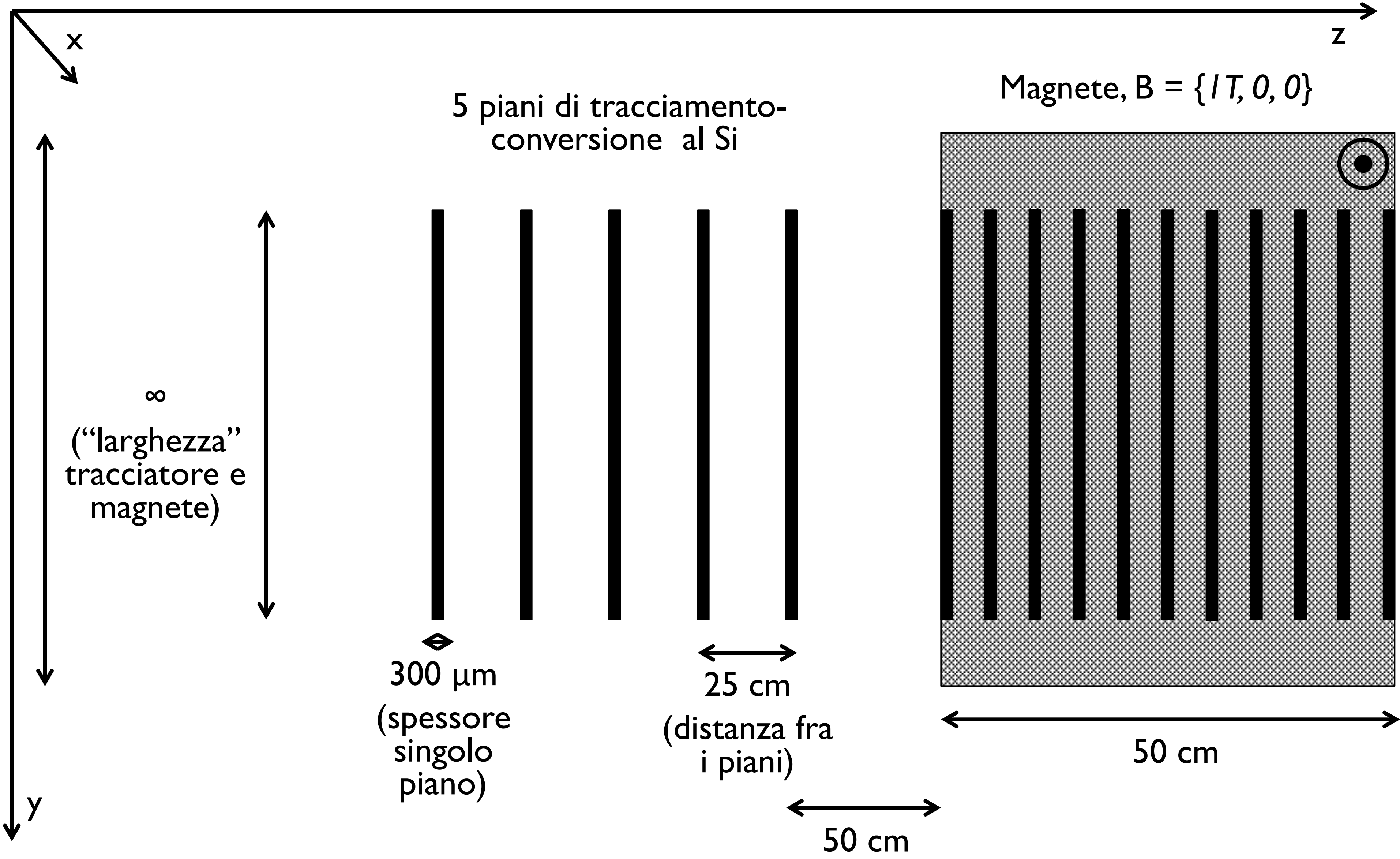
Esercitazione finale: “Tracker-converter di fotoni + spettrometro magnetico”

