spazio, anche oltre $z = \pm H$.

Per ottenere la sol. che soddisfa la cond. al contorno si usa il metodo delle "cariche immagini" (o metodo della riflessione)

Il concetto chiave è soddisfare le cond. al contorno estendendo il dominio oltre la regione di interesse e piazzando una "sorgente" mirror o un termine di forcing nella regione non fisica

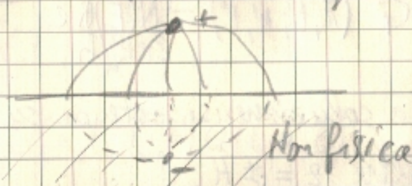
Equazione di propagazione:esempio

Bisogna aggiungere una distribuzione fittizia oltre $|z| > H$, che cancelli esattamente la soluzione senza cond. al contorno.

In tal caso

$$G(\vec r,t;\vec r',t') = \frac{N(E)\,R\; e^{-\Gamma^{sp}\tau} \cdot e^{-\frac{[(x-x_s)^2+(y-y_s)^2]}{4D\tau}}}{[4\pi D\tau]^{3/2}\,(2\pi R_d^2 h)} \cdot \sum_{m-\infty}^{+\infty} (-1)^m e^{-(z-z'_m)^2/4D\tau}, \quad \tau = t-t'$$

con $z'_m = (-1)^m z_s + 2mH$ cond. delle sorgenti immagine



Consideriamo il caso semplice in cui ci mettiamo nel centro del disco a $z=0$ e ci limitiamo ai protoni, cioè senza nuclei e senza spallazione $\Gamma^{sp}=0$.

In tal caso la densità di particelle alla posizione della Terra è

$$n(E) = \int_0^\infty d\tau \int_{-h}^{h} dz \int_0^{R_d} 2\pi r\,dr\, \frac{N(E)\,R}{2\pi R_d^2 h} \cdot \frac{e^{-\frac{r^2}{4D\tau}}}{[4D\tau]^{3/2}} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty}\left[(-1)^m e^{-(2mH)^2/4D\tau}\right]$$

Integrando su z

$$n(E) = \int_0^\infty d\tau \int_0^{R_d} \frac{2\pi r}{\pi R_d^2}\, \frac{N(E)\,R}{[4D\tau]^{3/2}}\, e^{-\frac{r^2}{4D\tau}} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty}\left[(-1)^m e^{-(2mH)^2/4D\tau}\right]$$

Equazione di propagazione

Integrando ancora su τ e poi su r

$$n(E) = \frac{N(E)\,R}{2\pi D(E) R_d} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left\{ (-1)^n \left[\sqrt{1 + \left(\frac{2nH}{R_d}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{2nH}{R_d}\right)^2} \right] \right\}$$

Se $H \ll R_d$, la serie converge $\rightarrow \frac{H}{d}$

Quindi

$$n(E) = \frac{N(E)\,R}{2\pi R_d^2} \, \frac{H}{D(E)} = \frac{N(E)\,R}{2\pi R_d^2 H} \cdot \frac{H^2}{D(E)}$$

Se $D(E) \sim E^{\alpha}$ e $N(E) \sim E^{-\gamma}$

$$n(E) \sim E^{-\gamma-\alpha}$$

L'interpretazione fisica è semplice: la densità di protoni è il prodotto del rate di iniezione per unità di volume sull'intero volume della galassia e del tempo di confinamento $\tau_{esc} = H^2/D(E)$

Se c'è spallazione, introducendo il tempo scala di spallazione $\tau_{sp} = 1/\Gamma_{sp}$, la soluz. è

$$n(E) = \int_0^{\infty} d\tau \int_0^{R_d} dr \, \frac{2\pi r}{\pi R_d^2} \, \frac{e^{-r^2/4D\tau}}{[4\pi D\tau]^{3/2}} \cdot e^{-\tau/\tau_{sp}} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[(-1)^n e^{-(2nH)^2/4D\tau} \right]$$

Gli integrali su τ ed r sono analitici

$$n(E) = \frac{N(E)\,R}{2\pi D(E) R_d^2} \cdot \left[D(E)\,\tau^{sp} \right]^{1/2} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \left\{ e^{-(4n^2 \tau_{esc}/\tau_{sp})^{1/2}} - e^{\left[-\left(\frac{\tau_{esc}}{\tau_{sp}}\right)^{1/2} \left(4n^2 + R_d^2/H^2\right)^{1/2}\right]} \right\}$$

con $\tau_{esc} = H^2/D(E)$ che rappresenta il tempo di fuga dei CR dalla galassia

$\therefore$ $n(E)$ dipende dal rapporto fra tempo di fuga e di spallazione

Equazione di propagazione

Possiamo fare i limiti asintotici

i) $\tau_{esc}/\tau_{sp} \ll 1$ → Poca spallazione prima della fuga

La serie converge

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}[\dots] = \frac{H}{(D\tau_{sp})^{1/2}}$$

NB: domina il τ più breve

quindi

$$n(E) = \frac{N(E)\,R}{2\pi R_d^2}\,\frac{H}{D(E)}$$

come nel caso senza spallazione

ii) $\tau_{esc}/\tau_{sp} \gg 1$ → La spallazione domina

In questo caso bisogna fare attenzione a definire la densità media attraversata nel volume di propagazione.

I RC dopo l'emissione sono contenuti in una regione di raggio $R \sim \sqrt{4D\tau_{sp}}$ nel disco.

Si può mostrare che, data la dipendenza $\sqrt{\tau}$, una particella può spazzare una parte suff. larga del volume da poter considerare che la particella sia esposta a densità di gas media costante pari a

$$n_{gas} = n_{disco}\frac{2h}{\sqrt{4D\tau_{sp}}} = n_{disco}\frac{h}{\sqrt{D\tau_{sp}}}$$

In queste condizioni

$$n(E) = \frac{N(E)\,R}{2\pi R_d^2 H}\left(\tau_{sp}\tau_{esc}\right)^{1/2}$$

La densità media n_{gas} può essere scritta come $n_{gas} = \frac{n_{disco}^2 h^2 \sigma c}{D}$

In queste condizioni $(\tau_{sp}\tau_{esc})^{1/2} =$

$$= \left(\frac{H^2}{D}\cdot\frac{D}{n_d^2 h^2 \sigma^2 c^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{H}{h}\,\frac{1}{n_d \sigma c}\right)$$

è indipendente da E e lo spettro alla Terra è lo delle sorgenti

$$n(E) \sim E^{-\gamma}$$

Leaky Box Model

- A useful approximation is the following:
  - CR propagate freely in the galaxy volume, uniformly filled with ISM and regular B, until they reach the "border" and escape
  - A CR has a probability per unit of time to escape the galaxy $p = 1/\tau_{esc}$, where τ is the measured residence time of CR in the galaxy
- Then

$$D\nabla^2 \mathcal{N} \to -\frac{\mathcal{N}}{\tau_{\rm esc}}.$$

- As the diffusion coefficient D is energy dependent, also the characteristic escape time of CRs from the Galaxy $\tau_{esc} = \tau_{esc}(E)$ is energy dependent

Leaky Box Model

- The transport equation becomes

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{N}_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathcal{N}_i}{\tau_{\mathrm{esc}}} + \frac{\partial}{\partial E}[b(E)\mathcal{N}_i(E)] + Q - \frac{\mathcal{N}_i}{\tau_i} + \sum_{j>i} \frac{P_{ji}}{\tau_j}\mathcal{N}_j.$$

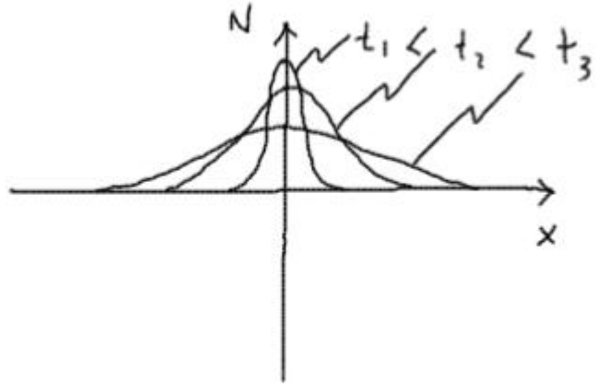
- The leaky-box model provides the most common description of CR transport in the Galaxy at energies below ~ 10^{17} eV. The model is based on particles injected by sources Q distributed uniformly over the galactic volume (the *box*) filled with a uniform distribution of matter and radiation fields. The particles get-away from this volume with an escape time independent of their position in the box. The escape time $\tau_{\mathrm{esc}}(E)$ depends on the particle energy, charge, and mass number, but it does not depend on the spatial coordinates. Secondary nuclei are produced during the propagation as a function of the path length

