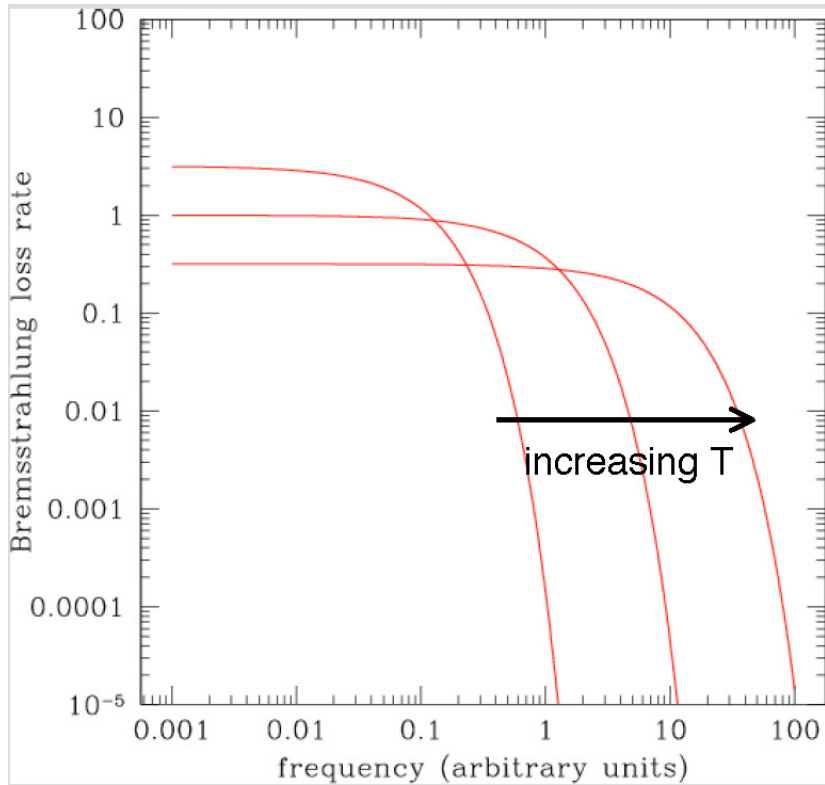


# Lecture 8 031116

Il pdf delle lezioni puo' essere scaricato da

[http://www.fisgeo.unipg.it/~fiandrin/didattica\\_fisica/cosmic\\_rays1617/](http://www.fisgeo.unipg.it/~fiandrin/didattica_fisica/cosmic_rays1617/)

$$k_{\omega} = 6.8 \times 10^{-51} T^{-1/2} Z^2 N N_e e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} G(\omega, T) \quad \text{WHz}^{-1}\text{m}^{-3}$$



La pendenza della curva ci da la temperatura della sorgente

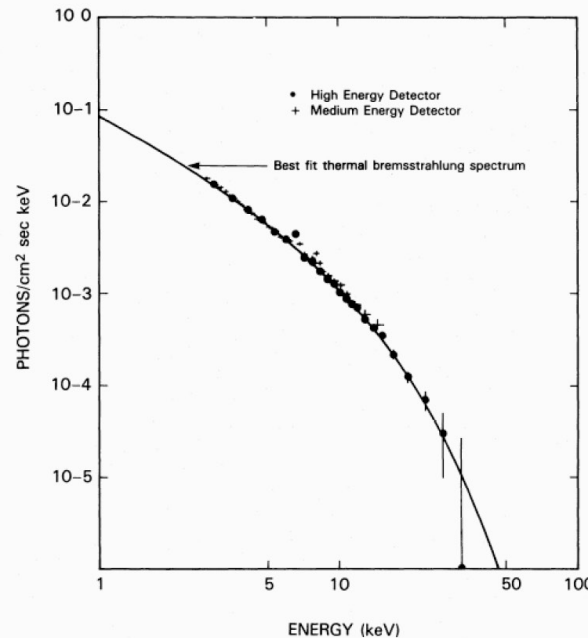
Nota T, se conosciamo la distanza della sorgente, possiamo calcolare anche  $NN_e$

Assumendo  $N \approx N_e$ ,  $N^2 \approx N_e^2$  possiamo calcolare la densita' del gas che emette

$$k_{\omega} = 2.75 \times 10^2 \frac{T^{-1/2} Z^2 N N_e}{E} e^{-\frac{E}{kT}} G(E/\hbar, T)$$

# fotoni  $\text{s}^{-1}(\text{eV})^{-1}\text{m}^{-3}$

X-ray spectrum of Coma

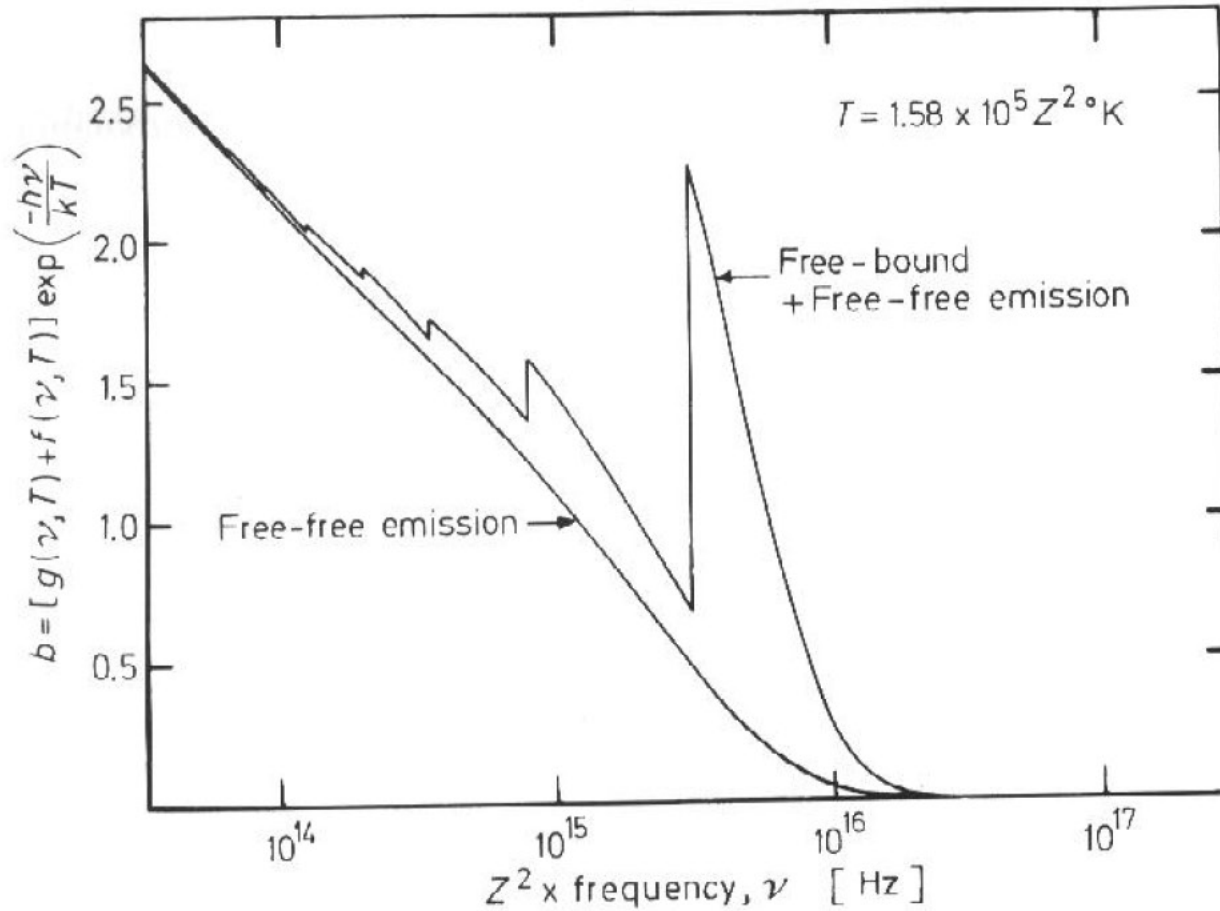


Shape of spectrum gives the temperature.

Intensity (for a known distance) gives the density of the gas.

Galaxy cluster: find  $T = 10 - 100$  million K.

$$F_{\omega} = \frac{k_{\omega} V}{4\pi d^2}$$



**Fig. 1.5.** The emission spectrum of a Maxwellian distribution of electrons at a temperature of  $T = 2\pi^2 me^4 Z^2 / (h^2 k) = 1.58 \times 10^5 Z^2 \text{ }^\circ\text{K}$  with exact Gaunt factors taken into account [after Brussard and van de Hulst, 1962]. The lower curve illustrates the spectrum of thermal bremsstrahlung emission, whereas the upper curve illustrates the combined spectrum of thermal bremsstrahlung and recombination radiation. The volume emissivity,  $\epsilon_\nu$ , is related to  $b$  by Eq. (1.237)

# Spettro da una distr non termica

Se la popolazione di  $e^-$  e' non termica, p. es.  $n(E)dE = AE^{-p}dE \rightarrow$

Elettroni ultrarelat  $\rightarrow v \approx c$

Fattore di Gaunt  $\approx 1$

## ■ Spettro di singola particella piatto in frequenza

$$\frac{dI(\omega)}{dt} \approx \left( \frac{e^6 Z^2 N}{12\pi^3 \epsilon_0^3 c^4 m_e^2} \right)$$

■ Fino a  $\omega_{\max} = E_{e^-}$

$$k_\omega \equiv \frac{dE(\omega)}{d\omega dt dV} = \int \frac{dI(\omega)}{dt} dn \quad \text{■ Dato che solo } e^- \text{ con } E > \hbar\omega \text{ contribuiscono all'emissione}$$

$$k(\omega) = \frac{aB}{(p-1)} (\hbar\omega)^{-p+1}$$

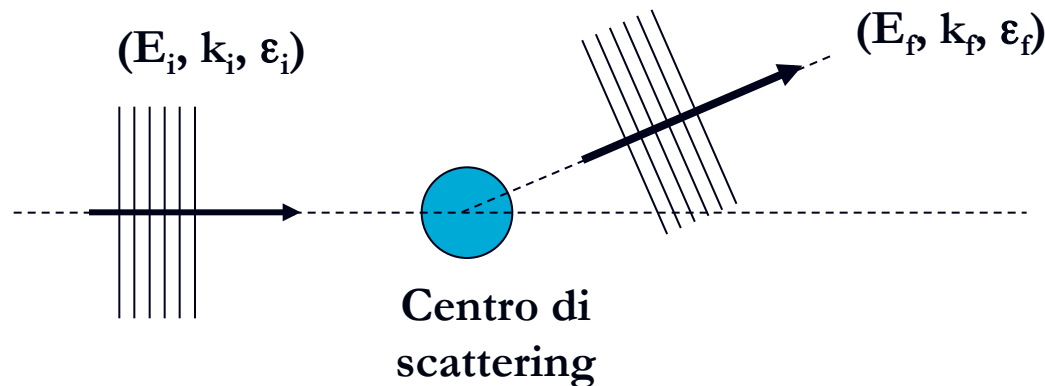
$$N_\gamma(\omega) = \frac{k}{\hbar\omega} = \frac{aB}{\hbar(p-1)} (\hbar\omega)^{-p}$$

■ I fotoni emessi hanno lo stesso indice spettrale delle particelle che emettono



# Scattering di radiazione elm

Ogni volta che un'onda elm interagisce con una particella carica, le sue proprietà (direzione, energia, polarizzazione,...) vengono alterate, insieme a quelle della particella colpita.



# Diffusione di fotoni

Tradizionalmente si parla di diffusione Thomson e Compton a seconda dell'intervallo di energie in gioco:

Quando  $(h/2\pi)\omega \ll mc^2$  si parla di diffusione Thomson,  
mentre quando  $(h/2\pi)\omega \gg mc^2$  si parla di diffusione Compton.

Tuttavia da un punto di vista fisico non c'è alcuna differenza poiché il processo è esattamente lo stesso.

Quello che cambia è l'approccio: classico per Thomson, quantistico per Compton

# Diffusione Thomson

Il problema e' seguente: data un'onda elm incidente su un elettrone, bisogna trovare l'intensita' della radiazione diffusa dalla particella.

Quando  $\hbar\omega \ll mc^2$  si puo' usare il formalismo semi-classico

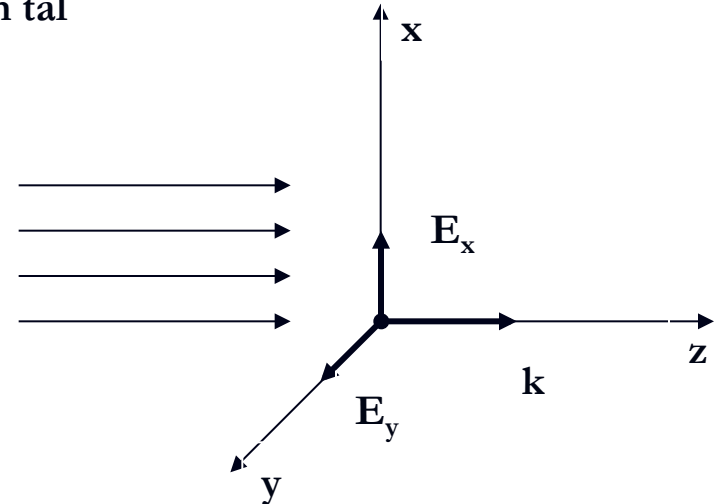
Supponiamo che l'onda viaggi lungo la direzione positiva di  $z$  e che l'e- atomico sia posto in quiete nell'origine. In tal caso

$$E = \hbar\omega \quad \vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{u}_z \quad \vec{p} = \frac{\hbar\omega}{c}\vec{u}_z = \hbar\vec{k}$$

Supponiamo anche l'onda non sia polarizzata → il campo oscilla nel piano x-y

$$E_x = E_{ox}e^{i(kz-\omega t)}$$

$$E_y = E_{oy}e^{i(kz-\omega t)}$$



Con  $E_{xo} = E_{yo}$  dato che l'onda non e' polarizzata (in realta' dovrei aggiungere una fase arbitraria)

# Diffusione Thomson

$$E_x = E_{ox} e^{i(kz - \omega t)}$$

Per semplificare la matematica, scegliamo la geometria dello scattering in modo tale che l'angolo di scattering  $\alpha$  giaccia nel piano x-z

$$E_y = E_{oy} e^{i(kz - \omega t)}$$

La potenza emessa e' quella di Larmor nel limite non relativistico

Le componenti dell'accelerazione sono

$$a_x = \frac{e}{m} E_x \quad a_y = \frac{e}{m} E_y$$

I campi di radiazione e la potenza emessa sono

$$\vec{E}_a = \frac{e}{c} \left[ \frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta})}{R} \right]$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \vec{S} \cdot \vec{n} R^2 = \frac{cE^2}{4\pi} R^2$$

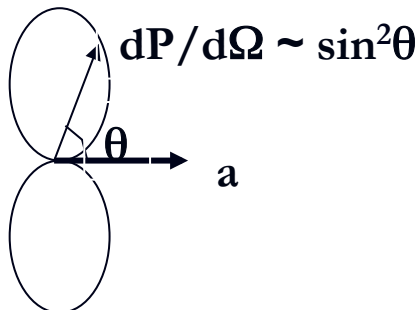
$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} |\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta})|^2$$

$$\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta}) = \vec{n} \cdot \vec{\beta} - \vec{\beta}$$

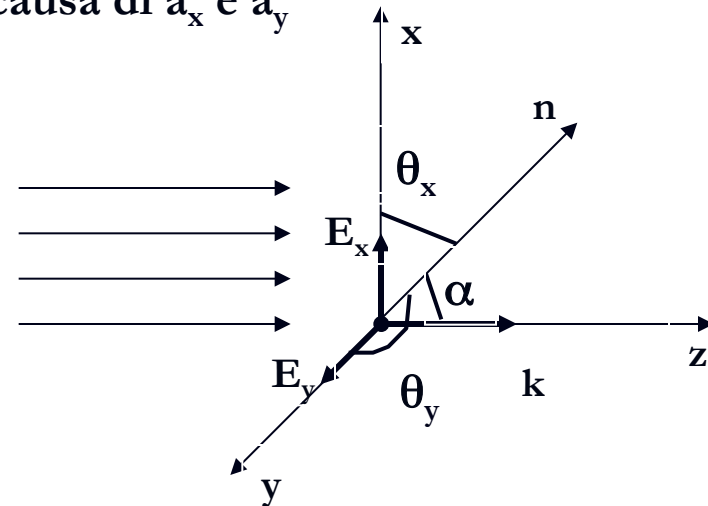
$$|\vec{\beta}_{\perp n}| = \beta \sin \theta$$

La potenza totale e' la somma delle potenza emessa a causa di  $a_x$  e  $a_y$

$$\frac{dP_i}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \dot{\beta}_i^2 \sin^2 \theta = \frac{e^2}{4\pi c^3} a_i^2 \sin^2 \theta_i \quad i=x, y$$



$$\frac{dP_{tot}}{d\Omega} = \frac{dP_x}{d\Omega} + \frac{dP_y}{d\Omega}$$



# Diffusione Thomson

L'elettrone e' nell'origine →

$$E_x(0, t) = E_{ox} e^{-i\omega t}$$

$$a_x = \frac{e}{m} E_x$$

$$E_y(0, t) = E_{oy} e^{-i\omega t}$$

$$a_y = \frac{e}{m} E_y$$

Per cui  $\frac{dP_i}{d\Omega} = \frac{e^4}{4\pi c^3} \frac{E_i^2(0, t)}{m^2} \sin^2 \theta_i \quad i=x, y$

Usualmente si calcola la potenza media in un periodo →  $\langle E_i^2(0, t) \rangle_T = E_{oi}^2/2$

$$\langle \frac{dP_i}{d\Omega} \rangle = \frac{e^4}{4\pi m^2 c^3} \frac{E_{oi}^2}{2} \sin^2 \theta_i$$

L'intensita' incidente lungo le 2 dir coordinate e' data dai risp. vettori di Poynting  $S_i$

$$\langle S_i \rangle = \frac{c}{4\pi} \frac{E_{oi}^2}{2}$$

$$\langle \frac{dP_i}{d\Omega} \rangle = \frac{e^4}{m^2 c^4} \langle S_i \rangle \sin^2 \theta_i$$

