

# Integrazione numerica

Matteo Duranti

[matteo.duranti@pg.infn.it](mailto:matteo.duranti@pg.infn.it)

(cfr. <http://www.fisica.unipg.it/~borromeo/Appunti/FisComp/FisComp2014/pdf/integrali.pdf>

[https://it.wikipedia.org/wiki/Divisione\\_dei\\_polinomi](https://it.wikipedia.org/wiki/Divisione_dei_polinomi)

[https://en.wikipedia.org/wiki/Legendre\\_polynomials](https://en.wikipedia.org/wiki/Legendre_polynomials)

<https://pomax.github.io/bezierinfo/legendre-gauss.html>

<http://mathworld.wolfram.com/GaussianQuadrature.html>

<http://mathworld.wolfram.com/Legendre-GaussQuadrature.html>)

# Integrazione numerica

Sicuramente:

- integrali  $\rightarrow$  somme
- infinitesimi  $\rightarrow$  intervalli piccoli

In generale l'idea è quella di suddividere il range di integrazione in  $N$  intervalli:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=0}^N w_j f(x_j) \quad a \leq x \leq b$$

dove:

- $N$  deve essere il più grande possibile (ma questo "costa" tempo CPU);
- $w_j$  sono dei pesi che dipendono dal singolo intervallo scelto (che "dimensioni" avranno questi pesi?)

# Integrazione a spaziatura fissa

$$\int_a^b f(x) dx \longrightarrow x_j = a + h \cdot j \quad 0 \leq j \leq N \quad h = \frac{b - a}{N}$$

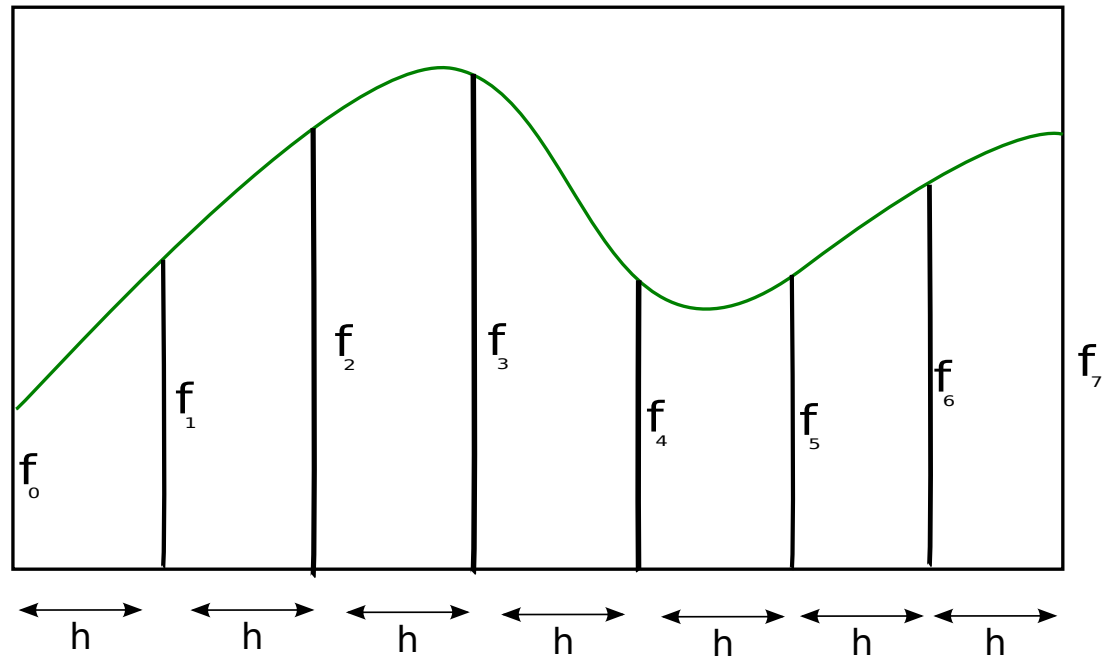
dove:

- $h$  è la dimensione dell'intervallino;

- $x_j$  è una posizione "caratteristica" ed univoca dell'intervallino (i.e. il bordo sinistro, ma anche il centro, quello destro, etc... sono scelte valide)

→

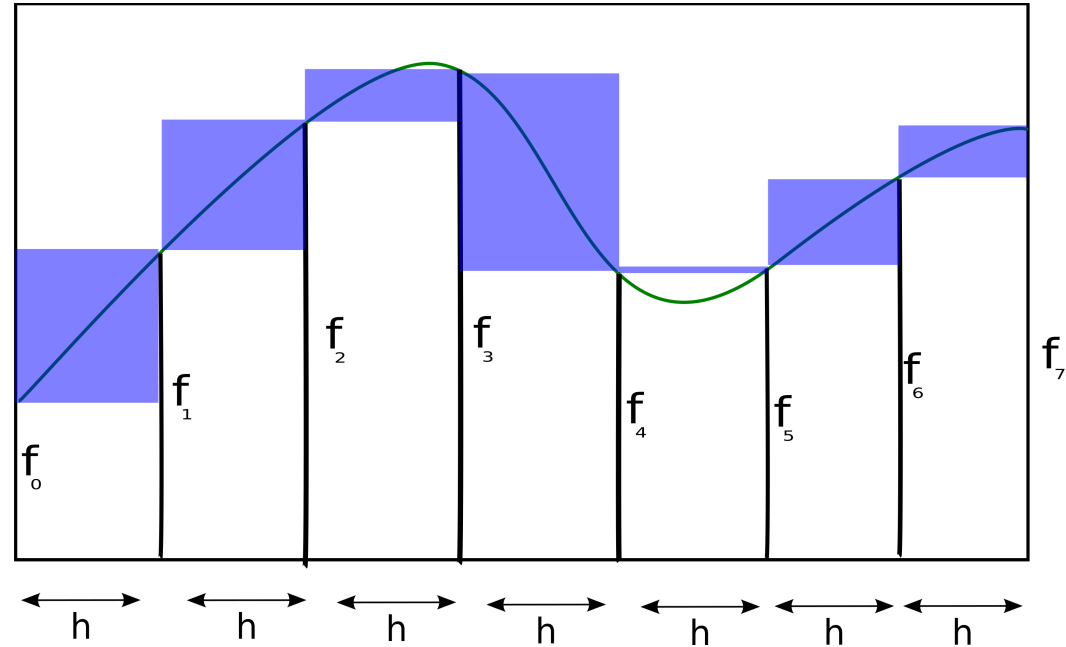
$$x_0 = a$$
$$x_N = b (*)$$



(\*  $N$  intervalli sono definiti da  $N+1$ , da  $0$  a  $N$ , "bordi")