Modello diffusivo

* In assenza di fuga, cioè se le particelle diffondono dalle loro sorgenti (senza lasciare la regione) fino all'osservatore, $\tau_e = \infty \Longrightarrow$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \Longrightarrow N(x,t) = \frac{N_0}{\sqrt{\pi D t}}\, e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

con N_0 = # di particelle iniettate a $t=0$ in $x=0$



* In tal caso, la distr. di path lengths sarebbe una gaussiana tra la sorgente e l'osservatore

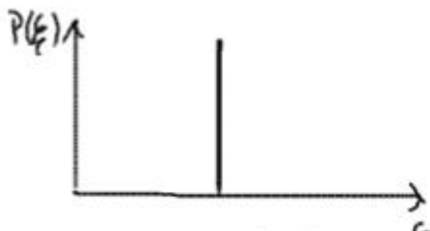
Leaky box

* Se invece si adotta un modello in cui le particelle rimangono nel disco galattico (o nell' alone) per un tempo τ_e prima di uscire senza diffondere $(D = 0)$

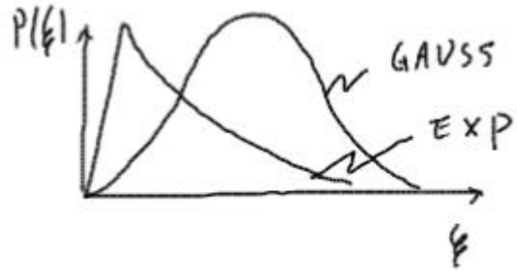
$$\Longrightarrow \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{N}{\tau_e} = 0 \quad \Longrightarrow N \propto e^{-t/\tau_e} \quad \text{o} \quad N \propto e^{-\xi/\xi_e}$$

* La distribuzione di path lengths sarebbe un' esponenziale

* Questi "modelli" corrispondono a differenti interpretazioni del modo in cui le particelle diffondono nella galassia (in modo plausibile)



slab MODEL



Equazione di propagazione

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} - \vec{\nabla}\cdot(\hat{D}_i \vec{\nabla} N_i) + \frac{\partial}{\partial E}(b_i N_i) + n v \sigma_i N_i + \frac{N_i}{\tau_i} = q_i + \sum_{j<i} n v \sigma_{ij} N_j + \sum_j \frac{N_j}{\tau_{ij}}$$

- Ci sono 2 casi:
  i) CR leggeri: e^-, e^+
  ii) CR pesanti p, He, $Z > 2$
- L'equ. di diff. e' la stessa, cambiano le perdite di energia:
  i) Per gli e^-, sono importanti $b(E) = \left(\frac{dE}{dt}\right)_{ion} + \left(\frac{dE}{dt}\right)_{Brems} + \left(\frac{dE}{dt}\right)_{Sinc} + \left(\frac{dE}{dt}\right)_{IC}$
  ii) Per la comp. nucl. ~~solo~~ $b(E) = \left(\frac{dE}{dt}\right)_{ion}$
  - Se osserviamo CR con $E \gtrsim 10$ GeV, le perdite di E si possono trascurare (i.e. $b(E) \approx 0$)

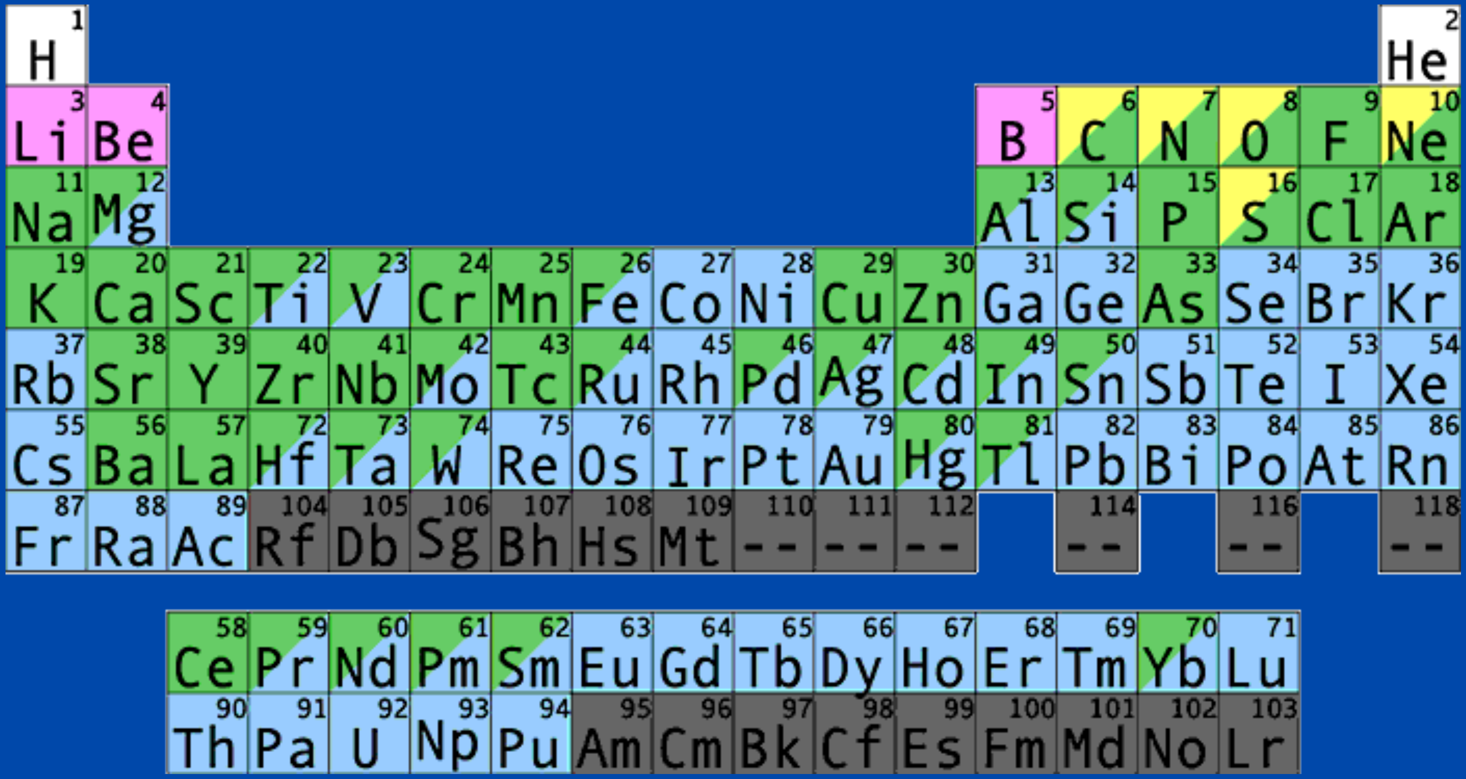
Esaminiamo la componente nucleare

Misure delle abbondanze degli elementi nella Galassia

- Le abbondanze "primordiali" degli elementi sono fissati dalla **cosmologia**:
  - 24% (in massa) di 4He
  - 76% (in massa) di H
- La **nucleosintesi** nelle stelle provvede alla sintesi degli elementi più pesanti
- Le esplosioni stellari (per M>> Ms) hanno una vita media << all'età dell'Universo e provvedono a rifornire il mezzo IG
- Le percentuali dei vari elementi nella Galassia possono essere dedotte in varie maniere

- The chemical elements existing in nature are a finite number: they are those that appear in the periodic table of elements. The observed stable nuclei are 264; the number of the unstable ones is more than 1,500. The latter number is increasing every year, as improved experimental techniques are developed, allowing the measurements of shorter and shorter nuclear lifetimes.
- The nuclei can be classified in terms of the number of protons Z (the *atomic number*), the number of neutrons N and the number of nucleons A (the *mass number*) $A = Z + N = Z$ protons plus N neutrons