Matteo Duranti

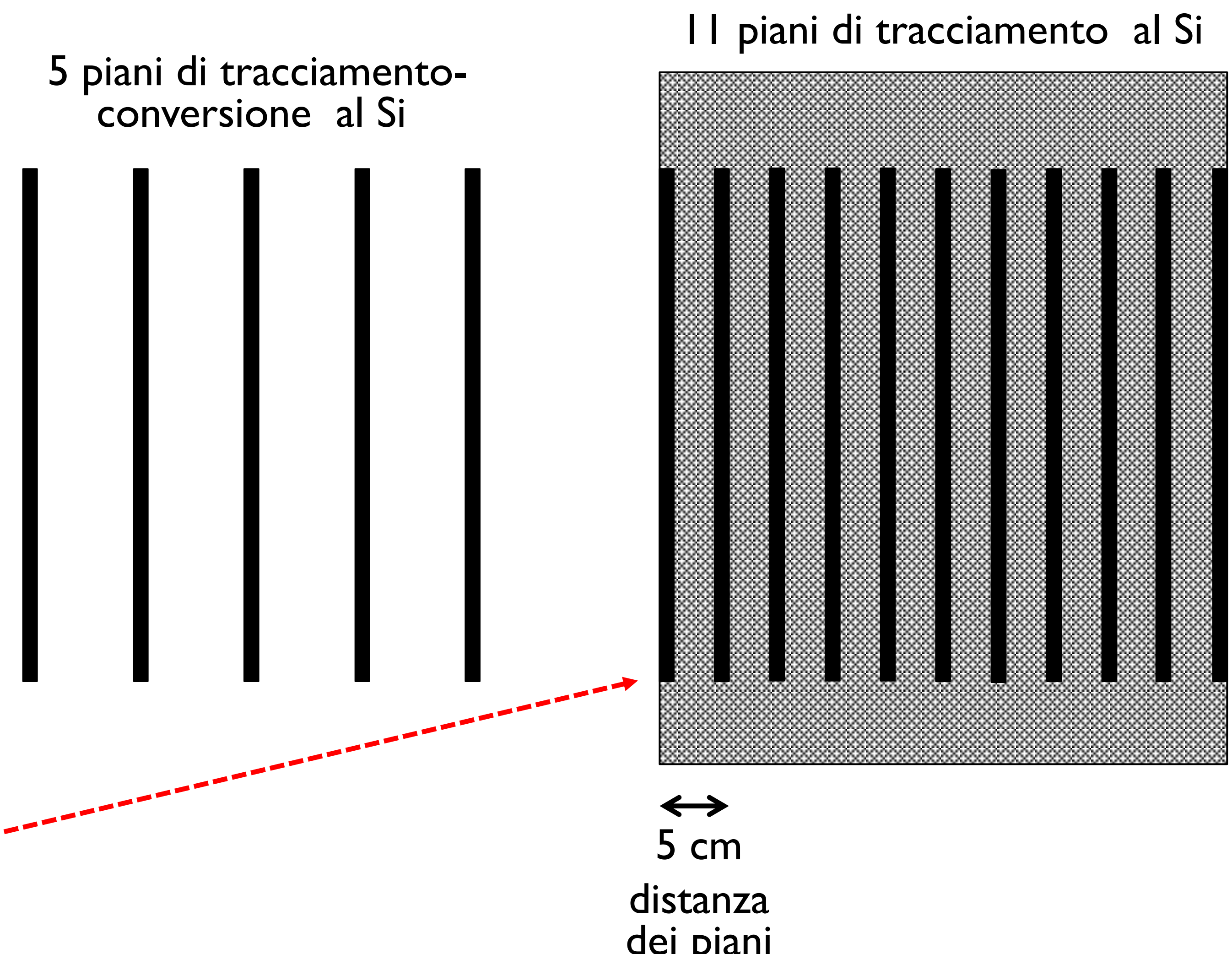
matteo.duranti@pg.infn.it

(cfr. http://pdg.lbl.gov/2018/AtomicNuclearProperties/HTML/silicon_Si.html
https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.98.030001, Chapter 33
C. Grupen – Particle Detectors, Chapter 8)