# Integrazione a spaziatura fissa: metodo del rettangolo

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=0}^N w_j f(x_j)$$



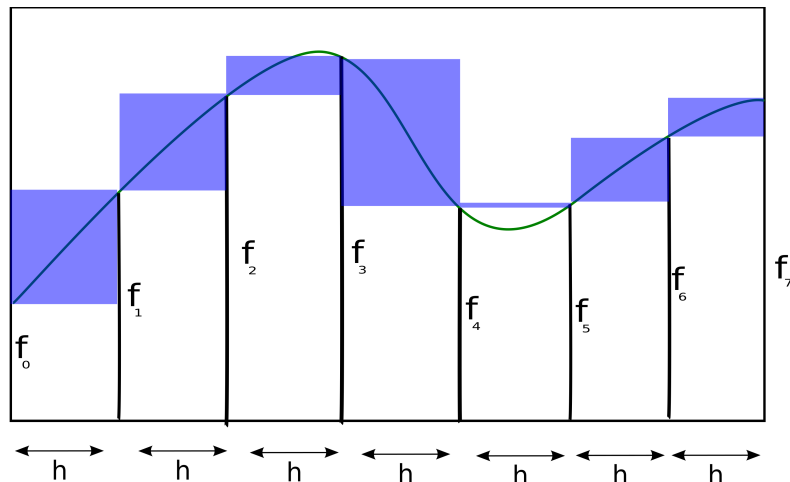
l'area di ogni intervallo viene calcolata come quella del rettangolo definito da  $h$  e  $f(x_j)$ :

$$\int_a^b f(x) dx = h \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)$$

quindi:

$$w_j = h$$

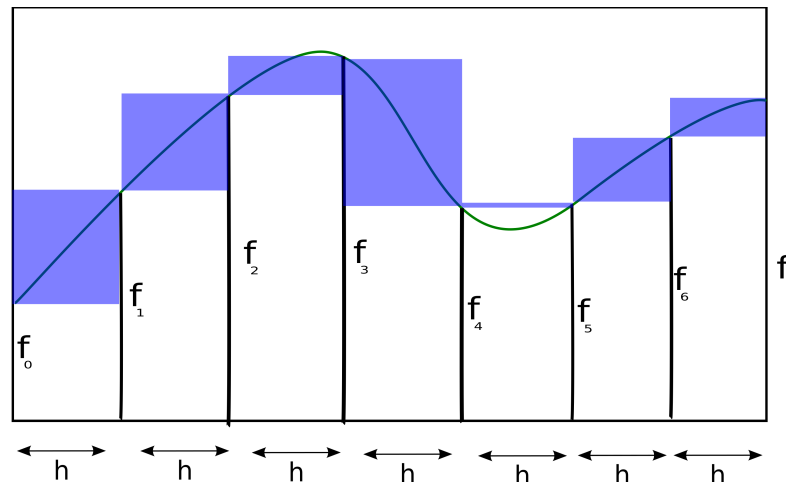
## Integrazione a spaziatura fissa: sviluppo in serie di Taylor



Si può anche pensare di “migliorare” la cosa usando la formula di Taylor.  
Per ogni intervallo  $[x_j, x_j+h]$ :

$$\begin{aligned}\int_0^h f(x) dx &= \int_0^h (f(0) + x \cdot f'(0) + O(x^2)) dx \\ &= h \cdot f(0) + \frac{h^2}{2} f'(0) + O(h^3)\end{aligned}$$

## Integrazione a spaziatura fissa: sviluppo in serie di Taylor



Si può anche pensare di “migliorare” la cosa usando la formula di Taylor.  
Per ogni intervallo  $[x_j, x_j+h]$ :

$$\begin{aligned}\int_0^h f(x) dx &= \int_0^h (f(0) + x \cdot f'(0) + O(x^2)) dx \\ &= h \cdot f(0) + \frac{h^2}{2} f'(0) + O(h^3)\end{aligned}$$

ovviamente questo lo possiamo fare se, oltre a conoscere  $f(x_j)$ , sappiamo anche  $f'(x_j)$ , cioè non è applicabile, ad esempio, se la nostra  $f(x)$  è una cosa, essa stessa, numerica:

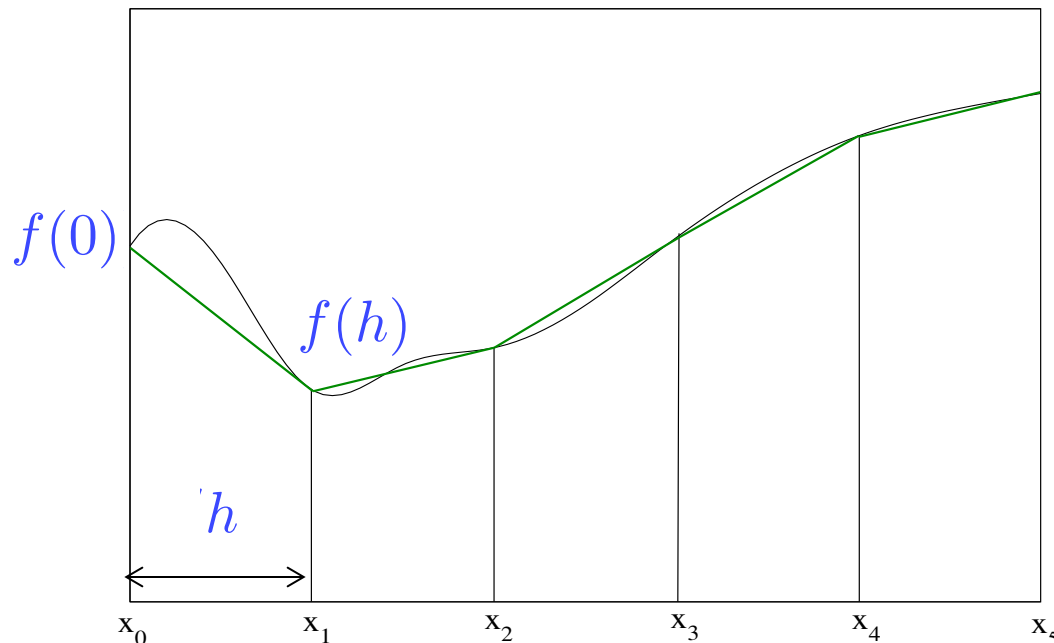
```
double func(double x)
```

## Integrazione a spaziatura fissa: sviluppo in serie di Taylor al primo ordine

Per ogni intervallo  $[x_j, x_j+h]$ :

$$\int_0^h f(x) dx = \int_0^h (f(0) + x \cdot f'(0) + O(x^2)) dx$$
$$= h \cdot f(0) + \frac{h^2}{2} f'(0) + O(h^3)$$

Fra due generici punti, però, posso sempre “tracciare una linea” e  $f'$  sarà, banalmente, il coefficiente angolare  $f'(0) = m = (f(h) - f(0)) / h$