Elementi chimici: genesi



White - Big Bang

Pink - Cosmic Rays

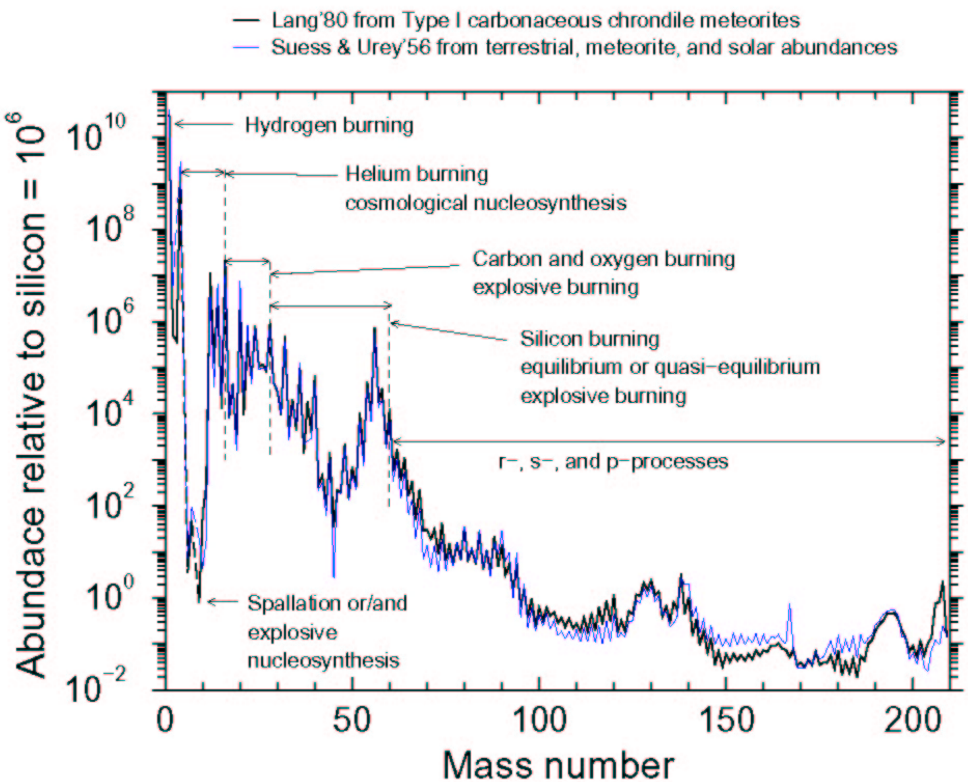
Yellow - Small Stars

Green - Large Stars

Blue - Supernovae

Abbondanze dei nuclei nel Sistema Solare

- Sono rappresentative delle abbondanze degli elementi nel mezzo interstellare



Ref: Mashnik, astro/ph: 0008382

Fig. 1.— Abundances of solar system nuclides plotted as a function of mass number. The thin blue curves shows old data compiled in Table III by Suess and Urey (1956) which are based on measurements of terrestrial, meteoric, and solar abundances. These data were used by Burbidge, Burbidge, Fowler, and Hoyle (1957) in postulating the basic nucleosynthetic processes in stars in their seminal work which become widely known as "B^2FH," the "bible" of nuclear astrophysics. The thick black curve shows newer data from the compilation published in Table 38 by Lang (1980) which are based upon measurement of Type I carbonaceous chrondite meteorites, and are thought to be a better representation than Suess and Urey's curve. The nuclear processes which are thought to be the main stelar mechanisms of nuclide production are shown as well in the figure.

Abbondanze dei nuclei nel Sistema Solare

The *cosmochemistry* or *chemical cosmology* is the study of the chemical composition of matter in the Universe and the processes that led to the observed compositions. Meteorites are one of the most important tools for studying the chemical nature of the Solar System. Many meteorites come from material that is as old as the Solar System itself, and thus provides a record from the early solar nebula. Carbonaceous (C) chondrites are especially primitive. C chondrites represent only a small proportion (4.6 %) of meteorite falls. They have retained many of their chemical properties since their formation in the solar system about 5×10^9 years ago, and are therefore a major focus of cosmochemical investigations.

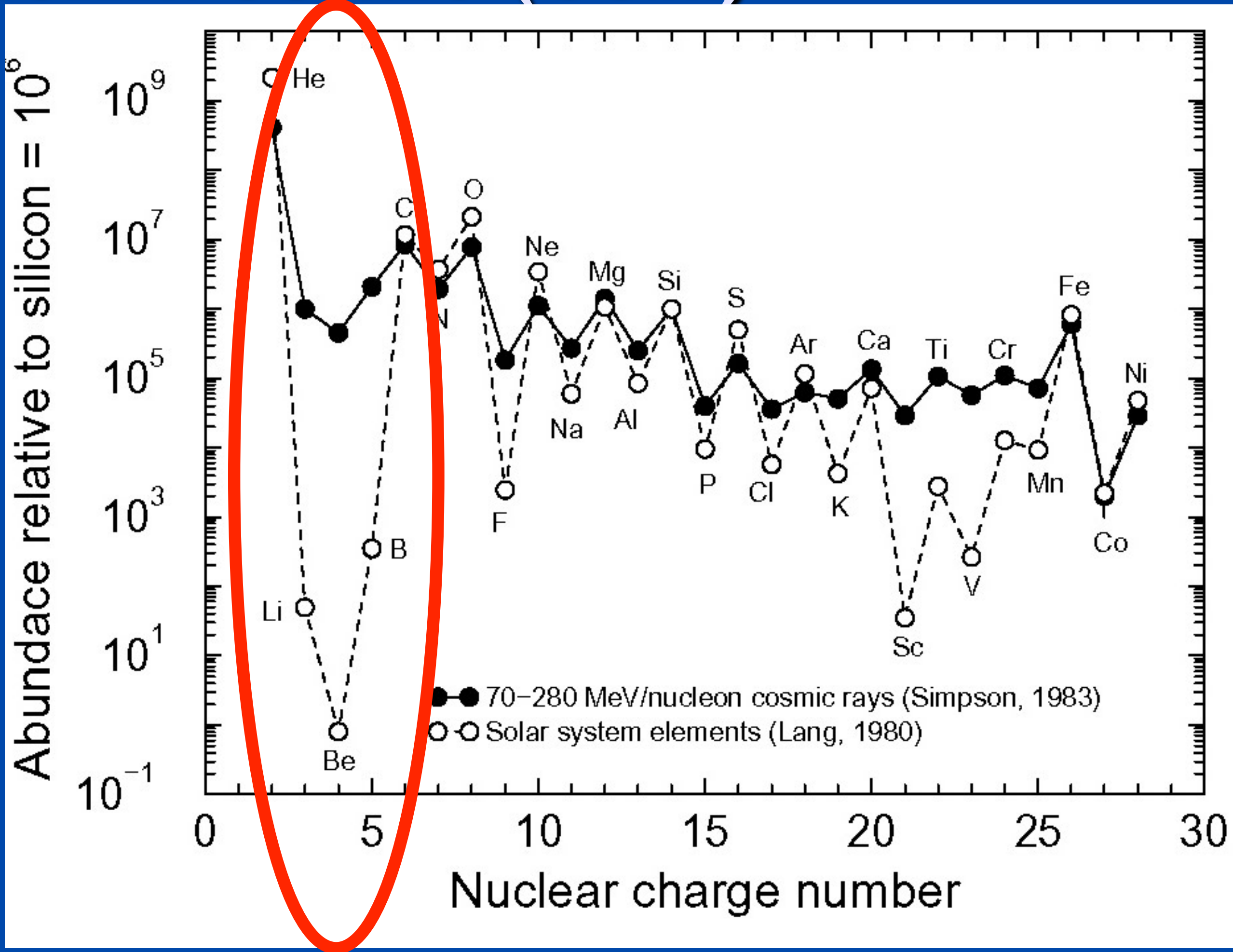
In addition to meteoritic data, the abundances of elements in the solar system are derived from photospheric measurements on the light from the Sun. It has been known for some time that abundances determined from lines in the Sun's spectrum and abundances in CI-type carbonaceous meteorites agree quite well when normalized to the same scale. The CIs (named after the Ivuna meteorite) are a particular and rare type of chondrites. The element abundances determined from solar photospheric measurements and meteoritic CI chondrite are summarized and compared with the chemical composition of CRs.