Abbiamo espresso la potenza emessa in funzione dell'intensita' incidente  $S_i$

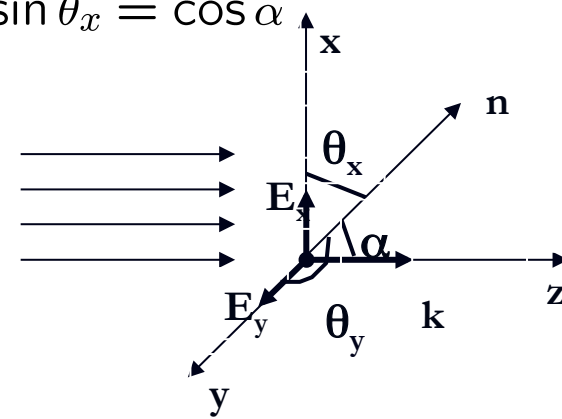
$\theta$  e' l'angolo con a, ma noi vogliamo esprimere la potenza emessa rispetto alla direzione di propagazione della radiazione incidente →

$$\sin \theta_x = \cos \alpha$$

Con la scelta degli assi fatta  $\theta_y = \pi/2$  →

$$\langle \frac{dP_y}{d\Omega} \rangle = \frac{e^4}{m^2 c^4} \langle S_y \rangle$$

$$\langle \frac{dP_x}{d\Omega} \rangle = \frac{e^4}{m^2 c^4} \langle S_x \rangle \cos^2 \alpha$$



# Diffusione Thomson

Come si e' visto prima  $\frac{dP_{tot}}{d\Omega} = \frac{dP_x}{d\Omega} + \frac{dP_y}{d\Omega} = \frac{e^4}{m^2 c^4} (\langle S_y \rangle + \langle S_x \rangle \cos^2 \alpha)$

Il raggio classico dell'elettrone e'  $r_e = \frac{e^2}{mc^2} \rightarrow \frac{dP_{tot}}{d\Omega} = r_e^2 (\langle S_y \rangle + \langle S_x \rangle \cos^2 \alpha)$

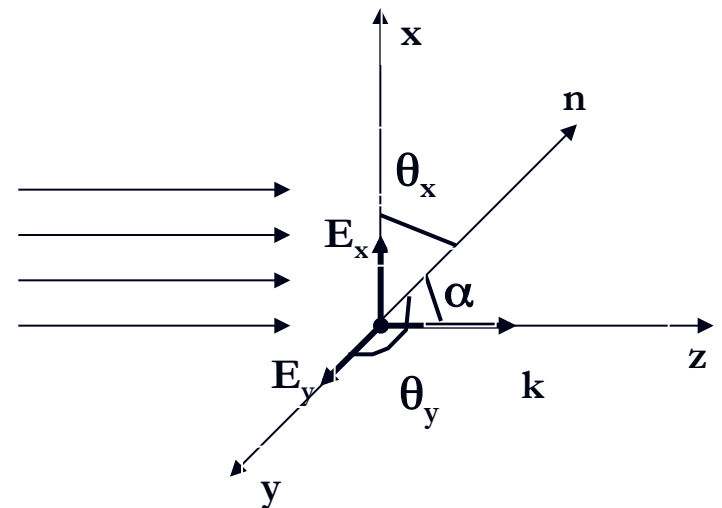
Dato che  $|\mathbf{E}_x| = |\mathbf{E}_y|$ ,  $S_x = S_y$  (l'onda incidente non e' polarizzata),  $\mathbf{E}_{tot} = \mathbf{E}_x + \mathbf{E}_y$  e  $\vec{S} = \vec{S}_y + \vec{S}_x$

$$\rightarrow \langle S \rangle = \langle S_y \rangle + \langle S_x \rangle \quad \rightarrow \quad \langle S \rangle / 2 = \langle S_i \rangle$$

quindi  $\frac{dP_{tot}}{d\Omega} = r_e^2 (1 + \cos^2 \alpha) \frac{\langle S \rangle}{2}$

$$\frac{dP_{tot}}{d\Omega} = \frac{d}{d\Omega} \left( \frac{dE}{dt} \right)$$

= energia per unita' di tempo e di angolo solido



# Diffusione Thomson

Per definizione la sezione d'urto differenziale e'

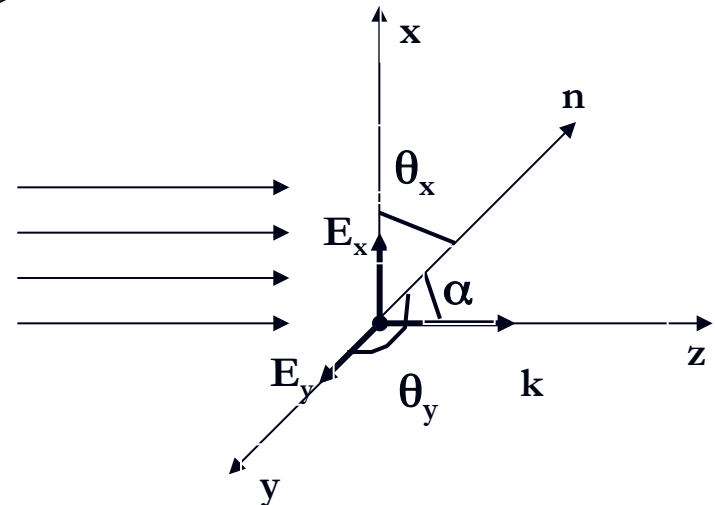
$$d\sigma = \frac{\text{energia per unita' di tempo nell'angolo solido } d\Omega}{\text{energia per unita' di tempo e superficie}}$$

Cioe' 
$$d\sigma = \frac{\frac{d}{d\Omega} \left( \frac{dE}{dt} \right) d\Omega}{I_{inc}} \quad r_e = \frac{e^2}{mc^2}$$

Ma I e' S  $\rightarrow d\sigma = r_e^2 (1 + \cos^2 \alpha) \frac{\langle S \rangle}{2 \langle S \rangle} d\Omega$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_e^2 (1 + \cos^2 \alpha)$$

E' la sezione d'urto differenziale per la diffusione di Thomson di onde non polarizzate



# Diffusione Thomson

La sezione d'urto totale si ottiene integrando sull'angolo solido

$$\begin{aligned}\sigma_T &= \int_{4\pi} \frac{1}{2} r_e^2 (1 + \cos^2 \alpha) d\Omega = -\frac{1}{2} r_e^2 \int_1^{-1} (1 + \cos^2 \alpha) 2\pi d(\cos \alpha) \\ &= -\pi r_e^2 (x + x^3/3) \Big|_{+1}^{-1} = \frac{8}{3} \pi r_e^2\end{aligned}$$

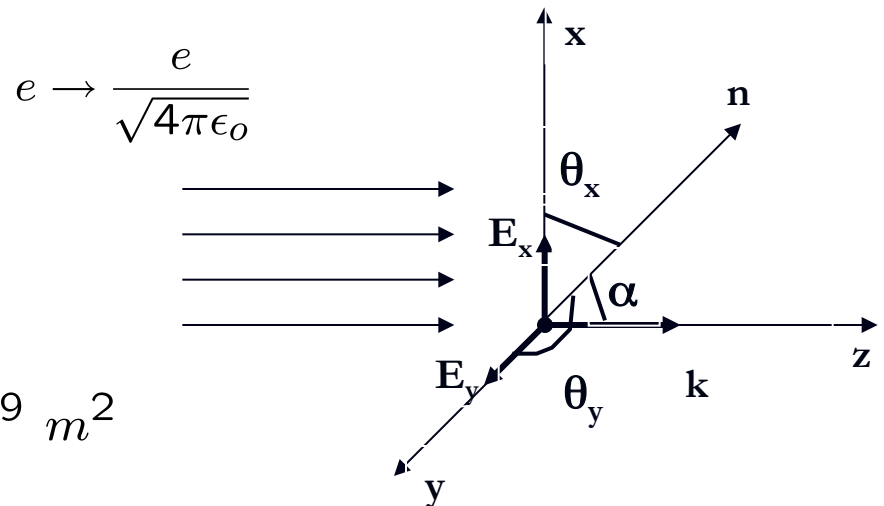
Sostituendo  $r_e = \frac{e^2}{mc^2}$  si ha  $\sigma_T = \frac{8}{3} \pi \frac{e^4}{m^2 c^4}$

Per passare al sistema MKSA

$$\sigma_T = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0^2 m^2 c^4}$$

Numericamente  $\sigma_T = 6.653 \times 10^{-29} \text{ m}^2$   
 $= 0.6653 \text{ barn}$

$$1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2$$



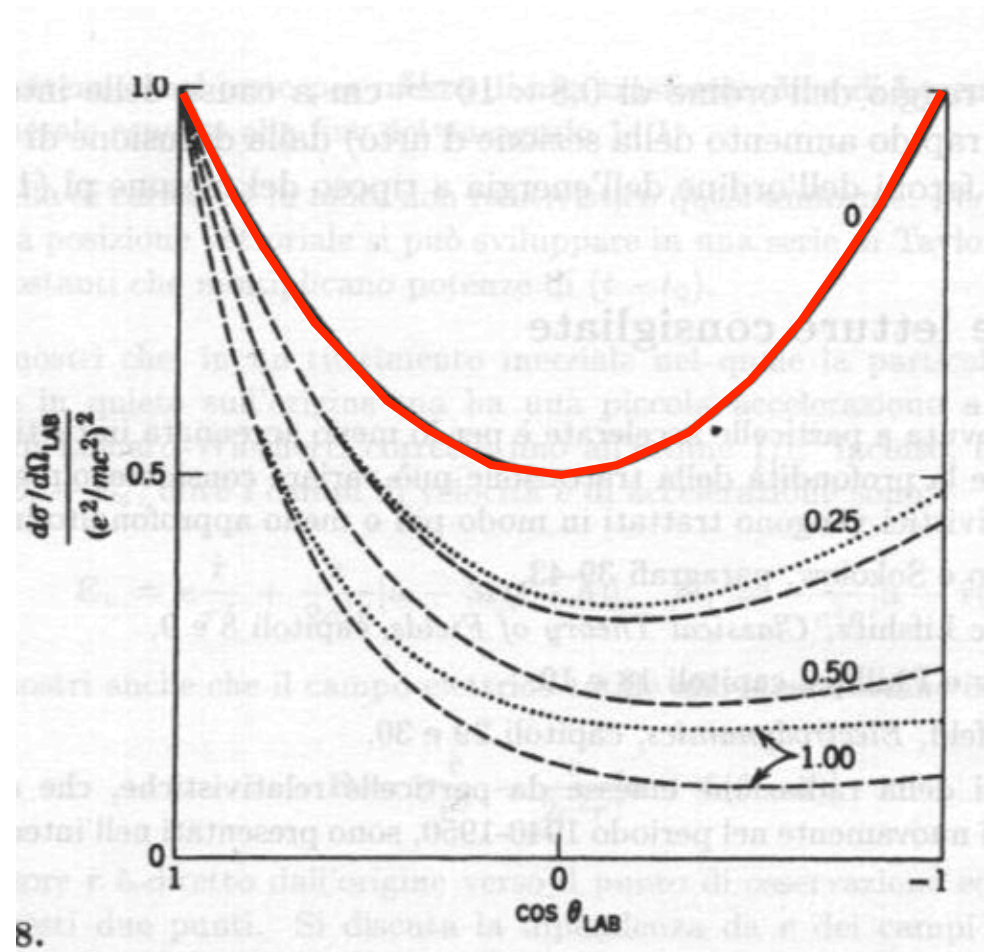
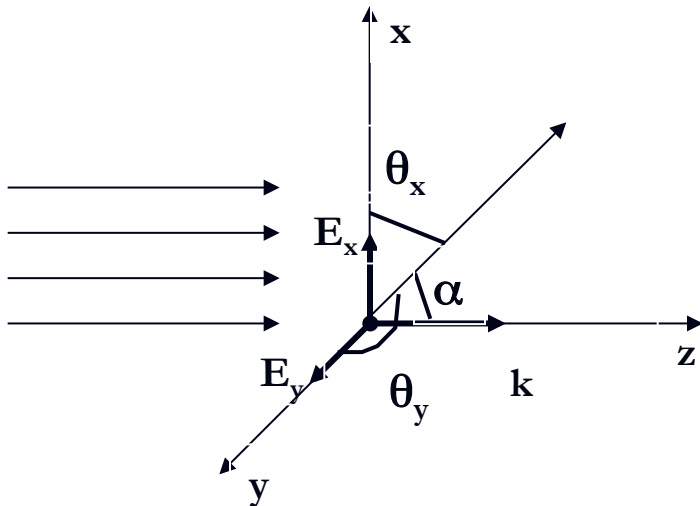


# Diffusione Thomson

- La sezione d'urto Thomson compare in tutti i processi di radiazione

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2}r_e^2(1 + \cos^2 \alpha) \quad \sigma_T = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0^2 m^2 c^4} = \frac{8\pi}{3}r_e^2 = 0.6653 \text{ barn} \quad \text{■ } 1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2$$

L'emissione e' simmetrica  
 rispetto alla direzione di incidenza  
 dato che  $d\sigma/d\Omega \approx \cos^2 \alpha$  e la  
 frequenza della radiazione emessa  
 e' la stessa di quella incidente, dato  
 che  $a \approx E$



# Diffusione Thomson

■ La potenza totale emessa puo' essere espressa in termini della densita' di energia elettromagnetica incidente

■ Integrando la distribuzione angolare di potenza trovata prima si ha la potenza totale

$$\frac{dP_{tot}}{d\Omega} = r_e^2 (1 + \cos^2 \alpha) \frac{\langle S \rangle}{2}$$

$$\frac{dE_{tot}}{dt} = \int_{4\pi} \frac{dP_{tot}}{d\Omega} d\Omega$$

$$\frac{dE_{tot}}{dt} = 2\pi r_e^2 \frac{\langle S \rangle}{2} \int (1 + \cos^2 \alpha) d(\cos \alpha) = 2\pi r_e^2 \frac{\langle S \rangle}{2} \frac{8}{3} = \sigma_T \langle S \rangle$$

■ con  $S = \frac{c}{4\pi} E^2$        $u_{rad} = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) = \frac{1}{4\pi} E^2$       ■ Perche' E=B

■ quindi  $S = cu_{rad}$

$$\frac{dE_{tot}}{dt} = \sigma_T cu_{rad}$$

# Diffusione Thomson: spessore ottico

Dal punto di vista di un fascio di radiazione che attraversa un mezzo con un plasma di elettroni si ha attenuazione dell'intensita' poiche' ciascun elettrone si comporta come un re-radiatore che diffonde la radiazione in tutte le direzioni senza che vi sia trasferimento di energia dalla radiazione alle particelle

Dal punto di vista dei fotoni, essi urtano elasticamente gli elettroni e vengono deviati casualmente come "normali" particelle prive di massa di riposo e seguono quindi un random walk

Dalla definizione di sezione d'urto, il # di fotoni rimossi,  $n$ , (i.e. diffusi) da un fascio di densita'  $N$  incidente su un singolo elettrone  $e$

$$dn = -N\sigma_T c dt$$

Cosi' nel caso di un plasma con densita'  $N_e$  si ha un rate di interazione per unita' di volume

$$dN = -N_e N \sigma_T c dt \quad \longrightarrow \quad dN/dt = -N_e N \sigma_T c$$

# Diffusione Thomson: spessore ottico

$$dN/dt = -N_e N \sigma_T c \quad dN/N = -N_e \sigma_T c dt \quad dN/N = -N_e \sigma_T ds \quad ds = c dt$$

$$\text{Per cui } N(s) = N_o e^{-\int N_e \sigma_T ds}$$

$$\text{Dalla definizione di spessore ottico} \quad \tau = \int N_e \sigma_T ds \quad \text{si ha} \quad N(s) = N_o e^{-\tau}$$

Si puo' definire anche un coeff di scattering  $\chi_s = N_e \sigma_T$

L'attenuazione del fascio dipende dallo spessore ottico Thomson del plasma

Il libero cammino medio  $\lambda_T$  tra due interazioni di un fotone e'  $\lambda_T = 1/N_e \sigma_T$

la probabilita' di interazione di un fotone e' proporzionale a  $dp \propto ds/\lambda_T$

$$\text{ma} \quad d\tau = ds/\lambda_T \quad \longrightarrow \quad dp \propto d\tau$$

Ad ogni interazione il fotone viene diffuso. Se  $N_e$  e' suff. alto ovvero  $\tau$  grande, i fotoni seguono un random walk nel mezzo

La diffusione Thomson e' responsabile dell'opacita' dell'interno delle stelle (e causa p.es. del fatto che un fotone prodotto nel nucleo del Sole impiega circa  $10^5$  anni prima di raggiungere la fotosfera ed essere irraggiato nello spazio)

# Compton inverso

Tradizionalmente si parla di diffusione Thomson e Compton a seconda dell'intervallo di energie in gioco:

quando  $\hbar\omega/2\pi \ll mc^2$  si parla di diffusione Thomson,  
mentre quando  $\hbar\omega/2\pi \gg mc^2$  si parla di diffusione Compton.

Tuttavia da un punto di vista fisico non c'è alcuna differenza poiché il processo è esattamente lo stesso.