## Integrazione a spaziatura fissa: sviluppo in serie di Taylor al primo ordine

Per ogni intervallo  $[x_j, x_j+h]$ :

$$\begin{aligned}\int_0^h f(x) dx &= \int_0^h (f(0) + x \cdot f'(0) + O(x^2)) dx \\ &= h \cdot f(0) + \frac{h^2}{2} f'(0) + \cancel{O(h^3)}\end{aligned}$$

Fra due generici punti, però, posso sempre “tracciare una linea” e  $f'$  sarà, banalmente, il coefficiente angolare  $f'(0) = m = (f(h) - f(0)) / h$

$$\rightarrow \int_0^h f(x) dx = h \cdot f(0) + \frac{h}{2} \cdot (f(h) - f(0)) = \frac{h}{2} \cdot f(0) + \frac{h}{2} \cdot f(h)$$

andando a integrare su 2 intervalli:

$$\int_0^{2h} f(x) dx = \frac{h}{2} \cdot f(0) + h \cdot f(h) + \frac{h}{2} \cdot f(2h)$$

e generalizzando a  $N$  (tali da coprire tutto il range  $[a,b]$ ):

$$\int_0^{Nh} f(x) dx = \frac{h}{2} f(0) + h f(h) + \dots + h f((N-1)h) + \frac{h}{2} f(Nh)$$



# Integrazione a spaziatura fissa: sviluppo in serie di Taylor al primo ordine

Per ogni intervallo  $[x_j, x_j+h]$ :

$$\int_0^h f(x) dx = \int_0^h (f(0) + x \cdot f'(0) + O(x^2)) dx$$
$$= h \cdot f(0) + \frac{h^2}{2} f'(0) + O(h^3)$$

“interpolando” linearmente e generalizzando a  $N$  (tali da coprire tutto il range  $[a,b]$ ):

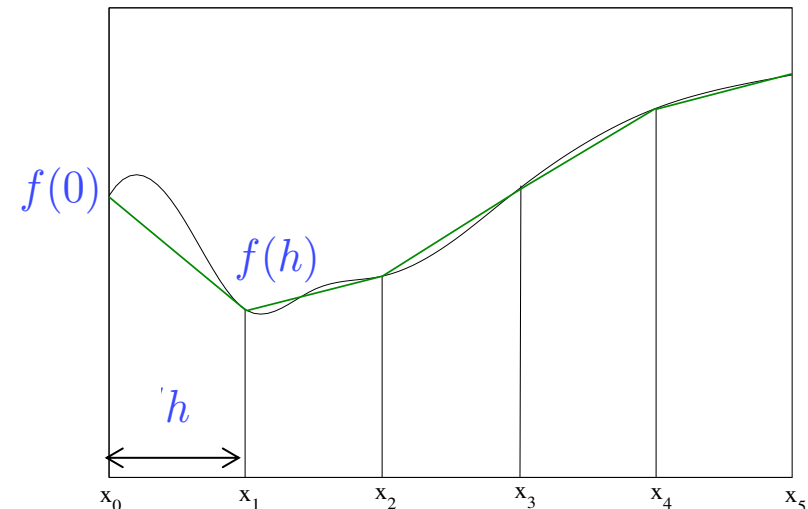
$$\int_0^{Nh} f(x) dx = \frac{h}{2} f(0) + hf(h) + \dots + hf((N-1)h) + \frac{h}{2} f(Nh)$$

che quindi, in generale, significa:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=0}^N w_j f(x_j)$$

-  $w_0 = w_5 = h/2$

-  $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = h$



# Integrazione a spaziatura fissa: sviluppo in serie di Taylor al primo ordine

Per ogni intervallo  $[x_j, x_j+h]$ :

$$\int_0^h f(x) dx = \int_0^h (f(0) + x \cdot f'(0) + O(x^2)) dx$$
$$= h \cdot f(0) + \frac{h^2}{2} f'(0) + O(h^3)$$

“interpolando” linearmente e generalizzando a  $N$  (tali da coprire tutto il range  $[a,b]$ ):

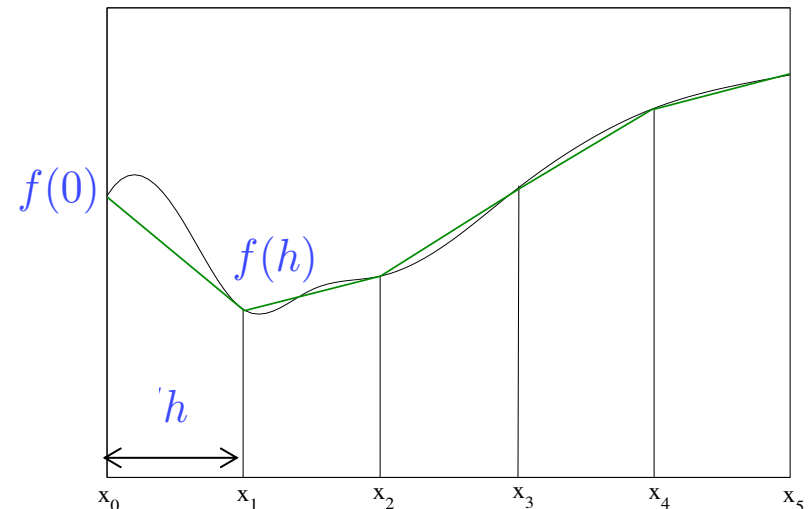
$$\int_0^{Nh} f(x) dx = \frac{h}{2} f(0) + hf(h) + \dots + hf((N-1)h) + \frac{h}{2} f(Nh)$$

che quindi, in generale, significa:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=0}^N w_j f(x_j)$$

-  $w_0 = w_N = h/2$

-  $w_1 = w_2 = \dots = w_{N-1} = h$

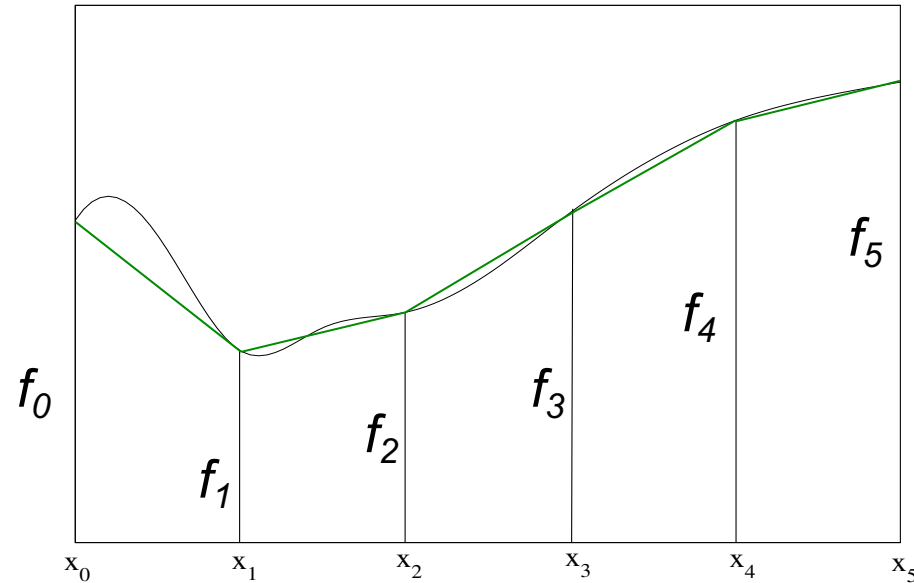


# Integrazione a spaziatura fissa: metodo del trapezio

Invece che integrare tanti rettangolini possiamo pensare di fare meglio ed integrare tanti trapezi:

L'area di ogni trapezio sarà:

$$\frac{1}{2} (f_j + f_{j+1}) (x_{j+1} - x_j) =$$
$$\frac{1}{2} (f_j + f_{j+1}) h$$

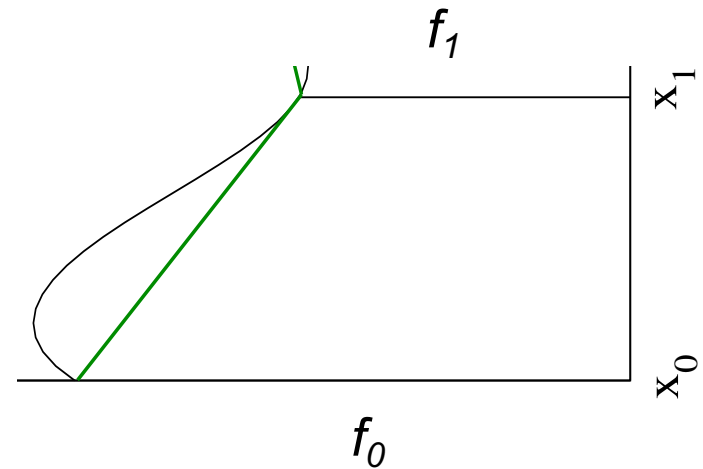


## Integrazione a spaziatura fissa: metodo del trapezio

Invece che integrare tanti rettangolini possiamo pensare di fare meglio ed integrare tanti trapezi:

L'area di ogni trapezio sarà:

$$\frac{1}{2} (f_j + f_{j+1}) (x_{j+1} - x_j) =$$
$$\frac{1}{2} (f_j + f_{j+1}) h$$

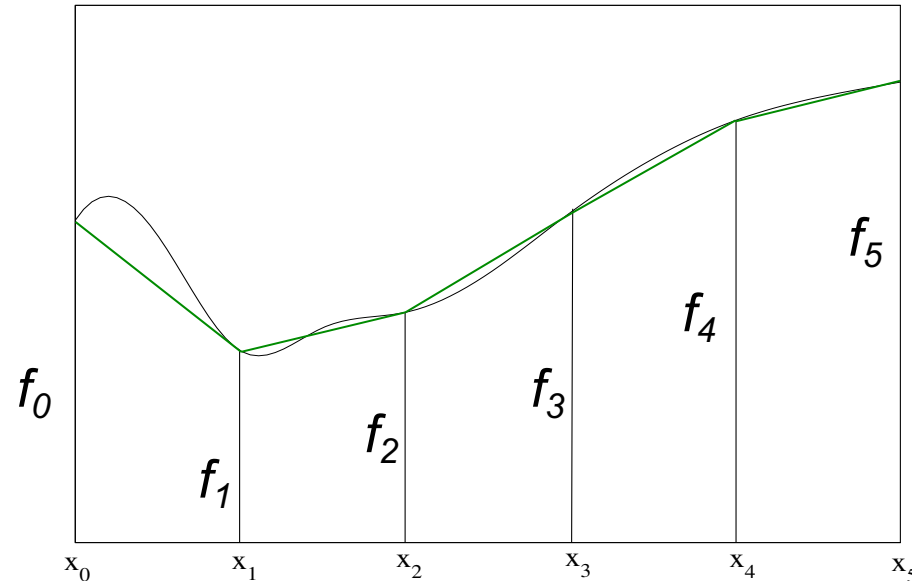


# Integrazione a spaziatura fissa: metodo del trapezio

Invece che integrare tanti rettangolini possiamo pensare di fare meglio ed integrare tanti trapezi:

L'area di ogni trapezio sarà:

$$\frac{1}{2} (f_j + f_{j+1}) (x_{j+1} - x_j) = \frac{1}{2} (f_j + f_{j+1}) h$$



e quindi, nell'esempio con  $N=5$ ,  $x_0=a$ ,  $x_5=b$ :

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot (f_0 + f_1) + \frac{1}{2} \cdot (f_1 + f_2) + \frac{1}{2} \cdot (f_2 + f_3) + \frac{1}{2} \cdot (f_3 + f_4) + \frac{1}{2} \cdot (f_4 + f_5) \right)$$

Cioè, in generale:

- $w_0 = w_5 = h/2$
- $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = h$

# Integrazione a spaziatura fissa: metodo del trapezio

Invece che integrare tanti rettangolini possiamo pensare di fare meglio ed integrare tanti trapezi:

L'area di ogni trapezio sarà:

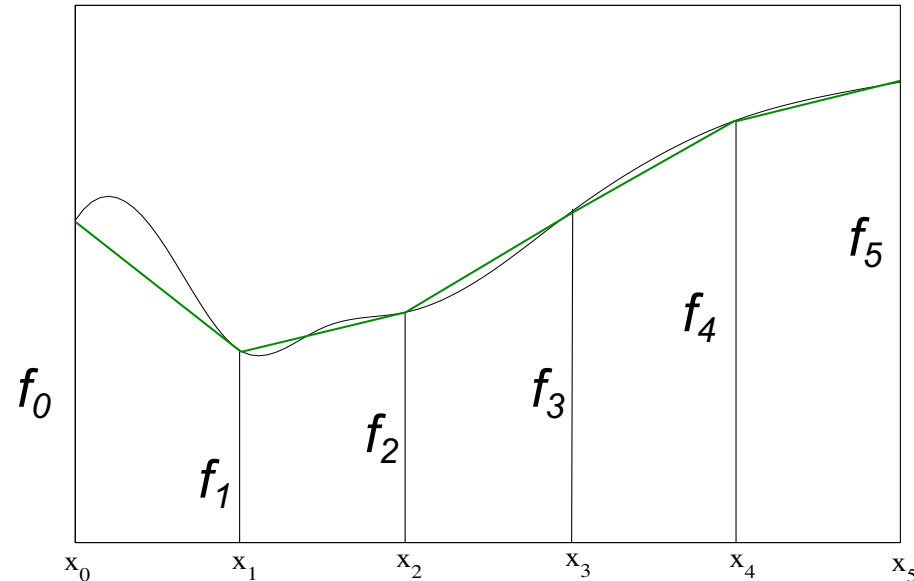
$$\frac{1}{2} (f_j + f_{j+1}) (x_{j+1} - x_j) = \frac{1}{2} (f_j + f_{j+1}) h$$

e quindi, nell'esempio con  $N=5$ ,  $x_0=a$ ,  $x_5=b$ :