Confronto tra le abbondanze dei vari nuclidi nei RC e nel mezzo IG

- I RC hanno una composizione chimica analoga a quella del Sistema Solare (Solar System Abundance, SSA)?
- Se sì, questo indica una origine simile a quella del SS.
- Le abbondanze degli elementi nei RC si determinano tramite esperimenti di misura diretta dei RC (vedi.)
- Si notano alcune discrepanze rispetto al SSA, in particolare in corrispondenza al gruppo Li,Be,B e del gruppo prima del Fe → Vedi fig.
- Si nota anche un effetto *pari/dispari*, noto dalla fisica dei nuclei

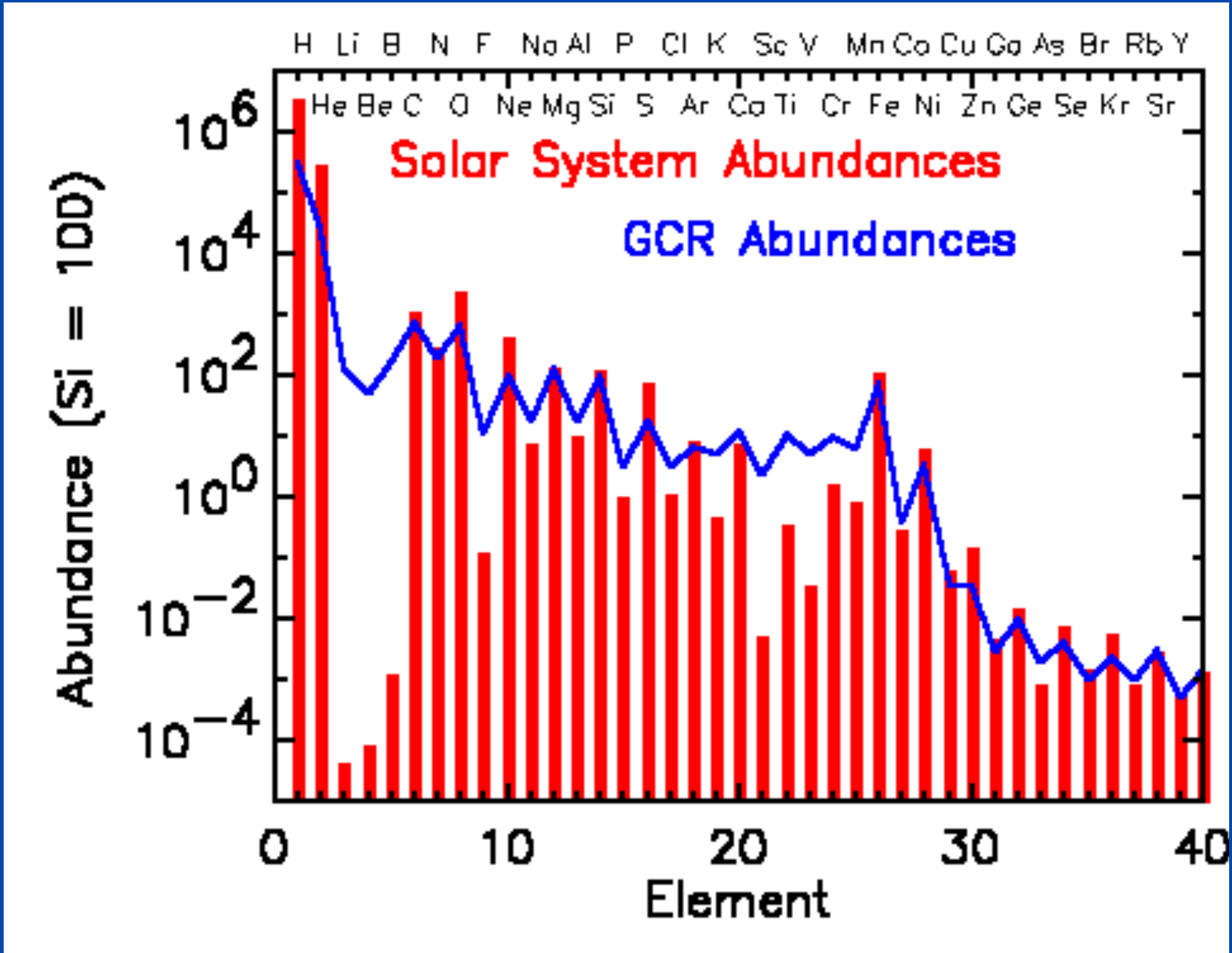
Abbondanze relative dei RC e del sistema solare (SSA)

- H e He sono dominanti (98%), leggermente in difetto rispetto SSA
- Buon accordo tra CR e SSA per molti elementi, in particolare C, O, Mg, Fe.
- Elementi leggeri Li, Be, B e quelli prima del ferro Sc,V sono straordinariamente abbondanti nei RC rispetto SSA



J.A. Simpson, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 33 (1983) 323

La stessa figura…



CHEMICAL COMPOSITION of CR at LOW ENERGIES

Intensity (E > 2.5 GeV/particle(m^{-2} sr^{-1} sec^{-1})

Nuclear group	Particle charge, Z	Integral Intensity in CR (m^{-2} s^{-1} sr^{-1})	Number of particles per 10^4 protons	
			CR	Universe
Protons	1	1300	10^4	10^4
Helium	2	94	720	1.6×10^3
L (=Li,Be,B)	3-5	2	15	10^{-4}
M(=C,N,O)	6-9	6.7	52	14
Heavy	10-19	2	15	6
VeryHeavy	20-30	0.5	4	0.06
SuperHeavy	>30	10^{-4}	10^{-3}	7×10^{-5}
Electrons	-1	13	100	10^4
Antiprotons	-1	>0.1	5	?

Produzione di Li, Be, B nei RC

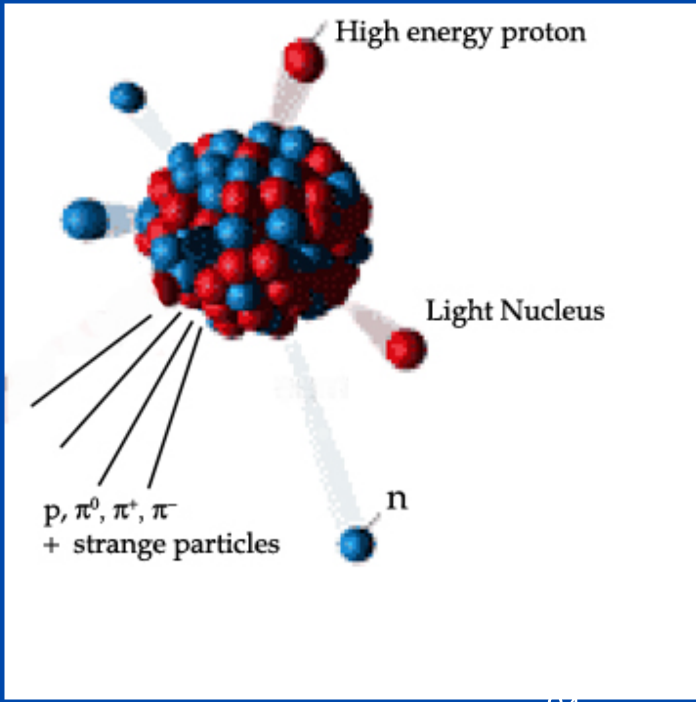
- ^{6}Li,Be,B sono catalizzatori delle reazioni di nucleosintesi. Ciò significa che NON sono rilasciati al termine della vita stellare. Il solo ^{7}Li ha una piccola percentuale di origine cosmologica, mentre ^{6}Li,Be,B non sono stati prodotti dal big bang.
- Li,Be,B sono prodotti temporaneamente durante la catena di fusione, ma vengono "consumati" durante le reazioni: le stelle consumano questi elementi durante la loro vita.
- Quale è l'origine di questi elementi rari?
- $\Rightarrow$ Reeves, Fowler & Hoyle (1970) ipotizzarono la loro origine come dovuta all'interazione dei RC (spallazione e fusione di $\alpha + \alpha$) con il mezzo interstellare (ISM).

Meccanismo di propagazione

- Gli elementi del gruppo M(=C,N,O) sono gli elementi candidati a produrre L(=Li,Be,B) durante la propagazione.
- Il processo fisico con cui gli M producono gli L è la spallazione, urto con i protoni del ISM.
- Quale quantità di materiale:

  $\xi=\rho L$ (gcm^{-2})

  i nuclei M devono attraversare per produrre, nel rapporto osservato, gli elementi L?
- Il problema può essere impostato con un sistema di equazioni differenziali.

