

Lecture 7 091117

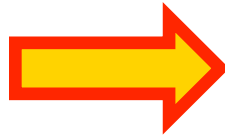
- Slides will be available at:
- https://www.fisgeo.unipg.it/~fiandrin/didattica_fisica/cosmic_rays1718/

Richiamo: moto di un RC nel campo magnetico Galattico

$$mv^2 / r = pv / r = Ze v B / c$$

$$r = pc / ZeB$$

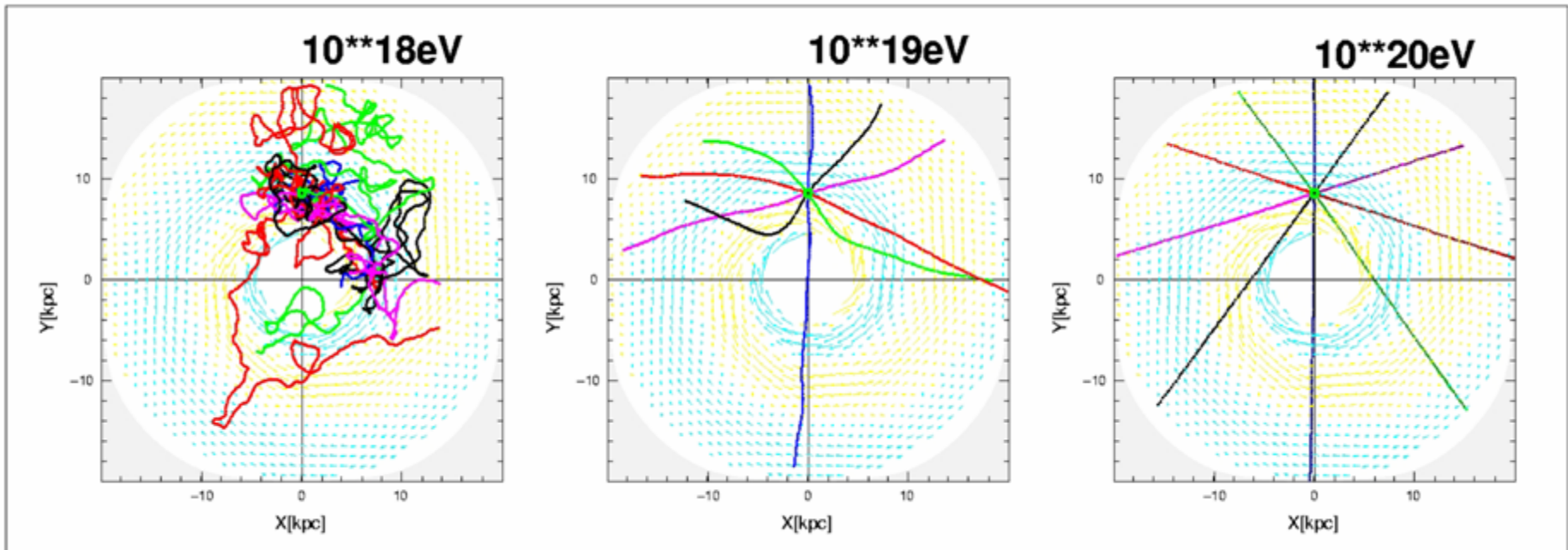
$$r(cm) = \frac{1}{300} \frac{E(eV)}{ZB(G)}$$



$$(10^{12} eV) = 10^{15} cm = 3 \times 10^{-4} pc$$

$$r = (10^{15} eV) = 10^{18} cm = 3 \times 10^{-1} pc$$

$$(10^{18} eV) = 10^{21} cm = 300 pc$$



■ Lavagna

Motion in non-uniform B fields: guiding center approximation

The fundamental equation describing the motion of a charged particle in magnetic and electric fields is the Lorentz equation

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}) \quad (2.1)$$

Express the position $\mathbf{r}$ of a particle in terms of its instantaneous gyroradius $\boldsymbol{\rho}$ and the center of gyration $\mathbf{R}$. Thus $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}$. Expand the magnetic field in the vicinity of $\mathbf{R}$ in a Taylor series about $\mathbf{R}$

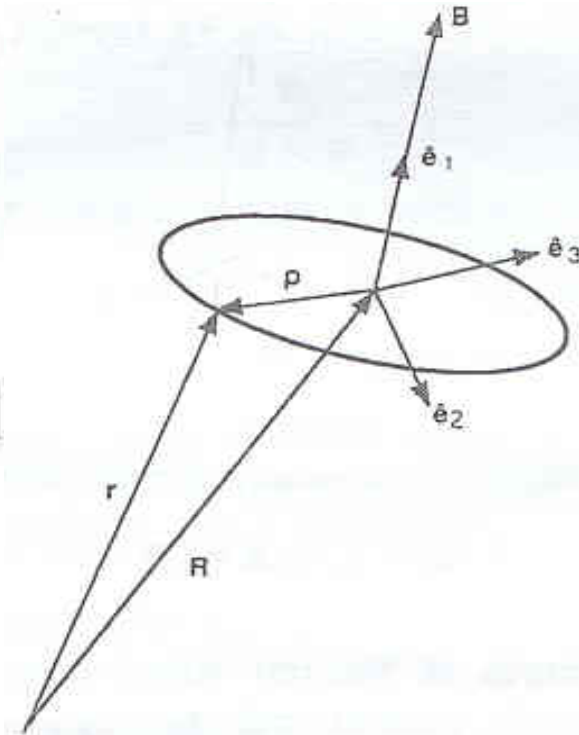
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{R}) + \boldsymbol{\rho} \cdot \nabla \mathbf{B}(\mathbf{R}) + \dots$$

where

$$\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla \mathbf{B} = \left(\rho_x \frac{\partial}{\partial x} + \rho_y \frac{\partial}{\partial y} + \rho_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{B}$$

$$m(\ddot{\mathbf{R}} + \ddot{\boldsymbol{\rho}}) = q(\dot{\mathbf{R}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}) \times [\mathbf{B}(\mathbf{R}) + \boldsymbol{\rho} \cdot \nabla \mathbf{B}(\mathbf{R}) + \dots]$$

$$\rho |\nabla B / B| \ll 1$$



Motion in non-uniform B fields

In the plane perp. to $\mathbf{B}$ we can write:

$$m(\ddot{\mathbf{R}} + \ddot{\boldsymbol{\rho}}) = q(\dot{\mathbf{R}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}) \times [\mathbf{B}(\mathbf{R}) + \boldsymbol{\rho} \cdot \nabla \mathbf{B}(\mathbf{R})]$$

$$\boldsymbol{\rho} = \rho(\hat{\mathbf{e}}_2 \sin \Omega t + \hat{\mathbf{e}}_3 \cos \Omega t) \quad (2.11)$$

Repeated differentiations with respect to time give

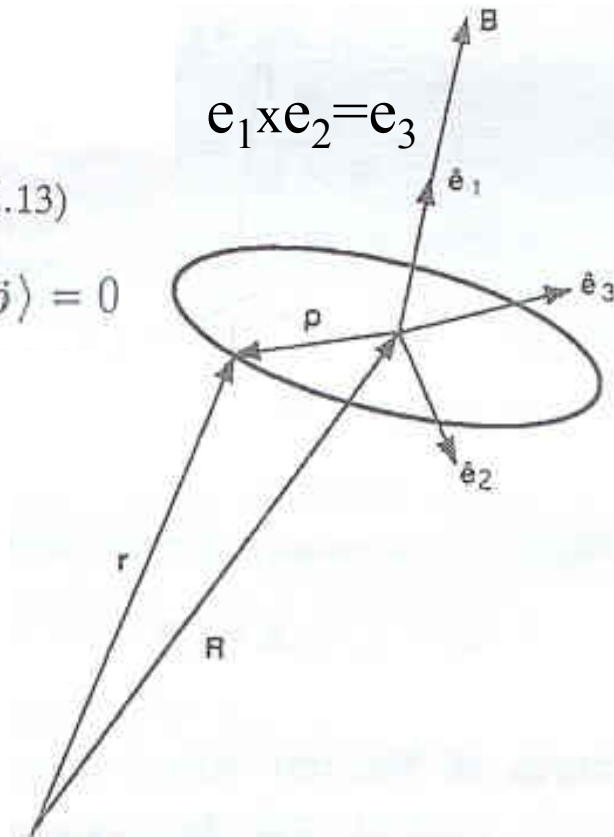
$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \Omega \rho(\hat{\mathbf{e}}_2 \cos \Omega t - \hat{\mathbf{e}}_3 \sin \Omega t) + \sin \Omega t \frac{d}{dt}(\rho \hat{\mathbf{e}}_2) + \cos \Omega t \frac{d}{dt}(\rho \hat{\mathbf{e}}_3) \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{\rho}} = & \Omega^2 \rho(-\hat{\mathbf{e}}_2 \sin \Omega t - \hat{\mathbf{e}}_3 \cos \Omega t) + \dot{\Omega} \rho(\hat{\mathbf{e}}_2 \cos \Omega t - \hat{\mathbf{e}}_3 \sin \Omega t) \\ & + 2\Omega \cos \Omega t \frac{d}{dt}(\rho \hat{\mathbf{e}}_2) - 2\Omega \sin \Omega t \frac{d}{dt}(\rho \hat{\mathbf{e}}_3) + \sin \Omega t \frac{d^2}{dt^2}(\rho \hat{\mathbf{e}}_2) \\ & + \cos \Omega t \frac{d^2}{dt^2}(\rho \hat{\mathbf{e}}_3) \end{aligned} \quad \text{average over a Larmor period.} \quad (2.13)$$

All the terms with only $\sin \omega t$ or $\cos \omega t$ give zero $\langle \boldsymbol{\rho} \rangle = \langle \dot{\boldsymbol{\rho}} \rangle = \langle \ddot{\boldsymbol{\rho}} \rangle = 0$

The term giving a non zero contribution (because it contains $\cos^2 \omega t$ and $\sin^2 \omega t$ terms) is

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{\rho}} \times (\boldsymbol{\rho} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} &= \frac{1}{2} \omega \rho^2 [\hat{\mathbf{e}}_2 \times (\hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \vec{\nabla}) - \hat{\mathbf{e}}_3 \times (\hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \vec{\nabla})] \hat{\mathbf{e}}_1 B \\ &= \frac{1}{2} \omega \rho^2 [(\hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \vec{\nabla} B)(\hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_1) - (\hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \vec{\nabla} B)(\hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{e}}_1)] \\ &= \frac{1}{2} \omega \rho^2 [-(\hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \vec{\nabla} B) \hat{\mathbf{e}}_3 - (\hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \vec{\nabla} B) \hat{\mathbf{e}}_2] = -\frac{1}{2} \omega \rho^2 \vec{\nabla}_n B \end{aligned}$$



$$m\ddot{\mathbf{R}} = q[\dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{B}(\mathbf{R})] - q\frac{\rho^2\Omega}{2}\nabla B + \dots$$

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{e}}_1 &= q(\dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{B}) \times \hat{\mathbf{e}}_1 - \frac{q\rho^2\Omega}{2}\nabla B \times \hat{\mathbf{e}}_1 \\ &= q\{(\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \dot{\mathbf{R}})\hat{\mathbf{e}}_1 B - B\dot{\mathbf{R}}\} - \frac{q\rho^2\Omega}{2}\nabla B \times \hat{\mathbf{e}}_1 \end{aligned}$$

or

$$Bq\{\dot{\mathbf{R}} - (\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \dot{\mathbf{R}})\hat{\mathbf{e}}_1\} = Bq\dot{\mathbf{R}}_\perp = m(\hat{\mathbf{e}}_1 \times \ddot{\mathbf{R}}) + \frac{q\rho^2\Omega}{2}\hat{\mathbf{e}}_1 \times \nabla B$$

Hence

$$\dot{\mathbf{R}}_\perp = \frac{m}{Bq}(\hat{\mathbf{e}}_1 \times \ddot{\mathbf{R}}) + \frac{\rho^2\Omega}{2B}\hat{\mathbf{e}}_1 \times \nabla B \quad (2.16)$$

To the approximation required here,

$$\left| \ddot{\mathbf{R}} = \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{R}}_\perp + \dot{\mathbf{R}}_\parallel) \approx \frac{d\dot{\mathbf{R}}_\parallel}{dt} = \hat{\mathbf{e}}_1 \frac{dv_\parallel}{dt} + v_\parallel^2 \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_1}{\partial s} \right. \quad (2.17)$$

where s is the distance measured along the field line, which need not be straight. With this expression for $\ddot{\mathbf{R}}$ inserted into (2.16) the perpendicular velocity then becomes

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_\perp &= \hat{\mathbf{e}}_1 \times \left(\frac{\rho^2\Omega}{2B}\nabla B + \frac{m}{Bq}v_\parallel^2 \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_1}{\partial s} \right) \\ &= \hat{\mathbf{e}}_1 \times \left(\frac{mv_\perp^2}{2qB^2}\nabla B + \frac{m}{Bq}v_\parallel^2 \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_1}{\partial s} \right) \end{aligned} \quad (2.18)$$

For obvious reasons the first term in (2.18) is called the gradient drift and the second term the curvature drift. A more transparent interpretation of

Motion in non-uniform B fields

Now separate normal and parallel comp.: for the normal we take the vector product with $\mathbf{e}_1$

Because the average normal accel. is small wrt the the parallel one (not influenced by the time average)

For curl-free fields, there is a useful relation between field line curvature and the perpendicular gradient $\nabla_{\perp} B$, deduced in Appendix I:

$$(1.25) \quad \nabla_{\perp} B = -\frac{B}{R_c} \mathbf{n} = -B \frac{R_c}{R_c^2} = B \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial s}.$$