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot (f_0 + f_1) + \frac{1}{2} \cdot (f_1 + f_2) + \frac{1}{2} \cdot (f_2 + f_3) + \frac{1}{2} \cdot (f_3 + f_4) + \frac{1}{2} \cdot (f_4 + f_5) \right)$$

Cioè, in generale:

- $w_0 = w_N = h/2$
- $w_1 = w_2 = \dots = w_{N-1} = h$



Equivale a sviluppare in serie di Taylor, fermandosi al primo ordine

## Integrazione a spaziatura fissa: formula di Simpson

Assumiamo che l'integrale, nell'intervallo  $[x_j, x_j+2h]$ , possa essere scritto così:

$$\int_0^{2h} f(x) dx = Af(0) + Bf(h) + Cf(2h)$$

---

Sviluppando la  $f(x)$  in serie di Taylor ed integrandola:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2}x^2 f''(0) + \frac{1}{6}x^3 f'''(0) + \frac{1}{24}x^4 f^{iv}(0)$$

$$\int_0^{2h} f(x) dx = 2hf(0) + \frac{1}{2}(2h)^2 f'(0) + \frac{1}{6}(2h)^3 f''(0)$$

$$+ \frac{1}{24}(2h)^4 f'''(0) + \frac{1}{120}(2h)^5 f^{iv}(0) + O(h^6)$$

$$\int_0^{2h} f(x) dx = 2hf(0) + 2h^2 f'(0) + \frac{4}{3}h^3 f''(0)$$

$$+ \frac{2}{3}h^4 f'''(0) + \frac{4}{15}h^5 f^{iv}(0) + O(h^6)$$

che è valutabile nel solo punto  $x=0$  ( $f(0)$ ,  $f'(0)$ ,  $f''(0)$ , etc... )

## Integrazione a spaziatura fissa: formula di Simpson

$$\int_0^{2h} f(x) dx = Af(0) + Bf(h) + Cf(2h)$$

Se ora usiamo lo sviluppo, che dipende solo da  $f(0)$ ,  $f'(0)$ ,  $f''(0)$ , etc... per valutare  $f(h)$  e  $f(2h)$  troviamo un'altra espressione che sappiamo valutare sul solo punto  $x=0$ :

$$\begin{aligned} &= Af(0) + B \left[ f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2}f''(0) + \frac{h^3}{6}f'''(0) + \frac{h^4}{24}f^{iv}(0) \right] \\ &+ C \left[ f(0) + 2hf'(0) + 2h^2f''(0) + \frac{4}{3}h^3f'''(0) + \frac{2}{3}h^4f^{iv}(0) \right] \\ &= (A + B + C)f(0) + h(B + 2C)f'(0) + h^2 \left[ \frac{B}{2} + 2C \right] f''(0) \\ &+ h^3 \left[ \frac{1}{6}B + \frac{4}{3}C \right] f'''(0) + h^4 \left[ \frac{1}{24}B + \frac{2}{3}C \right] f^{iv}(0) \end{aligned}$$

che dovrà essere uguale a:

$$= 2hf(0) + 2h^2f'(0) + \frac{4}{3}h^3f''(0) + \frac{2}{3}h^4f'''(0) + \frac{4}{15}h^5f^{iv}(0) + O(h^6)$$



# Integrazione a spaziatura fissa: formula di Simpson

$$\int_0^{2h} f(x) dx = Af(0) + Bf(h) + Cf(2h)$$

I coefficienti delle derivate dello stesso ordine dovranno coincidere:

1.  $A + B + C = 2h$
2.  $h(B + 2C) = 2h^2$
3.  $h^2(\frac{1}{2}B + 2C) = \frac{4}{3}h^3$
4.  $h^3(\frac{1}{6}B + \frac{4}{3}C) = \frac{2}{3}h^4$
5.  $h^4(\frac{1}{24}B + \frac{2}{3}) = \frac{4}{15}h^5$

Le prime tre equazioni sono un sistema di 3 equazioni in 3 incognite. Sottraendo  $h/2$  volte la seconda dalla terza, si ottiene:

$$C = \frac{h}{3} \quad B = 2h - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}h \quad A = 2h - \frac{4}{3}h = \frac{1}{3}h$$

# Integrazione a spaziatura fissa: formula di Simpson

E le altre due equazioni? Sono soddisfatte?

Prendiamo la quarta:

$$B + 8C = 4h \quad \text{con} \quad B = \frac{4}{3}h \quad \text{e} \quad C = \frac{1}{3}h$$

$$\frac{4}{3}h + \frac{8}{3}h = \frac{12}{3}h = 4h$$

è soddisfatta. La quinta, invece, non lo è:

$$5. \quad h^4 \left( \frac{1}{24}B + \frac{2}{3} \right) \stackrel{?}{=} \frac{4}{15}h^5 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{18}h^5 + \frac{2}{3}h^4 \neq \frac{4}{15}h^5$$

Questo significa che

$$\int_0^{2h} f(x) dx = Af(0) + Bf(h) + Cf(2h)$$

non è in grado di descrivere una qualsiasi funzione.

Ci sarà un errore di ordine  $h^5$

## Integrazione a spaziatura fissa: formula di Simpson

La formula di Simpson integra, esattamente, i polinomi di grado non superiore al terzo.

Se prendiamo, infatti,  $x^3$ , che sappiamo integrare “a mano”:

$$\int_0^{2h} x^3 dx = \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^{2h} = \frac{2^4 h^4}{4} = 4h^4$$

La formula di Simpson ci da esattamente lo stesso valore:

$$\int_0^{2h} f(x) dx = Af(0) + Bf(h) + Cf(2h)$$

$$C = \frac{h}{3} \quad B = 2h - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}h \quad A = 2h - \frac{4}{3}h = \frac{1}{3}h$$

$$\rightarrow \frac{1}{3}hf(x=0) + \frac{4}{3}hf(x=h) + \frac{1}{3}hf(x=2h)$$

$$= 0 + \frac{4}{3}h^4 + \frac{8}{3}h^4 = \frac{12}{3}h^4 = 4h^4$$

# Integrazione a spaziatura fissa: formula di Simpson

Nel caso generale dell'intervallo  $[a, b]$ , diviso in tanti intervalli di ampiezza  $2h$ :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{a+2h} f(x) dx + \int_{a+2h}^{a+4h} f(x) dx + \int_{a+4h}^{a+6h} f(x) dx + \dots + \int_{b-2h}^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = h \left( \frac{1}{3} f_0 + \frac{4}{3} f_1 + \frac{1}{3} f_2 \right) + h \left( \frac{1}{3} f_2 + \frac{4}{3} f_3 + \frac{1}{3} f_4 \right) + \dots + h \left( \frac{1}{3} f_{N-2} + \frac{4}{3} f_{N-1} + \frac{1}{3} f_N \right)$$

$$\int_a^b f(x) dx = h \left( \frac{1}{3} f_0 + \frac{4}{3} f_1 + \frac{2}{3} f_2 + \frac{4}{3} f_3 + \dots + \frac{4}{3} f_{N-1} + \frac{1}{3} f_N \right)$$