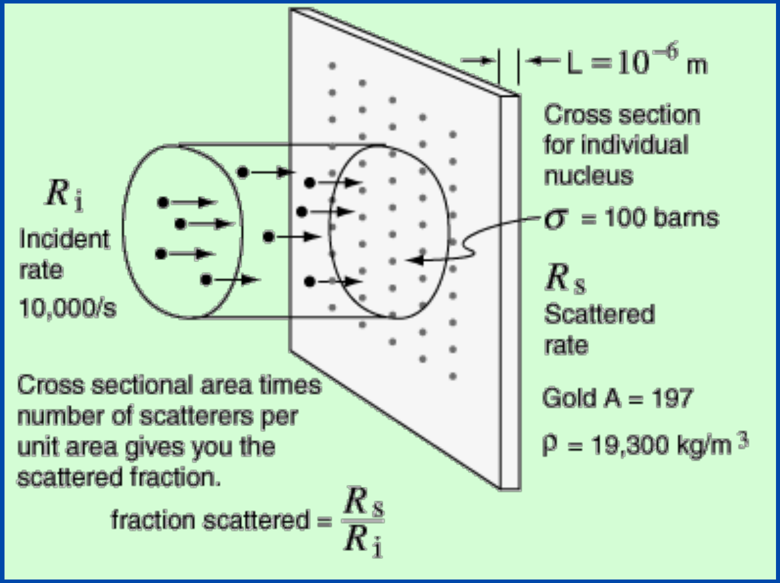


Sezione d'urto e libero cammino medio

- Le interazioni forti (a differenza di quelle elettromagnetiche) non avvengono a distanza. Il loro *range* coincide praticamente con le dimensioni delle particelle interagenti (p, n, nuclei) ~ 10^{-13} cm.
- Il parametro che caratterizza "la forza" delle interazioni è definito **sezione d'urto** (indicato con **σ**). Unità: cm^2

- N= n. particelle incidenti/cm^2
- dN= n. particelle interagenti/cm^2
- dx= spessore del bersaglio, cm
- N_c= n. centri diffusori bersaglio/cm^3

$$-dN = \sigma \cdot N \cdot N_c \cdot dx$$



Il libero cammino medio

- Il **cammino libero medio λ** rappresenta la distanza media percorsa da una particella fra due urti successivi.
- Può essere ricavato da, ricordando che $N_c = N_A \rho / M_A$

$$-dN = \sigma \cdot N \cdot N_c \cdot dx$$

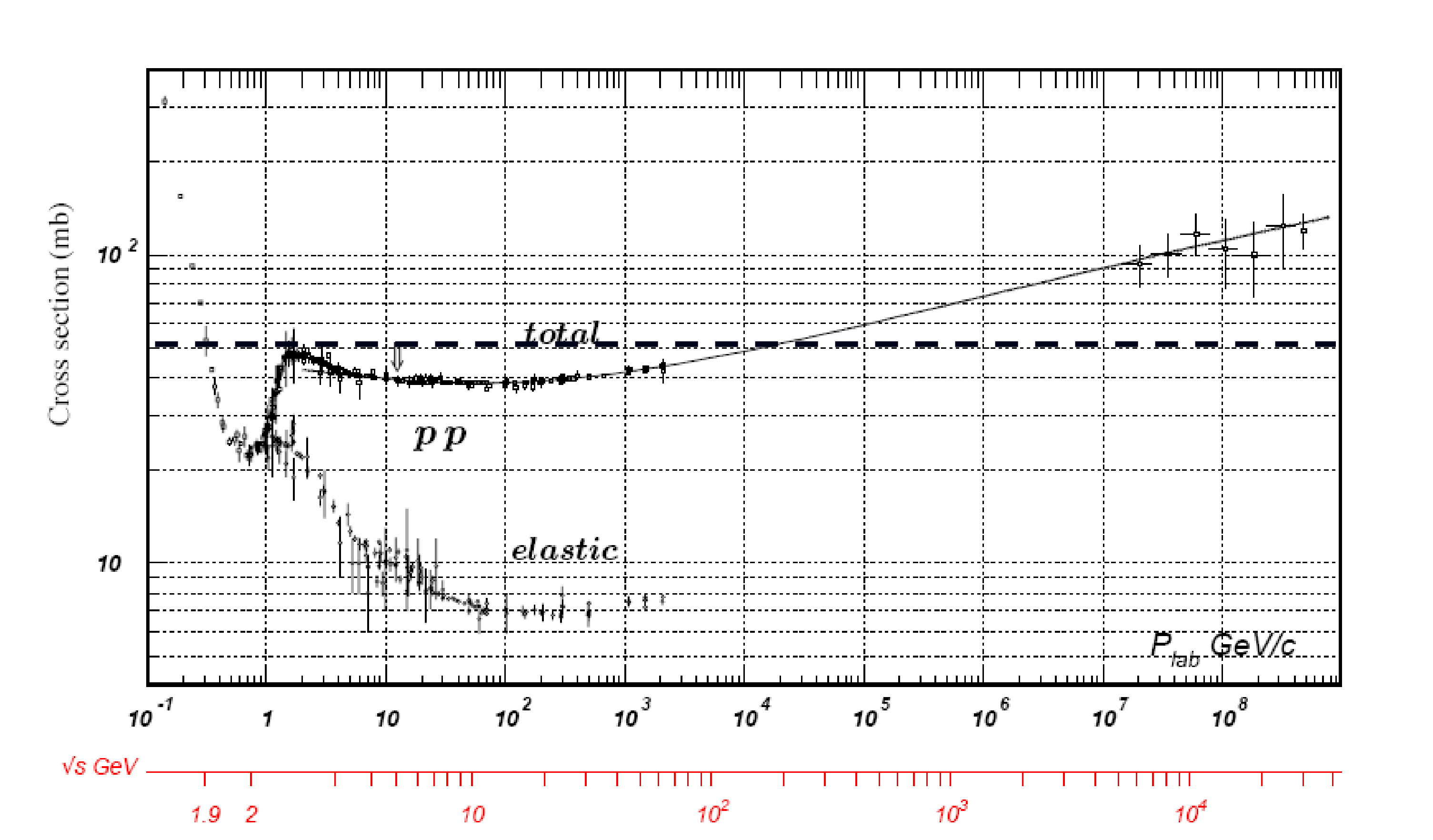
$$-\frac{dN}{N} = \sigma \cdot \frac{N_A}{M_A} \cdot \rho \cdot dx = \frac{d(\rho x)}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda = \frac{M_A}{\sigma N_A}} \ \text{gr cm}^{-2}$$

- Si può facilmente verificare che un fascio di particelle si attenua di un fattore 1/e dopo aver percorso una lunghezza λ
- Nel caso in cui sia il fascio sia composto da nuclei A o protoni (A=1), la sezione d'urto corrisponde a quella geometrica:

$$\sigma_{nucl} = \pi \cdot r_N^2 = \pi \cdot (r_o A^{1/3})^2 \cong 5 \times 10^{-26} A^{2/3} \quad cm^2 = 50 \quad mb$$

- $r_N = r_o x A^{1/3}$ con $r_o = 1.26 x 10^{-15}$m e' stata ricavata con scattering di e-

Sezione d'urto pp



Perché ci interessa tutto questo?-2

RC

- La frazione nucleare dei RC (10%) interagendo con i protoni del mezzo interstellare origina frammenti nucleari che possono giungere a Terra

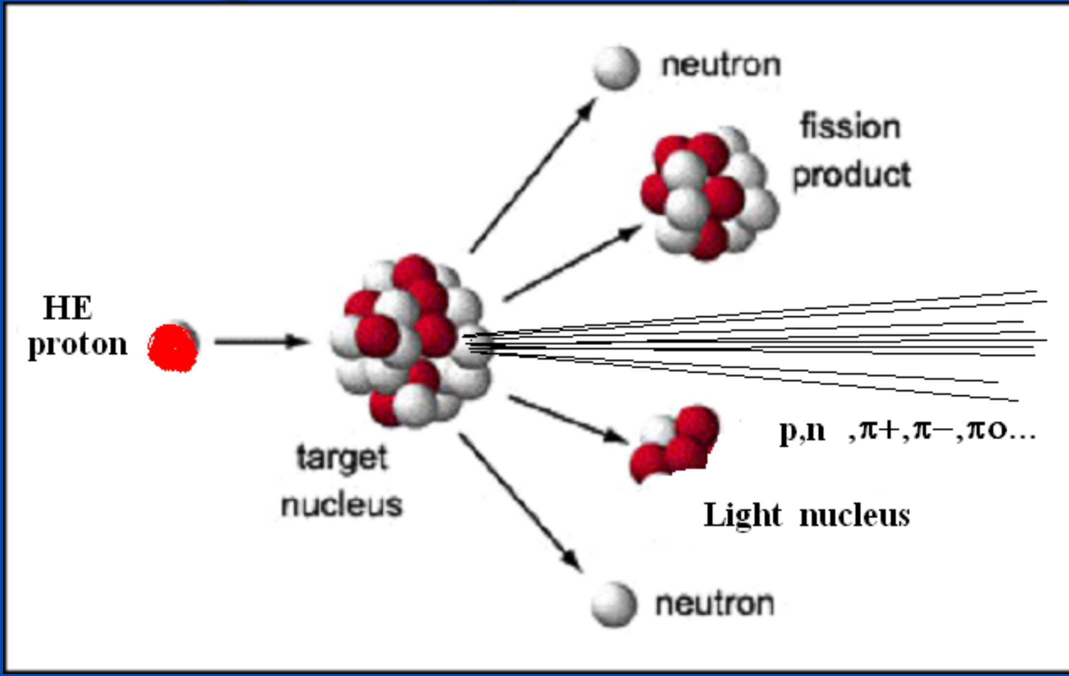
Mezzo Interstellare
$= 1\ p/cm^3$

Frammentazione di nuclei

- L'interazione tra un nucleo ed un protone (o un nucleo) che produce un nucleo più piccolo (frammento) si chiama frammentazione (o spallazione).
- Per quanto riguarda i nuclei nei RC, propagandosi nel mezzo intergalattico, subiscono questo processo e la composizione chimica dei RC viene modificata nel tragitto dalle sorgenti alla Terra.
- Occorre determinare la sezione d'urto σ_{BT} totale del processo $N_{Beam}+N_{Target}$, e la frazione relativa f_{ij} di nuclei di differente specie prodotti dalla reazione (Beam,Target)
- Nel caso astrofisico, i nuclei "Target" sono protoni.
- Lo studio di σ_{BT} , f_{ij} avviene sia sperimentalmente, sia tramite l'utilizzo di formule semi-empiriche;