Quello che cambia è l'approccio: classico per Thomson, quantistico per Compton

# Diffusione Thomson/Compton

La sezione d'urto Thomson descrive bene la diffusione della radiazione nel laboratorio in cui l'e- e' stazionario finche' l'energia del fotone e'  $h\omega \ll mc^2$

Piu' in generale  $\sigma_T$  descrive bene la diffusione della radiazione finche' l'energia del fotone e'  $h\omega \ll mc^2$  nel sistema di riferimento di quiete dell'elettrone

Quando questa condizione non e' piu' verificata, il formalismo classico non si puo' piu' usare poiche' c'e' trasferimento di energia fra fotone e particella carica, l'aspetto corpuscolare del fotone diventa importante e si parla di effetto Compton

# Diffusione Compton: Klein-Nishina

Nel caso in cui l'energia del fotone  $e'$  dell'ordine dell'energia di riposo dell'e- la sezione d'urto Thomson non vale piu', ma occorre usare la QED



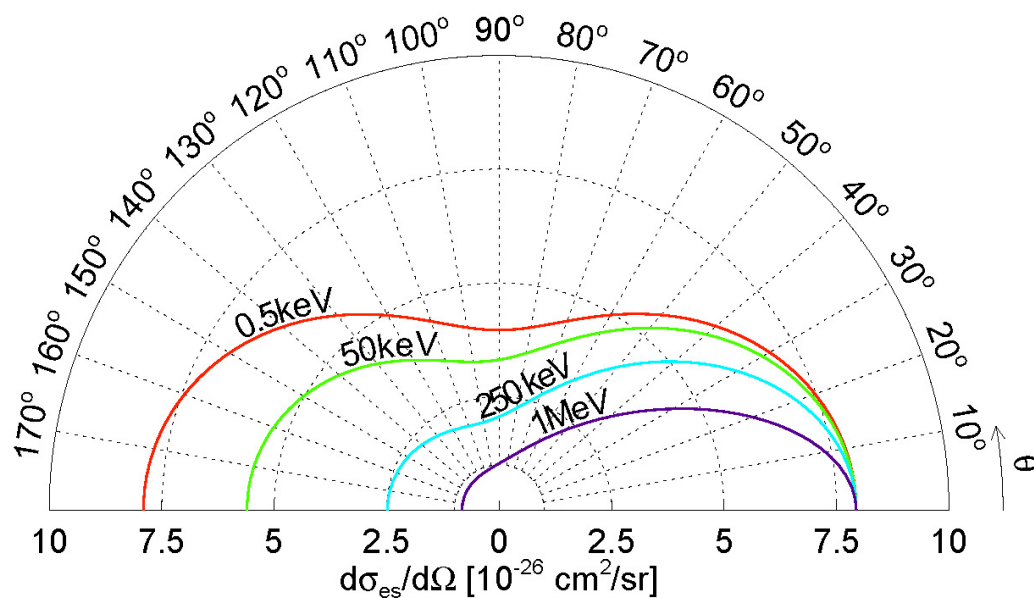
Per fotoni non polarizzati incidenti su e- stazionari la sezione d'urto differenziale e':

$$\frac{d\sigma_{KN}}{d\Omega} = \frac{3}{16\pi} \sigma_T \left(\frac{E'}{E}\right)^2 \left(\frac{E'}{E} + \frac{E}{E'} - \sin^2 \alpha\right)$$

Con la condizione che

$$E' = \frac{E}{\left[\frac{E}{mc^2}(1 - \cos \alpha) + 1\right]}$$

Per la conservazione del 4-impulso



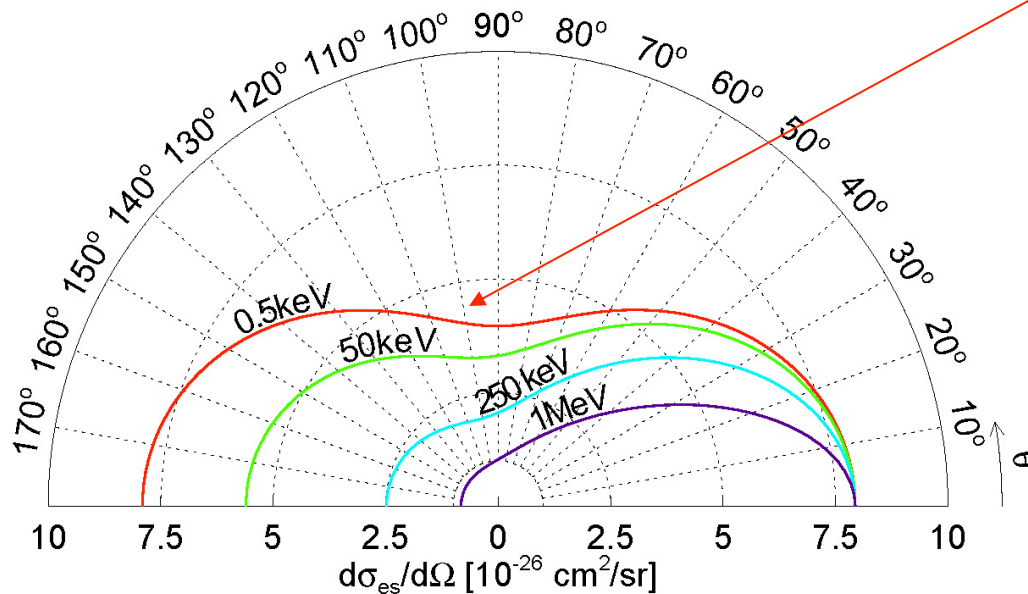
La distribuzione angolare viene piccata in avanti al crescere dell'energia del fotone incidente

# Diffusione Compton: Klein-Nishina

■ La sezione d'urto di KN si riduce a quella thomson quando  $E' \rightarrow E$ , cioè quando  $E \ll mc^2$

$$\frac{d\sigma_{KN}}{d\Omega} = \frac{1}{2}r_e^2\left(\frac{E'}{E}\right)^2\left(\frac{E'}{E} + \frac{E}{E'} - \sin^2\alpha\right) \quad \rightarrow \quad \frac{d\sigma_{KN}}{d\Omega} = \frac{1}{2}r_e^2(1 + 1 - \sin^2\alpha)$$

$$= \frac{1}{2}r_e^2(1 + \cos^2\alpha)$$





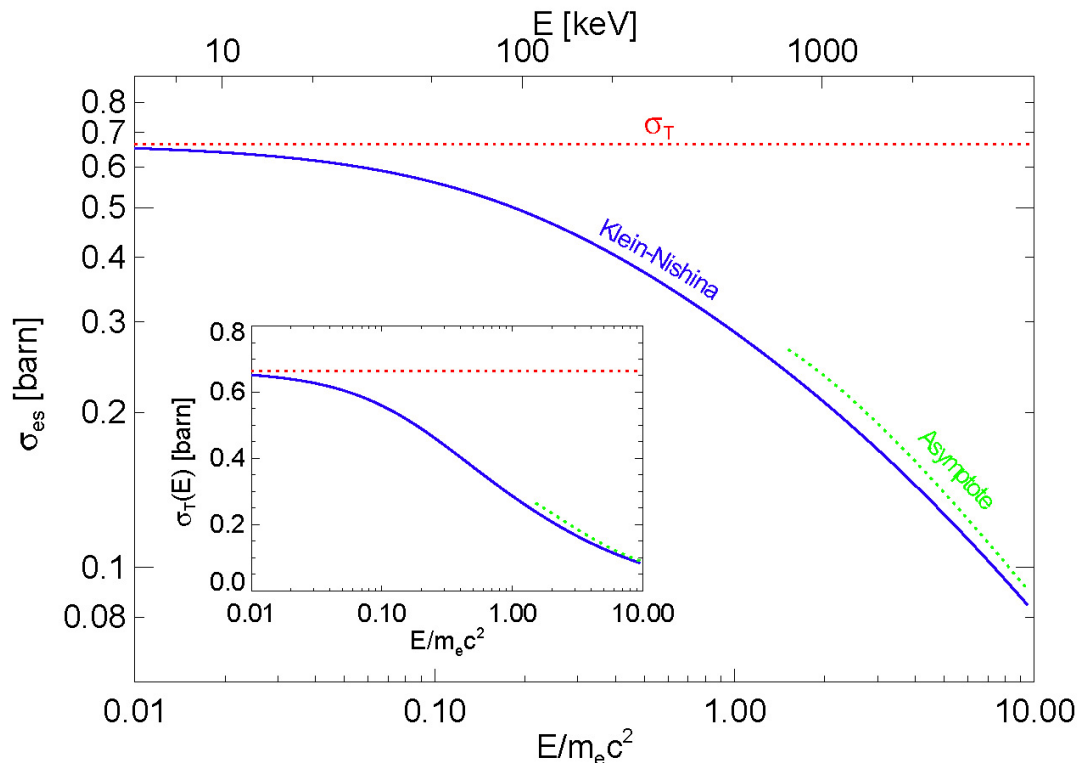
# Diffusione Compton: Klein-Nishina

■ La sezione d'urto totale si ottiene integrando sull'angolo solido  $d\Omega$ , tenendo conto della condizione

$$E' = \frac{E}{[\frac{E}{mc^2}(1 - \cos \alpha) + 1]}$$

$$\sigma_{KN} = \int_{4\pi} \frac{1}{2} r_e^2 \left(\frac{E'}{E}\right)^2 \left(\frac{E'}{E} + \frac{E}{E'} - \sin^2 \alpha\right) \delta\left(E' - \frac{E}{[\frac{E}{mc^2}(1 - \cos \alpha) + 1]}\right) d\Omega$$

$$\sigma_{KN} = \frac{3}{4} \sigma_T \left\{ \frac{1+x}{x^3} \left[ \frac{2x(1+x)}{1+2x} - \ln(1+2x) \right] + \frac{1}{2x} \ln(1+2x) - \frac{1+3x}{(1+2x)^2} \right\} \quad \blacksquare X = h\omega/mc^2$$



# Diffusione Compton: Klein-Nishina

$$\sigma_{KN} = \frac{3}{4}\sigma_T \left\{ \frac{1+x}{x^3} \left[ \frac{2x(1+x)}{1+2x} - \ln(1+2x) \right] + \frac{1}{2x} \ln(1+2x) - \frac{1+3x}{(1+2x)^2} \right\}$$

$$E' = \frac{E}{\left[ \frac{E}{mc^2} (1 - \cos \alpha) + 1 \right]}$$

I valori asintotici sono

Limite non relativistico per  $x \ll 1$

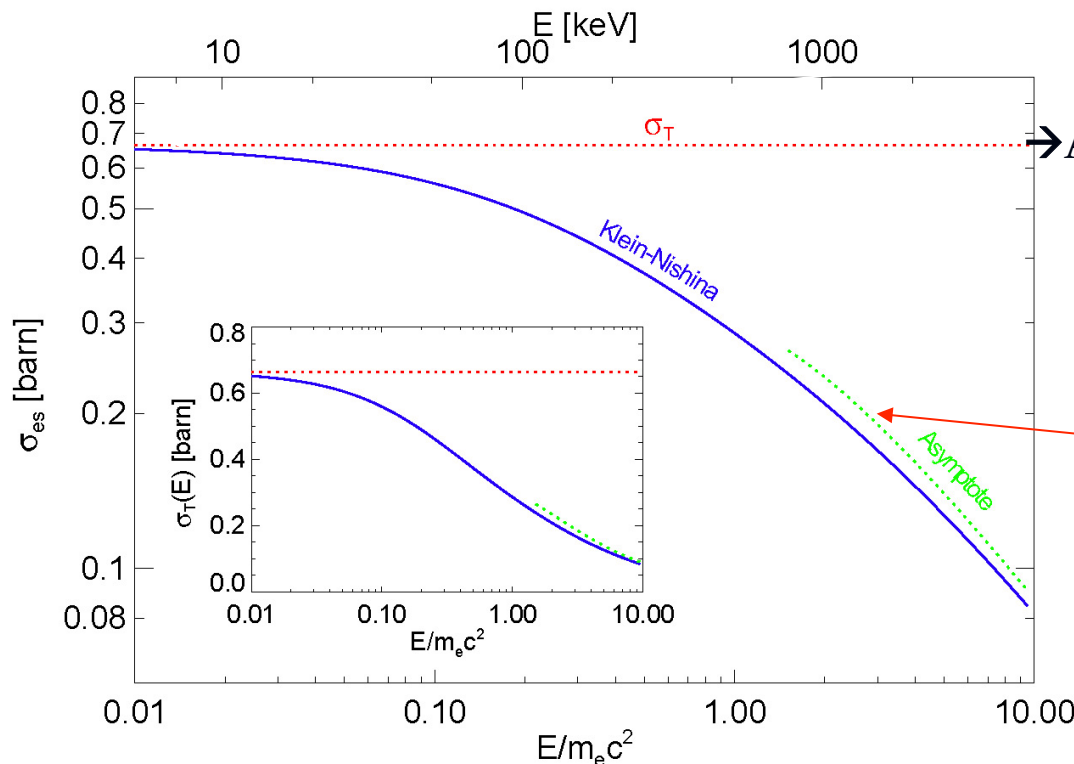
$$\sigma_{KN} \approx \sigma_T \left( 1 - 2x + \frac{26x^2}{5} \right)$$

→ A basse energie si ha scattering Thomson

Limite ultra -relativistico per  $x \gg 1$

$$\sigma_{KN} \approx \frac{3}{8}\sigma_T \frac{1}{x} \left( \frac{1}{2} + \ln 2x \right)$$

Ad alte energie la sezione d'urto  $\rightarrow 0$ ,  
quindi gli elettroni diventano centri di  
scattering meno efficienti per fotoni di  
alta energia



# Diffusione Compton: cinematica

Tralasciando per ora la dinamica del processo, i.e. la probabilita' che avvenga, dal punto di vista semi-classico, la cinematica dell'interazione fra un fotone ed un elettrone puo' essere descritta come l'urto relativistico fra due particelle materiali

E' sufficiente quindi considerare la conservazione del 4-impulso

$$P + K = P' + K' \quad (\text{a})$$

$$P_\mu = (m\gamma c^2/c, m\gamma \vec{v}) \quad P'_\mu = (m\gamma' c^2/c, m\gamma' \vec{v}')$$

Devo risolvere rispetto a  $K'$

$$K_\mu = (\hbar\omega/c, (\hbar\omega/c)\vec{i}_k) \quad K'_\mu = (\hbar\omega'/c, (\hbar\omega'/c)\vec{i}_{k'})$$

Elevando al quadrato  $(P + K)^2 = (P' + K')^2 \Rightarrow P^2 + K^2 + 2K \cdot P = P'^2 + K'^2 + 2K' \cdot P'$

Ma  $P^2 = P'^2 = m^2 c^2 \quad K^2 = K'^2 = 0 \Rightarrow K \cdot P = K' \cdot P' \quad (\text{b})$

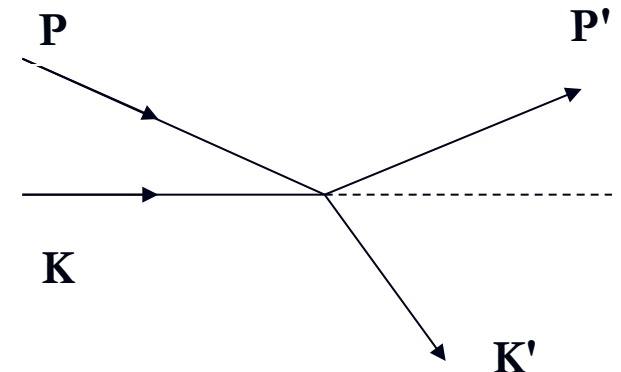
Moltiplico (a) scalarmente per  $K'$

$$K' \cdot (P + K) = K' \cdot (P' + K')$$

$$K' \cdot P + K' \cdot K = K' \cdot P' + K' \cdot K'$$

$$K' \cdot P + K' \cdot K = K' \cdot P' \quad \text{Perche' } K'^2=0$$

$$K' \cdot P + K' \cdot K = K \cdot P \quad \text{Da (b)}$$



# Diffusione Compton: cinematica

$$K' \cdot P + K' \cdot K = K \cdot P \quad \text{Sviluppiamo il 4-prodotto scalare}$$

$$K \cdot K' = \frac{\hbar\omega}{c} \cdot \frac{\hbar\omega'}{c} - \frac{\hbar\omega}{c} \cdot \frac{\hbar\omega'}{c} \vec{i}_k \cdot \vec{i}_k = \frac{\hbar^2}{c^2} \omega\omega' (1 - \vec{i}_k \cdot \vec{i}_k) = \frac{\hbar^2}{c^2} \omega\omega' (1 - \cos \alpha)$$

$$K' \cdot P = \frac{\hbar\omega'}{c} \cdot mc\gamma - \hbar\omega' \gamma m \vec{i}_k \cdot \frac{\vec{v}}{c} = m\gamma \hbar\omega' (1 - \frac{v}{c} \cos \theta')$$

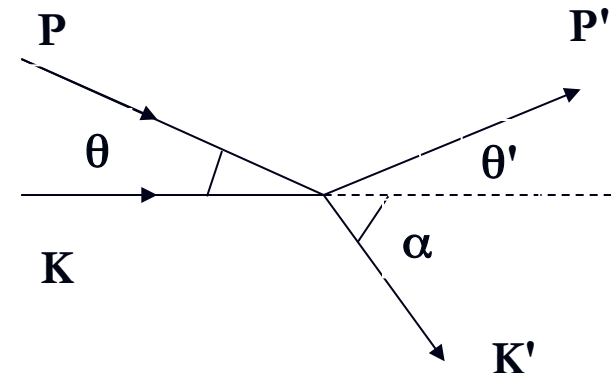
$$K \cdot P = \frac{\hbar\omega}{c} \cdot mc\gamma - \hbar\omega \gamma m \vec{i}_k \cdot \frac{\vec{v}}{c} = m\gamma \hbar\omega (1 - \frac{v}{c} \cos \theta)$$

$$\frac{\hbar^2}{c^2} \omega\omega' (1 - \cos \alpha) + m\gamma \hbar\omega' (1 - \frac{v}{c} \cos \theta') = m\gamma \hbar\omega (1 - \frac{v}{c} \cos \theta)$$

**Divido per  $m\gamma$**

$$\frac{\hbar}{c^2} \frac{\omega\omega'}{m\gamma} (1 - \cos \alpha) + \omega' (1 - \frac{v}{c} \cos \theta') = \omega (1 - \frac{v}{c} \cos \theta)$$

$$\omega' \left[ \frac{\hbar}{c^2} \frac{\omega}{m\gamma} (1 - \cos \alpha) + (1 - \frac{v}{c} \cos \theta') \right] = \omega (1 - \frac{v}{c} \cos \theta)$$



# Diffusione Compton

$$\omega' \left[ \frac{\hbar}{c^2 m \gamma} \omega (1 - \cos \alpha) + \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta'\right) \right] = \omega \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)$$

$$\omega' = \frac{\omega \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)}{\left[ \frac{\hbar}{c^2 m \gamma} \omega (1 - \cos \alpha) + \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta'\right) \right]} \quad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)}{\left[ \frac{\hbar}{c^2 m \gamma} \omega (1 - \cos \alpha) + \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta'\right) \right]}$$

**E' il rapporto delle frequenze prima e dopo l'urto**

**Usualmente si considera  $v=0$  per l'e-**

**In termini di  $\lambda$  si ha**

$$\frac{2\pi c}{\lambda} = \omega$$



$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\lambda}{\lambda'}$$

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{2\pi c}{\lambda} \frac{\hbar}{mc^2} (1 - \cos \alpha) + 1$$