Cioè, in generale:

$$\begin{aligned} -W_0 &= W_N = 1/3 h \\ -W_1 = W_3 = \dots = W_{N-3} = W_{N-1} &= 4/3 h \\ -W_2 = W_4 = \dots = W_{N-4} = W_{N-2} &= 2/3 h \end{aligned}$$

*... ed è bene verificare che  $N$  sia multiplo di 2 ...*

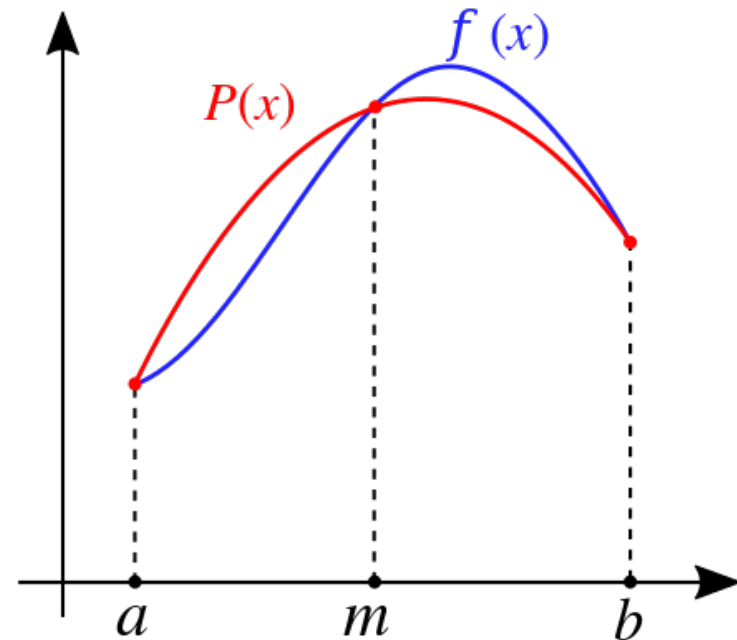
# Integrazione a spaziatura fissa: formula di Simpson

Aver ricondotto l'integrale ad un'espressione con 3 coefficienti liberi,  $A$ ,  $B$  e  $C$

$$\int_0^{2h} f(x) dx = Af(0) + Bf(h) + Cf(2h)$$

significa descrivere la  $f(x)$ , all'interno di ogni intervallo, con una *parabola*

$$f(x) \approx P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$



# Metodo di Gauss (Quadratura di Gauss)

Finora ci siamo limitati a intervalli regolari (spaziatura fissa) e l'unico modo per "migliorare" la precisione è quello di aumentare il grado dello sviluppo di Taylor, per integrare polinomi di ordine crescente.

Usando l'arbitrarietà nelle posizioni  $x_j$ , si possono trovare formule esatte.

Consideriamo, per semplicità, solo intervalli  $[-1, 1]$ . Ogni intervallo generico  $[a, b]$ , potrà esservi ricondotto con un cambio di variabile:

$$\int_a^b f(x) dx \quad x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}y$$

con  $-1 \leq y \leq 1$ ,  $dx = \frac{b-a}{2} dy$  ottengo

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}y\right) dy$$

# Metodo di Gauss

Scegliendo dei punti,  $x_j$ , ad hoc, dove valutare la funzione, è possibile risalire ai pesi,  $w_j$ , per rendere l'integrazione esatta.

Il sistema di  $N$  equazioni in  $N$  incognite ( $w_j$ )

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = \sum_{j=1}^N w_j \cdot p(x_j)$$

ha un'unica soluzione se  $p(x)$  è uno dei monomi del tipo  $1, x, x^2, x^3, \dots, x^{N-1}$  o una loro combinazione lineare, cioè un qualsiasi polinomio di grado inferiore ad  $N$

→ possiamo però usare l'arbitrarietà dei punti  $x_j$  per integrare polinomi di grado superiore

# Metodo di Gauss

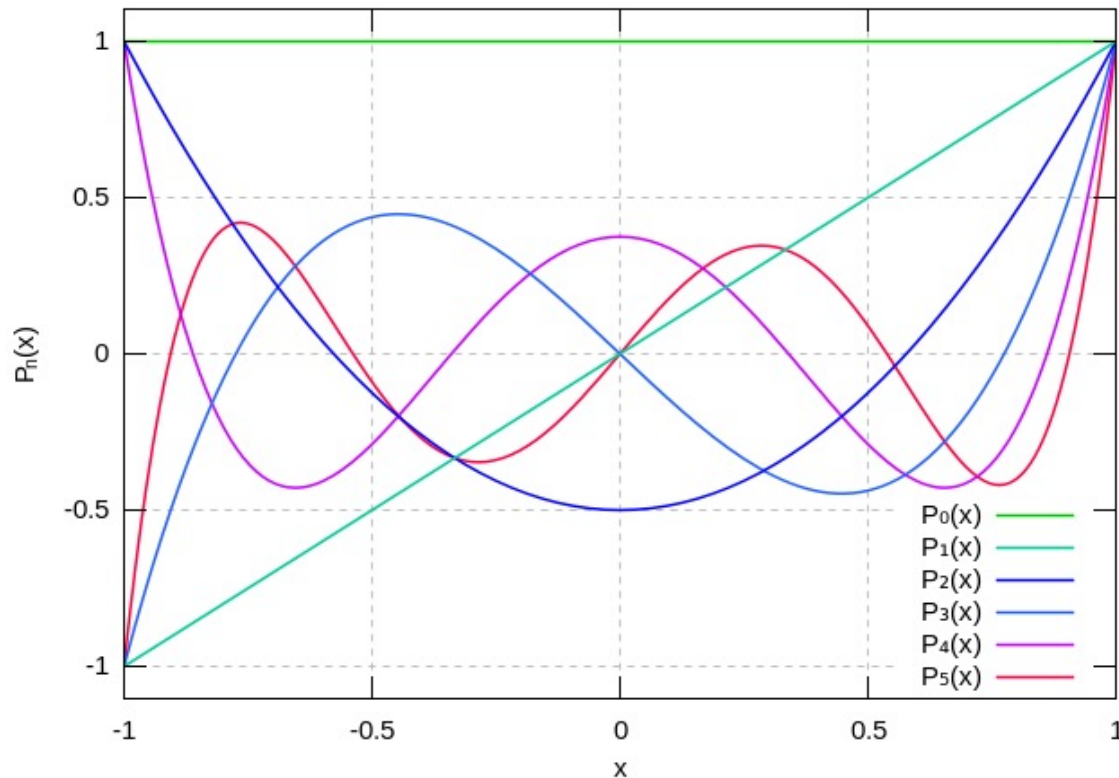
Polinomi di Legendre,  $P_n(x)$ :

$$P_0(x) = 1 \quad P_1(x) = x$$

$$nP_n(x) = (2n - 1)xP_{n-1}(x) - (n - 1)P_{n-2}(x)$$

quindi per  $n=2$ :

$$2P_2(x) = 3xP_1(x) - P_0(x) = 3x^2 - 1 \implies P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$