Tracker-converter + spettrometro



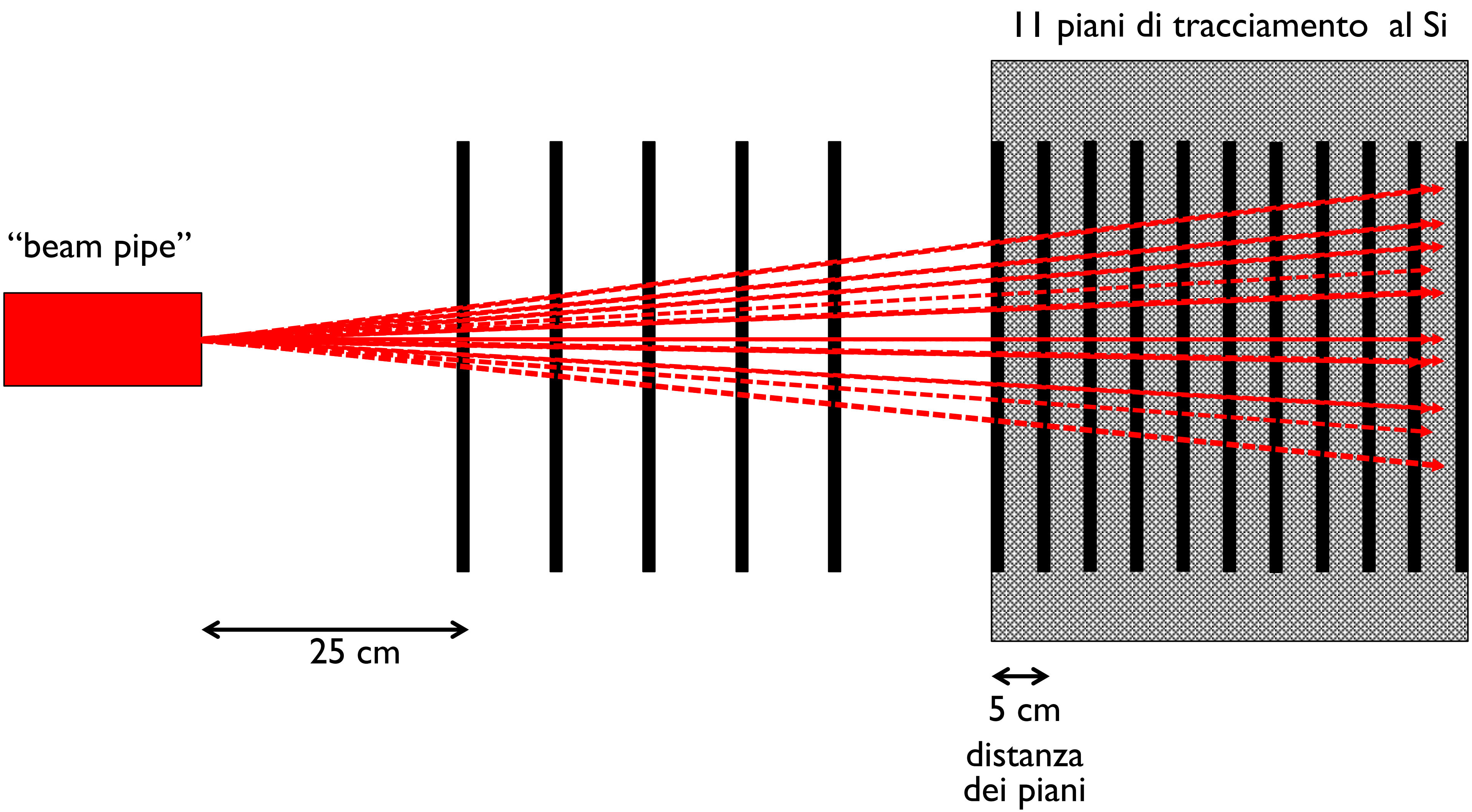
Tracker-converter + spettrometro



risoluzione spaziale:

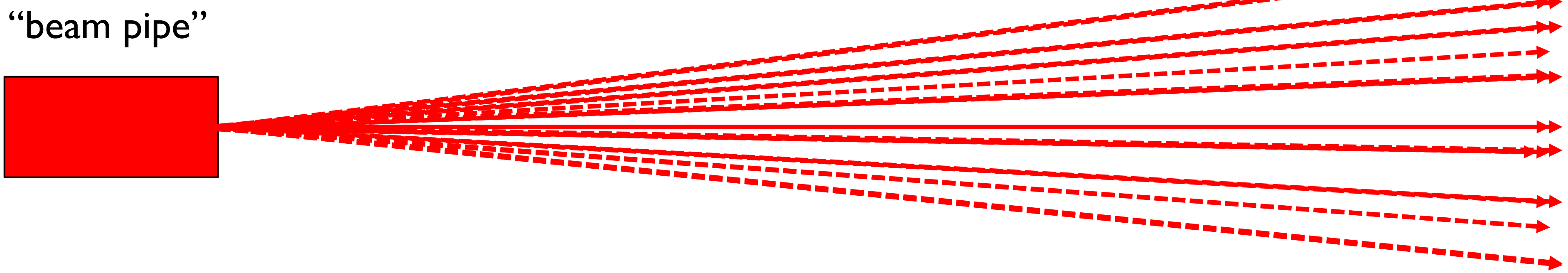
- σ_x = 30 μm
- σ_y = 10 μm

Tracker-converter + spettrometro



Beam

- beam “spot”: puntiforme (*X* e *Y*)
- divergenza beam: $\sigma \sim 1$ mrad (θ_x e θ_y), gaussiana

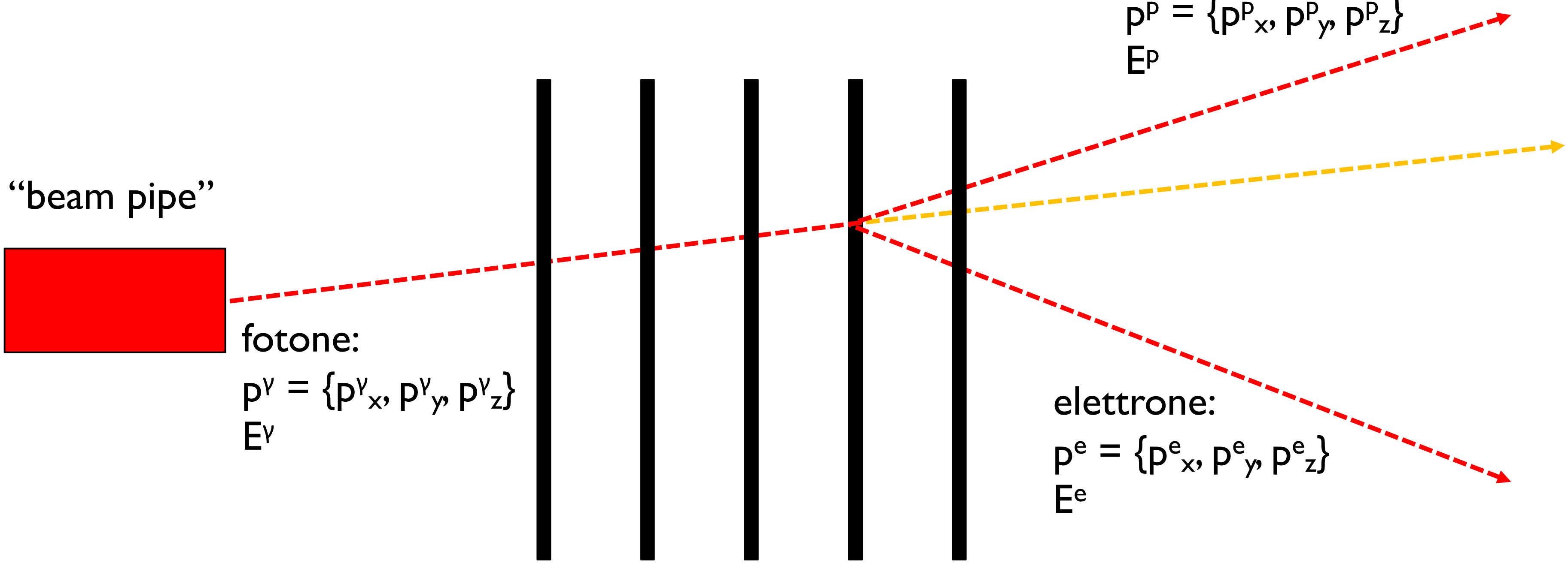


- fotoni ($\beta = v/c = 1$)
- energia: 5 GeV

Produzione di coppie

Il fotone ha una certa probabilità di fare pair-production:

$\gamma \rightarrow e^- + e^+$



Il fenomeno nel vuoto NON può accadere (non si possono conservare *E* e *p* contemporaneamente) e accade solamente perché un nucleo del materiale rincula (pochi *keV*) garantendo le conservazioni