For the definition of the normal vector $\mathbf{n}$, and of R_c , see Fig. A1.1 in Appendix I. Using this expression, we can convert (1.24) into the following:

$$(1.26) \quad V_c = \frac{mv_{\parallel}^2}{qB^2} \mathbf{e} \times \nabla_{\perp} B.$$

The curvature drift (1.26) and the gradient drift (1.23) both point in the same direction. Since both drifts always appear together, they can be added to form the combined gradient-curvature drift V_{CG} , written here in several equivalent ways:

$$(1.27) \quad \begin{aligned} V_{CG} &= \frac{m}{2qB^2} (v_{\perp}^2 + 2v_{\parallel}^2) \mathbf{e} \times \nabla_{\perp} B \\ &= \frac{mv^2}{2qB^2} (1 + \cos^2 \alpha) \mathbf{e} \times \nabla_{\perp} B \\ &= -\frac{mv^2}{2qBR_c} (2 - \sin^2 \alpha) \mathbf{e} \times \mathbf{n}. \end{aligned}$$

In the non-relativistic case the magnitude of V_{CG} is:

$$V_{CG} = \frac{T}{qBR_c} (1 + \cos^2 \alpha).$$

Motion in non uniform fields

This is the drift velocity normal to the field and to the gradient normal to the field

Relation between Field Line Curvature and $\nabla_{\perp} B$

Consider a curved field line (Fig. A I.1) and a local coordinate system x, y, z centered at point P . We take the z axis parallel to $\mathbf{e}$, and (y, z) lying in the field line's osculating plane through P . We shall assume that *there are no currents in the neighborhood of P* . At P we have $B_x=0$, $B_y=0$, $B_z=B$ and

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0 \quad \frac{\partial B_x}{\partial z} = 0.$$

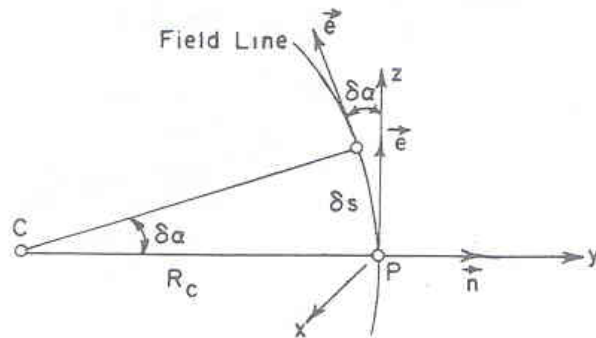


Fig. A I. 1

This latter equality is a direct consequence of (y, z) being the osculating plane. From the above relations:

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = 0$$

For the components of ∇B we thus obtain

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)^{1/2}] = \frac{\partial B_z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\partial B_z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial B}{\partial s} = \nabla_{\parallel} B.$$

These relations with (1.20) show that the transverse gradient is directed along the y axis and that

$$\frac{\partial B}{\partial y} = \nabla_{\perp} B$$

We also have

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} \cong B \frac{\delta \alpha}{\delta s} \cong \frac{B}{R_c},$$

where $R_c = \delta s / \delta \alpha$ is the field line's radius of curvature. Thus

$$\nabla_{\perp} B = \frac{\partial B}{\partial y} \cong \frac{\partial B_z}{\partial y} = \frac{\partial B_y}{\partial z} \cong \frac{B}{R_c}.$$

This can be written in vector form (Fig. A I. 1)

$$\nabla_{\perp} B = -\frac{B}{R_c} \mathbf{n} = -B \frac{R_c}{R_c^2} = B \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial s} \quad \text{q.e.d.}$$

Motion in non-uniform B fields

The parallel component of equation (2.15) is extracted by forming the scalar product with $\hat{e}_1$.

$$m\ddot{\mathbf{R}} \cdot \hat{e}_1 = -\frac{q\rho^2\Omega}{2}(\nabla B) \cdot \hat{e}_1$$

or

$$\boxed{\frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{v_{\perp}^2}{B} (\nabla B)_{\parallel}} \quad (2.19)$$

Equation (2.19) shows that for motion parallel to $\mathbf{B}$ the guiding center of a particle is accelerated in a direction opposite to the gradient of the magnetic field. If the particle is moving into a stronger field, it will be repelled, regardless of the sign of the particle's charge or the direction of the magnetic field.

Equations (2.8), (2.18) and (2.19) give the guiding center drifts of primary interest to radiation belt physics. As mentioned before, they contain approximations which may become important as the particle energy and gyration radius increases. In particular, the equation for parallel motion (2.19) is less exact than the equation for guiding center motion perpendicular to the magnetic field (2.18). Whenever these equations are used together when numerically tracking a particle trajectory, it is necessary to use a more accurate version of (2.19).

Motion in B fields: classical approach

Guiding center decomposition:

Parallel and normal components to the field line: $\mathbf{V} = \mathbf{V}_p + \mathbf{V}_n$ and

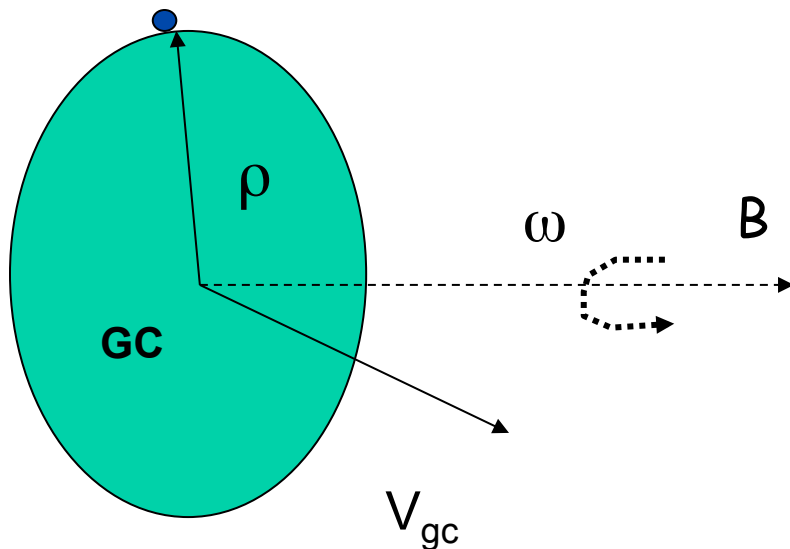
$\mathbf{V}_n$ is decomposed in a drift and a gyration with Larmor radius $\rho = \mathbf{P}_n / \mathbf{B}q$ and frequency

$$\omega = q\mathbf{B}/m \rightarrow \mathbf{V} = \mathbf{V}_p + \mathbf{V}_D + \omega \times \rho = \mathbf{V}_{gc} + \omega \times \rho$$

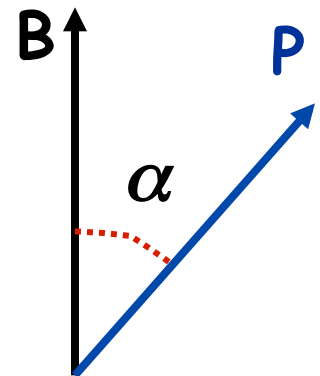
The motion is then described by a translation of a point, the Guiding Center, plus a gyration around GC normal to B

Parallel and normal components are decoupled

If $dB/Bdt \ll \omega/2\pi$



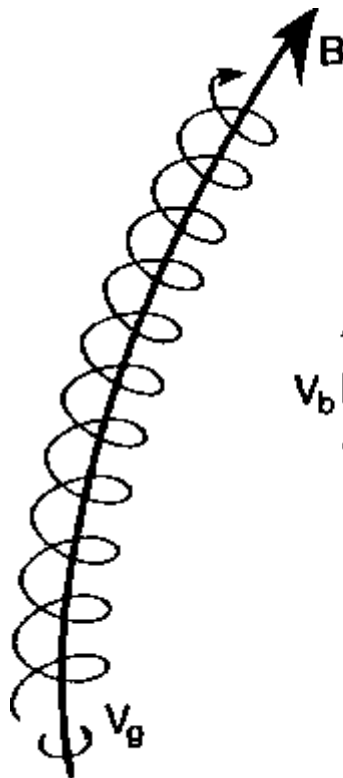
$\mathbf{V}_n = V \sin \alpha$
 $\mathbf{V}_p = V \cos \alpha$
The "Pitch" Angle



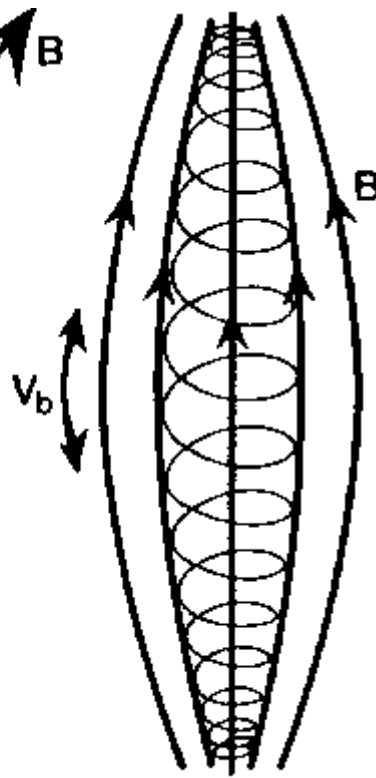
Motion in B fields: classical approach

As a consequence of the decoupling, the motion can be decomposed in 3 quasi-periodic components:

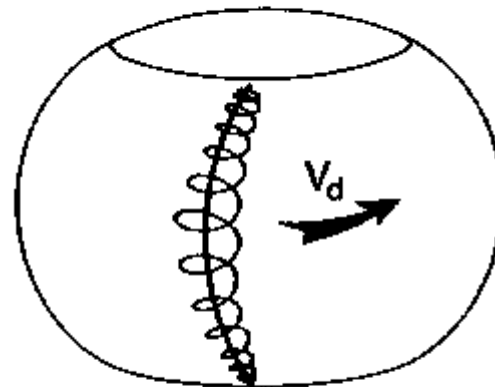
- gyration around the field line
- bouncing between the mirror points along the field line
- drifting normal to the field line and to the field gradient



Gyro Motion



Bounce Motion



Drift Motion

Cosmic Rays propagation as function of:

1) Diffusion $D = lv/3$

2) Rate of change of particle energy $b(E) = dE/dt$

3) Particle loss term due to interactions and decays

4) Particle gain from sources and all interactions and decays

Equazione di propagazione (1)

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\hat{D}_i \vec{\nabla} N_i) + \frac{\partial}{\partial E} (b_i N_i) + m v \sigma_i N_i + \frac{N_i}{\tau_i} = q_i + \sum_{j < i} m v \sigma_{ij} N_j + \sum_j \frac{N_j}{\tau_{ji}}$$

- I CR non sono accelerati nell'ISM, sono accelerati da sorgenti puntiformi
- La loro potenza e distribuzione spazio-temp. e' descritta dalle funzioni $q_i(t, \vec{r}, E)$ (per la specie i)

- * $\hat{D}_i(\vec{r}, E)$ e' il tensore di diffusione
- * $b_i(\vec{r}, E)$ caratterizza le perdite continue di energia delle singole particelle cosi' che $dE/dt = b_i$ ($\equiv$ ionizz. + brems + sincrotr + Compton inverso)
- * $\sigma_i(E)$ e' la sez. d'urto inelastica del nucleo i con i nuclei dell'ISM
- * $n(\vec{r})$ e' la densita' dell'ISM
- * σ_{ij} e' la sez. d'urto di prod. di nuclei di tipo i da nuclei piu' pesanti
- * τ_i e' la vita media rispetto a decad. radioatt.
- * N_j/τ_{ji} descrive l'apparizione di nuclei di tipo i a causa del decad. di altri nuclei

Equazione di propagazione (2)

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\hat{D}_i \vec{\nabla} N_i) + \frac{\partial}{\partial E} (b_i N_i) + m v r_i N_i + \frac{N_i}{\tau_i} = q_i + \sum_{j < i} m v r_{ij} N_j + \sum_j \frac{N_j}{\tau_{ij}}$$

- * Una sol. completa richiede l'uso di equazioni di questo tipo per tutti i tipi di nuclei, i.e. un sistema di equ. accoppiate
- * Dobbiamo assumere che le densità osservabili N_i , le σ di frammentazione e le vite medie τ siano note
- * Dobbiamo anche conoscere la forma e il volume delle regioni di propagazione dei CR nella galassia, l'intensità e direzione del campo magnetico e la distribuzione del gas interstellare e delle sorgenti

Leaky Box Model

- A useful approximation is the following:
 - Assume there is no diffusion (eg $D=0$)
 - CR propagate freely in the galaxy volume, uniformly filled with ISM and regular B, until they reach the “border” and escape
 - A CR has a probability per unit of time to escape the galaxy $p = 1/\tau_{\text{esc}}$, where τ is the measured residence time of CR in the galaxy

■ Then

$$D\nabla^2 \mathcal{N} \rightarrow -\frac{\mathcal{N}}{\tau_{\text{esc}}}$$

- As the diffusion coefficient D is energy dependent, also the characteristic escape time of CRs from the Galaxy $\tau_{\text{esc}} = \tau_{\text{esc}}(E)$ is energy dependent

Leaky Box Model

- The transport equation becomes

$$\frac{d\mathcal{N}_i}{dt} = -\frac{\mathcal{N}_i}{\tau_{\text{esc}}} + \frac{\partial}{\partial E}[b(E)\mathcal{N}_i(E)] + Q - \frac{\mathcal{N}_i}{\tau_i} + \sum_{j>i} \frac{P_{ji}}{\tau_j} \mathcal{N}_j.$$