# Metodo di Gauss

Se:

- $A(x)$  è un polinomio di grado  $M$
- $B(x)$  è un polinomio di grado  $N$

è sempre possibile scrivere

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

dove:

- possiamo scegliere un  $R(x)$  di grado minore di  $N$  (i.e.  $N-1$ )
- $Q(x)$  è di grado  $M-N$

# Metodo di Gauss

Se:

- $p(x)$  è un polinomio di grado  $M = 2N-1$
- $P_N(x)$  è un polinomio di grado  $N$

è sempre possibile scrivere

$$p(x) = q(x)P_N(x) + r(x)$$

dove:

- $r(x)$  è grado minore di  $N$  (i.e.  $N-1$ )
- $q(x)$  è di grado  $M-N = 2N-1-N = N-1$

# Metodo di Gauss

Se:

- $p(x)$  è un polinomio di grado  $2N-1$
- $P_N(x)$  è un polinomio di grado  $N$

è sempre possibile scrivere

$$p(x) = q(x)P_N(x) + r(x)$$

dove:

- $r(x)$  è grado minore di  $N$  (i.e.  $N-1$ )
- $q(x)$  è di grado  $2N-1-N = N-1$

Ne segue che il nostro integrale può essere scritto come:

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = \int_{-1}^1 q(x)P_N(x) dx + \int_{-1}^1 r(x) dx$$

# Metodo di Gauss

Sfruttando ora la proprietà dei polinomi di Legendre di essere ortogonali a tutti i polinomi di grado inferiore:

$$\int_{-1}^1 q(x) P_N(x) dx = 0 \quad \text{se } q(x) \text{ è di grado inferiore a } N$$

$$\rightarrow \int_{-1}^1 p(x) dx = \int_{-1}^1 r(x) dx$$

L'integrazione del polinomio di grado  $2N-1$  è ridotta a quella di un polinomio di grado  $N-1$ , che però non conosco

# Metodo di Gauss

Sfruttando ora la proprietà dei polinomi di Legendre di essere ortogonali a tutti i polinomi di grado inferiore:

$$\int_{-1}^1 q(x) P_N(x) dx = 0 \quad \text{se } q(x) \text{ è di grado inferiore a } N$$

$$\rightarrow \int_{-1}^1 p(x) dx = \int_{-1}^1 r(x) dx = \sum_{k=1}^N w_k r(x_k)$$

L'integrazione del polinomio di grado  $2N-1$  è ridotta a quella di un polinomio di grado  $N-1$ , che però non conosco

(\*ricorda: utilizzando una somma su  $N$  termini si integra esattamente un polinomio di grado fino a  $N-1$ )

# Metodo di Gauss

Possiamo utilizzare l'arbitrarietà nella scelta degli  $x_j$  per "liberarci" di  $r(x)$ .

Dato che:

$$p(x) = q(x)P_N(x) + r(x)$$

posso scegliere, per le  $x_j$ , gli  $N$  zeri di  $P_N(x)$ , che sappiamo esistere, sono reali e tabulati.

In questo caso, quindi:

$$p(x_j) = q(x_j)P_N(x_j) + r(x_j) = r(x_j)$$

e cioè la mia  $r(x)$ , incognita, almeno nei punti  $x_j$ , è uguale a  $p(x)$ , da cui:

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = \sum_{k=1}^N w_k r(x_k) = \sum_{k=1}^N w_k p(x_k)$$

# Metodo di Gauss

- gli  $N$   $x_k$  sono gli zeri di  $P_N(x)$   $\rightarrow$  tabulati
- si dimostra che anche gli  $w_k$  non dipendono da  $p(x)$ ,  $q(x)$  e  $r(x)$  ma solo da  $P_N(x)$ :

$$w_i = \frac{2}{(1 - x_i^2) [P'_n(x_i)]^2} = \frac{2(1 - x_i^2)}{(n + 1)^2 [P_{n+1}(x_i)]^2}$$

che quindi possono essere calcolati, anch'essi, una volta per tutte, e tabulati

# Metodo di Gauss

- gli  $N$   $x_k$  sono gli zeri di  $P_N(x)$  → tabulati
- si dimostra che anche gli  $w_k$  non dipendono da  $p(x)$ ,  $q(x)$  e  $r(x)$  ma solo da  $P_N(x)$  → tabulati

Per una generica funzione,  $f(x)$ , si scriverà quindi:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^N w_k f(x_k)$$

Questa formula a  $N$  punti:

- è esatta per polinomi fino al grado  $2N-1$
- integra bene funzioni polinomiali o che assomigliano a polinomi
- non funziona bene con funzioni come  $e^{-x}$  o  $e^{-x^2}$



# Metodo di Gauss

- gli  $N x_k$  sono gli zeri di  $P_N(x) \rightarrow$  tabulati
- si dimostra che anche gli  $w_k$  non dipendono da  $p(x)$ ,  $q(x)$  e  $r(x)$  ma solo da  $P_N(x) \rightarrow$  tabulati

## TABLE OF THE ZEROS OF THE LEGENDRE POLYNOMIALS OF ORDER 1-16 AND THE WEIGHT COEFFICIENTS FOR GAUSS' MECHANICAL QUADRATURE FORMULA<sup>1</sup>

ARNOLD N. LOWAN, NORMAN DAVIDS AND ARTHUR LEVENSON

Gauss' method of mechanical quadrature has the advantage over most methods of numerical integration in that it requires about half the number of ordinate computations. This is desirable when such computations are very laborious, or when the observations necessary to determine the average value of a continuously varying physical quantity are very costly. Gauss' classical result<sup>2</sup> states that, for the range  $(-1, +1)$ , the "best" accuracy with  $n$  ordinates is obtained by choosing the corresponding abscissae at the zeros  $x_1, \dots, x_n$  of the Legendre polynomials  $P_n(x)$ . With each  $x_i$  is associated a constant  $a_i$  such that

$$(1) \quad \int_{-1}^1 f(x) dx \sim a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + \dots + a_n f(x_n).$$

The accompanying table computed by the Mathematical Tables Project gives the roots  $x_i$  for each  $P_n(x)$  up to  $n=16$ , and the corresponding weight coefficients  $a_i$ , to 15 decimal places.