Produzione di coppie

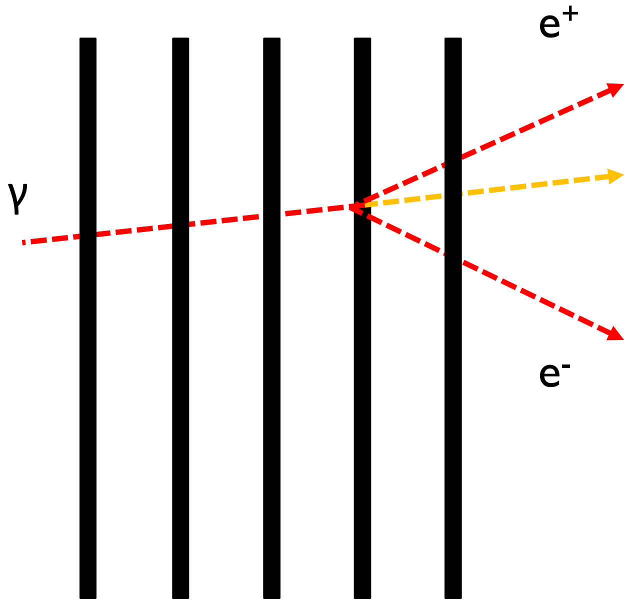
Il fotone ha una certa probabilità di fare pair-production:

$$\gamma \rightarrow e^- + e^+$$

La sezione d'urto per la creazione di una coppia e^--e^+ è:

$$\sigma = \frac{7}{9}(A/X_0 N_A)$$

(X_0 è la "radiation lenght", in g cm^{-2})
cioè di un flusso di fotoni iniziale I_0, dopo un percorso lungo *x*, avremo un flusso residuo



$$I(x) = I_0\, e^{-\mu x}$$

dove $\mu = \sigma n = \sigma\rho N_A/A = 7/9\ \rho/X_0$
(cioè il cammino libero medio, λ, è $9/7\ X_0/\rho$)

Produzione di coppie

Probabilità di interazione del fotone:

$$P_{int}(x) = 1 - e^{-\mu x}$$

La produzione di coppie la possiamo simulare quindi in due modi:

• step fisso, x, e si randomizza il numero di interazioni subite dal fotone (0 o 1)

$$\langle N_{int} \rangle \sim 1 - e^{-\mu x}$$

(lo step deve essere tale che questa cosa sia >0 e <1!)

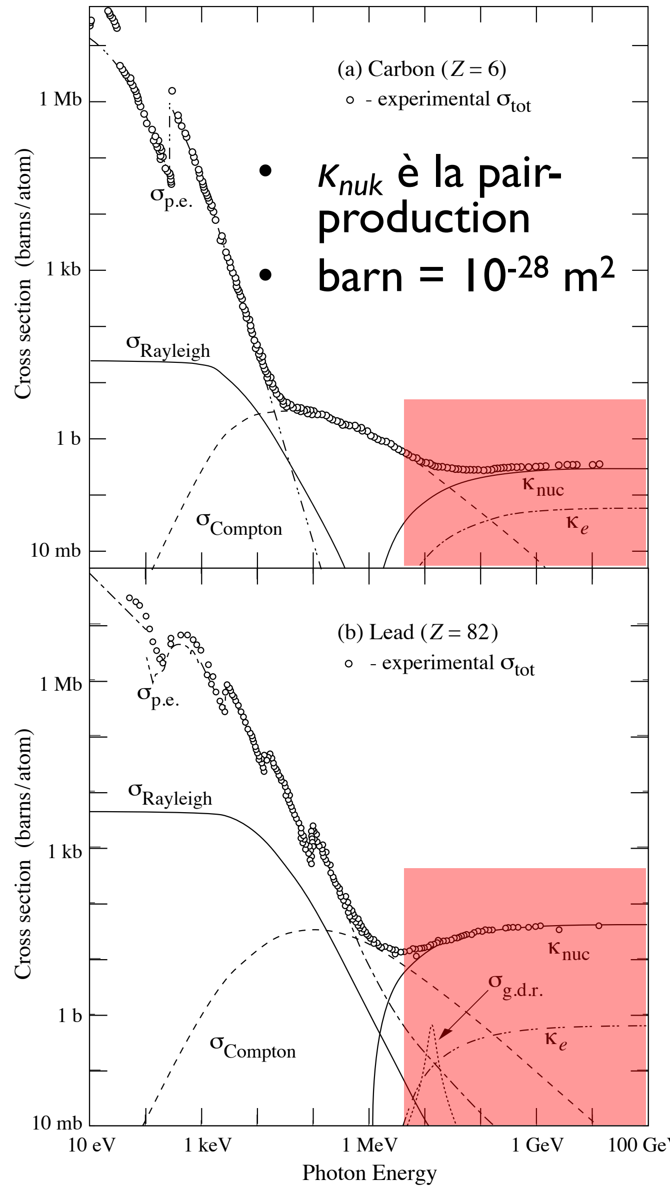
– randomizzando la probabilità (uniforme fra 0 e 1) e confrontandola con $P_{int}(x)$