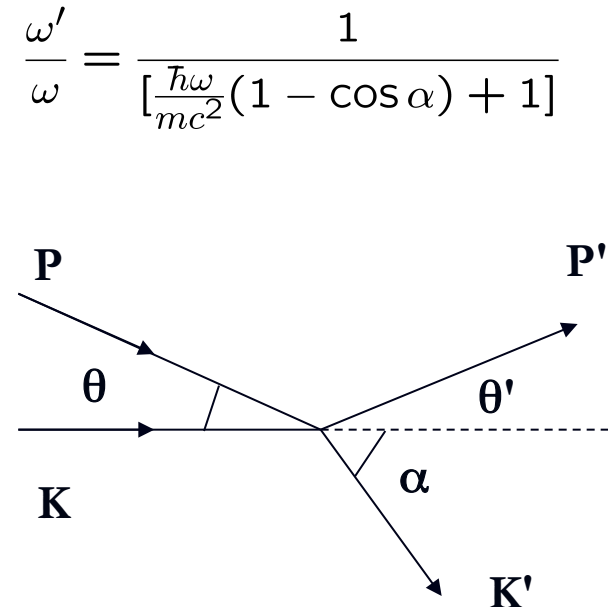
$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{h}{mc\lambda} (1 - \cos \alpha) + 1 = \frac{\lambda_c}{\lambda} (1 - \cos \alpha) + 1$$

$$\lambda_c = \frac{h}{mc} = 3.86 \times 10^{-13} \text{ m}$$

**Lunghezza d'onda Compton**

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{\lambda'}{\lambda} - 1 = \frac{\lambda_c}{\lambda} (1 - \cos \alpha)$$

**La variazione assoluta di lunghezza d'onda e' al max  $2\lambda_c \rightarrow$  se  $\lambda \gg \lambda_c$ , lo scattering e' elastico**



# Diffusione Compton

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{\left[\frac{\hbar\omega}{mc^2}(1 - \cos \alpha) + 1\right]}$$

Nel caso di elettrone stazionario l'energia del fotone dopo l'urto e' sempre minore di quella iniziale dato che il denominatore e' sempre >1

In questo caso, la radiazione cede energia all'elettrone che rincula, acquistandone

cosi' la radiazione si "raffredda" e l'elettrone si "scalda"

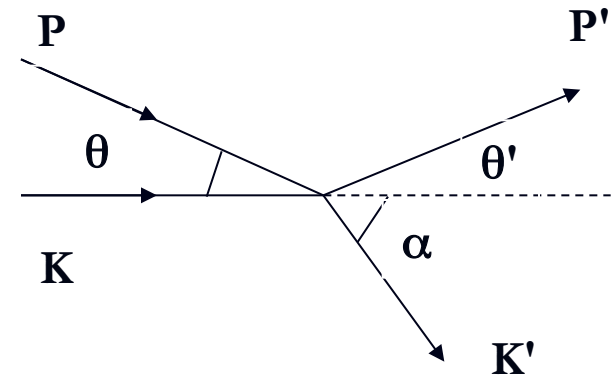
La situazione cambia se l'elettrone **NON** e' stazionario

$$\begin{aligned} \frac{\omega' - \omega}{\omega} &= \frac{\omega'}{\omega} - 1 = \frac{(1 - \frac{v}{c} \cos \theta)}{\left[\frac{\hbar}{c^2} \frac{\omega}{m\gamma}(1 - \cos \alpha) + (1 - \frac{v}{c} \cos \theta')\right]} - 1 \\ &= \frac{(1 - \frac{v}{c} \cos \theta) - \left[\frac{\hbar}{c^2} \frac{\omega}{m\gamma}(1 - \cos \alpha) + 1 - \frac{v}{c} \cos \theta'\right]}{\left[\frac{\hbar}{c^2} \frac{\omega}{m\gamma}(1 - \cos \alpha) + (1 - \frac{v}{c} \cos \theta')\right]} = \frac{-\frac{v}{c} \cos \theta - \frac{\hbar}{c^2} \frac{\omega}{m\gamma}(1 - \cos \alpha) + \frac{v}{c} \cos \theta'}{\left[\frac{\hbar}{c^2} \frac{\omega}{m\gamma}(1 - \cos \alpha) + (1 - \frac{v}{c} \cos \theta')\right]} \\ &= \frac{\frac{v}{c}(-\cos \theta + \cos \theta') - \frac{\hbar}{c^2} \frac{\omega}{m\gamma}(1 - \cos \alpha)}{\left[\frac{\hbar}{c^2} \frac{\omega}{m\gamma}(1 - \cos \alpha) + (1 - \frac{v}{c} \cos \theta')\right]} \end{aligned}$$

# Diffusione Compton

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\frac{v}{c}(-\cos\theta + \cos\theta') - \frac{\hbar}{c^2 m \gamma} \omega (1 - \cos\alpha)}{[\frac{\hbar}{c^2 m \gamma} \omega (1 - \cos\alpha) + (1 - \frac{v}{c} \cos\theta')]}$$

Se  $\hbar\omega/2\pi \ll mc^2\gamma$   $\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx \frac{v}{c} \frac{(-\cos\theta + \cos\theta')}{(1 - \frac{v}{c} \cos\theta')}$



La variazione relativa di frequenza del fotone in un singolo urto e' del primo ordine in  $v/c$

D'altra parte, se gli angoli di scattering  $\theta$  e  $\theta'$  sono distribuiti casualmente, la variazione media di frequenza e' zero poiche' il fotone ha la stessa probabilita' di avere  $\Delta\omega > 0$  o  $\Delta\omega < 0$ , come accade nel caso di una popolazione di elettroni in un plasma

$$\left\langle \frac{\Delta\omega}{\omega} \right\rangle_{\theta, \theta'} = 0$$

Per avere un guadagno netto di energia da parte del fotone in un plasma di elettroni occorre andare al secondo ordine in  $v/c$  (come nel caso del Compton inverso che vedremo tra poco)

# Compton Inverso

Nel sistema di quiete dell'elettrone

$$E' = \frac{E}{[\frac{E}{mc^2}(1 - \cos \alpha) + 1]} \qquad \frac{\Delta E}{E} = \frac{-\frac{E}{mc^2}(1 - \cos \alpha)}{[\frac{E}{mc^2}(1 - \cos \alpha) + 1]}$$

$$\text{Se } E \ll mc^2 \qquad \frac{\Delta E}{E} \approx -\frac{E}{mc^2}(1 - \cos \alpha)$$

$$\text{Mediando sugli angoli del fotone} \qquad \langle \frac{\Delta E}{E} \rangle \approx -\frac{E}{mc^2}$$

**Il fotone perde sempre energia urtando e- stazionari**



# Diffusione Compton

Gli effetti quantistici compaiono in due modi:

(a) nella cinematica della diffusione  $\rightarrow$  quando  $h\omega/2\pi \approx mc^2$ , la diffusione non e' piu' elastica a causa del rinculo della carica,  $\omega \neq \omega'$

(b) la sezione d'urto del processo cambia da quella di Thomson, indipendente da  $\omega$  a quella di Klein-Nishina, piu' piccola, che invece e' funzione di  $\omega$

# Diffusione Compton

Il processo di scattering Compton e' descritto dalla QED

Ci chiediamo quando il processo puo' essere descritto adeguatamente dalla sezione d'urto Thomson

**Consideriamo un e- stazionario**

**Il processo di diffusione di Thomson e' elastico:  $\omega' = \omega$**

**La natura quantistica del fotone entra in gioco  
quando  $\hbar\omega/2\pi \approx mc^2$**

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{[\frac{\hbar\omega}{mc^2}(1 - \cos\alpha) + 1]} \neq 1$$

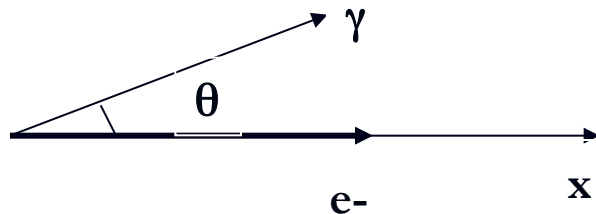
**Il processo non e' piu' elastico e non puo' piu' essere descritto dalla  
diffusione Thomson → sezione d'urto dalla QED**

# Diffusione Compton

Un caso importante e' quello di fotoni di bassa energia ( $\ll mc^2$ ) che diffondono su elettroni ultra-relativistici con  $\gamma \gg 1$  e  $v \approx c$

Il caso piu' generale di fotone che diffonde su un elettrone in moto, puo' essere ridotto a quello stazionario con una trasformazione di Lorentz nel sistema  $K'$  di quiete dell'e-

**L'energia del fotone in  $K'$  e'**



$$\begin{aligned} E'/c &= \gamma(E/c - \beta p_x) = \gamma(E/c - \beta p \cos \theta) \\ &= \gamma(E/c)(1 - \beta \cos \theta) \end{aligned}$$

**Per una distribuzione isotropa nel labo, il valor medio  $\langle \cos \theta \rangle = 0$**

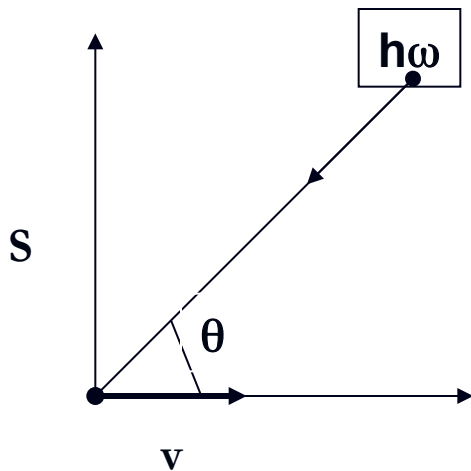
**E quindi**  $E' \sim \gamma E = \gamma \hbar \omega$

Così se il fotone incidente e' tale che  $\gamma \hbar \omega \ll mc^2$ , possiamo applicare il limite di Thomson alla sezione d'urto in  $K'$ , altrimenti occorre usare la sezione d'urto QED

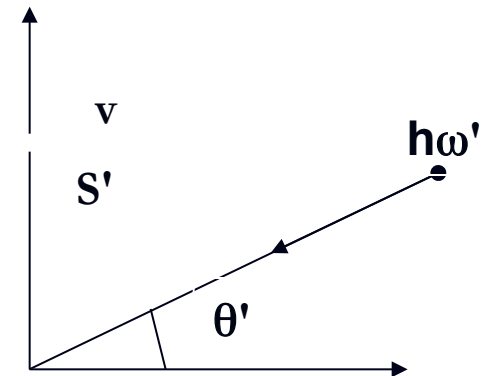
# Compton Inverso: aberrazione e shift doppler

Esaminiamo il caso di fotoni di bassa energia ( $\hbar\omega \ll mc^2$ ) che diffondono su e-ultrarelativistici

Vediamo prima come trasforma la frequenza e l'energia dei fotoni quando si passa dal laboratorio ad un sistema  $S'$  in moto



Se l'angolo di incidenza nel sistema del laboratorio  $S$  è  $\theta$ , in quello di quiete dell'elettrone  $S'$  è  $\theta'$  a causa dell'aberrazione relativistica, e anche l'energia del fotone cambia a causa dello shift doppler



# Aber. e shift doppler: metodo B

Le formule di aberrazione e shift doppler si possono ottenere facilmente anche dalle trasformazioni di Lorentz applicate ai fotoni

$$p'_x = \gamma(p_x - \beta E/c) \quad p'_y = p_y \quad E'/c = \gamma(E/c - \beta p_x)$$

Nel caso dei fotoni la relazione energia impulso e'  $E = cp$  e  $p_x = p \cos \theta$

$$p' \cos \theta' = \gamma(p \cos \theta - \beta p) \quad p' \sin \theta' = p \sin \theta \quad E'/c = \gamma(E/c - \beta(E/c) \cos \theta)$$

$$p' \cos \theta' = \gamma p (\cos \theta - \beta) \quad E' = \gamma E (1 - \beta \cos \theta)$$

Ma per i fotoni  $p'/p = E'/E = \gamma(1 - \beta \cos \theta)$  

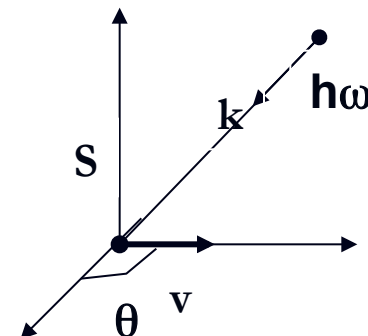
**aberrazione**

$$\cos \theta' = \gamma(p/p')(\cos \theta - \beta) = \frac{(\cos \theta - \beta)}{1 - \beta \cos \theta}$$

$$\sin \theta' = (p/p') \sin \theta = \frac{\sin \theta}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)}$$

**Shift doppler**

$$\omega' = \gamma \omega (1 - \beta \cos \theta)$$



# Aber. e shift doppler: nota

Usualmente quando si parla di effetto Doppler si considera lo shift in frequenza rispetto a quella emessa nel sistema di quiete della carica, per cui occorre usare le inverse, scambiando  $v \rightarrow -v$  e gli apici

## Aberrazione

$$\cos \theta = \frac{(\cos \theta' + \beta)}{1 + \beta \cos \theta'}$$

$$\sin \theta = \frac{\sin \theta'}{\gamma(1 + \beta \cos \theta')}$$

## Shift doppler

$$\omega = \gamma \omega' (1 + \beta \cos \theta')$$

# Compton Inverso

L'energia del fotone in S' e' quindi  $\hbar\omega' = \gamma\hbar\omega(1 - \frac{v}{c}\cos\theta)$

L'angolo di incidenza e'  $\tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - \frac{v}{c})}$

Per elettroni ultrarelativistici, il fotone nel sistema di riposo della particella colpisce l'elettrone ad angoli molto piccoli anche se in S arriva in direzione trasversale ( $\theta = \pi/2$ )

→ nel caso di una distribuzione isotropa di fotoni in S, quella risultante in S' e' concentrata in un cono di apertura  $1/\gamma$  intorno alla direzione della velocita' dell'elettrone

Quando  $\gamma \gg 1$   $\beta \approx 1 - \frac{1}{2}\gamma^{-2}$   $\Rightarrow \tan\theta' \approx \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - 1 + \frac{1}{2}\gamma^{-2})} \approx \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - 1)}$

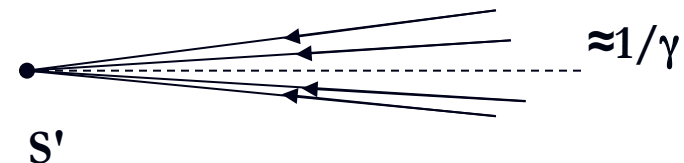
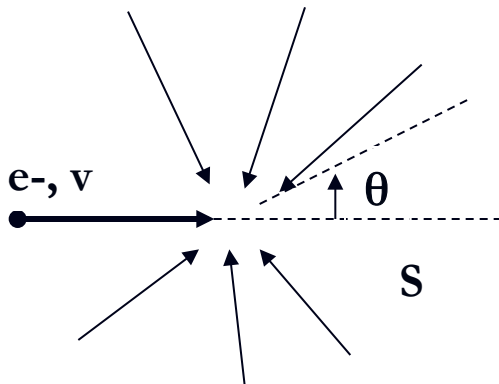
$$\sin\theta = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$$

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2(\theta/2)$$

$$\Rightarrow \tan\theta' \approx \frac{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}{\gamma(1 - 2\sin^2(\theta/2) - 1)} = -\frac{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}{2\gamma\sin^2(\theta/2)}$$

$$-\tan\theta' \approx \frac{\cotg(\theta/2)}{\gamma}$$

Gli angoli tali che  $\cotg(\theta/2) = 1$  e-  
i.e.  $\theta = \pi/2$  sono trasformati in  
 $\tan\theta' \approx 1/\gamma$



# IC: potenza totale nel limite di Thomson

In S' il fotone ha energia  $\hbar\omega' \sim \gamma\hbar\omega$  Se  $\gamma\hbar\omega \ll mc^2$  (aa)

in S' la sezione d'urto di Thomson descrive correttamente il processo

La potenza totale emessa e'  $(\frac{dE}{dt})' = c\sigma_T U'_{rad}$  con U' densita' di energia elm incidente in S'

Bisogna trovare  $U'_{rad}$  a partire dalle quantita' definite nel laboratorio

$$dU'_{rad} = E' dn' \quad \text{L'energia trasforma come} \quad E' = \gamma E (1 - \frac{v}{c} \cos \theta)$$

Per la densita' di volume  $dn'$  di particelle si fa nel seguente modo:

Il numero  $dN$  di particelle nel volume e' un invariante relativistico  $dN = dN'$

Il 4-volume  $d^4V = dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 = dx_0 dV$  e' un invariante relativistico

Cosi' la 4-densita'  $dN/d^4V$  e' un invariante relativistico

$$\left(\frac{dN}{d^4V}\right) = \left(\frac{dN}{dV dx_0}\right) \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{dN}{dV}\right) = \left(\frac{dN}{d^4V}\right) dx_0$$

La densita' di volume trasforma come la componente temporale di un 4-vettore, i.e. come E



# Compton Inverso: limite di Thomson

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)' = c\sigma_T U'_{rad} \quad U_{rad} = \left(\frac{dN}{dV}\right)E \quad E' = \gamma E \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)$$

$$\left(\frac{dN}{dV}\right)' = \left(\frac{dN}{d^4V}\right)dx'_o = \left(\frac{dN}{d^4V}\right)dx_o \gamma \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right) = \left(\frac{dN}{dV}\right)\gamma \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)$$

$$U'_{rad} = \left(\frac{dN}{dV}\right)' E' = \left(\frac{dN}{dV}\right) E [\gamma (1 - \frac{v}{c} \cos \theta)]^2 = U_{rad} [\gamma (1 - \frac{v}{c} \cos \theta)]^2$$

**Quindi la potenza in S' e'**  $\left(\frac{dE}{dt}\right)' = c\sigma_T U_{rad} [\gamma (1 - \frac{v}{c} \cos \theta)]^2$

**Se assumiamo una distribuzione isotropa di fotoni in S, possiamo mediare sugli angoli  $\theta$  per ottenere la potenza media in S'**

$$\langle \left(\frac{dE}{dt}\right)' \rangle = \frac{c\sigma_T U_{rad}}{4\pi} \int_{4\pi} [\gamma (1 - \frac{v}{c} \cos \theta)]^2 d\Omega$$

$$\langle \left(\frac{dE}{dt}\right)' \rangle = \frac{c\sigma_T U_{rad} 2\pi}{4\pi} \int_{-1}^{+1} [\gamma (1 - \frac{v}{c} \cos \theta)]^2 d \cos \theta$$