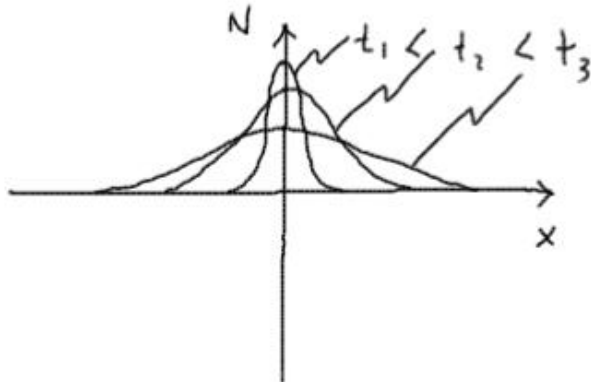
- The leaky-box model provides the most common description of CR transport in the Galaxy at energies below $\sim 10^{17}$ eV. The model is based on particles injected by sources Q distributed uniformly over the galactic volume (the *box*) filled with a uniform distribution of matter and radiation fields. The particles get-away from this volume with an escape time independent of their position in the box. The escape time $\tau_{\text{esc}}(E)$ depends on the particle energy, charge, and mass number, but it does not depend on the spatial coordinates. Secondary nuclei are produced during the propagation as a function of the path length

Modello diffusivo

* In assenza di fuga, cioè se le particelle diffondono dalle loro sorgenti (senza lasciare la regione) fino all'osservatore, $\tau_e = \infty \Rightarrow$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \Rightarrow N(x, t) = \frac{N_0}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

con $N_0 = \#$ di particelle iniettate a $t=0$ in $x=0$



* In tal caso, la distr. di path lengths sarebbe una gaussiana tra la sorgente e l'osservatore

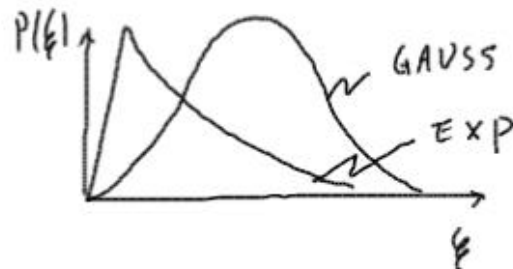
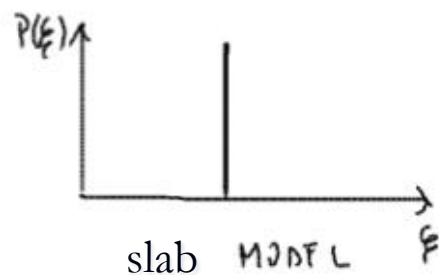
Leaky box

* Se invece si adotta un modello in cui le particelle rimangono nel disco galattico (o nell'alone) per un tempo τ_e prima di uscire senza diffondere ($D=0$)

$$\Rightarrow \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{N}{\tau_e} = 0 \quad \Rightarrow N \propto e^{-t/\tau_e} \quad \text{or} \quad N \propto e^{-\ell/\ell_e}$$

* La distribuzione di path lengths sarebbe un'esponenziale

* Questi "modelli" corrispondono a differenti interpretazioni del modo in cui le particelle diffondono nella galassia (in modo plausibile)



Equazione di propagazione (3)

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\hat{D}_i \vec{\nabla} N_i) + \frac{\partial}{\partial E} (b_i N_i) + m v r_i N_i + \frac{N_i}{\tau_i} = q_i + \sum_{j < i} m v r_{ij} N_j + \sum_j \frac{N_j}{\tau_{ji}}$$

• Ci sono 2 casi:

i) CR leggeri: e^- , e^+

ii) CR pesanti: p , He , $Z > 2$

• L'equ. di diff. e' la stessa, cambiano le perdite di energia:

i) Per gli e^- , sono importanti $b(E) = \left(\frac{dE}{dt}\right)_{ion} + \left(\frac{dE}{dt}\right)_{Brems} + \left(\frac{dE}{dt}\right)_{Sinc} + \left(\frac{dE}{dt}\right)_{IC}$

ii) Per la comp. nucl. solo $b(E) = \left(\frac{dE}{dt}\right)_{ion}$

• Se osserviamo CR con $E \gtrsim 10$ GeV, le perdite di E si possono trascurare (i.e. $b(E) \approx 0$)

■ Esaminiamo la componente nucleare

Misure delle abbondanze degli elementi nella Galassia

- Le abbondanze “primordiali” degli elementi sono fissati dalla **cosmologia**:
 - 24% (in massa) di 4He
 - 76% (in massa) di H
- La **nucleosintesi** nelle stelle provvede alla sintesi degli elementi più pesanti
- Le esplosioni stellari (per $M \gg M_s$) hanno una vita media $\ll$ all'età dell'Universo e provvedono a rifornire il mezzo IG
- Le percentuali dei vari elementi nella Galassia possono essere dedotte in varie maniere

- The chemical elements existing in nature are a finite number: they are those that appear in the periodic table of elements. The observed stable nuclei are 264; the number of the unstable ones is more than 1,500. The latter number is increasing every year, as improved experimental techniques are developed, allowing the measurements of shorter and shorter nuclear lifetimes.
- The nuclei can be classified in terms of the number of protons Z (the *atomic number*), the number of neutrons N and the number of nucleons A (the *mass number*) $A = Z + N = Z$ protons plus N neutrons

Elementi chimici: genesi

1 H																	2 He
3 Li	4 Be											5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne
11 Na	12 Mg											13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar
19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr
37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe
55 Cs	56 Ba	57 La	72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn
87 Fr	88 Ra	89 Ac	104 Rf	105 Db	106 Sg	107 Bh	108 Hs	109 Mt	--	--	--	114 --		116 --		118 --	
58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu				
90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103 Lr				

White - Big Bang

Pink - Cosmic Rays

Yellow - Small Stars

Green - Large Stars

Blue - Supernovae

Abbondanze dei nuclei nel Sistema Solare

■ Sono rappresentative delle abbondanze degli elementi nel mezzo interstellare

Ref: Mashnik, astro/ph:
0008382

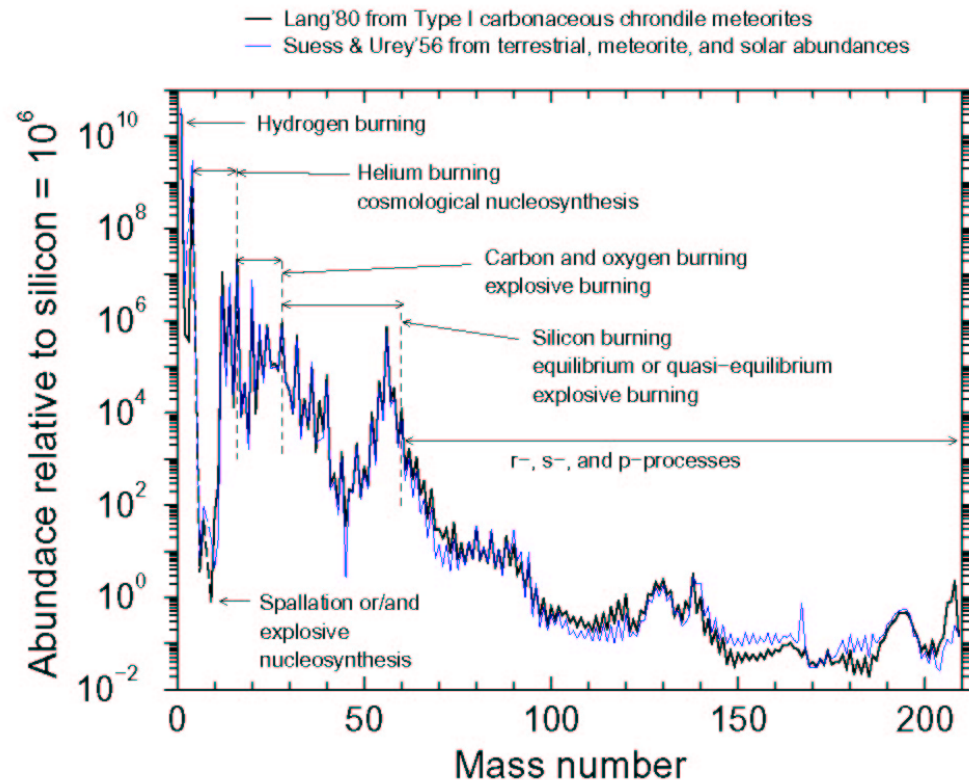


Fig. 1.— Abundances of solar system nuclides plotted as a function of mass number. The thin blue curves shows old data compiled in Table III by Suess and Urey (1956) which are based on measurements of terrestrial, meteoric, and solar abundances. These data were used by Burbidge, Burbidge, Fowler, and Hoyle (1957) in postulating the basic nucleosynthetic processes in stars in their seminal work which become widely known as “B²FH,” the “bible” of nuclear astrophysics. The thick black curve shows newer data from the compilation published in Table 38 by Lang (1980) which are based upon measurement of Type I carbonaceous chondrite meteorites, and are thought to be a better representation than Suess and Urey’s curve. The nuclear processes which are thought to be the main stellar mechanisms of nuclide production are shown as well in the figure.

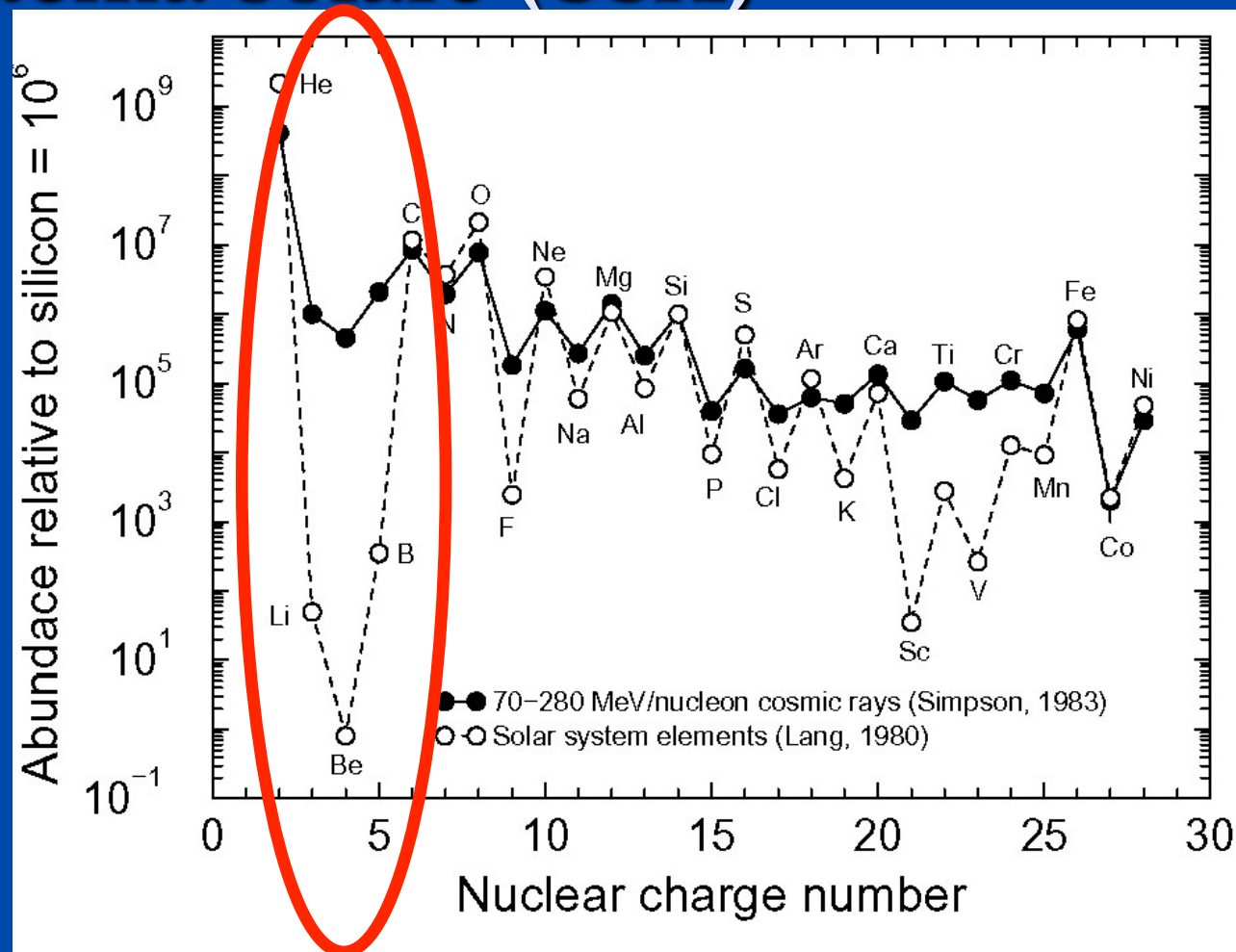
The *cosmochemistry* or *chemical cosmology* is the study of the chemical composition of matter in the Universe and the processes that led to the observed compositions. Meteorites are one of the most important tools for studying the chemical nature of the Solar System. Many meteorites come from material that is as old as the Solar System itself, and thus provides a record from the early solar nebula. Carbonaceous (C) chondrites¹ are especially primitive. C chondrites represent only a small proportion (4.6 %) of meteorite falls. They have retained many of their chemical properties since their formation in the solar system about 5×10^9 years ago, and are therefore a major focus of cosmochemical investigations. In addition to meteoritic data, the abundances of elements in the solar system are derived from photospheric measurements on the light from the Sun. It has been known for some time that abundances determined from lines in the Sun's spectrum and abundances in CI-type carbonaceous meteorites agree quite well when normalized to the same scale. The CIs (named after the Ivuna meteorite) are a particular and rare type of chondrites. The element abundances determined from solar photospheric measurements and meteoritic CI chondrite are summarized and compared with the chemical composition of CRs.