– randomizzando poissonianamente $\langle N_{int} \rangle$ ("gestendo" le estrazioni >1…)

• si randomizza la dimensione dello step, x, alla fine del quale avviene un'interazione. La distribuzione di probabilità di un certo cammino libero, x, alla fine del quale si ha un'interazione sarà infatti

$$dP_{int}(x)/dx = \mu e^{-\mu x} \rightarrow PDF(x) \propto e^{-\mu x}$$

– pescando random x dalla sua distribuzione di probabilità



- κ_{nuk} è la pair-production
- barn = 10^{-28} m^2

Produzione di coppie

La sezione d'urto totale è (ad energie del GeV e TeV):

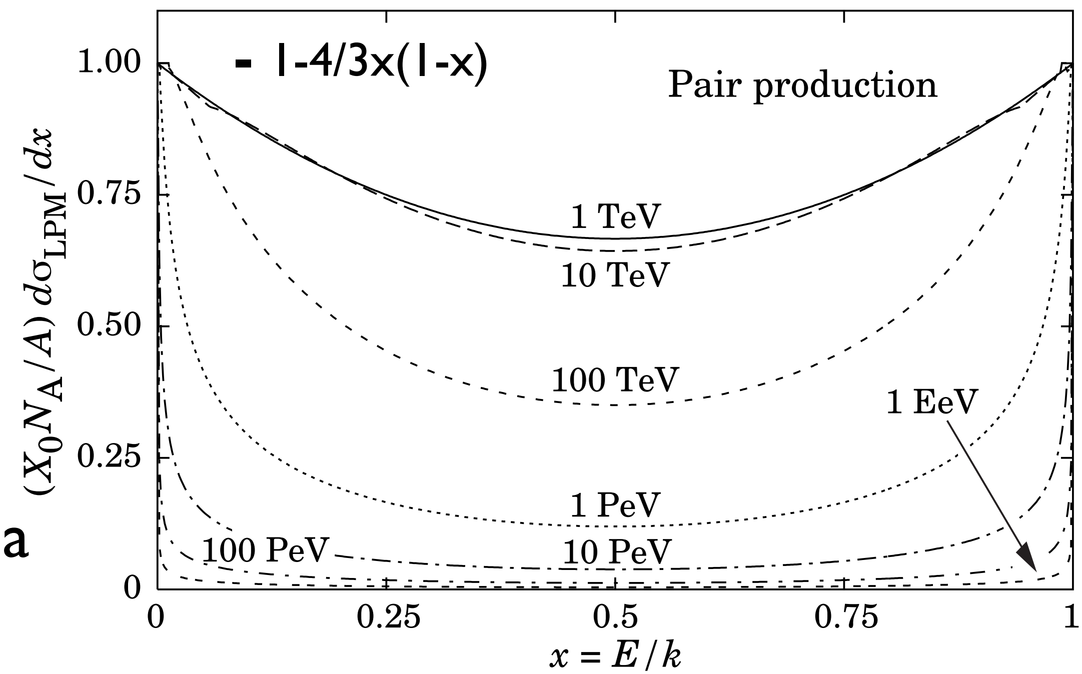
$$\sigma = \frac{7}{9}(A/X_0 N_A)$$

ma ha una dipendenza dalla frazione di energia passata a e^+ e e^-:

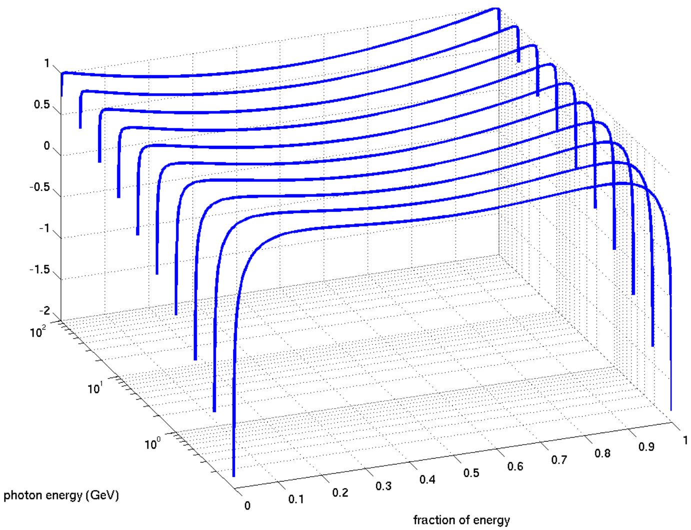
$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{A}{X_0 N_A}\left[1 - \frac{4}{3}x(1-x)\right]$$ (integrata in *x* in *[0,1]* dà *7/9* A/X_0N_A)

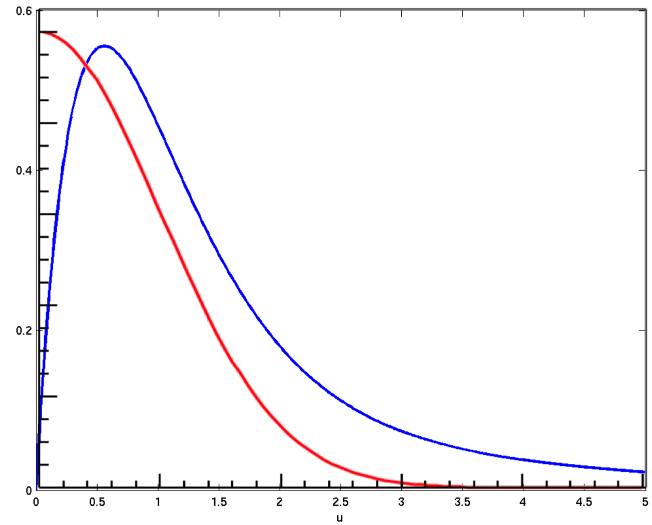
dove $x = E/k$ è, appunto, il rapporto fra l'energia, *E*, ceduta ad uno dei due e^+ o e^- della coppia, e l'energia iniziale, *k*, del fotone.

La formula è ovviamente simmetrica per *x* e *1-x*, dato che se uno dei due della coppia prende *E*, l'altro prenderà *k-E*



Produzione di coppie





La vera distribuzione angolare è

$$\phi_{\pm} = \frac{m_e c^2}{E_{\pm}} u$$

con *u* distribuito come in Figura (curva blu).

Per la simulazione utilizzeremo la curva rossa.

[* R.Morris, J.Cohen-Tanugi "Event Analysis for the Gamma-ray Large Area Space Telescope" https://slideplayer.com/slide/5321463](https://slideplayer.com/slide/5321463)

La distribuzione angolare è abbastanza complessa e vincolata a quella energetica. Per determinarla, anche con diverse approssimazioni, servirebbe utilizzare la cinematica relativistica.

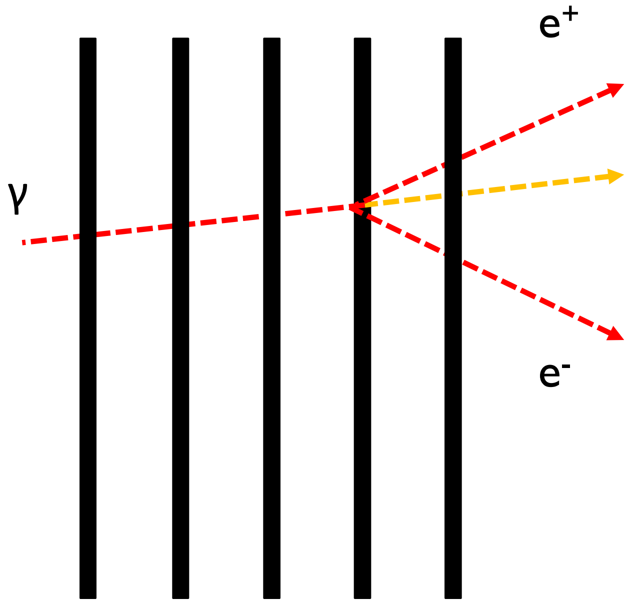
Ci accontentiamo di utilizzare una distribuzione gaussiana (rossa) con:

- $<\theta> = 0$
- $\sigma_\theta = m_e/E$ (m_e è la massa dell'elettrone [facile trovarla già in eV…])
- e poi generare un φ uniforme per "distribuire" fra θ_x e θ_y