# Compton Inverso: limite di Thomson


$$\langle (\frac{dE}{dt})' \rangle = \frac{c\sigma_T\gamma^2 U_{rad}}{2} \int_{-1}^{+1} [(1 - \frac{v}{c} \cos \theta)]^2 d \cos \theta = \frac{c\sigma_T\gamma^2 U_{rad}}{2} \int_{-1}^{+1} [(1 - \frac{v}{c} x)]^2 dx$$

$$= \frac{c\sigma_T\gamma^2 U_{rad}}{2} \int_{-1}^{+1} (1 + \frac{v^2}{c^2} x^2 - 2\frac{v}{c} x) dx = \frac{c\sigma_T\gamma^2 U_{rad}}{2} (2 + \frac{2}{3}\beta^2)$$

$$\langle (\frac{dE}{dt})' \rangle = c\sigma_T\gamma^2 U_{rad} (1 + \frac{1}{3}\beta^2) = \frac{c\sigma_T U_{rad}}{3} [\gamma^2 (3 + \beta^2)]$$

**Riscriviamo il termine in parentesi quadra**

$$\gamma^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{1 - \beta^2} - \frac{1}{4} = \frac{4 - 1 + \beta^2}{4(1 - \beta^2)} = \gamma^2 \frac{3 + \beta^2}{4}$$

  $\gamma^2 (3 + \beta^2) = 4(\gamma^2 - \frac{1}{4})$  **Sostituisco nella potenza**

$$\langle (\frac{dE}{dt})' \rangle = \frac{4}{3} c\sigma_T U_{rad} (\gamma^2 - \frac{1}{4})$$

**Tenendo conto che la  
potenza e' un invariante  
relativistico →**

$$\langle (\frac{dE}{dt})' \rangle = \langle (\frac{dE}{dt}) \rangle$$

**In questo modo abbiamo ottenuto l'energia guadagnata dal campo di fotoni dopo l'urto**

# Compton Inverso: limite di Thomson

Energia media guadagnata dal campo di fotoni  $\langle \left(\frac{dE}{dt}\right) \rangle = \frac{4}{3}c\sigma_T U_{rad}(\gamma^2 - \frac{1}{4})$

Per ottenere il guadagno netto di energia del campo di fotoni occorre sottrarre l'energia persa nell'urto sugli elettroni, che e' data dal numero di fotoni con energia E rimossi dal fascio per unita' di tempo, che nel caso di distribuzione isotropa e'

$$\frac{dN_{ph}}{dt} = -c\sigma_T n_{ph} \quad \text{Ma} \quad n_{ph} = U_{rad}/E \quad \longrightarrow \quad \frac{dN_{ph}}{dt} = -c\sigma_T U_{rad}/E$$

$$\langle \left(\frac{dE}{dt}\right) \rangle = E \times \frac{dN_{ph}}{dt} = -c\sigma_T U_{rad}$$

$$\langle \left(\frac{dE}{dt}\right)_{tot} \rangle = \frac{4}{3}c\sigma_T U_{rad}(\gamma^2 - \frac{1}{4}) - c\sigma_T U_{rad} = c\sigma_T U_{rad}[\frac{4}{3}(\gamma^2 - \frac{1}{4}) - 1]$$

$$= c\sigma_T U_{rad}[\frac{4}{3}(\gamma^2 - 1)] \quad \text{ma} \quad \gamma^2 - 1 = \gamma^2 \beta^2$$

$$\langle \left(\frac{dE}{dt}\right)_{tot} \rangle = \frac{4}{3}c\sigma_T U_{rad} \gamma^2 \beta^2$$

E' la potenza media guadagnata dal campo di fotoni in un urto con singolo elettrone

# IC: guadagno medio dei fotone

La potenza totale (media) puo' essere scritta come  $\frac{dE}{dt} = \langle \epsilon_1 \rangle \frac{dN}{dt}$

ma  $\frac{dE}{dt} = \frac{4}{3} c \sigma_T \gamma^2 \beta^2 U_{rad,iso}$  e  $\frac{dN}{dt} = c \sigma_T n_{iso} = c \sigma_T U_{rad,iso} / \langle \epsilon \rangle$

Con  $\langle \epsilon \rangle$  energia media del gas di fotoni prima dello scattering

$$\frac{4}{3} c \sigma_T \gamma^2 \beta^2 U_{rad,iso} = \langle \epsilon_1 \rangle c \sigma_T U_{rad,iso} / \langle \epsilon \rangle$$

$$\frac{4}{3} \gamma^2 \beta^2 = \langle \epsilon_1 \rangle / \langle \epsilon \rangle$$

Nel caso di una distribuzione di corpo nero dei fotoni  $n(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{1}{[e^{h\nu/kT} - 1]} d\nu$

$\langle \epsilon \rangle = [3\zeta(4)/\zeta(3)] kT = 2.7 \times kT$   $\zeta$  funzioni di Riemann

$$\langle \epsilon_1 \rangle = \frac{4}{3} \gamma^2 \beta^2 \times 2.7 kT \approx \frac{18}{5} \gamma^2 \beta^2 kT$$

# IC: conseguenze astrofisiche

Il processo Compton inverso da parte di elettroni ultrarelativistici e' di profonda importanza in astrofisica.

Dalle osservazioni dei raggi cosmici, sappiamo che ci sono elettroni con energie superiori a  $O(100 \text{ MeV}) \rightarrow$  con fattori di Lorentz  $\gamma \approx 10\text{-}1000$ , per esempio negli aloni galattici

Questi elettroni diffondono fotoni di bassa energia ad energie molto piu' alte

P. Es. Se si considerano elettroni con  $\gamma \approx 1000$ , la frequenza dei fotoni diffusi aumenta: di un fattore  $10^6$ .

Fotoni radio, tipici dell'emissione da aloni galattici, con  $\nu \approx 10^9 \text{ Hz}$  diventano fotoni UV con  $\nu \approx 10^{15} \text{ Hz}$

Fotoni nell'IR lontano con  $\nu \approx 10^{12} \text{ Hz}$ , emessi dai nuclei galattici ricchi di stelle, diventano fotoni X con  $\nu \approx 10^{18} \text{ Hz}$ , cioe-  $E \approx 1 \text{ KeV}$

Fotoni ottici con  $\nu \approx 10^{14} \text{ Hz}$  diventano raggi  $\gamma$  con  $\nu \approx 10^{20} \text{ Hz}$ , cioe' con  $E \approx \text{MeV}$

# IC: perdita di E delle particelle

Il processo Compton inverso rappresenta una sorgente di energia per i fotoni nello spazio ambiente, mentre rappresenta un pozzo di energia per le particelle su cui i fotoni diffondono

$$\frac{dE_{fotoni}}{dt} = -\frac{dE_{ele}}{dt}$$

La sezione d'urto Compton e' prop a  $m^{-2}$  della particella su cui i fotoni diffondono → le uniche particelle per le quali il processo e' importante sono gli elettroni (a parita' di energia)

Dato che  $dE/dt \sim \gamma^2 = E^2/(mc^2)^2 \rightarrow$  il processo Compton inverso costituisce la sorgente dominante di perdita di energia per gli elettroni in tutti i casi in cui e' presente nella stessa regione un gas di fotoni

Insieme alle perdite per emissione di sincrotrone (che vedremo), il Compton inverso e' il processo che limita fortemente la vita media degli elettroni cosmici dato che

$$\tau_e = \int \frac{dE}{dE_{ele}/dt}$$

e che  $(dE/dt)_{ion} \approx \text{cost.}$  e che  $(dE/dt)_{bremss} \approx E$

Si pensi, p. es., al fondo cosmico a microonde di fotoni a 2.7 K: esso permea tutto l'universo e non c'e' modo per nessun elettrone di evitarlo durante la sua propagazione

# IC: guadagno medio dei fotone

La potenza totale (media) puo' essere scritta come  $\frac{dE}{dt} = \langle \epsilon_1 \rangle \frac{dN}{dt}$

ma  $\frac{dE}{dt} = \frac{4}{3} c \sigma_T \gamma^2 \beta^2 U_{rad,iso}$  e  $\frac{dN}{dt} = c \sigma_T n_{iso} = c \sigma_T U_{rad,iso} / \langle \epsilon \rangle$

Con  $\langle \epsilon \rangle$  energia media del gas di fotoni prima dello scattering

$$\frac{4}{3} c \sigma_T \gamma^2 \beta^2 U_{rad,iso} = \langle \epsilon_1 \rangle c \sigma_T U_{rad,iso} / \langle \epsilon \rangle$$

$$\frac{4}{3} \gamma^2 \beta^2 = \langle \epsilon_1 \rangle / \langle \epsilon \rangle$$

Nel caso di una distribuzione di corpo nero dei fotoni  $n(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{1}{[e^{h\nu/kT} - 1]} d\nu$

$\langle \epsilon \rangle = [3\zeta(4)/\zeta(3)] kT = 2.7 \times kT$   $\zeta$  funzioni di Riemann

$$\langle \epsilon_1 \rangle = \frac{4}{3} \gamma^2 \beta^2 \times 2.7 kT \approx \frac{18}{5} \gamma^2 \beta^2 kT$$

# Compton inverso: limiti cinematici

La cinematica dell'urto fissa la max energia che il fotone puo' acquistare

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon(1 - \frac{v}{c} \cos \theta)}{[\frac{E}{mc^2 \gamma}(1 - \cos \alpha) + (1 - \frac{v}{c} \cos \theta_1)]} \quad \epsilon_1 \ll \gamma mc^2 \quad \epsilon_1 \approx \epsilon \frac{1 - \beta \cos \theta}{1 - \beta \cos \theta_1}$$

$\theta$  e  $\theta'$  sono gli angoli dell'elettrone rispetto alla linea di volo del fotone incidente prima e dopo l'urto

Così il max si ha quando  $\cos \theta = -1$  e  $\cos \theta_1 = +1$  (collisione head-on)  $(\epsilon_1)_{max} \approx \epsilon \frac{1 + \beta}{1 - \beta}$

Nel limite UR ( $\gamma \gg 1$ )  $1 - \beta = \frac{1}{\gamma^2(1 + \beta)} \approx \frac{1}{2\gamma^2}$   $\rightarrow$   $(\epsilon_1)_{max} \approx 4\gamma^2 \epsilon$

$1 + \beta \approx 2$

Il min si ha quando  $\cos \theta = 1$  e  $\cos \theta_1 = -1$  (collisione follow-on)

$$(\epsilon_1)_{min} = (1 - \beta)/(1 + \beta) = 1/4\gamma^2$$



# Compton inverso: limiti cinematici

Nel sistema di quiete dell'elettrone l'energia prima dello scattering  $\epsilon'$   $\epsilon' = \gamma\epsilon(1 - \frac{v}{c} \cos \theta)$

**E' min quando  $\cos\theta=1$ , ie  $\theta=0$**

$$\epsilon'_{min} = \gamma\epsilon(1 - \frac{v}{c}) \approx \gamma\epsilon(1/2\gamma^2) = \epsilon/2\gamma$$

**i.e. fotoni soft in K'**

**E' max quando  $\cos\theta=-1$ , ie  $\theta=\pi$**

$$\epsilon'_{max} = \gamma\epsilon(1 + \frac{v}{c}) \approx 2\gamma\epsilon \quad \text{i.e. fotoni hard}$$

Nel sistema di quiete dell'e-, il fotone  $\epsilon'$  diffuso ad un angolo  $\theta'_1$  rispetto alla linea di volo iniziale in K' (NB: in K' i fotoni sono concentrati in un cono di larghezza  $1/\gamma$  intorno alla direzione della velocita' dell'e-)

**Nel labo l'energia dopo lo scattering  $\epsilon_1$**

$$\epsilon_1 = \gamma\epsilon'_1(1 + \frac{v}{c} \cos(\pi - \theta'_1)) = \gamma\epsilon'_1(1 - \frac{v}{c} \cos \theta'_1)$$

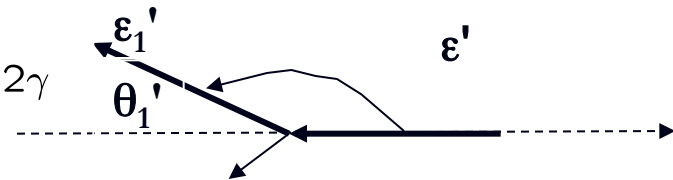
**Max quando  $\cos\theta'_1=-1$**

$$(\epsilon_1)_{max} = \gamma\epsilon'_1(1 + \frac{v}{c}) \approx 2\gamma\epsilon'_1$$

**Min quando  $\cos\theta'_1=1$**

$$(\epsilon_1)_{min} = \gamma\epsilon'_1(1 - \frac{v}{c}) \approx \epsilon'_1/2\gamma$$

NB:  $\theta'_1$  e' l'angolo rispetto alla linea di volo del fotone in K',  $\pi-\theta'_1$  e' l'angolo rispetto alla velocita' dell'e- nel labo, ie asse x, che entra nella trasf di Lorentz



**Nel limite di Thomson in K',  $\epsilon'=\epsilon_1'$**



$$\epsilon_1 = \gamma^2\epsilon(1 - \frac{v}{c} \cos \theta)(1 - \frac{v}{c} \cos \theta'_1)$$

$$(\epsilon_1)_{max} = 4\gamma^2\epsilon$$

$$(\epsilon_1)_{min} = \epsilon/4\gamma^2$$

**i fotoni piu' energetici guadagnano un fattore molto grande  $4\gamma^2$  che puo' essere  $\approx 10^6-10^7$**

# Spettro: stima della forma

Quindi:

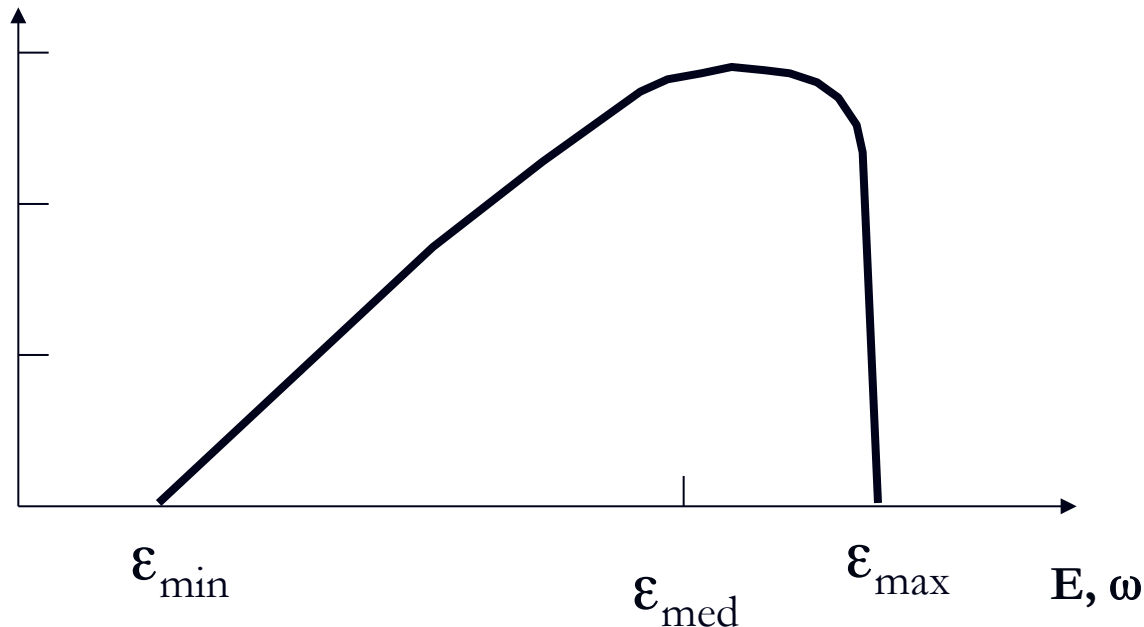
Il guadagno max e'  $A_{\max} = 4\gamma^2$

Il guadagno medio e'  $A_{\text{ave}} = 4\gamma^2/3 \rightarrow = A_{\max}/3$

Il guadagno min e'  $A_{\min} = 1/4\gamma^2 \rightarrow = A_{\max}/16\gamma^4 \ll A_{\max}$

Ne segue che lo spettro deve essere molto piccato vicino al valore max permesso cinematicamente

$dP/dE$  ( $dP/d\omega$ )

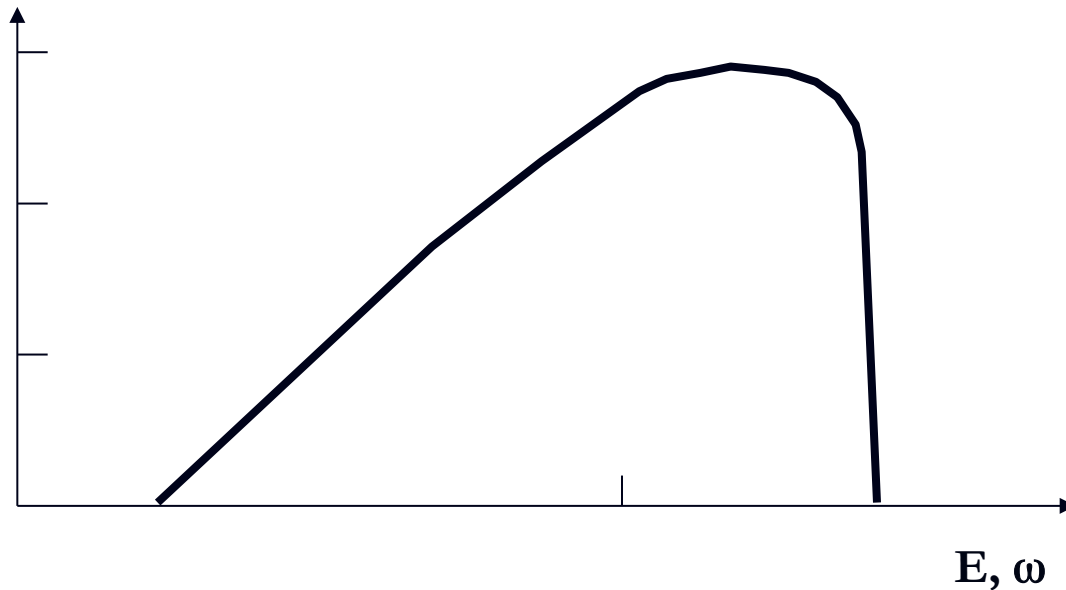


# Spettro Compton: limite di Thomson

## Calcolo esatto

$$\frac{dE}{dt d\omega_1} = \frac{3}{16} \hbar \sigma_T c \cdot \frac{n(\omega) d\omega}{\gamma^4 \omega^2} \cdot \omega_1 \cdot [\omega_1 + 4\gamma^2 \omega + 2\omega_1 \ln \frac{\omega_1}{4\gamma^2 \omega} - \frac{\omega_1^2}{2\gamma^2 \omega}]$$

$dP/dE$  ( $dP/d\omega$ )



Lo spettro ha una struttura ben definita e caratteristica

# Compton inverso

Si ha compton inverso ogni volta che un  $e^-$  si propaga in un gas di fotoni, cioè in regioni in cui vi è radiazione elettromagnetica (eg CMB, luce stellare, radiazione radio,...)