3.5 Confronto tra le abbondanze dei vari nuclidi nei RC e nel mezzo IG

- I RC hanno una composizione chimica analoga a quella del Sistema Solare (Solar System Abundance, SSA)?
- Se sì, questo indica una origine simile a quella del SS.
- Le abbondanze degli elementi nei RC si determinano tramite esperimenti di misura diretta dei RC (vedi.)
- Si notano alcune discrepanze rispetto al SSA, in particolare in corrispondenza al gruppo Li,Be,B e del gruppo prima del Fe → Vedi fig.
- Si nota anche un effetto *pari/dispari*, noto dalla fisica dei nuclei

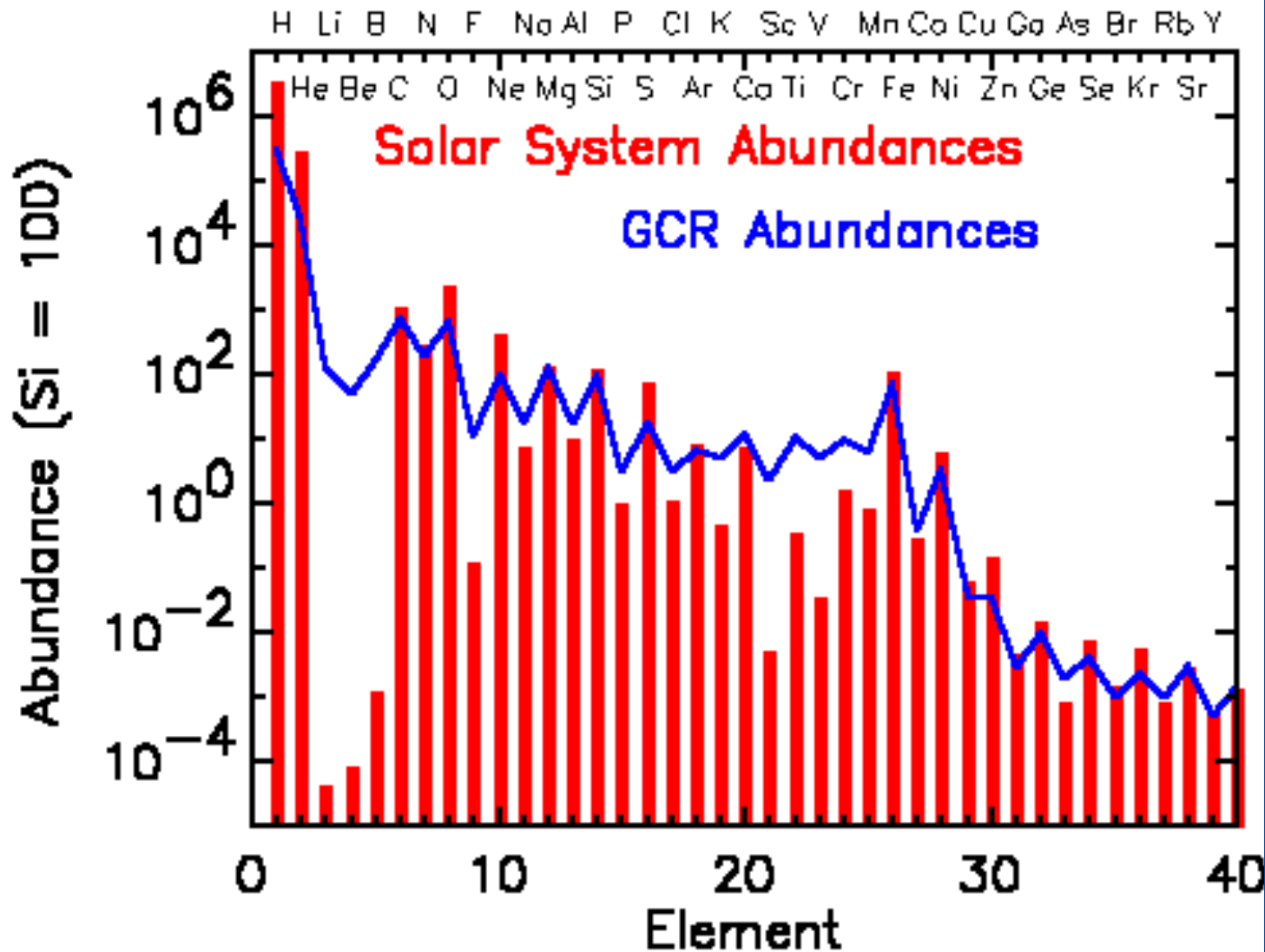
Abbondanze relative dei RC e del sistema solare (SSA)

- H e He sono dominanti (98%), leggermente in difetto rispetto SSA
- Buon accordo tra CR e SSA per molti elementi, in particolare C, O, Mg, Fe.
- Elementi leggeri Li, Be, B e quelli prima del ferro Sc, V sono straordinariamente abbondanti nei RC rispetto SSA



J.A. Simpson, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 33 (1983) 323

La stessa figura...



CHEMICAL COMPOSITION of CR at LOW ENERGIES

Intensity ($E > 2.5$ GeV/particle($\text{m}^{-2} \text{sr}^{-1} \text{sec}^{-1}$))

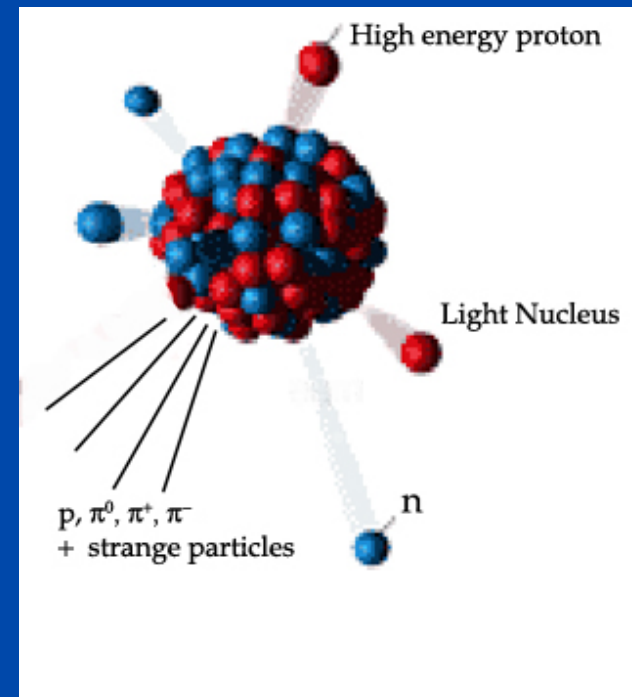
Nuclear group	Particle charge, Z	Integral Intensity in CR ($\text{m}^{-2} \text{s}^{-1} \text{sr}^{-1}$)	Number of particles per 10^4 protons	
			CR	Universe
Protons	1	1300	10^4	10^4
Helium	2	94	720	1.6×10^3
L (=Li,Be,B)	3-5	2	15	10^{-4}
M(=C,N,O)	6-9	6.7	52	14
Heavy	10-19	2	15	6
VeryHeavy	20-30	0.5	4	0.06
SuperHeavy	>30	10^{-4}	10^{-3}	7×10^{-5}
Electrons	-1	13	100	10^4
Antiprotons	-1	>0.1	5	?

Produzione di Li, Be, B nei RC

- ${}^6\text{Li}, \text{Be}, \text{B}$ sono catalizzatori delle reazioni di nucleosintesi. Ciò significa che NON sono rilasciati al termine della vita stellare. Il solo ${}^7\text{Li}$ ha una piccola percentuale di origine cosmologica, mentre ${}^6\text{Li}, \text{Be}, \text{B}$ non sono stati prodotti dal big bang.
- Li, Be, B sono prodotti temporaneamente durante la catena di fusione, ma vengono “consumati” durante le reazioni: le stelle consumano questi elementi durante la loro vita.
- Quale è l'origine di questi elementi rari?
- $\Rightarrow$ Reeves, Fowler & Hoyle (1970) ipotizzarono la loro origine come dovuta all'interazione dei RC (spallazione e fusione di $\alpha + \alpha$) con il mezzo interstellare (ISM).

Meccanismo di propagazione

- Gli elementi del gruppo M(=C,N,O) sono gli elementi candidati a produrre L(=Li,Be,B) durante la propagazione.
- Il processo fisico con cui gli M producono gli L è la spallazione, urto con i protoni del GI.
- Quale quantità di materiale:
 $\xi = \rho L$ (gcm⁻²)
i nuclei M devono attraversare per produrre, nel rapporto osservato, gli elementi L?
- Il problema può essere impostato con un sistema di equazioni differenziali.

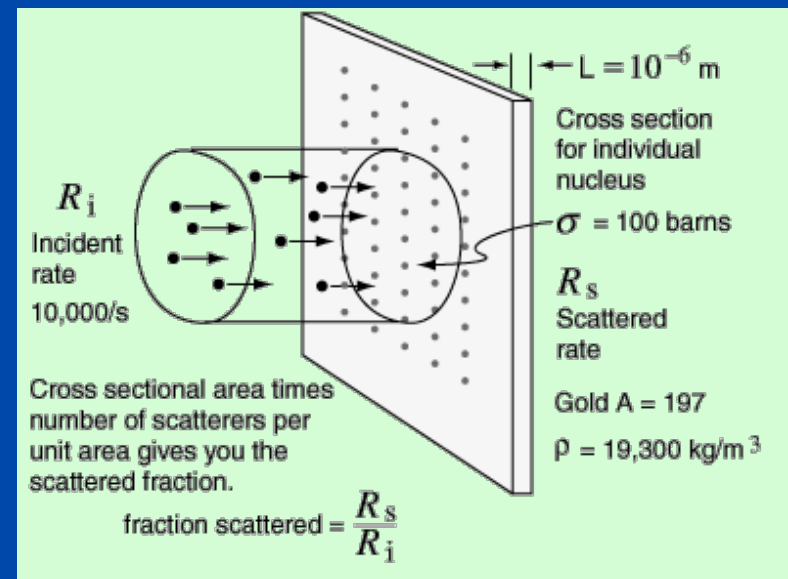


Sezione d'urto e libero cammino medio

- Le interazioni forti (a differenza di quelle elettromagnetiche) non avvengono a distanza. Il loro *range* coincide praticamente con le dimensioni delle particelle interagenti (p, n, nuclei) $\sim 10^{-13}$ cm.
- Il parametro che caratterizza “la forza” delle interazioni è definito **sezione d'urto** (indicato con σ). Unità: cm^2

- $N = n \cdot \text{particelle incidenti/cm}^2$
- $dN = n \cdot \text{particelle interagenti/cm}^2$
- $dx = \text{spessore del bersaglio, cm}$
- $N_c = n \cdot \text{centri diffusori bersaglio/cm}^3$

$$-dN = \sigma \cdot N \cdot N_c \cdot dx$$



Il libero cammino medio

- Il **cammino libero medio** λ rappresenta la distanza media percorsa da una particella fra due urti successivi.
- Può essere ricavato da, ricordando che $N_c = N_A \rho / M_A$

$$-dN = \sigma \cdot N \cdot N_c \cdot dx$$

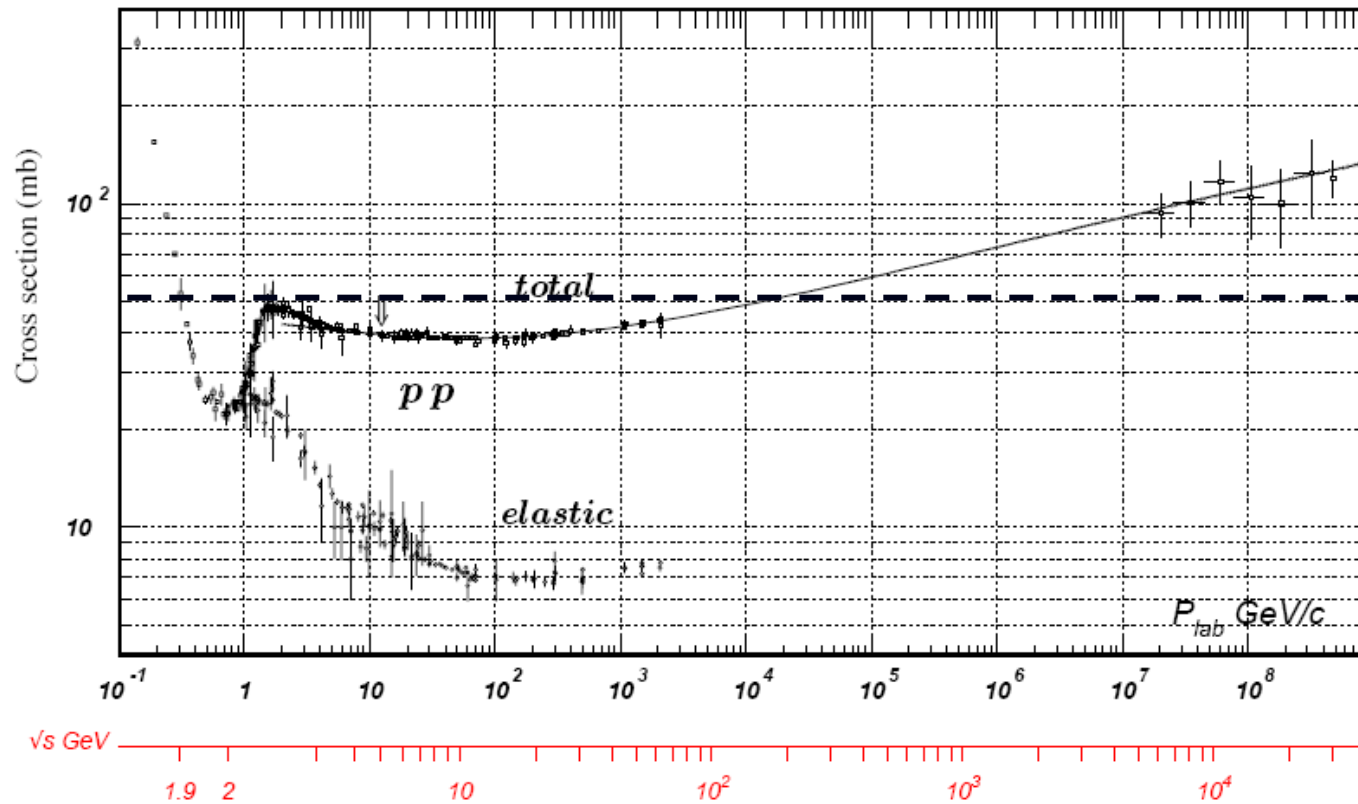
$$-\frac{dN}{N} = \sigma \cdot \frac{N_A}{M_A} \cdot \rho \cdot dx = \frac{d(\rho x)}{\lambda} \quad \longrightarrow \quad \lambda = \frac{M_A}{\sigma N_A} \text{ gr cm}^{-2}$$