Interazioni di alta energia di p con nuclei

- Il p interagisce con un solo nucleone nel nucleo
- **ESERCIZIO**: *Calcolare la lunghezza di de Broglie di un p di 100 GeV/c.*
- Nell'interazione p-nucleone vengono prodotte molte particelle (pioni principalmente)



- Nel Sistema di riferimento del laboratorio, le particelle sono emesse in avanti.
- In genere, pochi (1 o 2) nucleoni partecipano all'interazione, e vengono rimossi dal nucleo originario. La parte rimanente è in uno stato eccitato, e alcuni frammenti (n,α) possono evaporare. La parte rimanente viene chiamata frammento nucleare, o nucleo di spallazione.
- *NOTA: si ha lo stesso processo se anziché avere un p di alta energia incidente su un nucleo in quiete, si ha un nucleo di H.E. incidente su un protone in quiete*

- Sezione d'urto totale T,B

$$\sigma_{BT} = \sigma_o \cdot (A_T^{1/3} + A_B^{1/3} - b)^2$$

- Se T (o B) è p: $\sigma_B = \sigma_o \cdot A_B^{2/3}$
- Le sezioni d'urto parziali di frammentazione di nuclei su protoni sono state ottenute parzialmente da esperimenti (ed estrapolate con formule semiempiriche (Tsao, C. H.; Silberberg, R.)
- L'accordo tra formule e dati è entro il 25%
- Dalla tabella, si noti che:
  - La probabilità di estrarre un solo nucleone è sempre elevata
  - produzione di nuclei "pari" leggermente favorita rispetto ai "dispari"
  - $\Sigma f_{ij} < \sigma_{BT}$ (riga in basso): alcuni canali meno interessanti non sono riportati

Product nucleus	Z	A	Parent nucleus ^{11}B	^{12}C	^{14}N	^{16}O	^{20}Ne	^{24}Mg	^{28}Si	^{56}Fe	TARGET
Lithium	3	6	12.9	12.6	12.6	12.6	12.6	12.6	12.6	17.4	
		7	17.6	11.4	11.4	11.4	11.4	11.4	11.4	17.8	(%)
Beryllium	4	7	6.4	9.7	9.7	9.7	9.7	9.7	9.7	8.4	
		9	7.1	4.3	4.3	4.3	4.3	4.3	4.3	5.8	
		10	15.8	2.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	4.1	
Boron	5	10	26.6	17.3	16.0	8.3	7.1	6.2	5.3	5.3	
		11	—	31.5	15.0	13.9	12.0	10.4	9.0	8.1	
Carbon	6	10	—	3.9	3.3	2.9	2.1	1.6	1.2	0.5	
		11	0.6	26.9	12.4	10.6	7.9	5.9	4.5	1.3	
		12	—	—	38.1	32.7	13.5	10.1	7.6	4.7	
		13	—	—	10.5	14.4	10.7	8.0	6.0	3.7	
		14	—	—	—	2.3	3.9	3.0	2.2	2.1	
Nitrogen	7	13	—	—	10.7	3.6	2.7	2.0	1.5	0.5	
		14	—	—	—	26.3	10.9	8.1	6.1	2.9	
		15	—	—	—	31.5	10.0	7.5	5.7	4.3	
		16	—	—	—	—	3.4	2.6	1.9	1.6	
Oxygen	8	14	—	—	—	3.4	2.5	1.9	1.4	0.3	
		15	—	—	—	27.8	11.8	8.9	6.7	1.0	
		16	—	—	—	—	27.0	13.5	10.2	3.9	
		17	—	—	—	—	15.5	11.6	8.7	4.1	
		18	—	—	—	—	4.5	4.7	3.5	2.6	
Fluorine	9	16	—	—	—	—	—	1.4	1.1	—	
		17	—	—	—	—	8.5	6.4	4.8	—	
		18	—	—	—	—	14.4	10.8	8.1	2.4	
		19	—	—	—	—	21.0	10.9	8.2	4.8	
		20	—	—	—	—	—	4.2	3.1	2.3	
Neon	10	18	—	—	—	—	2.8	2.1	1.6	—	
		19	—	—	—	—	17.3	5.3	4.0	—	
		20	—	—	—	—	—	17.8	13.4	3.6	
		21	—	—	—	—	—	14.0	10.6	5.4	
		22	—	—	—	—	—	8.2	5.8	4.3	
		23	—	—	—	—	—	—	1.3	—	
Sodium	11	20	—	—	—	—	—	1.5	1.1	—	
		21	—	—	—	—	—	7.7	5.6	—	
		22	—	—	—	—	—	16.8	12.7	2.3	
		23	—	—	—	—	—	21.0	12.0	6.4	
		24	—	—	—	—	—	—	5.2	3.7	
Magnesium	12	23	—	—	—	—	—	29.8	1.6	0.6	
		24	—	—	—	—	—	—	17.1	3.2	
		25	—	—	—	—	—	—	18.5	6.0	
		26	—	—	—	—	—	—	14.4	6.8	
		27	—	—	—	—	—	—	7.6	1.7	
Aluminium	13	25	—	—	—	—	—	—	6.3	—	
		26	—	—	—	—	—	—	13.3	2.0	
		27	—	—	—	—	—	—	21.0	6.7	
		28	—	—	—	—	—	—	—	5.7	
		29	—	—	—	—	—	—	—	2.5	
Silicon	14	27	—	—	—	—	—	—	30.7	0.4	
		28	—	—	—	—	—	—	—	2.7	
		29	—	—	—	—	—	—	—	6.0	
		30	—	—	—	—	—	—	—	10.4	
		31	—	—	—	—	—	—	—	3.1	
		32	—	—	—	—	—	—	—	1.2	
Total inelastic cross-section			237.8	252.4	280.9	308.8	363.3	415.7	466.0	763.4	mb

Cross-sections measured in units of millibarns = 10^{-31} m².
Data kindly supplied by Drs R. Silberberg and C. H. Tsao.

Componente nucleare

* Semplifichiamo l'equazione:
  - Diffusione isotropa $D_{\alpha\beta} = D\,\delta_{\alpha\beta}$
  - Trascuriamo i decadimenti: $\tau_i = \tau_{ij} = \infty$

* Riscriviamola in forma leggermente diversa

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = D\,\nabla^2 N_i + \frac{\partial}{\partial E}(b\,N_i) + q_i - \frac{N_i}{\tau_i'} + \sum_{j>i} \frac{P_{ij}}{\tau_j'} N_j$$

con $\tau_k' = \frac{1}{n\sigma_k v}$ tempo di spallazione del nucleo k

P_{ij} = prob che il nucleo $j\,(>i)$ produca il nucleo i

Componente nucleare (2)

* La comp. nucleare è soggetta solo a perdite per ionizz.
  Ad $E > 10$ GeV, $\int \frac{dE}{dt} dt \ll E$ ⟹ Possono essere trascurate

* Assumiamo che la diff. sia trascurabile. $D = 0$
  Le irregolarità del campo magnetico non influenzano il moto (i.e solo comp. stazionaria)

* Le specie nucl. con $Z > z$ hanno abbondanze basse ($< 1\%$) ⟹ Assumiamo che non ci siano sorgenti
  $q_i = 0$

* Cambiamo variabile $t \to \xi = \rho x = \rho v t$ $[\mathrm{kg\,m^{-2}}]$, spessore di materia attraversato

$$\Longrightarrow \quad \frac{dN_i(\xi)}{d\xi} = -\frac{N_i(\xi)}{\xi_i} + \sum_{j>i} \frac{P_{ji}}{\xi_j} N_j$$