Il calcolo dettagliato della perdita di energia di un singolo  $e^-$  (vedi proc. Emiss. Elm) che si propaga in un campo di radiazione omogeneo ed isotropo è

$$\left\langle \left( \frac{dE}{dt} \right)_{tot} \right\rangle = \frac{4}{3} c \sigma_T U_{rad} \gamma^2 \beta^2$$

Dove  $U_{rad}$  è la densità di energia del campo di fotoni,  $\sigma_T = 8\pi r_e^2/3 = 0.66$  barn è la sez d'urto Thomson,  $\gamma = E/m_e c^2$  è l'energia dell'elettrone inc,  $\beta^{1/4} 1$  per part ultrarel

$$\left( \frac{dE}{dt} \right)_{IC} = 1.66 \times 10^6 \gamma^2 U_{rad} \quad \text{eV s}^{-1} \quad \beta \sim 1$$

$U_{rad}^{ottico} \sim 6 \times 10^5 \text{ eV m}^{-3}$  per fotoni ottici in un punto tipico della galassia,

$U_{rad}^{CMB} \sim 2.6 \times 10^5 \text{ eV m}^{-3}$  per il fondo di radiazione cosmico che permea tutto l'universo

# Spettro qualitativo

Qualitativamente poiche' lo spettro e' molto piccato intorno al max, il cui ordine di grandezza e'  $\varepsilon_{\text{max}} \approx \gamma^2 \varepsilon$ , possiamo pensare gli e- diffondano solo fotoni con  $E = \varepsilon_{\text{max}} \rightarrow$  all'energia  $\varepsilon_1$  contribuiscono solo gli e- con  $\gamma = (\varepsilon_1 / \varepsilon)^{1/2}$

$$\rightarrow dN_\gamma \approx dn_e \approx \gamma^{-p} d\gamma \approx \varepsilon_1^{-(p+1)/2} d\varepsilon_1$$

# Spettro Compton totale: Thomson

$$\left(\frac{dN_{tot}}{dtd\epsilon_1}\right) = \pi r_e^2 c K_e 2^{p+3} \frac{p^2 + 4p + 11}{(p+3)^2(p+1)(p+5)} \epsilon_1^{-(p+1)/2} \int \epsilon^{(p-1)/2} n(\epsilon) d\epsilon$$

L'intensita', i.e. la normalizzazione dello spettro fisico **OSSERVATO**, dipende dalla distribuzione iniziale dei fotoni

Ma l'indice spettrale dipende **SOLO** dalla distribuzione energetica degli elettroni

Nel caso di una distribuzione di corpo nero dei fotoni lo spettro osservato e'

$$\left(\frac{dN_{tot}}{dtd\epsilon_1}\right) = \pi^{-1} (r_e^2 / \hbar^3 c^2) K_e(kT)^{(p+5)/2} F(p) \epsilon_1^{-(p+1)/2}$$

TABLE I. The function  $F(p)$  in Eq. (2.66).

$$F(p) = 2^{p+3} [(p^2 + 4p + 11) / (p+3)^2(p+1)(p+5)] \times \Gamma[\frac{1}{2}(p+5)] \zeta[\frac{1}{2}(p+5)]. \quad (2.66)$$

L'espressione e' esatta finche'  $\epsilon_1$  e' **LONTANO** dagli end-points della distribuzione: il range di validita' dell'espressione e' infatti

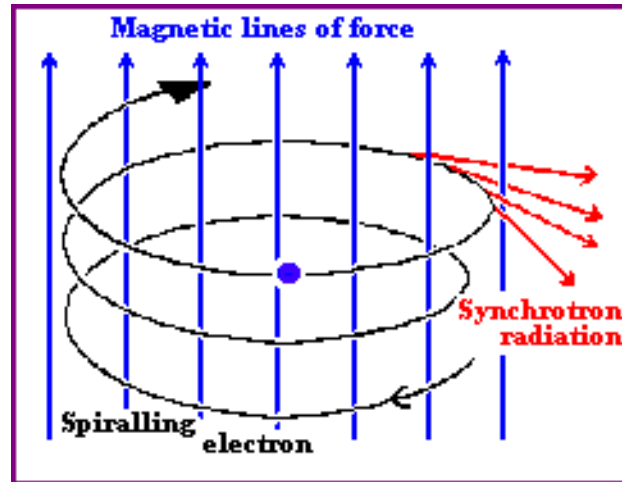
$$\gamma_o^2 kT \ll \epsilon_1 \ll \gamma_m^2 kT$$

Oltre alla condizione di Thomson  $\epsilon_1 \sim \gamma^2 kT \ll \gamma mc^2$

$p$	$F(p)$
0	3.48
0.5	3.00
1.0	3.20
1.5	3.91
2.0	5.25
2.5	7.57
3.0	11.54
3.5	18.44
4.0	30.62
4.5	52.57
5.0	92.90

# Radiazione di Sincrotrone (RS)

La radiazione di sincrotrone e' quella emessa da elettroni di alta energia che curvano in un campo magnetico



Questo processo e' quello che domina nella astrofisica delle alte energie

Storicamente fu osservato nei primi esperimenti con betatroni in cui gli e- erano accelerati ad energie relativistiche

Lo stesso meccanismo e' responsabile dell'emissione radio della galassia, di supernovae remnants e di oggetti extragalattici

E' anche responsabile, p.es., dell'emissione non termica osservata nella Crab nebula

# Sincrotrone

Si hanno perdite per emissione di radiazione di sincrotrone ogni volta che un  $e^-$  si propaga in un campo magnetico

Calcolo dettagliato per la perdita di energia di singolo  $e^-$  che si muove in un campo  $B$  (in cui la direzione fra  $B$  e  $\underline{v}$  e' distribuita isotropicamente)

$$\left\langle \left( \frac{dE}{dt} \right) \right\rangle = \frac{4}{3} \sigma_T c U_B \beta^2 \gamma^2$$

$U_B = B^2/8\pi$  e' la densita' di energia del campo magnetico

$$\left( \frac{dE}{dt} \right)_S = 6.6 \times 10^4 \gamma^2 B^2 \quad \text{eV s}^{-1} \quad \beta \approx 1$$



# Il campo magnetico galattico

Intensità media:  $(3 \pm 3) \times 10^{-10}$

Coerenti su scale di 1-10 pc

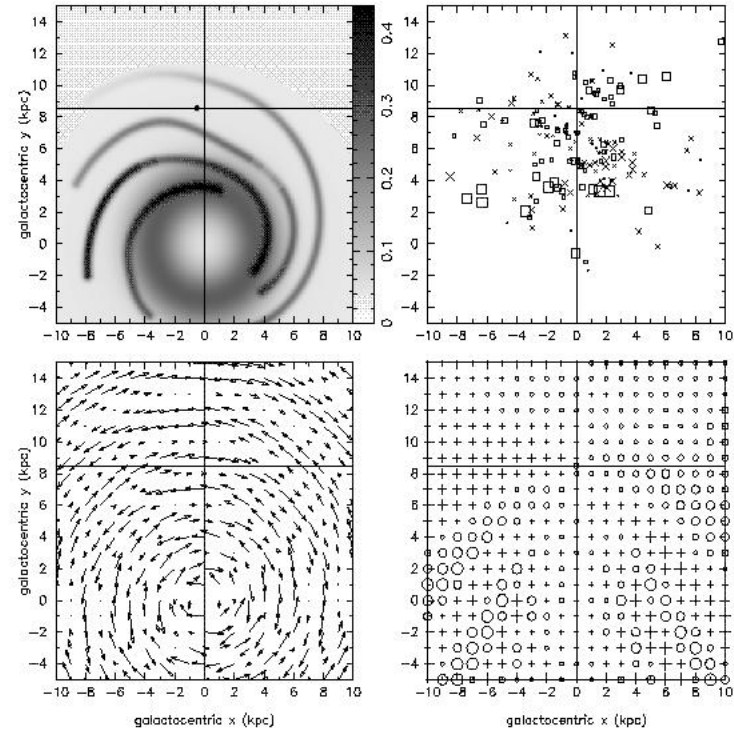
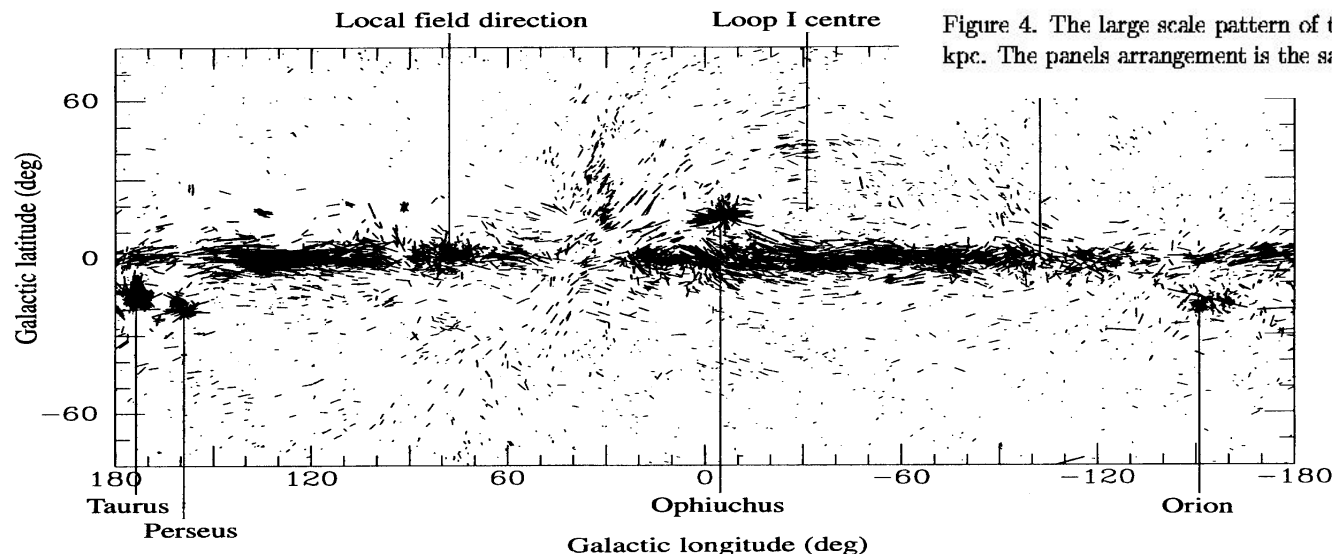


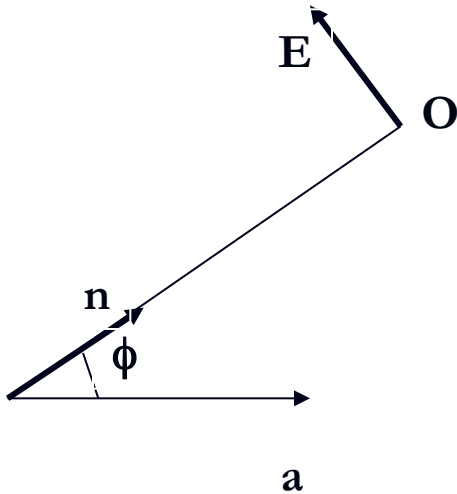
Figure 4. The large scale pattern of the magnetic field, using  $p = -4.5^\circ$  and  $R_o = 9.3$  kpc. The panels arrangement is the same as in figures 1 and 2.



# RS: potenza totale

Abbiamo tutti gli ingredienti per calcolare la potenza totale emessa

La potenza relativistica di Larmor e'  $\frac{dE}{dt} = \frac{\gamma^4 e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} (a_{\perp}^2 + \gamma^2 a_{\parallel}^2)$



Nel sistema di quiete della carica si ha Larmor non relativistico

$$\frac{dE}{dt} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} (a_{\perp}^2 + a_{\parallel}^2) = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} a^2$$

Ricordiamo che:

→ la distribuzione angolare e' **prop**  $\sin^2 \phi$

→ la radiazione e' polarizzata: E oscilla come la proiezione di a nel piano **perp** alla dir di osservazione  
 $E \approx n \times (n \times a)$

Basta quindi calcolare l'accelerazione di una particella in un campo magnetico

# RS: potenza totale

In un campo magnetico una particella si muove lungo una spirale con angolo di pitch costante

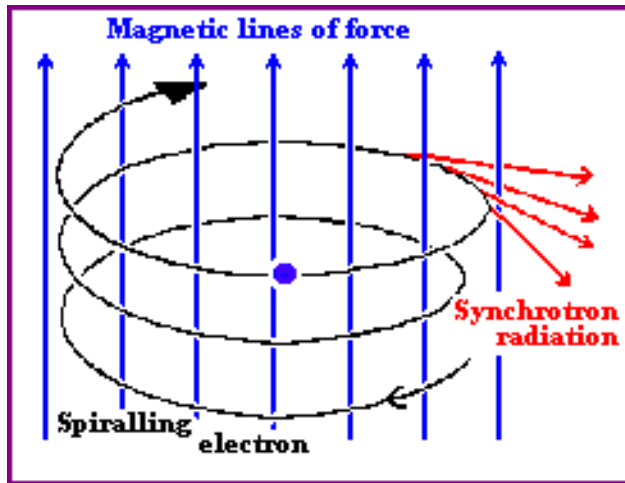
Infatti le equazioni relativistiche del moto sono

$$\frac{d(\gamma m \vec{v})}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\gamma \frac{d(m \vec{v})}{dt} + \frac{d(\gamma m)}{dt} \vec{v} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\frac{d(\gamma m c^2)}{dt} = q \vec{v} \cdot \vec{E}$$

Se  $\vec{E}=0 \rightarrow \gamma = \text{cost. e } v = \text{cost.}$



L'equazione si riduce a  $\gamma \frac{d(m \vec{v})}{dt} = q \vec{v} \times \vec{B}$

# RS: potenza totale

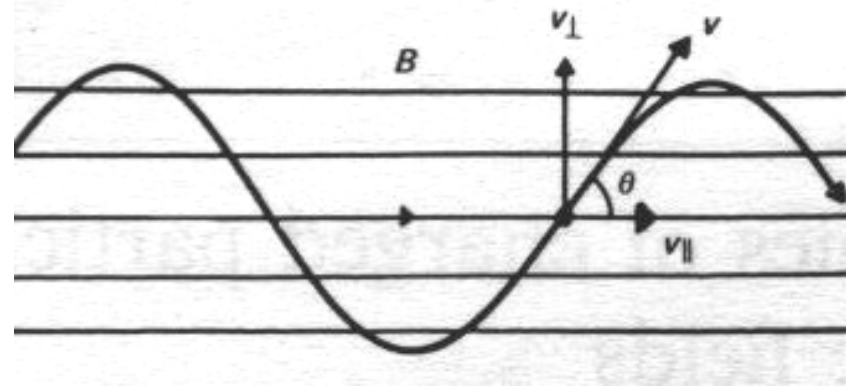
$$\gamma \frac{d(m\vec{v})}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Scompongo  $v$  in  
componenti **paral** e

L'angolo di pitch e'  $\tan\theta = \frac{v_{\text{perp}}}{v_{\text{par}}}$

$$\frac{d(mv_{\parallel})}{dt} = 0$$

dato che la forza e' **perp B**



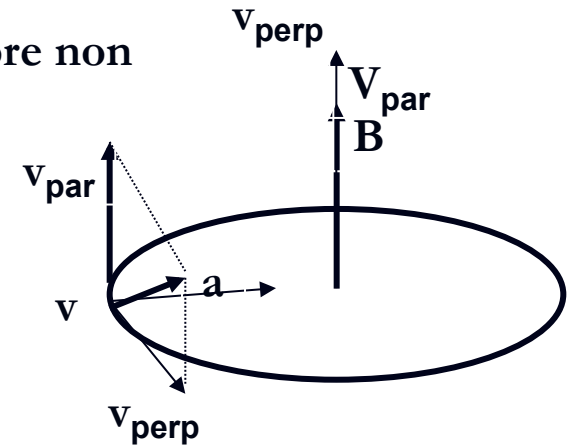
Nel piano **perp B**  $\gamma \frac{d(m\vec{v}_{\perp})}{dt} = q\vec{v}_{\perp} \times \vec{B} = qvB \sin\theta \vec{i}_v \times \vec{i}_B$  L'accelerazione e' **perp B** e

Dato che se aggiungo la comp. parallela il prodotto vettore non  
cambia si puo' scrivere

$$\gamma \frac{d(m\vec{v})}{dt} = q\vec{v}_{\perp} \times \vec{B} = qvB \sin\theta \vec{i}_v \times \vec{i}_B$$

Così l'accelerazione ist. e' **perp** al piano di  $v$  e  $B$

→  $v$  ruota intorno alla direzione di  $B$



→ In campi  $B$  costanti, questo risulta in un moto di traslazione lungo  $B$  e uno circolare  
uniforme intorno alla direzione del campo  $B$

# RS: potenza totale

Nel piano  $\perp B$ , l'accelerazione  $e'$   $a = v_{\perp}^2/r = qvB \sin \theta / \gamma m$

Il raggio di curvatura o di girazione della traiettoria  $e'$   $r = \gamma m v \sin \theta / qB$