- Si può facilmente verificare che un fascio di particelle si attenua di un fattore $1/e$ dopo aver percorso una lunghezza λ
- Nel caso in cui sia il fascio sia composto da nuclei A o protoni ($A=1$), la sezione d'urto corrisponde a quella geometrica:

$$\sigma_{nucl} = \pi \cdot r_N^2 = \pi \cdot (r_o A^{1/3})^2 \cong 5 \times 10^{-26} A^{2/3} \text{ cm}^2 = 50 \text{ mb}$$

- $r_N = r_o A^{1/3}$ con $r_o = 1.26 \times 10^{-15} \text{ m}$ e' stata ricavata con scattering di e^-_{32}

Sezione d'urto pp





RC

Perché ci interessa tutto questo?-2

- La frazione nucleare dei RC (10%) interagendo con i protoni del mezzo interstellare origina frammenti nucleari che possono giungere a Terra

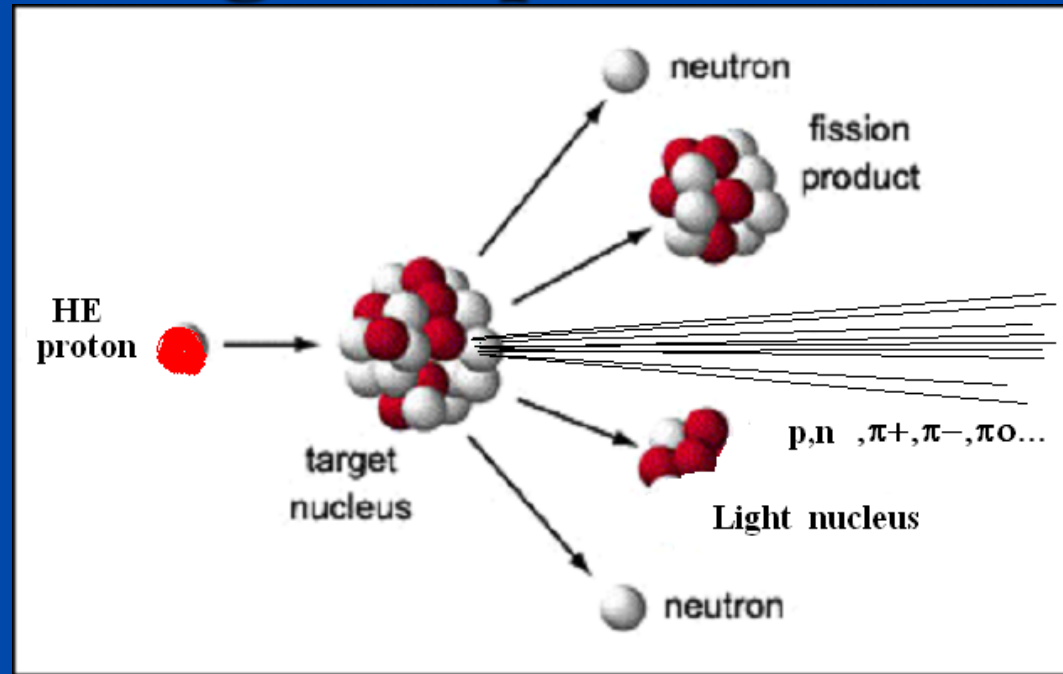
Mezzo Interstellare
 $= 1 \text{ p/cm}^3$

Frammentazione di nuclei

- L'interazione tra un nucleo ed un protone (o un nucleo) che produce un nucleo più piccolo (frammento) si chiama frammentazione (o spallazione).
- Per quanto riguarda i nuclei nei RC, propagandosi nel mezzo intergalattico, subiscono questo processo e la composizione chimica dei RC viene modificata nel tragitto dalle sorgenti alla Terra.
- Occorre determinare la sezione d'urto σ_{BT} totale del processo $N_{\text{Beam}} + N_{\text{Target}}$, e la frazione relativa f_{ij} di nuclei di differente specie prodotti dalla reazione (Beam, Target)
- Nel caso astrofisico, i nuclei "Target" sono protoni.
- Lo studio di σ_{BT} , f_{ij} avviene sia sperimentalmente, sia tramite l'utilizzo di formule semi-empiriche;

Interazioni di alta energia di p con nuclei

- Il p interagisce con un solo nucleone nel nucleo
- **ESERCIZIO:** *Calcolare la lunghezza di de Broglie di un p di $100 \text{ GeV}/c$.*
- Nell'interazione p-nucleone vengono prodotte molte particelle (pioni principalmente)



- Nel Sistema di riferimento del laboratorio, le particelle sono emesse in avanti.
- In genere, pochi (1 o 2) nucleoni partecipano all'interazione, e vengono rimossi dal nucleo originario. La parte rimanente è in uno stato eccitato, e alcuni frammenti (n, α) possono evaporare. La parte rimanente viene chiamata frammento nucleare, o nucleo di spallazione.
- *NOTA: si ha lo stesso processo se anziché avere un p di alta energia incidente su un nucleo in quiete, si ha un nucleo di H.E. incidente su un protone in quiete*

■ Sezione d'urto totale T,B

$$\sigma_{BT} = \sigma_o \cdot (A_T^{1/3} + A_B^{1/3} - b)^2$$

■ Se T (o B) è p:

$$\sigma_B = \sigma_o \cdot A_B^{2/3}$$

■ Le sezioni d'urto parziali di frammentazione di nuclei su protoni sono state ottenute parzialmente da esperimenti (ed estrapolate con formule semiempiriche ([Tsao, C. H.](#); [Silberberg, R.](#)))

■ L' accordo tra formule e dati è entro il 25%

■ Dalla tabella, si noti che:

■ La probabilità di estrarre un solo nucleone è sempre elevata

■ produzione di nuclei “pari” leggermente favorita rispetto ai “dispari”

■ $\sum f_{ij} < \sigma_{BT}$ (riga in basso): alcuni canali meno interessanti non sono riportati

Product nucleus			Parent nucleus								TARGET
	Z	A	¹¹ B	¹² C	¹³ N	¹⁴ O	¹⁶ Ne	²¹ Mg	²⁸ Si	³⁶ Fe	
Lithium	3	6	12.9	12.6	12.6	12.6	12.6	12.6	12.6	17.4	(%)
		7	17.6	11.4	11.4	11.4	11.4	11.4	11.4	17.8	
Beryllium	4	7	6.4	9.7	9.7	9.7	9.7	9.7	9.7	8.4	
		9	7.1	4.3	4.3	4.3	4.3	4.3	4.3	5.8	
		10	15.8	2.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	4.1	
Boron	5	10	26.6	17.3	16.0	8.3	7.1	6.2	5.3	5.3	
		11	—	31.5	15.0	13.9	12.0	10.4	9.0	8.1	
Carbon	6	10	—	3.9	3.3	2.9	2.1	1.6	1.2	0.5	
		11	0.6	26.9	12.4	10.6	7.9	5.9	4.5	1.3	
		12	—	—	38.1	32.7	13.5	10.1	7.6	4.7	
		13	—	—	10.5	14.4	10.7	8.0	6.0	3.7	
		14	—	—	—	2.3	3.9	3.0	2.2	2.1	
Nitrogen	7	13	—	—	10.7	3.6	2.7	2.0	1.5	0.5	
		14	—	—	—	26.3	10.9	8.1	6.1	2.9	
		15	—	—	—	31.5	10.0	7.5	5.7	4.3	
		16	—	—	—	—	3.4	2.6	1.9	1.6	
Oxygen	8	14	—	—	—	3.4	2.5	1.9	1.4	0.3	
		15	—	—	—	27.8	11.8	8.9	6.7	1.0	
		16	—	—	—	—	27.0	13.5	10.2	3.9	
		17	—	—	—	—	15.5	11.6	8.7	4.1	
		18	—	—	—	—	4.5	4.7	3.5	2.6	
Fluorine	9	16	—	—	—	—	—	1.4	1.1	—	
		17	—	—	—	—	8.5	6.4	4.8	—	
		18	—	—	—	—	14.4	10.8	8.1	2.4	
		19	—	—	—	—	21.0	10.9	8.2	4.8	
		20	—	—	—	—	—	4.2	3.1	2.3	
Neon	10	18	—	—	—	—	2.8	2.1	1.6	—	
		19	—	—	—	—	17.3	5.3	4.0	—	
		20	—	—	—	—	—	17.8	13.4	3.6	
		21	—	—	—	—	—	14.0	10.6	5.4	
		22	—	—	—	—	—	8.2	5.8	4.3	
Sodium	11	23	—	—	—	—	—	—	1.3	—	
		20	—	—	—	—	—	1.5	1.1	—	
		21	—	—	—	—	—	7.7	5.6	—	
		22	—	—	—	—	—	16.8	12.7	2.3	
		23	—	—	—	—	—	21.0	12.0	6.4	
Magnesium	12	24	—	—	—	—	—	—	5.2	3.7	
		23	—	—	—	—	—	29.8	1.6	0.6	
		24	—	—	—	—	—	—	17.1	3.2	
		25	—	—	—	—	—	—	18.5	6.0	
		26	—	—	—	—	—	—	14.4	6.8	
Aluminium	13	27	—	—	—	—	—	—	7.6	1.7	
		25	—	—	—	—	—	—	6.3	—	
		26	—	—	—	—	—	—	13.3	2.0	
		27	—	—	—	—	—	—	21.0	6.7	
		28	—	—	—	—	—	—	—	5.7	
Silicon	14	29	—	—	—	—	—	—	—	2.5	
		27	—	—	—	—	—	—	30.7	0.4	
		28	—	—	—	—	—	—	—	2.7	
		29	—	—	—	—	—	—	—	6.0	
		30	—	—	—	—	—	—	—	10.4	
		31	—	—	—	—	—	—	—	3.1	
Total inelastic cross-section		32	—	—	—	—	—	—	—	1.2	mb
			237.8	252.4	280.9	308.8	363.3	415.7	466.0	763.4	

Cross-sections measured in units of millibarns = 10^{-28} m^2 .
Data kindly supplied by Drs R. Silberberg and C. H. Tsao.

Componente nucleare

* Semplifichiamo l'equazione:

- Diffusione isotropa $D_{\alpha\beta} = D \delta_{\alpha\beta}$
- Trascuriamo i decadimenti: $\tau_i = \tau_{ij} = \infty$

* Riscriviamola in forma leggermente diversa

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = D \nabla^2 N_i + \frac{\partial}{\partial E} (b N_i) + q_i - \frac{N_i}{\tau_i'} + \sum_{j>i} \frac{P_{ij}}{\tau_j'} N_j$$

con $\tau_k' = \frac{1}{n \sigma_k v}$ tempo di spallazione del nucleo k

P_{ij} = prob che il nucleo $j (> i)$ produca il nucleo i

Componente nucleare (2)

* La comp. nucleare è soggetta solo a perdite per ionizz.
Ad $\bar{E} > 10 \text{ GeV}$, $\int \frac{dE}{dt} dt \ll E \Rightarrow$ Possono essere trascurate

* Assumiamo che la diff. sia trascurabile. $D=0$
Le irregolarità del campo magnetico non influenzano il moto (i.e. solo comp. stazionaria)

* Le specie nucl. con $Z > 2$ hanno abbondanze basse ($< 1\%$) $\Rightarrow$ Assumiamo che non ci siano sorgenti
 $q_i = 0$

* Cambiamo variabile $t \rightarrow \xi = \rho x = \rho v t \text{ [kg m}^{-2}\text{]}$, spessore di materia attraversato

$$\Rightarrow \frac{dN_i(\xi)}{d\xi} = - \frac{N_i(\xi)}{\xi_i} + \sum_{j \neq i} \frac{P_{ji}}{\xi_j} N_j$$

ξ = libero cammino medio per collis. inelastiche

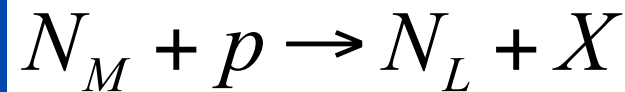
Componente nucleare (3)

- L'equazione ha una forma molto piu' semplice
- Puo' essere risolta per determinare il numero di particelle della specie i dopo che la popolazione ha attraversato uno spessore ξ kg m⁻² di ISM
- NB: in questa approx, si assume che tutte le particelle abbiano attraversato lo stessa quantita' di materiale tra 0 e ξ , cioe' che ci sia una corrispondenza uno a uno tra "path length" ξ e le specie prodotte
- Il modello e' detto "slab model" ed e' ovviamente una sovra-semplificazione (che pero' puo' essere migliorata a posteriori)

- Costruiamo un “modellino giocattolo” di propagazione dei RC, in cui le ipotesi di partenza sono:
- **Nessuna presenza di nuclei Leggeri (N_L) alle sorgenti dei RC**
- **Una certa quantità di nuclei Medi (N_M), che durante la propagazione diminuisce a causa della spallazione**

$$\begin{aligned} N_L(0) &= 0 \\ N_M(0) &= N_M^0 \end{aligned}$$

- Il processo di spallazione P_{ML} :



avviene con una probabilità $0 \leq P_{ML} \leq 1$.

$$P_{ML} = \frac{\sigma_{spall.}}{\sigma_{tot.}}$$

- Sperimentalmente, $P_{ML} = 28\%$.