ξ = libero cammino medio per collis. inelastiche

Componente nucleare (3)

- L'equazione ha una forma molto piu' semplice
- Puo' essere risolta per determinare il numero di particelle della specie i dopo che la popolazione ha attraversato uno spessore ξ kg m^{-2} di ISM
- NB: in questa approx, si assume che tutte le particelle abbiano attraversato lo stessa quantita' di materiale tra 0 e ξ, cioe' che ci sia una corrispondenza uno a uno tra "path length" ξ e le specie prodotte
- Il modello e' detto "slab model" ed e' ovviamente una sovra-semplificazione (che pero' puo' essere migliorata a posteriori)

• Costruiamo un "modellino giocattolo" di propagazione dei RC, in cui le ipotesi di partenza sono:

• **Nessuna presenza di nuclei Leggeri (N_L) alle sorgenti dei RC**
• **Una certa quantità di nuclei Medi (N_M), che durante la propagazione diminuisce a causa della spallazione**

$$N_L(0) = 0$$
$$N_M(0) = N_M^0$$

• **Il processo di spallazione P_{ML} :**

$$N_M + p \rightarrow N_L + X$$

avviene con una probabilità $0 \leq P_{ML} \leq 1$.

$$P_{ML} = \frac{\sigma_{spall.}}{\sigma_{tot.}}$$

• Sperimentalmente, $P_{ML} = 28\%$.

- La tabella con le sezioni d'urto di produzione di frammenti da spallazione di p con Nuclei

Table 5.1.(*a*) *Partial cross-sections for inelastic collisions of selected heavy nuclei with hydrogen with $E = 2.3$ GeV per nucleon.*

Product nucleus	Z	A	Parent nucleus ^{11}B	^{12}C	^{14}N	^{16}O	^{20}Ne	^{24}Mg	^{28}Si	^{56}Fe
Lithium	3	6	12.9	12.6	12.6	12.6	12.6	12.6	12.6	17.4
		7	17.6	11.4	11.4	11.4	11.4	11.4	11.4	17.8
Beryllium	4	7	6.4	9.7	9.7	9.7	9.7	9.7	9.7	8.4
		9	7.1	4.3	4.3	4.3	4.3	4.3	4.3	5.8
		10	15.8	2.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	4.1
Boron	5	10	26.6	17.3	16.0	8.3	7.1	6.2	5.3	5.3
		11	—	31.5	15.0	13.9	12.0	10.4	9.0	8.1
Carbon	6	10	—	3.9	3.3	2.9	2.1	1.6	1.2	0.5
		11	0.6	26.9	12.4	10.6	7.9	5.9	4.5	1.3
		12	—	—	38.1	32.7	13.5	10.1	7.6	4.7
		13	—	—	10.5	14.4	10.7	8.0	6.0	3.7
		14	—	—	—	2.3	3.9	3.0	2.2	2.1
Nitrogen	7	13	—	—	10.7	3.6	2.7	2.0	1.5	0.5
		14	—	—	—	26.3	10.9	8.1	6.1	2.9
		15	—	—	—	31.5	10.0	7.5	5.7	4.3
		16	—	—	—	—	3.4	2.6	1.9	1.6
Oxygen	8	14	—	—	—	3.4	2.5	1.9	1.4	0.3
		15	—	—	—	27.8	11.8	8.9	6.7	1.0
		16	—	—	—	—	27.0	13.5	10.2	3.9
		17	—	—	—	—	15.5	11.6	8.7	4.1
		18	—	—	—	—	4.5	4.7	3.5	2.6
Fluorine	9	16	—	—	—	—	—	1.4	1.1	—
		17	—	—	—	—	8.5	6.4	4.8	—
		18	—	—	—	—	14.4	10.8	8.1	2.4
		19	—	—	—	—	21.0	10.9	8.2	4.8
		20	—	—	—	—	—	4.2	3.1	2.3
Neon	10	18	—	—	—	—	2.8	2.1	1.6	—
		19	—	—	—	—	17.3	5.3	4.0	—
		20	—	—	—	—	—	17.8	13.4	3.6
		21	—	—	—	—	—	14.0	10.6	5.4
		22	—	—	—	—	—	8.2	5.8	4.3
		23	—	—	—	—	—	—	1.3	—
Sodium	11	20	—	—	—	—	—	1.5	1.1	—
		21	—	—	—	—	—	7.7	5.6	—
		22	—	—	—	—	—	16.8	12.7	2.3
		23	—	—	—	—	—	21.0	12.0	6.4
		24	—	—	—	—	—	—	5.2	3.7
Magnesium	12	23	—	—	—	—	—	29.8	1.6	0.6
		24	—	—	—	—	—	—	17.1	3.2
		25	—	—	—	—	—	—	18.5	6.0
		26	—	—	—	—	—	—	14.4	6.8
		27	—	—	—	—	—	—	7.6	1.7
Aluminium	13	25	—	—	—	—	—	—	6.3	—
		26	—	—	—	—	—	—	13.3	2.0
		27	—	—	—	—	—	—	21.0	6.7
		28	—	—	—	—	—	—	—	5.7
		29	—	—	—	—	—	—	—	2.5
Silicon	14	27	—	—	—	—	—	—	30.7	0.4
		28	—	—	—	—	—	—	—	2.7
		29	—	—	—	—	—	—	—	6.0
		30	—	—	—	—	—	—	—	10.4
		31	—	—	—	—	—	—	—	3.1
		32	—	—	—	—	—	—	—	1.2
Total inelastic cross-section			237.8	252.4	280.9	308.8	363.3	415.7	466.0	763.4

Cross-sections measured in units of millibarns $= 10^{-31}$ m^2.
Data kindly supplied by Drs R. Silberberg and C. H. Tsao.

Valori delle sezioni d' urto per il calcolo di P_{ML}

Partial Cross-Sections for Inelastic Collisions of Protons with CNO { E = 2.3 GeV/N }

Secondary Nuclei			Primary Nuclei		
	Z	A	C	N	O
Li	3	6	12.6	12.6	12.6
		7	11.4	11.4	11.4
Be	4	7	9.7	9.7	9.7
		9	4.3	4.3	4.3
		10	2.9	1.9	1.9
B	5	10	17.3	16.0	8.3
		11	31.5	15.0	13.9
Inelastic cross-section (mb)			252.4	280.9	308.8

Data of R. Siberberg & C.H. Tsao

$$N_M + p \rightarrow N_L + X$$

$$\frac{d}{d\xi} N_M(\xi) = -\frac{N_M(\xi)}{\lambda_M} \qquad (1)$$

$$\frac{d}{d\xi} N_L(\xi) = -\frac{N_L(\xi)}{\lambda_L} + \frac{P_{ML}}{\lambda_M} N_M(\xi) \qquad (2)$$

$$\lambda_i = \frac{A_{media}}{N_0 \cdot \sigma_i}$$

lunghezza di interazione nucleare

$$\sigma_i \propto \sigma_0 \cdot A_{media}^{2/3}$$

$$\sigma_M = (40mb) \cdot A_M^{2/3} = 280 \text{ mb}$$

$$\sigma_L = (40mb) \cdot A_L^{2/3} = 200 \text{ mb}$$

$$\lambda_M = \frac{1}{(6 \times 10^{23} \cdot 280mb)} = 6.0 \text{ g.cm}^{-2}$$

$$\lambda_L = \frac{1}{(6 \times 10^{23} \cdot 200mb)} = 8.4 \text{ g.cm}^{-2}$$

- Valori dei parametri in (1) e (2)

- La soluzione dell'eq. 1 è:

$$N_M(\xi) = N_M^0 \cdot e^{-\xi/\lambda_M} \quad (3)$$

- Moltiplicando ambo i membri della (2) per e^{ξ/λ_L}

$$\frac{d}{d\xi} N_L(\xi) \cdot e^{\xi/\lambda_L} = -\frac{N_L(\xi)}{\lambda_L} \cdot e^{\xi/\lambda_L} + \frac{P_{ML}}{\lambda_M} N_M(\xi) \cdot e^{\xi/\lambda_L}$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(N_L(\xi) \cdot e^{\xi/\lambda_L}\right) = \frac{P_{ML}}{\lambda_M} N_M^0 \cdot e^{(\xi/\lambda_L - \xi/\lambda_M)}$$