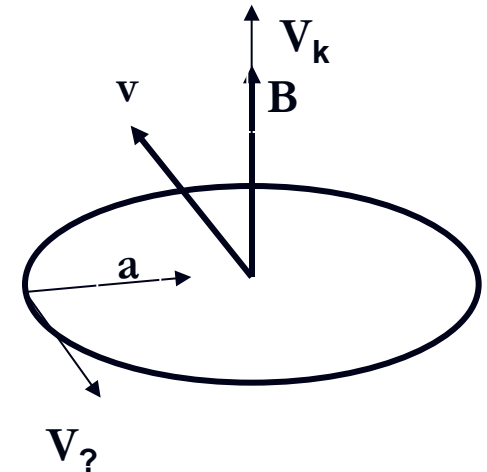
La frequenza del moto circolare  $e'$   $\omega = v_{\perp}/r = qB/\gamma m$  detta di Larmor

Nel caso non relativistico  $\gamma = 1 \rightarrow \omega/B = q/m$

Per un'elettrone  $\nu/B = 28 \text{ GHz T}^{-1}$

Per ottenere la potenza totale basta sostituire  
nell'espressione di Larmor, l'accelerazione  
centripeta del moto

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{\gamma^4 e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} a_{\perp}^2 = \frac{\gamma^4 e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} (evB \sin \theta / \gamma m)^2 \\ &= \frac{\gamma^2 e^4 v^2 B^2 \sin^2 \theta}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3} = \frac{e^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c} \frac{v^2}{c^2} \gamma^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$



E' la potenza totale emessa

# RS: potenza totale B

C'e' anche un altro modo di derivare la potenza: calcolare la potenza nel sistema di quiete dell'e- e trasformarla poi nel laboratorio

Nel sistema di quiete dell'elettrone,  $v_{\text{ist}} = 0$  e l'accelerazione  $d\beta/dt$  e' piccola rispetto a c

Qui si puo' usare la formula non relativistica di Larmor  $(\frac{dE}{dt})' = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} a'^2$

Nel labo, dove B e' fissato, l'asse x e' || a  $v_{\text{ist}}$  dell'e- e z e' nel piano di x e B ( con z **perp** x)

Per trovare a dobbiamo trasformare i campi elm in S' dato che  $\vec{F}' = q(\vec{E}' + \vec{v}' \times \vec{B}')$

$$\vec{E}' = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \gamma\vec{v} \times \vec{B}$$

Poiche'  $v' = 0$  basta considerare solo E'

$$\vec{B}' = \gamma(\vec{B} - \vec{v} \times \vec{E}) = \gamma\vec{B}$$

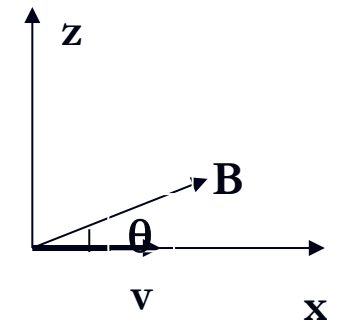
$$\vec{F}' = q\vec{E}'$$

Con la scelta degli in S  $v(v_x, 0, 0)$  e  $B(B_x, 0, B_z)$

$$E'_x = 0$$

$$E'_y = -\gamma v B_z = -\gamma v B \sin \theta \quad \longrightarrow \quad a' = -e\gamma v B \sin \theta / m$$

$$E'_z = 0$$



$$\left(\frac{dE}{dt}\right) = \left(\frac{dE}{dt}\right)' = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} a'^2 = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} (e\gamma v B \sin \theta / m)^2 = \frac{e^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c} \frac{v^2}{c^2} \gamma^2 \sin^2 \theta$$

# RS: potenza totale B

$$\left(\frac{dE}{dt}\right) = \frac{e^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c} \frac{v^2}{c^2} \gamma^2 \sin^2 \theta \quad \text{La riscriviamo come}$$

$$\left(\frac{dE}{dt}\right) = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0 m^2 c} B^2 \beta^2 \gamma^2 \sin^2 \theta \frac{2\mu_0 c^3}{2\mu_0 c^3} = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^4} \frac{B^2}{2\mu_0} \beta^2 \gamma^2 \sin^2 \theta 2\mu_0 \frac{c}{\epsilon_0 \mu_0} \quad c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

$$= \frac{2e^4}{6\pi\epsilon_0^2 m^2 c^4} c \frac{B^2}{2\mu_0} \beta^2 \gamma^2 \sin^2 \theta$$

$$\text{Ma } \sigma_T = \frac{8}{3} \pi r_e^2 = \frac{8}{3} \pi \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2} \right)^2 = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0^2 m^2 c^4}$$

$$\text{e } U_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad \text{e' la densita' di energia magnetica}$$

$$\longrightarrow \left(\frac{dE}{dt}\right) = 2\sigma_T c U_B \beta^2 \gamma^2 \sin^2 \theta$$

E' la potenza emessa da un elettrone con angolo di pitch  $\theta$

# RS: potenza totale B

$$\left(\frac{dE}{dt}\right) = 2\sigma_T c U_B \beta^2 \gamma^2 \sin^2 \theta$$

- Nel caso di una distribuzione isotropa di particelle la potenza media si ottiene mediando sugli angoli di pitch con probabilita'

$$p(\Omega)d\Omega = d(\cos \theta)/2$$

$$\left\langle \left(\frac{dE}{dt}\right) \right\rangle = 2\sigma_T c U_B \beta^2 \gamma^2 \int \sin^2 \theta p(\Omega) d\Omega$$

$$= 2\sigma_T c U_B \beta^2 \gamma^2 \int (1 - x^2) dx / 2 \quad \text{■ } \mathbf{x} = \cos \theta$$

$$= \frac{4}{3} \sigma_T c U_B \beta^2 \gamma^2$$

- nel caso di particelle che si propagano nel mezzo interstellare,  $U_B$  e' il valore medio della densita' di energia. Le irregolarita' casuali del campo B "*diffondono*" la particella che cambia il suo angolo di pitch in modo casuale → in questo senso l'espressione trovata rappresenta la potenza totale media



# RS: potenza totale B

$$\langle \left( \frac{dE}{dt} \right) \rangle = \frac{4}{3} \sigma_T c U_B \beta^2 \gamma^2$$

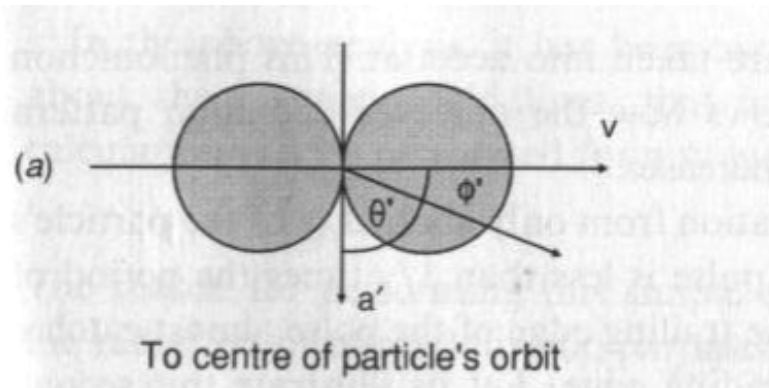
- L'espressione trovata e' uguale a quella dello scattering Compton nel limite di Thomson con  $U_B$  al posto di  $U_E$
- La coincidenza non e' accidentale
- La radiazione di sincrotrone puo' essere considerata come scattering Compton dell'elettrone con i fotoni virtuali del campo B → potremmo procedere esattamente come nel caso Compton nel limite di Thomson

# RS: spettro-argomenti fisici

- Cominciamo con l'analizzare alcuni degli aspetti fondamentali dei processi in cui sono implicate particelle relativistiche, che saranno utili per capire da dove molti dei risultati esatti provengono
- Una delle caratteristiche fondamentali della radiazione da particelle relativistiche e' che essa e' collimata nella direzione del moto della particella che emette
- Parte di questo effetto e' associato con l'aberrazione relativistica tra il riferimento della particella e quello dell'osservatore
- Ma oltre a cio' occorre valutare con attenzione anche lo sviluppo temporale di cosa e' realmente visto dall'osservatore distante

# RS: beaming

Consideriamo per semplicità un elettrone con angolo di pitch  $\pi/2$



Nel riferimento  $S'$  dell'elettrone, la distribuzione angolare della radiazione è quella dipolare

$$\approx \sin\theta'^2 = \cos\phi'^2$$

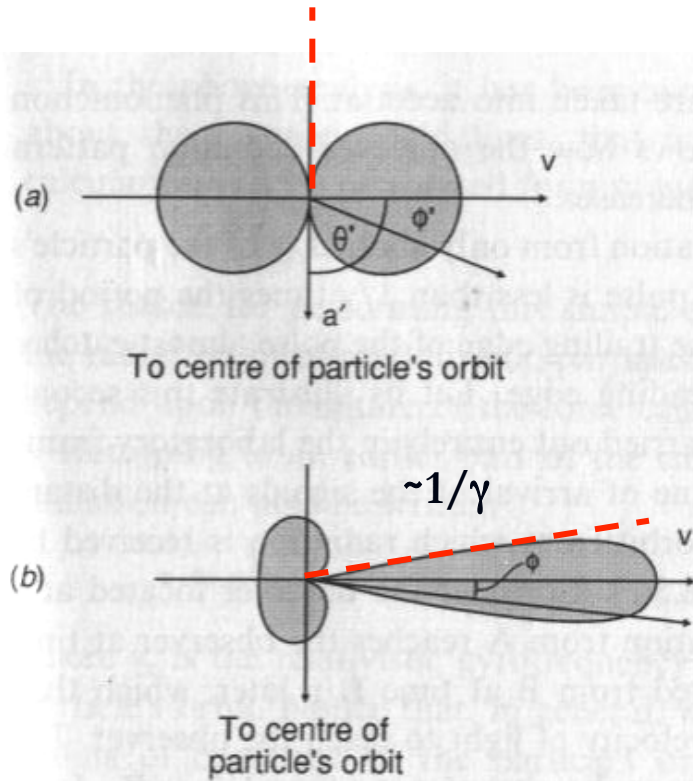
A parte la normalizzazione, può essere pensata come alla probabilità con cui i fotoni sono emessi in  $S'$

Applicando le formule di aberrazione possiamo ottenere la distribuzione nel labo

$$\cos\phi = \frac{(\cos\phi' + \beta)}{(1 + \beta\cos\phi')} \quad \sin\phi = \frac{\sin\phi'}{\gamma(1 + \beta\cos\phi')}$$

(il segno + compare perché stiamo applicando le trasformazioni inverse da  $S'$  a  $S$ )

# RS: beaming



$$\cos \phi = \frac{(\cos \phi' + \beta)}{(1 + \beta \cos \phi')} \quad \sin \phi = \frac{\sin \phi'}{\gamma(1 + \beta \cos \phi')}$$

Come già sappiamo, la radiazione viene concentrata in avanti in un angolo  $\phi \approx 1/\gamma$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{\gamma^4(1 - \beta \cos \theta)^4} \frac{dP'}{d\Omega'}$$

Infatti se prendiamo  $\phi' = \pi/2 \rightarrow \sin \phi \approx 1/\gamma \approx \phi$

La conseguenza di ciò è che un osservatore lontano riceve un impulso di radiazione solo quando la velocità della particella punta lungo la linea di vista entro un angolo  $1/\gamma$ , fortemente spostata in frequenza a causa dell'effetto Doppler

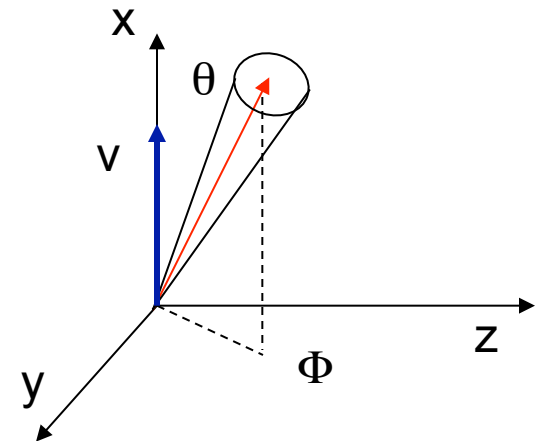
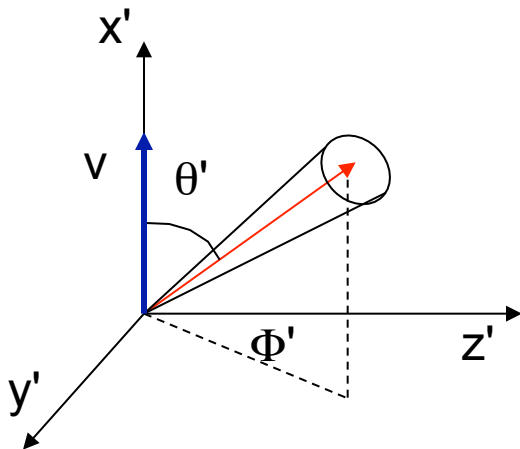
# Distr. Angolare

La distribuzione angolare della potenza emessa si puo' ottenere a partire da quella nel rif.  $K'$  di quiete istantanea utilizzando le proprieta' di trasformazione relativistiche delle direzioni

Consideriamo in  $K'$  l'emissione di un'energia  $dE'$  in un angolo solido  $d\Omega' = \sin\theta' d\theta' d\Phi' = d\cos\theta' d\Phi' = d\mu' d\Phi'$  con  $\mu' = \cos\theta'$ , intorno a  $\theta'$ , angolo con l'asse  $x'$ , diretto come la velocita' della particella nel sistema  $K$  del labo

Nel laboratorio l'energia e' emessa  $dE$  e' emessa in un angolo solido  $d\Omega = d\mu d\Phi$

Nota la distribuzione in  $K'$  possiamo calcolare la distribuzione in  $K$ , conoscendo le proprieta' di trasformazione dell'energia e dell'angolo solido



# Distr. Angolare

L'energia emessa (i.e. i fotoni) trasforma come la comp. temp. del 4-impulso  $p'_\mu$  ( $E/c, \mathbf{p}$ )

$$dE/c = \gamma(dE'/c + \beta dp'_x) \quad (\text{il segno + compare perche' il labo si muove con vel } -v \text{ rispetto alla particella})$$

Nel caso della rad elm  $dE'/c = dp'$   $dp'_x = \cos \theta' dp' = \mu' dp'$  (a)



$$dE = dE' \gamma (1 + \beta \mu')$$

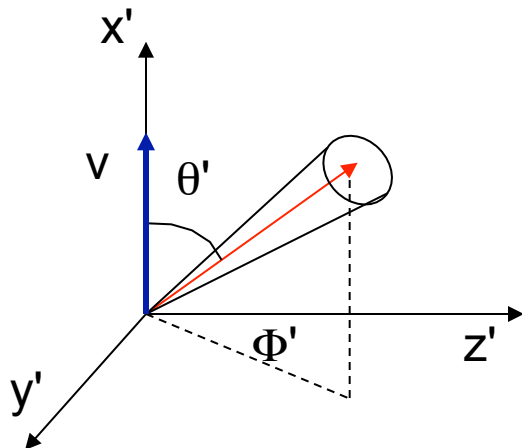
Per l'angolo solido basta vedere come trasformano le direzioni

La quantita' di moto dei fotoni trasforma come

$$(b) \begin{cases} dp_z = dp'_z \\ dp_y = dp'_y \end{cases}$$

$$(c) dp_x = \gamma(dp'_x + \beta dE'/c)$$

Da (b) segue che  $d\Phi' = d\Phi$  Sostituendo (a) in (c)  $\mu dp = \gamma(\mu' + \beta) dp'$

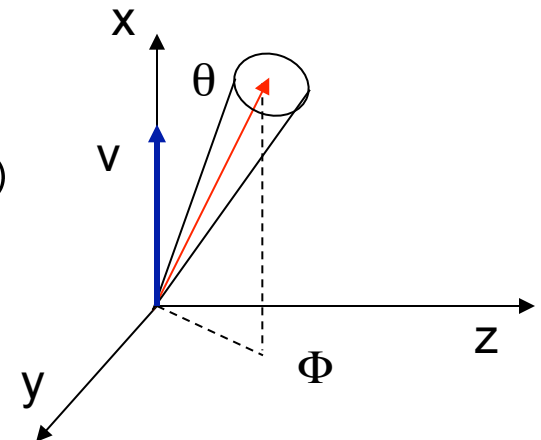


$$\mu = \gamma(\mu' + \beta)(dp'/dp)$$

$$dp'/dp = dE'/dE = 1/\gamma(1 + \beta\mu')$$

$$\mu = (\mu' + \beta)/(1 + \beta\mu')$$

E' l'aberrazione relativistica delle direzioni



# Distr. Angolare

$$dE = dE' \gamma (1 + \beta \mu')$$

$$\mu = (\mu' + \beta) / (1 + \beta \mu')$$

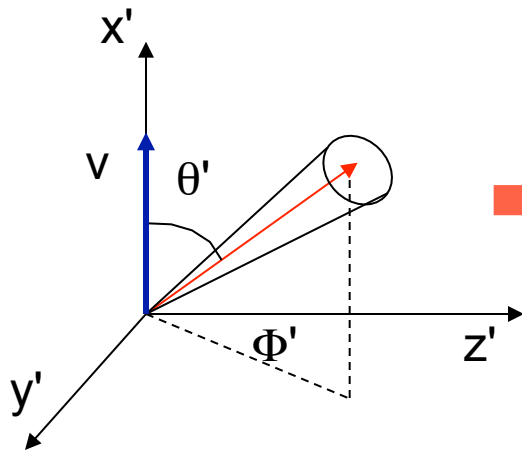
Calcolo  $d\Omega = d\mu d\Phi$

$$d\mu = [(1 + \beta \mu' - \beta \mu' - \beta^2) / (1 + \beta \mu')^2] d\mu'$$

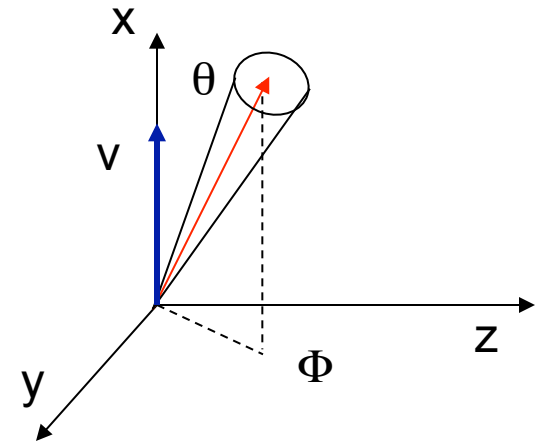
$$= [(1 - \beta^2) / (1 + \beta \mu')^2] d\mu' = \frac{d\mu'}{\gamma^2 (1 + \beta \mu')^2}$$

$$d\Phi = d\Phi'$$

➔  $d\Omega = d\mu d\Phi = \frac{d\mu' d\Phi'}{\gamma^2 (1 + \beta \mu')^2} = \frac{d\Omega'}{\gamma^2 (1 + \beta \mu')^2}$