- La tabella con le sezioni d'urto di produzione di frammenti da spallazione di p con Nuclei

Table 5.1.(a) Partial cross-sections for inelastic collisions of selected heavy nuclei with hydrogen with $E = 2.3 \text{ GeV}$ per nucleon.

Product nucleus			Parent nucleus							
			Z	A	¹¹ B	¹² C	¹⁴ N	¹⁶ O	²⁰ Ne	²⁴ Mg
Lithium	3	6	12.9	12.6	12.6	12.6	2.6	12.6	12.6	17.4
	7	7	17.6	11.4	11.4	11.4	1.4	11.4	11.4	17.8
Beryllium	4	7	6.4	9.7	9.7	9.7	9.7	9.7	9.7	8.4
	9	7	7.1	4.3	4.3	4.3	4.3	4.3	4.3	5.8
Boron	5	10	15.8	2.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	4.1
	11	10	26.6	17.3	16.0	8.3	7.1	6.2	5.3	5.3
Carbon	6	10	—	31.5	15.0	13.9	2.0	10.4	9.0	8.1
	11	10	—	3.9	3.3	2.9	2.1	1.6	1.2	0.5
Nitrogen	7	11	0.6	26.9	12.4	10.6	7.9	5.9	4.5	1.3
	12	11	—	—	38.1	32.7	13.5	10.1	7.6	4.7
Oxygen	8	13	—	—	10.5	14.4	10.7	8.0	6.0	3.7
	14	13	—	—	—	2.3	3.9	3.0	2.2	2.1
Fluorine	9	14	—	—	—	3.6	2.7	2.0	1.5	0.5
	15	14	—	—	—	26.3	10.9	8.1	6.1	2.9
Neon	10	15	—	—	—	31.5	10.0	7.5	5.7	4.3
	16	15	—	—	—	—	3.4	2.6	1.9	1.6
Sodium	11	16	—	—	—	—	3.4	2.5	1.9	1.4
	17	16	—	—	—	—	27.8	11.8	8.9	6.7
Magnesium	12	16	—	—	—	—	—	27.0	13.5	10.2
	17	16	—	—	—	—	—	15.5	11.6	8.7
Aluminium	13	17	—	—	—	—	—	4.5	4.7	3.5
	18	17	—	—	—	—	—	—	1.4	1.1
Silicon	14	18	—	—	—	—	—	8.5	6.4	4.8
	19	18	—	—	—	—	—	14.4	10.8	8.1
Phosphorus	15	19	—	—	—	—	—	21.0	10.9	8.2
	20	19	—	—	—	—	—	—	4.2	3.1
Sulfur	16	20	—	—	—	—	—	—	—	2.3
	21	20	—	—	—	—	—	2.8	2.1	1.6
Chlorine	17	19	—	—	—	—	—	17.3	5.3	4.0
	20	20	—	—	—	—	—	—	17.8	13.4
Argon	18	20	—	—	—	—	—	—	—	3.6
	21	21	—	—	—	—	—	—	14.0	10.6
Potassium	19	21	—	—	—	—	—	—	8.2	5.8
	22	21	—	—	—	—	—	—	—	4.3
Calcium	20	23	—	—	—	—	—	—	1.3	—
	24	20	—	—	—	—	—	—	1.5	1.1
Scandium	21	21	—	—	—	—	—	—	7.7	5.6
	22	21	—	—	—	—	—	—	—	—
Titanium	22	22	—	—	—	—	—	—	16.8	12.7
	23	22	—	—	—	—	—	—	21.0	12.0
Vanadium	23	23	—	—	—	—	—	—	—	5.2
	24	23	—	—	—	—	—	—	—	3.7
Chromium	24	24	—	—	—	—	—	—	29.8	1.6
	25	24	—	—	—	—	—	—	—	0.6
Manganese	25	24	—	—	—	—	—	—	17.1	3.2
	26	25	—	—	—	—	—	—	18.5	6.0
Iron	26	26	—	—	—	—	—	—	14.4	6.8
	27	26	—	—	—	—	—	—	7.6	1.7
Cobalt	27	25	—	—	—	—	—	—	—	—
	26	25	—	—	—	—	—	—	6.3	—
Nickel	28	26	—	—	—	—	—	—	13.3	2.0
	27	26	—	—	—	—	—	—	21.0	6.7
Copper	29	27	—	—	—	—	—	—	—	5.7
	28	27	—	—	—	—	—	—	—	2.5
Zinc	30	28	—	—	—	—	—	—	—	—
	29	28	—	—	—	—	—	—	30.7	0.4
Gallium	31	28	—	—	—	—	—	—	—	2.7
	30	28	—	—	—	—	—	—	—	6.0
Germanium	32	29	—	—	—	—	—	—	—	10.4
	31	29	—	—	—	—	—	—	—	3.1
Arsenic	33	31	—	—	—	—	—	—	—	1.2
	32	31	—	—	—	—	—	—	—	—
Total inelastic cross-section			237.8	252.4	280.9	108.8	363.3	415.7	466.0	763.4

Cross-sections measured in units of millibarns = 10^{-18} m^2 .
Data kindly supplied by Drs R. Silberberg and C. H. Tsao.

Valori delle sezioni d'urto per il calcolo di P_{ML}

Partial Cross-Sections for Inelastic Collisions of Protons with CNO { $E = 2.3 \text{ GeV/N}$ }

Secondary Nuclei			Primary Nuclei		
	Z	A	C	N	O
Li	3	6	12.6	12.6	12.6
		7	11.4	11.4	11.4
Be	4	7	9.7	9.7	9.7
		9	4.3	4.3	4.3
		10	2.9	1.9	1.9
B	5	10	17.3	16.0	8.3
		11	31.5	15.0	13.9
Inelastic cross-section (mb)			252.4	280.9	308.8

Data of R. Siberberg & C.H. Tsao



$$N_M + p \rightarrow N_L + X$$

$$\frac{d}{d\xi} N_M(\xi) = -\frac{N_M(\xi)}{\lambda_M} \quad (1)$$

$$\frac{d}{d\xi} N_L(\xi) = -\frac{N_L(\xi)}{\lambda_L} + \frac{P_{ML}}{\lambda_M} N_M(\xi) \quad (2)$$

$$\lambda_i = \frac{A_{media}}{N_0 \cdot \sigma_i}$$

$$\sigma_i \propto \sigma_0 \cdot A_{media}^{2/3}$$

$$\sigma_M = (40mb) \cdot A_M^{2/3} = 280 \text{ mb}$$

$$\sigma_L = (40mb) \cdot A_L^{2/3} = 200 \text{ mb}$$

$$\lambda_M = \frac{1}{(6 \times 10^{23} \cdot 280mb)} = 6.0 \text{ g.cm}^{-2}$$

$$\lambda_L = \frac{1}{(6 \times 10^{23} \cdot 200mb)} = 8.4 \text{ g.cm}^{-2}$$

lunghezza di interazione nucleare

■ Valori dei parametri in (1) e (2)

- La soluzione dell' eq. 1 è:

$$N_M(\xi) = N_M^0 \cdot e^{-\xi/\lambda_M} \quad (3)$$

- Moltiplicando ambo i membri della (2) per e^{ξ/λ_L}

$$\frac{d}{d\xi} N_L(\xi) \cdot e^{\xi/\lambda_L} = -\frac{N_L(\xi)}{\lambda_L} \cdot e^{\xi/\lambda_L} + \frac{P_{ML}}{\lambda_M} N_M(\xi) \cdot e^{\xi/\lambda_L}$$



$$\frac{d}{d\xi} (N_L(\xi) \cdot e^{\xi/\lambda_L}) = \frac{P_{ML}}{\lambda_M} N_M^0 \cdot e^{(\xi/\lambda_L - \xi/\lambda_M)}$$

- Questa, è una equazione del tipo:

$$\frac{d}{dx} (y(x) \cdot e^{x/\lambda_L}) = B \cdot e^{(x/\lambda_L - x/\lambda_M)} \quad (4)$$

$$\text{dove } B = \frac{P_{ML}}{\lambda_M} N_M^0$$

$$\frac{d}{dx} \left(y(x) \cdot e^{x/\lambda_L} \right) = B \cdot e^{(x/\lambda_L - x/\lambda_M)} \quad (4)$$

■ Proviamo con una soluzione del tipo:

$$y(x) = N_L(\xi) = c \cdot \left(e^{-x/\lambda_L} - e^{-x/\lambda_M} \right) \quad (5)$$

■ Con le condizioni al contorno:

$$y(x) = 0 = N_L(0) = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left[c \cdot \left(e^{-x/\lambda_L} - e^{-x/\lambda_M} \right) \cdot e^{x/\lambda_L} \right] = B \cdot e^{(x/\lambda_L - x/\lambda_M)}$$

$$\frac{d}{dx} \left[c \cdot \left(1 - e^{-x/\lambda_M + x/\lambda_L} \right) \right] = B \cdot e^{(x/\lambda_L - x/\lambda_M)}$$

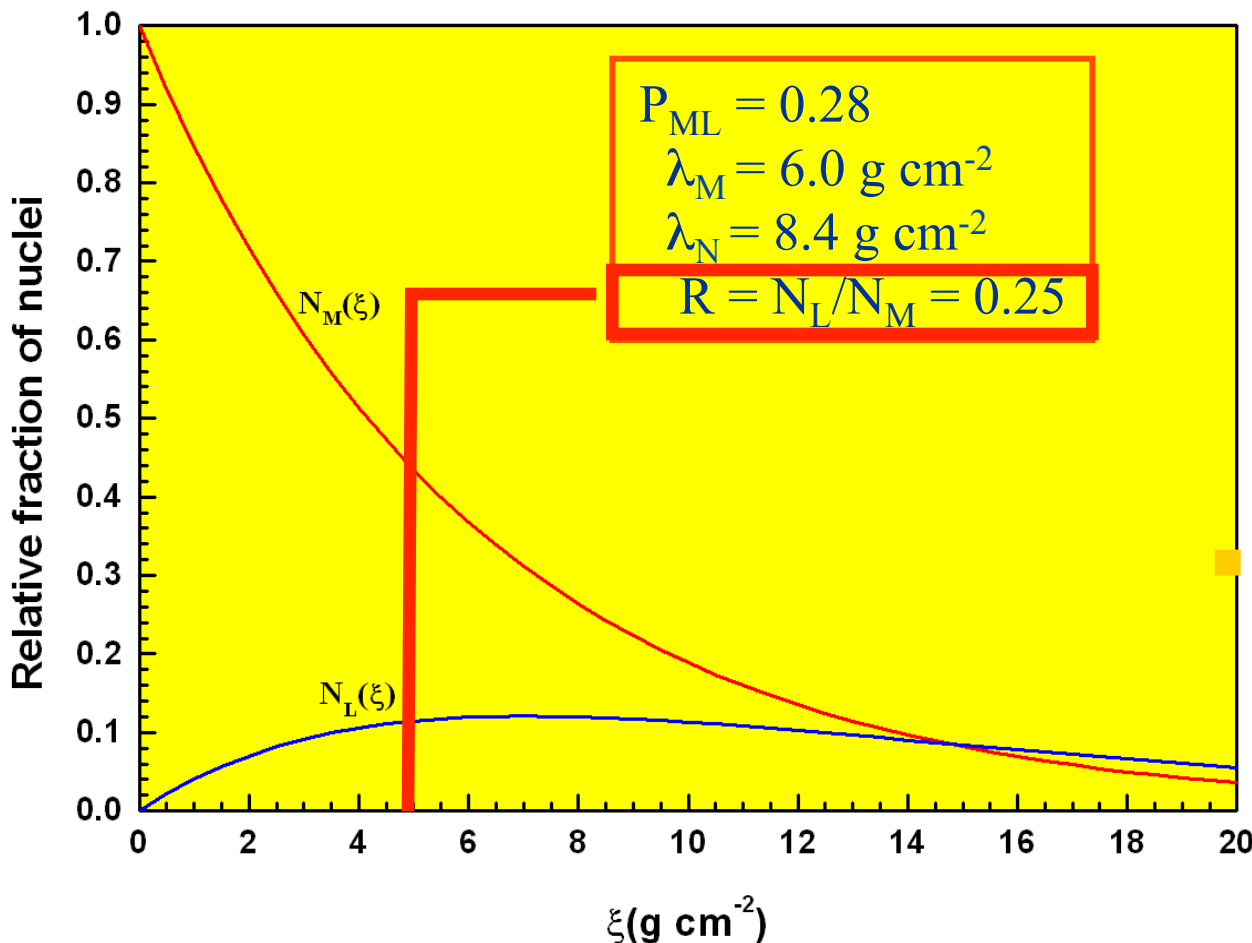
$$c \cdot \left(\frac{1}{\lambda_M} - \frac{1}{\lambda_L} \right) = B$$

$$c = B \cdot \frac{\lambda_M \lambda_L}{\lambda_L - \lambda_M}$$

- Inserendo il valore di “c” nella (5) otteniamo finalmente:

$$N_L(\xi) = \left(\frac{P_{ML}}{\lambda_M} N_M^0 \right) \cdot \left(\frac{\lambda_M \lambda_L}{\lambda_L - \lambda_M} \right) \cdot \left(e^{-\xi/\lambda_L} - e^{-\xi/\lambda_M} \right) \quad (6)$$

$$N_M(\xi) = N_M^0 \cdot e^{-\xi/\lambda_M} \quad (3)$$



- Quindi: i RC, perché presentino il rapporto R osservato sulla Terra, devono avere attraversato nella Galassia uno spessore di “materiale equivalente” pari a $\xi_T = 4.8 \text{ g cm}^{-2}$.