- Questa, è una equazione del tipo:

$$\frac{d}{dx}\left(y(x) \cdot e^{x/\lambda_L}\right) = B \cdot e^{(x/\lambda_L - x/\lambda_M)} \quad (4)$$

$$\text{dove } B = \frac{P_{ML}}{\lambda_M} N_M^0$$

$$\frac{d}{dx}\left(y(x)\cdot e^{x/\lambda_L}\right)= B\cdot e^{(x/\lambda_L - x/\lambda_M)} \qquad (4)$$

- Proviamo con una soluzione del tipo:

$$y(x) = N_L(\xi) = c\cdot\left(e^{-x/\lambda_L} - e^{-x/\lambda_M}\right) \qquad (5)$$

- Con le condizioni al contorno:

$$y(x) = 0 = N_L(0) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[c\cdot\left(e^{-x/\lambda_L} - e^{-x/\lambda_M}\right)\cdot e^{x/\lambda_L}\right]= B\cdot e^{(x/\lambda_L - x/\lambda_M)}$$

$$\frac{d}{dx}\left[c\cdot\left(1 - e^{-x/\lambda_M + x/\lambda_L}\right)\right]= B\cdot e^{(x/\lambda_L - x/\lambda_M)}$$

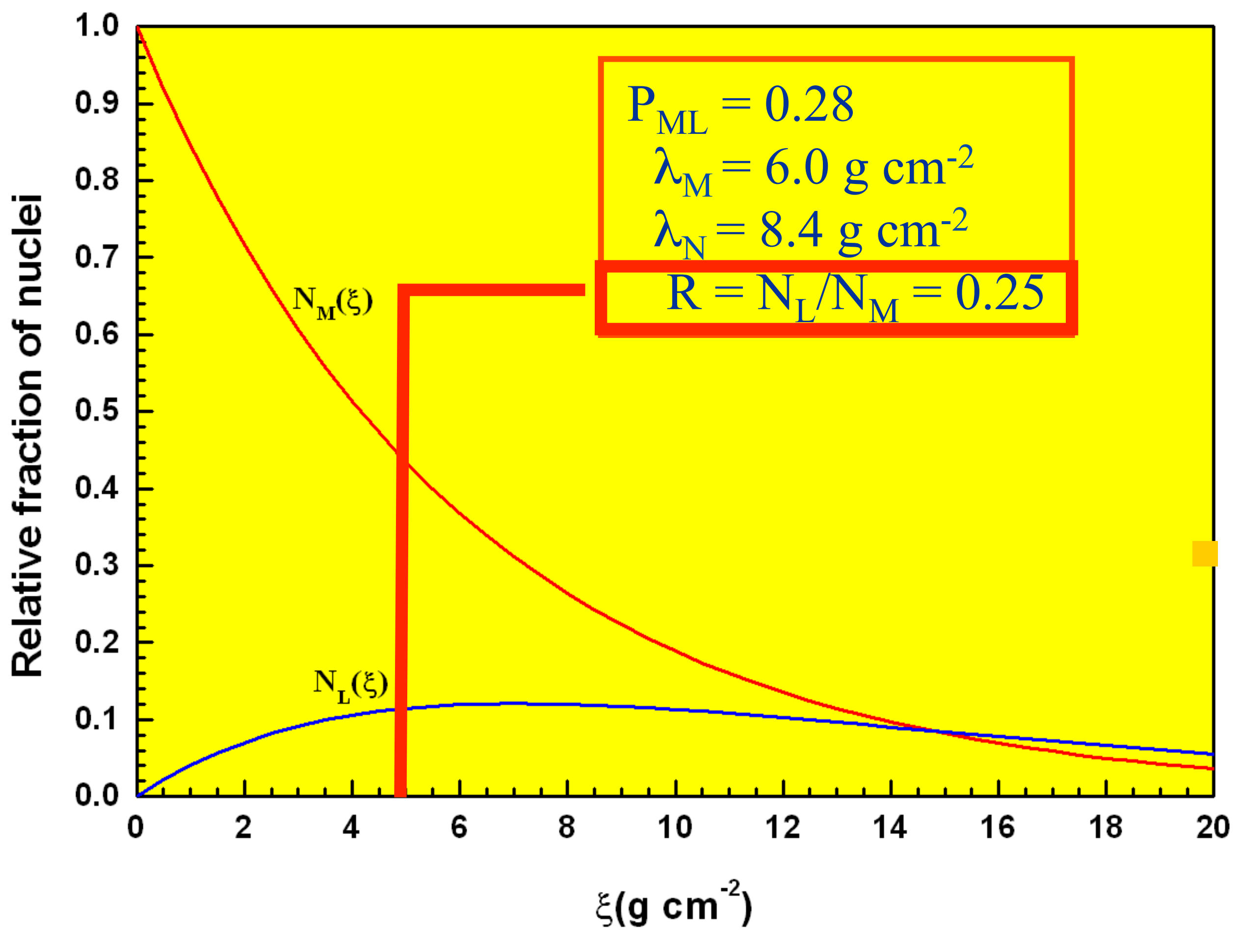
$$c\cdot\left(\frac{1}{\lambda_M} - \frac{1}{\lambda_L}\right) = B$$

$$c = B\cdot\frac{\lambda_M\lambda_L}{\lambda_L - \lambda_M}$$

- Inserendo il valore di "c" nella (5) otteniamo finalmente:

$$N_L(\xi) = \left(\frac{P_{ML}}{\lambda_M} N_M^0 \right) \cdot \left(\frac{\lambda_M \lambda_L}{\lambda_L - \lambda_M} \right) \cdot \left(e^{-\xi/\lambda_L} - e^{-\xi/\lambda_M} \right) \qquad (6)$$

$$N_M(\xi) = N_M^0 \cdot e^{-\xi/\lambda_M} \qquad (3)$$



- **Quindi**: i RC, perché presentino il rapporto R osservato sulla Terra, devono avere attraversato nella Galassia uno spessore di "materiale equivalente" pari a ξ_T=4.8 g cm^{-2} .
- Poiché la Terra non ha una posizione privilegiata nella Galassia, un qualsiasi altro osservatore misurerebbe lo **stesso** numero.

Abbondanze relative di Li,Be,B in rapporto alla loro probabilità di produzione da parte di C,N,O

Element	P_{ML} (CNO)	Abbondanze relative Si=100 (misure)
Li	24 %	136
Be	16.4 %	67
B	35 %	233

- Questa misura "conferma" il modello di propagazione, che assegna una abbondanza maggiore all'elemento con la maggiore P_{ML}

Stima del tempo di confinamento da ξ_T : Galassia senza alone.

- Il modello semplificato conferma la produzione di Li, Be, B da parte degli elementi del gruppo C,N,O con le abbondanze relative come sperimentalmente misurate;
- Il modello, senza ulteriori correzioni, non funziona altrettanto bene per riprodurre le abbondanze di Mn, Cr, V da parte del Ferro (potete immaginare perché ?)
- Dal valore ottenuto di ξ_T=4.8 g cm^{-2} è possibile ottenere una stima del tempo di confinamento dei RC nella galassia. Infatti:

$$\xi_T = \rho_{CR} \cdot c \cdot \tau$$

$$\rho_{CR} = 1 p/cm^3 = 1.6 \times 10^{-24} \quad g.cm^{-3}$$

$$\tau = \frac{4.8\,(g.cm^{-2})}{3 \times 10^{10}\ (cm/s) \cdot 1.6 \times 10^{-24}\ (\mathrm{g.cm^{-3}})} = 10^{14} s = 3 \times 10^6 y$$

Stima del tempo di confinamento nella Galassia con alone

- Nel caso si consideri la densità della Galassia con alone di DM:

$$\rho_{CR} = 0.3 \, p/cm^3$$

$$\tau_{Alone} = \frac{4.8\,(g.cm^{-2})}{0.3\times3\times10^{10}\,(cm/s)\cdot1.6\times10^{-24}\,(\mathrm{g.cm^{-3}})} = 10^7\,y$$

- Si noti che in ogni caso, se i RC si muovessero di moto rettilineo, la distanza percorsa nel tempo τ sarebbe:

$$L = c\cdot\tau = 3\times10^{10}\times10^{14} = 3\times10^{24}\,cm = 10^6\,pc$$

valore molto maggiore delle dimensioni della Galassia.

- τ rappresenta dunque il tempo di diffusione dei RC dalla Galassia. In modelli più raffinati, τ=τ(E)

Se il moto dei RC fosse rettilineo:

$$L_{min} = \boxed{\tau_D \; c} = 3 \; 10^{10} \; 10^{14} \; cm/s \; s = \boxed{10^6 \; pc} >> 15 \; kpc = r_{galax}$$

Ciò conferma che i RC hanno una direzione continuamente modificata durante τ (dal Campo Magnetico Galattico)