➔  $\frac{dE}{d\Omega} = \gamma^3 (1 + \beta \mu')^3 \frac{dE'}{d\Omega'}$



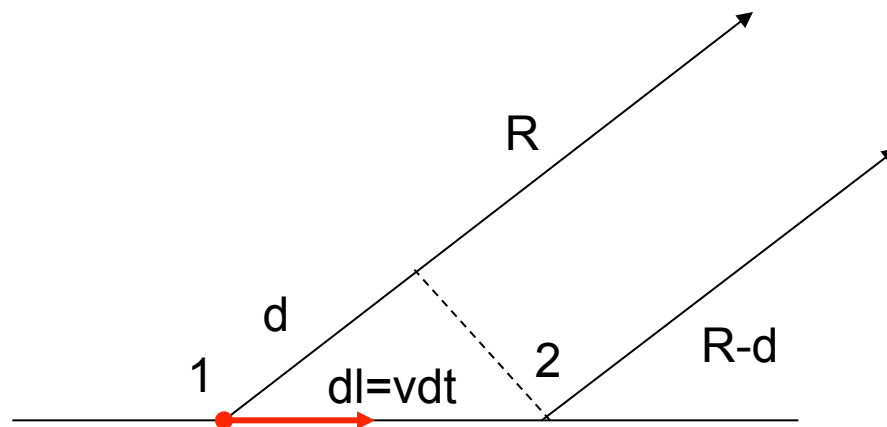
# Distr. Angolare

$$\frac{dE}{d\Omega} = \gamma^3 (1 + \beta\mu')^3 \frac{dE'}{d\Omega'}$$

Per ottenere la distribuzione angolare della potenza occorre calcolare la relazione fra la durata  $dt'$  e  $dt$  dell'emissione in  $K'$  e  $K$

Supponiamo che ci sia un osservatore stazionario in  $K$  posto a grande distanza così che la direzione della radiazione emessa sia costante

La particella in  $K$  comincia ad emettere in 1 e cessa in 2, qual'è la durata dell'emissione misurata dall'osservatore distante in  $K$ ?





$$\frac{dE}{d\Omega} = \gamma^3 (1 + \beta \mu')^3 \frac{dE'}{d\Omega'}$$

# Distr. Angolare

L'osserv. comincia a ricevere la radiazione a  $t_1 = R/c + t$  dall'inizio dell' emissione

Nel tempo  $dt$  la particella viaggia una distanza  $l = vdt$

→ la radiazione emessa a  $t+dt$  deve percorrere una distanza  $R-d$

→ viene ricevuta dopo un tempo  $t_2 = t + dt + (R-d)/c$

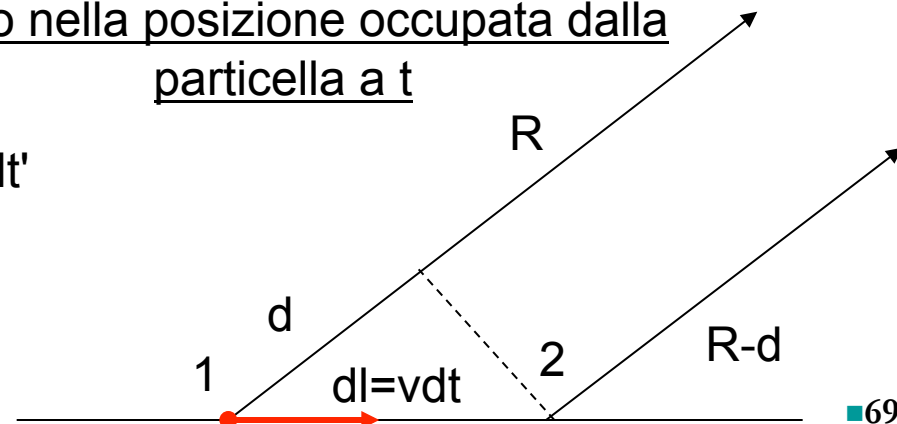
La durata misurata dall'osservatore distante e' quindi  $dt_o = t_2 - t_1$

$$= t + dt + (R - d)/c - R/c - t = dt - d/c \quad \text{ma } d = dl \cos \theta = vdt \cos \theta$$

➡  $dt_o = dt[1 - (v/c) \cos \theta]$   $dt$  e' l'intervallo misurato da un orologio in K  
posto nella posizione occupata dalla  
particella a t

→ la relazione con il tempo proprio della  
particella (i.e. quello misurato in K') e'  $dt = \gamma dt'$

$$dt_o = \gamma[1 - (v/c) \cos \theta] dt' = \gamma(1 - \beta \mu) dt'$$



$$\frac{dE}{d\Omega} = \gamma^3(1 + \beta\mu')^3 \frac{dE'}{d\Omega'}$$

# Distr. Angolare

$$dt_o = \gamma(1 - \beta\mu)dt'$$

L'inversa e' semplicemente (le trasf di Lorentz sono reciproche)

$$dt' = \gamma(1 + \beta\mu')dt_o$$

Per ottenere la potenza bisogna derivare rispetto al tempo misurato in K da O

$$\frac{d}{dt_o} \frac{dE}{d\Omega} = \frac{d}{dt_o} \left[ \gamma^3(1 + \beta\mu')^3 \frac{dE'}{d\Omega'} \right] = \gamma^3(1 + \beta\mu')^3 \left( \frac{dt'}{dt_o} \right) \frac{d}{dt'} \frac{dE'}{d\Omega'} = \gamma^4(1 + \beta\mu')^4 \frac{d}{dt'} \frac{dE'}{d\Omega'}$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \gamma^4(1 + \beta\mu')^4 \frac{dP'}{d\Omega'}$$

Per esprimere tutto in funzione delle quantita' misurate in K (i.e. Labo) basta considerare le trasformazioni inverse

$$\frac{dP'}{d\Omega'} = \gamma^4(1 - \beta\mu)^4 \frac{dP}{d\Omega}$$

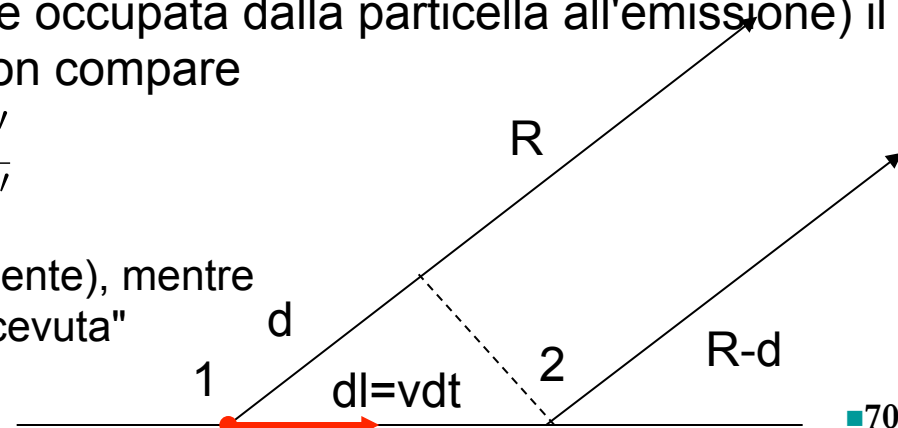


$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{\gamma^4(1 - \beta\mu)^4} \frac{dP'}{d\Omega'}$$

Se l'osservatore e' "vicino" (ie nella posizione occupata dalla particella all'emissione) il fattore di ritardo dovuto alla propagazione non compare

$$dt_o = \gamma dt' \quad \longrightarrow \quad \frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{\gamma^4(1 - \beta\mu)^3} \frac{dP'}{d\Omega'}$$

Si parla in tal caso di potenza "emessa" (alla sorgente), mentre nel caso precedente si parla di potenza "ricevuta" dall'osservatore distante



# Distr. Angolare

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{\gamma^4(1 - \beta\mu)^4} \frac{dP'}{d\Omega'}$$

Se la radiazione e' isotropa in K', la distribuzione angolare nel labo e' fortemente piccata in avanti per particelle relativistiche ( $\beta \sim 1$ ) a causa del fattore al denom.

Infatti  $\gamma^2 = \frac{1}{(1 - \beta)(1 + \beta)} \approx \frac{1}{2(1 - \beta)}$  perche'  $1 + \beta \approx 2$  se  $\beta \rightarrow 1$

  $\beta \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$

Per piccoli angoli  $\mu = \cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$$\frac{1}{\gamma^4(1 - \beta\mu)^4} \approx \frac{1}{\gamma^4[1 - (1 - 1/2\gamma^2)(1 - \theta^2/2)]^4} = \frac{1}{\gamma^4[\theta^2/\gamma^2 - \theta^2/2 - 1/2\gamma^2]^4}$$

$$= \frac{1}{\gamma^4[(2\theta^2 - \theta^2\gamma^2 - 1)/2\gamma^2]^4} \approx \frac{2\gamma^4}{[(\theta^2\gamma^2 + 1)]^4}$$

Il fattore e' fortemente piccato a  $\theta \sim 0$ , con una scala angolare  $\sim 1/\gamma$  (cioe' c'e' poca potenza emessa ad angoli maggiori)

# Distr. Angolare

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{\gamma^4(1 - \beta\mu)^4} \frac{dP'}{d\Omega'}$$

Nel sistema di quiete ist.  $K'$ , la potenza emessa e' quella di Larmor

$$\frac{dP'}{d\Omega'} = \frac{q^2}{4\pi c^3} |\vec{a}'|^2 \sin^2 \Theta'$$

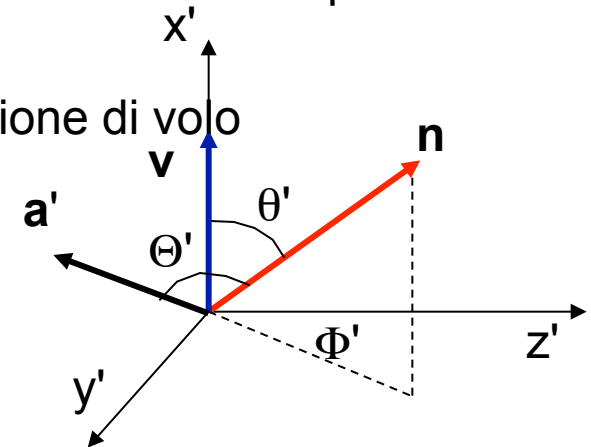
Bisogna esprimere solo  $a'$  e  $\Theta'$  in funzione di quantita' misurate nel labo

Scrivo l'accel.  $a$  in termini di componenti  $\parallel$  e perp alla direzione di volo

$$|\vec{a}'|^2 = |\vec{a}'_{\parallel}|^2 + |\vec{a}'_{\perp}|^2$$

La relazione le componenti di  $a'$  ed  $a$  e'

$$|\vec{a}'_{\parallel}| = \gamma^3 |\vec{a}_{\parallel}| \quad |\vec{a}'_{\perp}| = \gamma^2 |\vec{a}_{\perp}|$$



come conseguenza delle trasf di Lorentz (cfr. Calcolate la variazione di vel. in 2 rif. generici con regola di somma rel. delle velocita'  $du_i = F_i \mathcal{E} du'_i$ , gli intervalli misurati nei 2 rif.  $dt$  e  $dt'$  –i.e. trasf. Lorentz- e ottenete la relazione tra  $du_i/dt$  e  $du'_i/dt'$ . Prendete il caso in cui  $v'_{ist}=0$  e ottenete le relazioni fra le accel. di cui sopra

$$|\vec{a}'|^2 = \gamma^6 |\vec{a}_{\parallel}|^2 + \gamma^4 |\vec{a}_{\perp}|^2$$

# Distr. Angolare

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{\gamma^4(1 - \beta\mu)^4} \frac{dP'}{d\Omega'}$$

$$\frac{dP'}{d\Omega'} = \frac{q^2}{4\pi c^3} |\vec{a}'|^2 \sin^2 \Theta'$$

$$|\vec{a}'|^2 = \gamma^6 |\vec{a}_{\parallel}|^2 + \gamma^4 |\vec{a}_{\perp}|^2$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3} \frac{(\gamma^2 |\vec{a}_{\parallel}|^2 + |\vec{a}_{\perp}|^2)}{(1 - \beta\mu)^4} \sin^2 \Theta'$$

Ora bisogna trovare la relazione fra  $\Theta'$  e gli angoli in K

Il caso generale e' complicato dal punto di vista matematico ma e' facile in due casi limite

Caso 1:  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{v} \rightarrow \theta' = \Theta'$

Basta usare le formule di aberrazione relativistica

$$\cos \Theta = (\cos \Theta' + \beta) / (1 + \beta \cos \Theta')$$

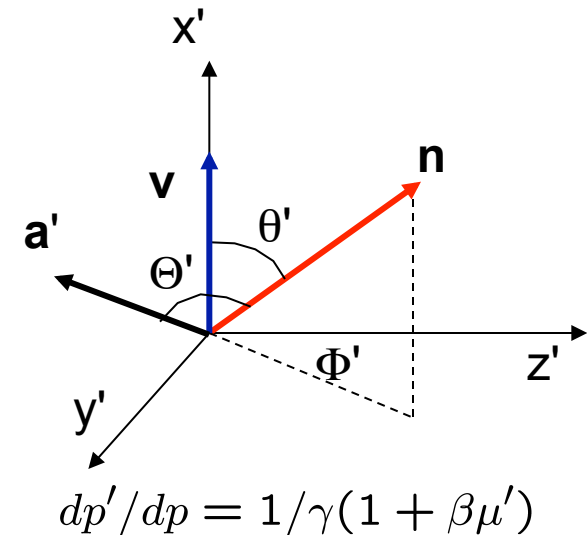
$$\sin \Theta = dp_y / dp = \frac{dp'_y}{(dp/dp') dp'} = \frac{dp'_y}{dp'} \left( \frac{dp'}{dp} \right) = \frac{dp'}{dp} \sin \Theta'$$

$$\sin \Theta = \frac{\sin \Theta'}{\gamma(1 + \beta\mu')}$$



$$\sin \Theta' = \frac{\sin \Theta}{\gamma(1 - \beta\mu)}$$

$$\left( \frac{dP}{d\Omega} \right)_{\parallel} = \frac{q^2}{4\pi c^3} \frac{|\vec{a}_{\parallel}|^2}{(1 - \beta\mu)^6} \sin^2 \Theta$$



(le trasf di Lorentz sono reciproche)

# Distr. Angolare

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3} \frac{(\gamma^2 |\vec{a}_{\parallel}|^2 + |\vec{a}_{\perp}|^2)}{(1 - \beta\mu)^4} \sin^2 \Theta'$$

Caso 2: **a** perp **v**

**a** giace nel piano yz

→ scelgo il rif in modo che **a** sia diretta lungo z'

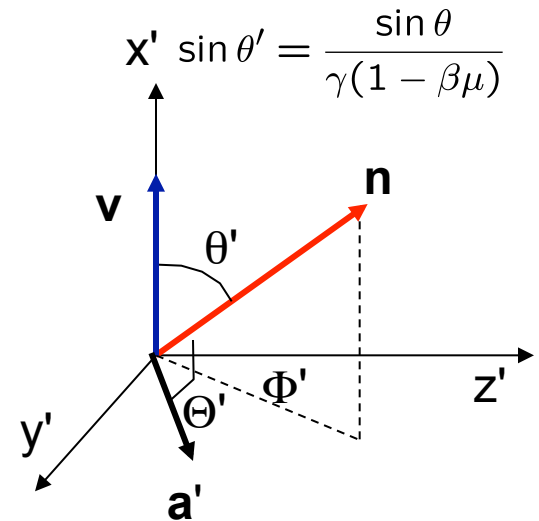
$$\longrightarrow \cos \Theta' = \frac{\vec{a}'}{a} \cdot \vec{n} \quad \longrightarrow \cos \Theta' = \sin \theta' \cos \Phi'$$

$$\sin^2 \Theta' = 1 - \cos^2 \Theta' = 1 - \sin^2 \theta' \cos^2 \Phi'$$

Uso le form. Di aberrazione

$$\sin^2 \Theta' = 1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \Phi}{\gamma^2 (1 - \beta\mu)^2}$$

$$\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)_{\perp} = \frac{q^2}{4\pi c^3} \frac{|\vec{a}_{\perp}|^2}{(1 - \beta\mu)^4} \left(1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \Phi}{\gamma^2 (1 - \beta\mu)^2}\right)$$

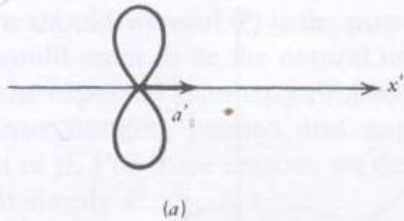


# Distr. Angolare

$$\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)_{\perp} = \frac{q^2}{4\pi c^3} \frac{|\vec{a}_{\perp}|^2}{(1 - \beta\mu)^4} \left(1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \Phi}{\gamma^2(1 - \beta\mu)^2}\right)$$

$$\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)_{\parallel} = \frac{q^2}{4\pi c^3} \frac{|\vec{a}_{\parallel}|^2}{(1 - \beta\mu)^6} \sin^2 \Theta$$

La direzione di  $\mathbf{a}$  definisce i dettagli della distribuzione, il fattore di boost picca in avanti tutta la radiazione emessa



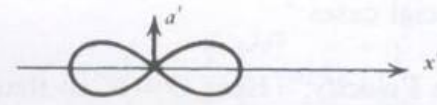
(a)

Figure 4.11a Dipole radiation pattern for particle at rest.



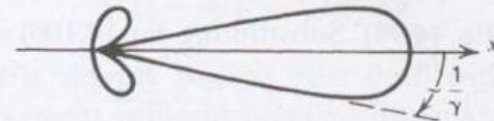
(b)

Figure 4.11b Angular distribution of radiation emitted by a particle with parallel acceleration and velocity.



(c)

Figure 4.11c Same as a.



(d)

Figure 4.11d Angular distribution of radiation emitted by a particle with perpendicular acceleration and velocity.