Poiché la Terra non ha una posizione privilegiata nella Galassia, un qualsiasi altro osservatore misurerebbe lo **stesso** numero.

Abbondanze relative di Li, Be, B in rapporto alla loro probabilità di produzione da parte di C, N, O

Element	P_{ML} (CNO)	Abbondanze relative Si=100 (misure)
Li	24 %	136
Be	16.4 %	67
B	35 %	233



- Questa misura “conferma” il modello di propagazione, che assegna una abbondanza maggiore all’ elemento con la maggiore P_{ML}

Stima del tempo di confinamento da ξ_T : Galassia senza alone.

- ❑ Il modello semplificato conferma la produzione di Li, Be, B da parte degli elementi del gruppo C,N,O con le abbondanze relative come sperimentalmente misurate;
- ❑ Il modello, senza ulteriori correzioni, non funziona altrettanto bene per riprodurre le abbondanze di Mn, Cr, V da parte del Ferro (potete immaginare perché ?)
- ❑ Dal valore ottenuto di $\xi_T=4.8 \text{ g cm}^{-2}$ è possibile ottenere una stima del tempo di confinamento dei RC nella galassia. Infatti:

$$\xi_T = \rho_{CR} \cdot c \cdot \tau$$

$$\rho_{CR} = 1p/cm^3 = 1.6 \times 10^{-24} \text{ g.cm}^{-3}$$

$$\tau = \frac{4.8 (\text{g.cm}^{-2})}{3 \times 10^{10} (\text{cm/s}) \cdot 1.6 \times 10^{-24} (\text{g.cm}^{-3})} = 10^{14} \text{ s} = 3 \times 10^6 \text{ y}$$

Stima del tempo di confinamento nella Galassia con alone

- Nel caso si consideri la densità della Galassia con alone di DM:

$$\rho_{CR} = 0.3 p/cm^3$$

$$\tau_{Alone} = \frac{4.8 (g \cdot cm^{-2})}{0.3 \times 3 \times 10^{10} (cm/s) \cdot 1.6 \times 10^{-24} (g \cdot cm^{-3})} = 10^7 y$$

- Si noti che in ogni caso, se i RC si muovessero di moto rettilineo, la distanza percorsa nel tempo τ sarebbe:

$$L = c \cdot \tau = 3 \times 10^{10} \times 10^{14} = 3 \times 10^{24} cm = 10^6 pc$$

valore molto maggiore delle dimensioni della Galassia.

- τ rappresenta dunque il tempo di diffusione dei RC dalla Galassia. In modelli più raffinati, $\tau = \tau(E)$

Se il moto dei RC fosse rettilineo:

$$L_{\min} = \tau_D c = 3 \cdot 10^{10} \cdot 10^{14} \text{ cm/s} = 10^6 \text{ pc} \gg 15 \text{ kpc} = r_{\text{galax}}$$

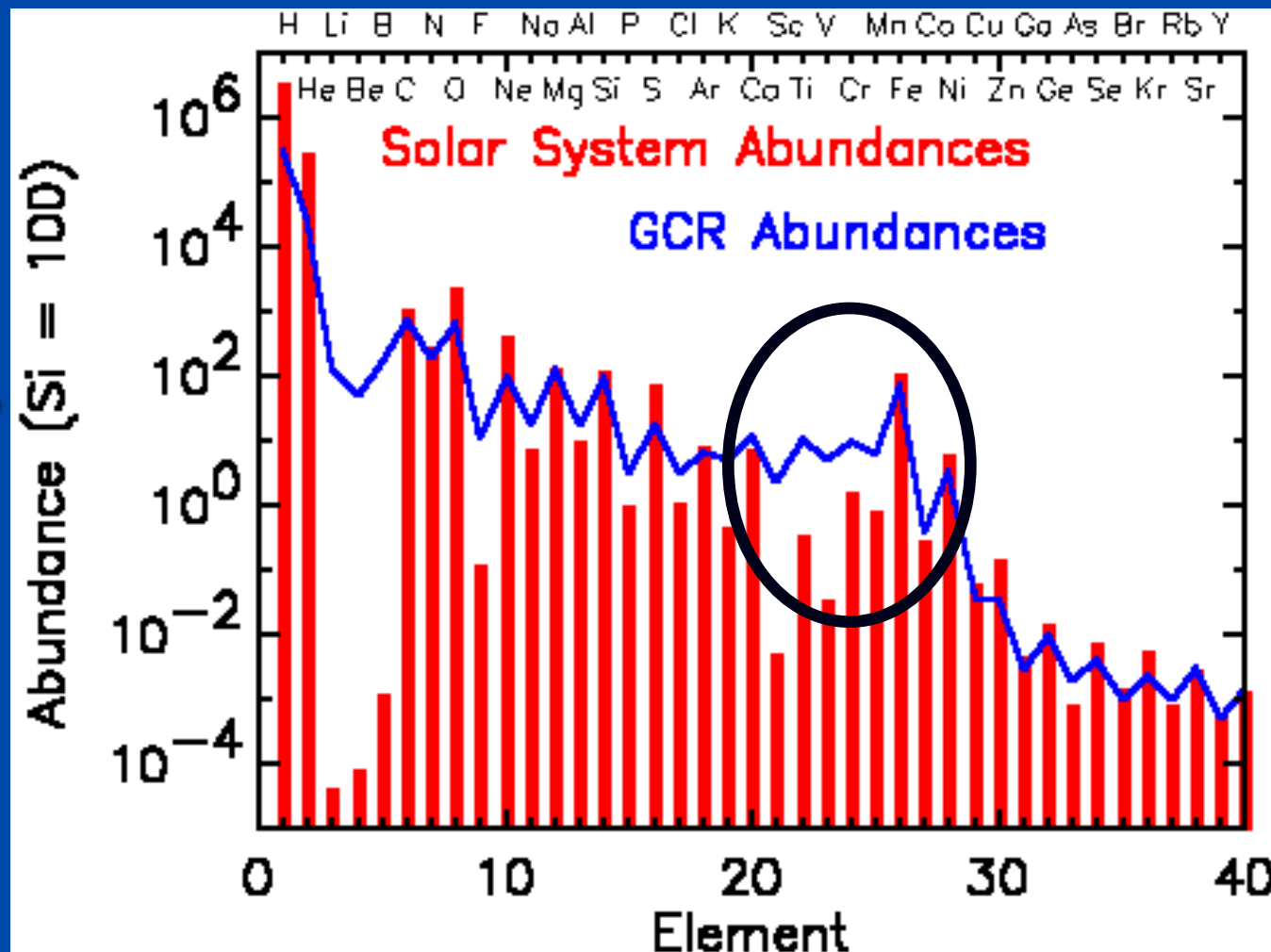
Ciò conferma che i RC hanno una direzione continuamente modificata durante τ (dal Campo Magnetico Galattico)



Il problema del Ferro

- $\sigma_{\text{Fe}} = 764 \text{ mb} \gg \sigma_{\text{M nuclei}} \rightarrow$ il Fe dovrebbe essere severamente impoverito dalla spallazione
- Il rapporto di spallazione e' $[\text{prodotti}]/[\text{primari}] = [1 - \exp(-\xi/\xi_{\text{Fe}})]/\exp(-\xi/\xi_{\text{Fe}})$
- Se il materiale attraversato e' dello stesso ordine di quello degli elementi medi M (C,N,O): $\xi = 50 \text{ kgm}^{-2}$ e $\xi_{\text{Fe}} = 22 \text{ kgm}^{-2} \rightarrow [\text{prodotti}]/[\text{primari}] = 8.7$

Ma...



- Molti dei prodotti sono appena piu' leggeri del nucleo primario
- Dalle sez d'urto parziali ci si aspetta che $\approx 1/3$ dei prodotti dovrebbe risultare in Mn, V, Cr
- Quindi Mn, V, Cr dovrebbero essere significativamente piu' abbondanti del Fe

- Da un punto di vista fenomenologico, possiamo chiederci qual'è la distribuzione media di pathlengths L che spiega le abbondanze osservate
- La risposta completa può venire solo dalla soluzione del sist di equ di diff
- Un esempio di come una distribuzione di L può aiutare è la seguente

- Supponiamo che 1/3 delle particelle attraversi 100 kgm-2 di ISM e 2/3 una quantità trascurabile
- Possiamo allora usare le equazioni

$$N_L(\xi) = \left(\frac{P_{ML}}{\lambda_M} N_M^0 \right) \cdot \left(\frac{\lambda_M \lambda_L}{\lambda_L - \lambda_M} \right) \cdot (e^{-\xi/\lambda_L} - e^{-\xi/\lambda_M}) \quad (6)$$

$$N_M(\xi) = N_M^0 \cdot e^{-\xi/\lambda_M} \quad (3)$$

$$[\text{sub-Fe}]/[\text{Fe}] = [1 - \exp(-\xi/\xi_{\text{Fe}})] / \exp(-\xi/\xi_{\text{Fe}}) \quad (7)$$

Per trovare i rapporti delle abbondanze degli elementi
L su M e sub-Fe/Fe

- La frazione che attraversa 100 kg m^{-2} subisce grossa spallazione: con $\xi = 100 \text{ kgm}^{-2}$ $[L]/[M] = 0.6$ e $[\text{Fe}] \approx 0$; la restante rimane inalterata
- Quindi: $[L]/[M] = [L]/3[M] = 0.6/3 = 0.2$
- $[\text{sub-Fe}]/[\text{Fe}] = (1/3)\text{Fe}/(2/3)\text{Fe} = 0.5$
- In buon accordo con le osservazioni sperimentali, cioè' abbiamo modificato il modello a slab considerando una distribuzione di path lengths
- Ovvero il Fe attraversa meno materiale degli elementi leggeri perché' il tempo di residenza è' più' breve di quello degli elementi leggeri

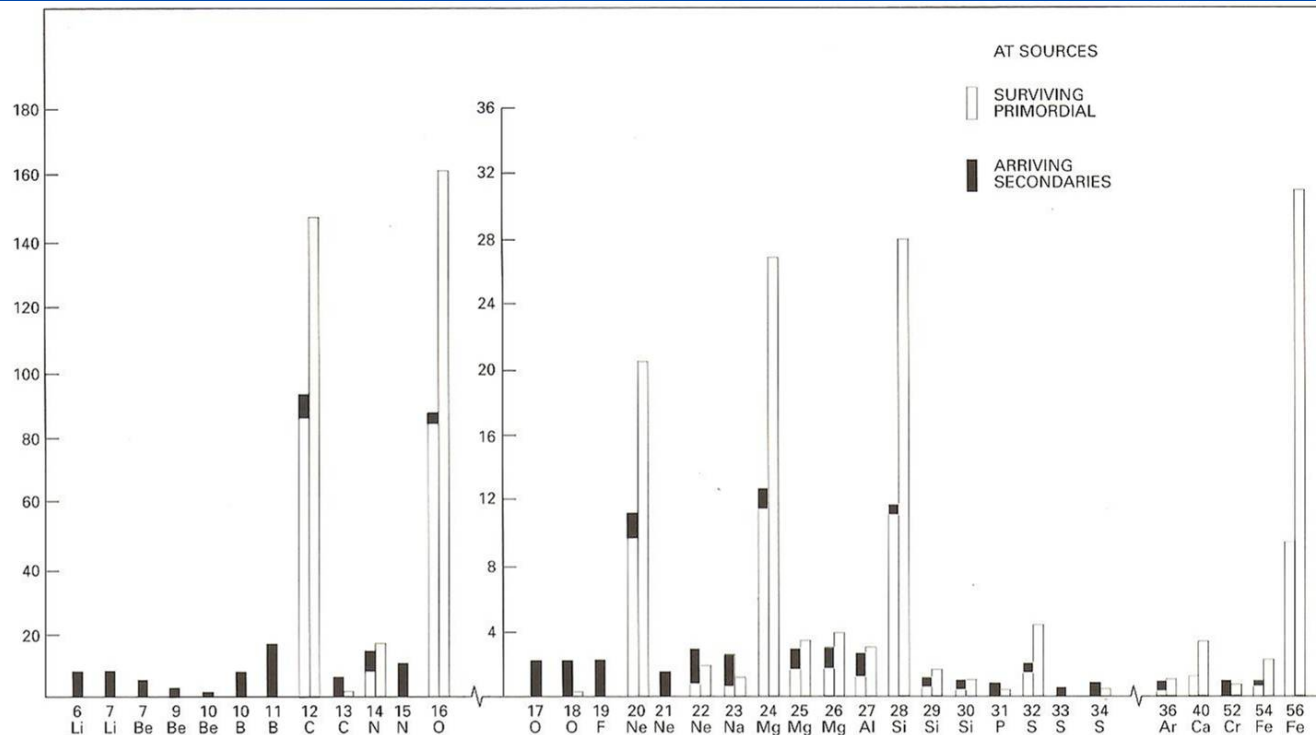


Figure 20.5. The relative isotopic abundances of the cosmic rays as observed near the Earth and as inferred to be present in their sources, once the effects of spallation between the sources and the Earth are taken into account. The abundances have been normalised to 100 for $^{12}\text{C} + ^{13}\text{C}$. The grey histograms show the inferred source abundances and the neighbouring histograms show the observed abundances, the open parts depicting the surviving primary elements and the black parts the amount produced by spallation. (From M.M. Shapiro (1991). In *Cosmic rays, supernovae and the interstellar medium*, eds M.M. Shapiro, R. Silberberg and J.P. Wefel, p. 14. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.)