The first such table, computed by Gauss gave 16 places up to  $n=7$ .<sup>3</sup> More recently work was done by Nyström,<sup>4</sup> who gave 7 decimals up to  $n=10$ , but for the interval  $(-1/2, +1/2)$ . B. de F. Bayly has given the roots and coefficients of  $P_{12}(x)$  to 13 places.<sup>5</sup>

The Gaussian quadrature formula for evaluating an integral with arbitrary limits  $(p, q)$  is given by

Presented to the Society, October 25, 1941, under the title *Tables for Gauss' mechanical quadrature formula*; received by the editors December 18, 1941.

<sup>1</sup> The results reported here were obtained in the course of the work done by the Mathematical Tables Project conducted by the Work Projects Administration for New York City under the sponsorship of the National Bureau of Standards, Dr. Lyman J. Briggs, Director.

Oct 25, 1941

# Metodo di Gauss

- gli  $N x_k$  sono gli zeri di  $P_N(x) \rightarrow$  tabulati
- si dimostra che anche gli  $w_k$  non dipendono da  $p(x)$ ,  $q(x)$  e  $r(x)$  ma solo da  $P_N(x) \rightarrow$  tabulati

Qui <https://pomax.github.io/bezierinfo/legendre-gauss.html> un codice Mathematica per calcolare nodi e pesi e tutte le tabelle fino a  $n=64$ . Ho caricato qui [Legendre-GaussQuadrature.nb](#) (e su Unistudium) il foglio Mathematica (rivisto e corretto):

```
In[37]:= symboliclegendre[n_, x_] := Solve[LegendreP[n, x] == 0];  
legendreprime[n_, a_] := D[LegendreP[n, x], x] /. x -> a;  
weights[n_, x_] := 2 / ((1 - x^2) legendreprime[n, x]^2);  
  
(*how many terms should be generated*)  
h = 10;  
  
(*what numerical precision is desired?*)  
precision = 16;
```

# Metodo di Gauss

```
str = OpenWrite["~/Desktop/lgvalues.txt"];
Do[
  WriteString[str,
    "\nn = ",
    n,
    "\n"
  ];
  WriteString[str,
    "i = \t\t\t weight, w_{i} \t\t\t abscissa x_{i}\n"
  ];
  Print[
    "\nn = ",
    n
  ];
  Print[
    "i \t\t\t weight, w_{i} \t\t\t abscissa x_{i}"
  ];
  nlist = symboliclegendre[n, x];
  xnlist = x /. nlist;
  Do[
    WriteString[str,
      i,
      ": \t\t\t ",
      ScientificForm[Re[N[weights[n, Part[xnlist, i]], {Infinity, precision}]],
        NumberFormat -> (#1 <> "*10^(" <> #3 <> ")" &)] // ToString,
      "\t\t\t ",
      ScientificForm[Re[N[Part[xnlist, i], {Infinity, precision}]],
        NumberFormat -> (#1 <> "*10^(" <> #3 <> ")" &)] // ToString,
      "\n"
    ];
  Print[
```

# Metodo di Gauss

```
Print[
  i,
  ": \t\t\t ",
  Re[N[weights[n, Part[xnlist, i]], {Infinity, precision}]],
  " \t\t\t ",
  Re[N[Part[xnlist, i], {Infinity, precision}]]
]
, {i, Length[xnlist]};
, {n, 2, h}];
Write[str];
Close[str];
```

# Metodo di Gauss

E qui il suo output:

n = 2

i	weight, $w_{\{i\}}$	abscissa $x_{\{i\}}$
1:	1.0000000000000000	-0.577350269189626
2:	1.0000000000000000	0.577350269189626

n = 3

i	weight, $w_{\{i\}}$	abscissa $x_{\{i\}}$
1:	0.8888888888888889	$0. \times 10^{-16}$
2:	0.5555555555555556	-0.774596669241483
3:	0.5555555555555556	0.774596669241483

n = 4

i	weight, $w_{\{i\}}$	abscissa $x_{\{i\}}$
1:	0.652145154862546	-0.339981043584856
2:	0.652145154862546	0.339981043584856
3:	0.347854845137454	-0.861136311594053
4:	0.347854845137454	0.861136311594053

n = 5

i	weight, $w_{\{i\}}$	abscissa $x_{\{i\}}$
1:	0.5688888888888889	$0. \times 10^{-16}$
2:	0.478628670499366	-0.538469310105683

# Metodo di Gauss

E qui il suo output:

```
4:          0.236926885056189          -0.906179845938664
5:          0.236926885056189          0.906179845938664
```

n = 6

```

i          weight, w_{i}          abscissa x_{i}
1:          0.3607615730481386          0.6612093864662645
2:          0.3607615730481386          -0.6612093864662645
3:          0.4679139345726910          -0.2386191860831969
4:          0.4679139345726910          0.2386191860831969
5:          0.1713244923791703          -0.9324695142031520
6:          0.1713244923791703          0.9324695142031520
```

n = 7

```

i          weight, w_{i}          abscissa x_{i}
1:          0.417959183673469          0. × 10-16
2:          0.3818300505051189          0.4058451513773972
3:          0.3818300505051189          -0.4058451513773972
4:          0.2797053914892767          -0.7415311855993944
5:          0.2797053914892767          0.7415311855993944
6:          0.1294849661688697          -0.9491079123427585
7:          0.1294849661688697          0.9491079123427585
```

# Metodo di Gauss

Il metodo visto è in realtà solo un caso particolare di una classe di “quadrature di Gauss”: quadratura di Legendre-Gauss.

Introducendo una funzione positiva di “peso” dentro l’integranda e permettendo intervalli di integrazioni diversi da  $[-1, 1]$ :

$$\int_a^b \omega(x) f(x) dx$$

esistono, per alcuni valori di  $a$ ,  $b$  e  $\omega$ , delle regole di integrazione simili a quelle di Legendre-Gauss ( $a=1$ ,  $b=1$ ,  $\omega=1$ ):

Interval	$\omega(x)$	Orthogonal polynomials	A & S	For more information, see ...
$[-1, 1]$	1	Legendre polynomials	25.4.29	See <a href="#">Gauss–Legendre quadrature</a> above
$(-1, 1)$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ , $\alpha, \beta > -1$	Jacobi polynomials	25.4.33 ( $\beta = 0$ )	<a href="#">Gauss–Jacobi quadrature</a>
$(-1, 1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	Chebyshev polynomials (first kind)	25.4.38	<a href="#">Chebyshev–Gauss quadrature</a>
$[-1, 1]$	$\sqrt{1-x^2}$	Chebyshev polynomials (second kind)	25.4.40	<a href="#">Chebyshev–Gauss quadrature</a>
$[0, \infty)$	$e^{-x}$	Laguerre polynomials	25.4.45	<a href="#">Gauss–Laguerre quadrature</a>
$[0, \infty)$	$x^\alpha e^{-x}$ , $\alpha > -1$	Generalized Laguerre polynomials		<a href="#">Gauss–Laguerre quadrature</a>
$(-\infty, \infty)$	$e^{-x^2}$	Hermite polynomials	25.4.46	<a href="#">Gauss–Hermite quadrature</a>