- Calcoli dettagliati permettono di dedurre i differenti contributi alla composizione complessiva dei CR che arrivano sulla Terra
- Isotopi degli elementi leggeri (Li, Be, B) sono prodotti secondari, così come ^{15}N , ^{17}O , ^{18}O , ^{19}F , ^{21}Ne
- Frazioni importanti degli elementi sub-Fe sono prodotti di spallazione del Fe
- Ma anche frazioni importanti di elementi comuni (C, O, Ne, Mg, Si) sono sopravvissute dalle sorgenti fino a Terra

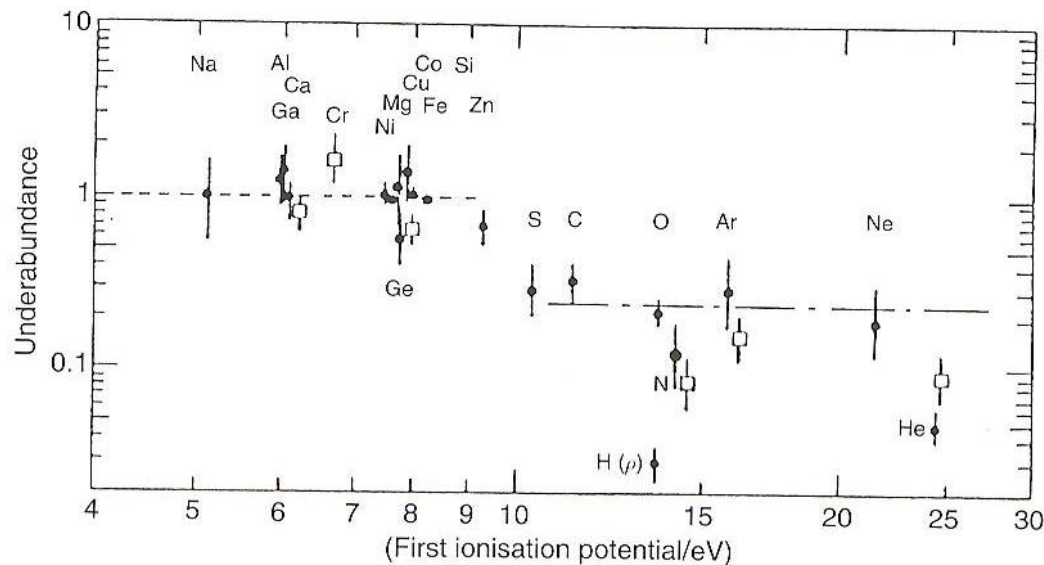


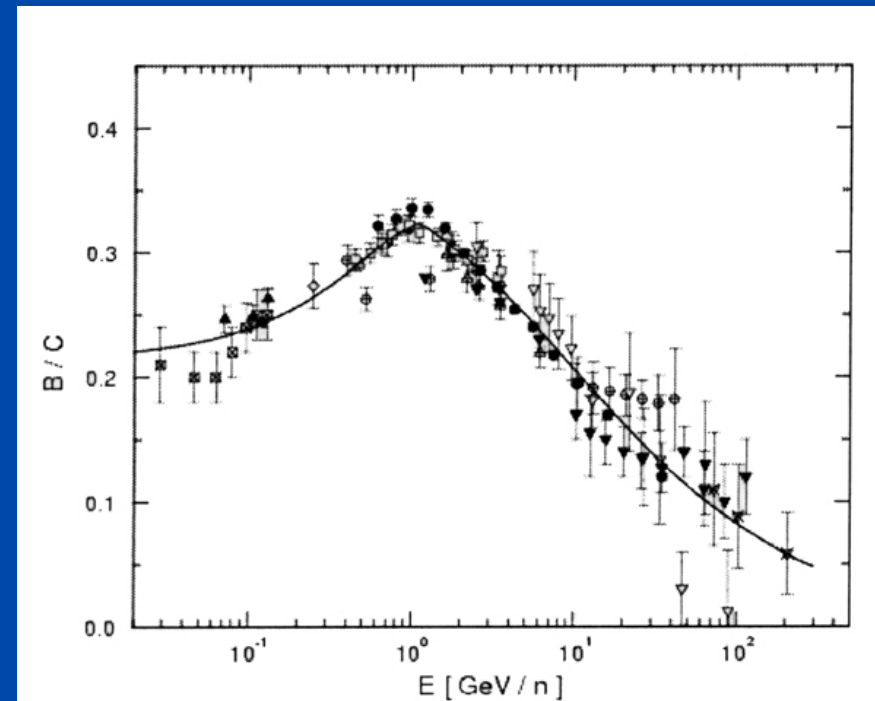
Figure 20.6. The ratio of the cosmic ray source abundances to the local Galactic abundances as a function of the first ionisation potential of the elements. Open squares show recent improved estimates of some of the abundance ratios. (After J.P. Wefel (1991). In *Cosmic rays, supernovae and the interstellar medium*, eds M.M. Shapiro, R. Silberberg and J.P. Wefel, p. 45. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.)

- C'è una correlazione fra le abbondanze e il potenziale di prima ionizzazione: gli elementi con il pot più alto di 10 eV sono meno abbondanti
- Dipende dallo stato di ionizzazione della regione in cui i CR sono stati accelerati: gli elementi più abbondanti sono più facilmente ionizzabili e quindi potenzialmente più facilmente accelerabili da meccanismi che dipendono dalla carica

- In the leaky-box equation, the energy dependence of the particles loss is accounted for by the escape time τ_{esc} and, according to $t \sim R^{-\delta}$, the escape process dominates at high energy over fragmentation.
- In models using the diffusion coefficient D , this parameter becomes energy dependent, $D = D(E)$ (remember $\tau \sim H^2/D$, H = halo thickness).
- Appropriate parameterizations are introduced when the diffusion equation is used. This dependence of the τ_{esc} (or D) upon energy is of decisive importance to derive the energy spectrum of CRs in the proximity of the sources.

Toy model

- Le abbondanze relative dipendono dall'energia delle particelle
- Alcune dipendono da differenze nello spettro di iniezione dei primari, altre dalla propagazione
- L'interpretazione piu' semplice e' che la path length L dipende dall'energia: essa diminuisce al crescere dell'energia delle particelle



Variazione del tempo di confinamento con l'energia

- Il modello illustrato (confinamento dei RC nella Galassia come scatola parzialmente trasparente) è chiamato “leaky box”;
- Il rapporto $r = (\#L/\#M)$ dipende dal tempo di confinamento τ dei RC nella Galassia; all'aumentare di τ , cresce r .
- Se il confinamento è dovuto al campo B Galattico, ci si aspetta che i RC più energetici abbiano un tempo di confinamento inferiore (ossia, aumenta la probabilità di fuggire dal piano Gal);
- In tal caso, all'aumentare dell'energia ci si aspetta un valore di r che *decresce* con l'energia;
- L'equazione differenziale deve essere modificata per tener conto di $\tau(E)$.

* Assumiamo che la dipendenza da E sia del tipo

$$\xi(E) = \xi_0 \left(\frac{E}{E_0} \right)^{-\alpha} \quad \text{con } \alpha > 0$$

* L'equ. per i nuclei leggeri $\frac{dN_L(\xi)}{d\xi} = -\frac{N_L(\xi)}{\xi_L} + \frac{P_{ML} N_M(\xi)}{\xi_M}$
 va modificata con l'aggiunta di $-\frac{N_L}{\xi_r(E)}$

* Cerchiamo sol. stazionarie $dN_L/d\xi = 0$, cioè una situazione di equilibrio fra guadagni e perdite per spallazione $\Rightarrow$

$$-\frac{N_L}{\xi_r(E)} + \frac{P_{ML} N_M}{\xi_M} - \frac{N_L}{\xi_L} = 0 \Rightarrow N_L = \frac{P_{ML} N_M / \xi_M}{1/\xi_r(E) + 1/\xi_L} \Rightarrow \frac{N_L}{N_M} = \frac{P_{ML} / \xi_M}{1/\xi_r + 1/\xi_L}$$

* Nel limite $\xi_L \gg \xi_r$, $\frac{N_L}{N_M} \approx \frac{P_{ML} \xi_r(E)}{\xi_M}$ - Dato che P_{ML} e ξ_M

sono indipendenti da E , la dip. da E del rapporto dipende solo da $\xi_r(E)$

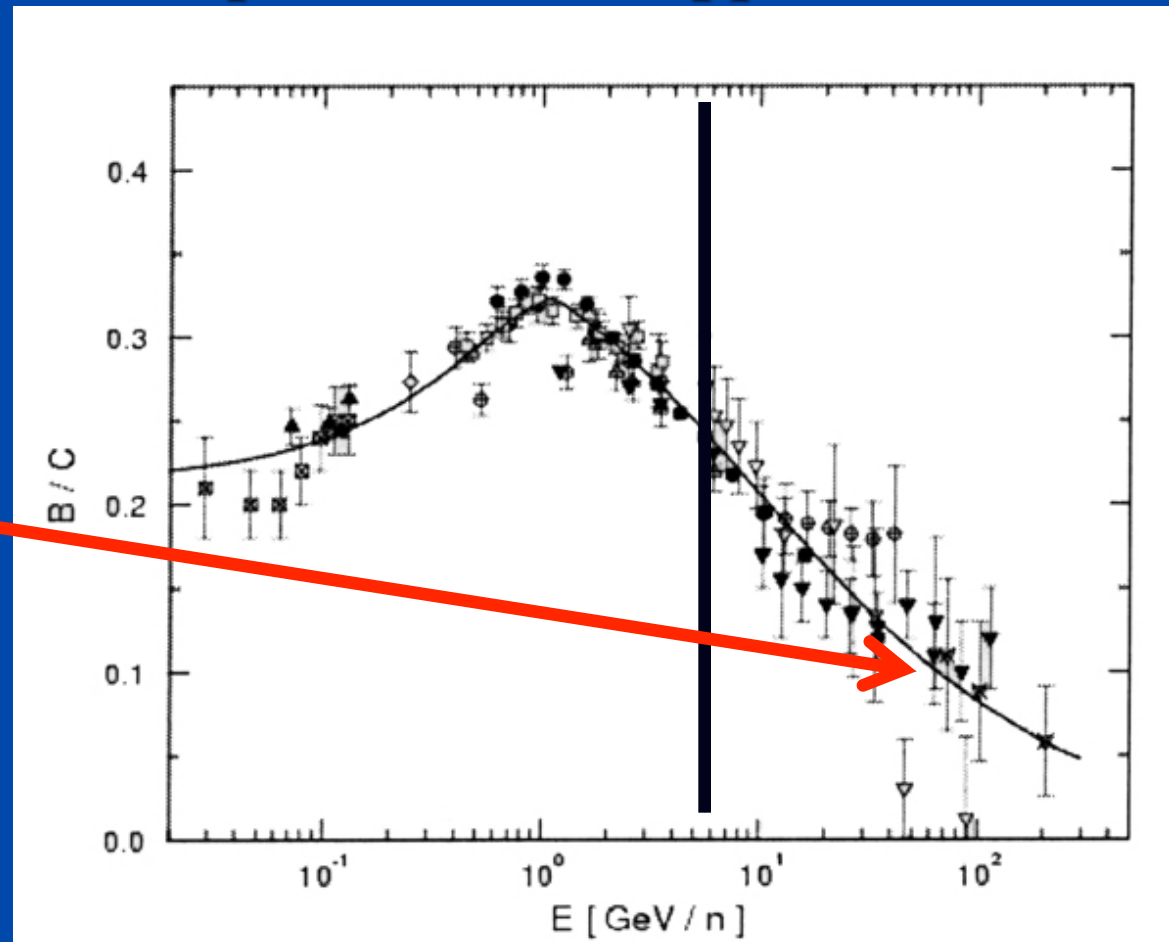
Dipendenza del rapporto r vs. E

- I dati sperimentali confermano questa ipotesi.
- In particolare, si ottiene che la probabilità di fuga dalla Galassia dipende dall'energia come:

$$\tau = \tau_o \left(\frac{R}{R_o} \right)^{-\delta}$$

- Ossia, poiché $\tau \sim \xi$

$$\xi = \xi_o \left(\frac{R}{R_o} \right)^{-\delta}$$



Valori tipici $\xi_o = 11.8 \text{ gr/cm}_2$, $R_o = 5 \text{ GV}/c$, $\delta = 0.6$

L'indice spettrale δ ha un'incertezza piuttosto grande. Il suo valore potrebbe variare in un intervallo 0.15-0.8 a seconda del modello di diffusione. Per esempio un regime in cui D o τ dipendono dalla posizione, come modelli a doppia regione (disco+alone), effetti non lineari,...

A bassa energia, dove $\xi_I \ll \xi_{esc}$, in assenza di altri processi ci si aspetterebbe un rapporto costante $N_L/N_M \sim P_{ML}(\xi_L/\xi_M)$.

Cio' non avviene a causa di un ulteriore processo che puo' avvenire durante la propagazione: riaccelerazione di nuclei di bassa energia (qualche GeV/n) ad opera di nubi di plasma magnetizzato in movimento (casuale) presenti nel mezzo interstellare, grazie al meccanismo di Fermi del II ordine, che faremo fra un po'.

Nuclei di bassa E (centinaia di MeV/n) vengono accelerati fino a qualche GeV/n, impoverendo la popolazione a bassa E e incrementando quella intorno al 1 GeV/n

Dipendenza del rapporto r vs. E