Produzione di coppie

Il fotone ha una certa probabilità di fare pair-production:

$$\gamma \rightarrow e^- + e^+$$

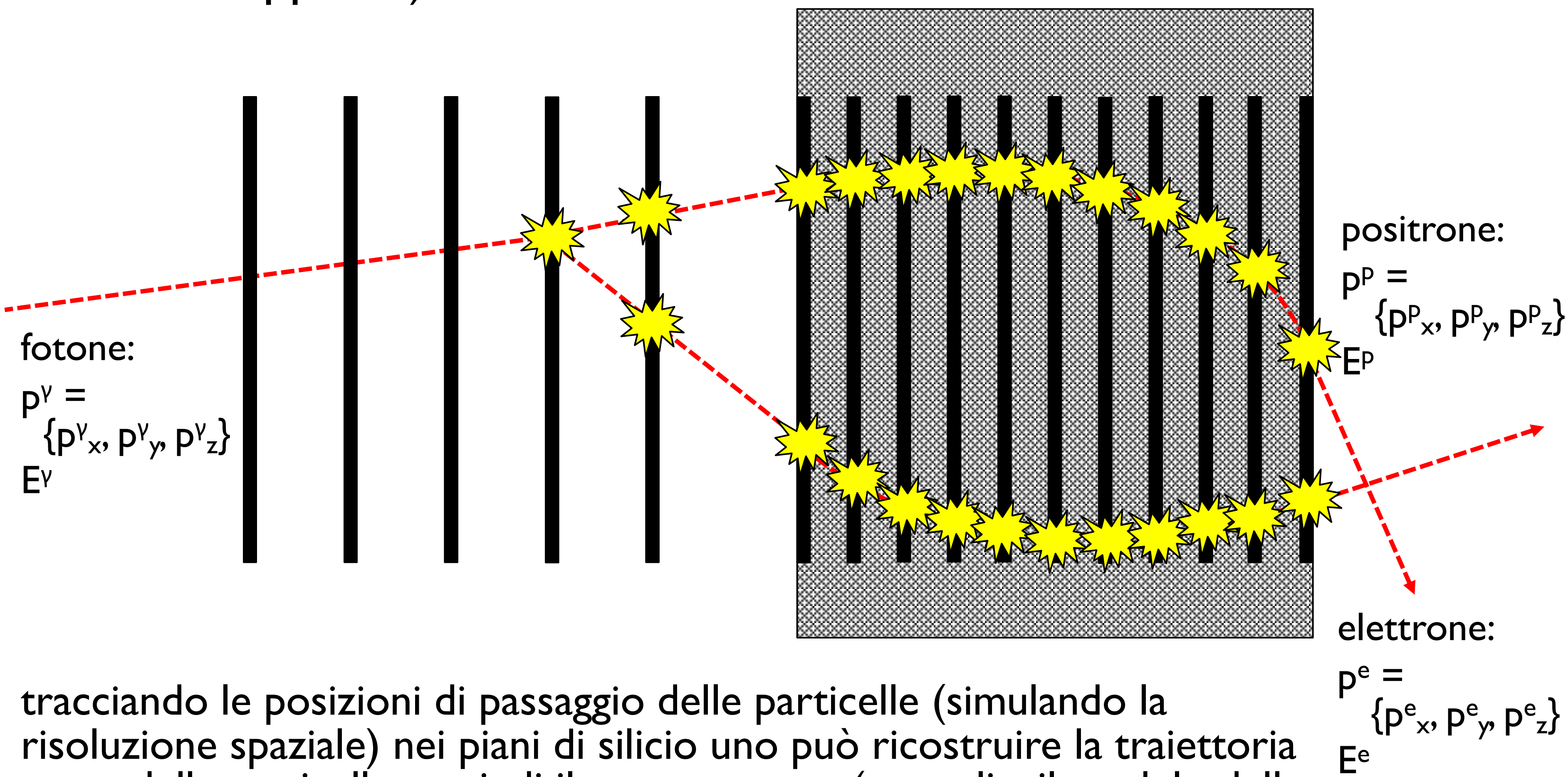


→ simulare un' "alta" statistica di fotoni incidenti

→ valutare la frazione di conversioni che avvengono in ciascun piano del "tracciatore-convertitore"

Spettrometro magnetico

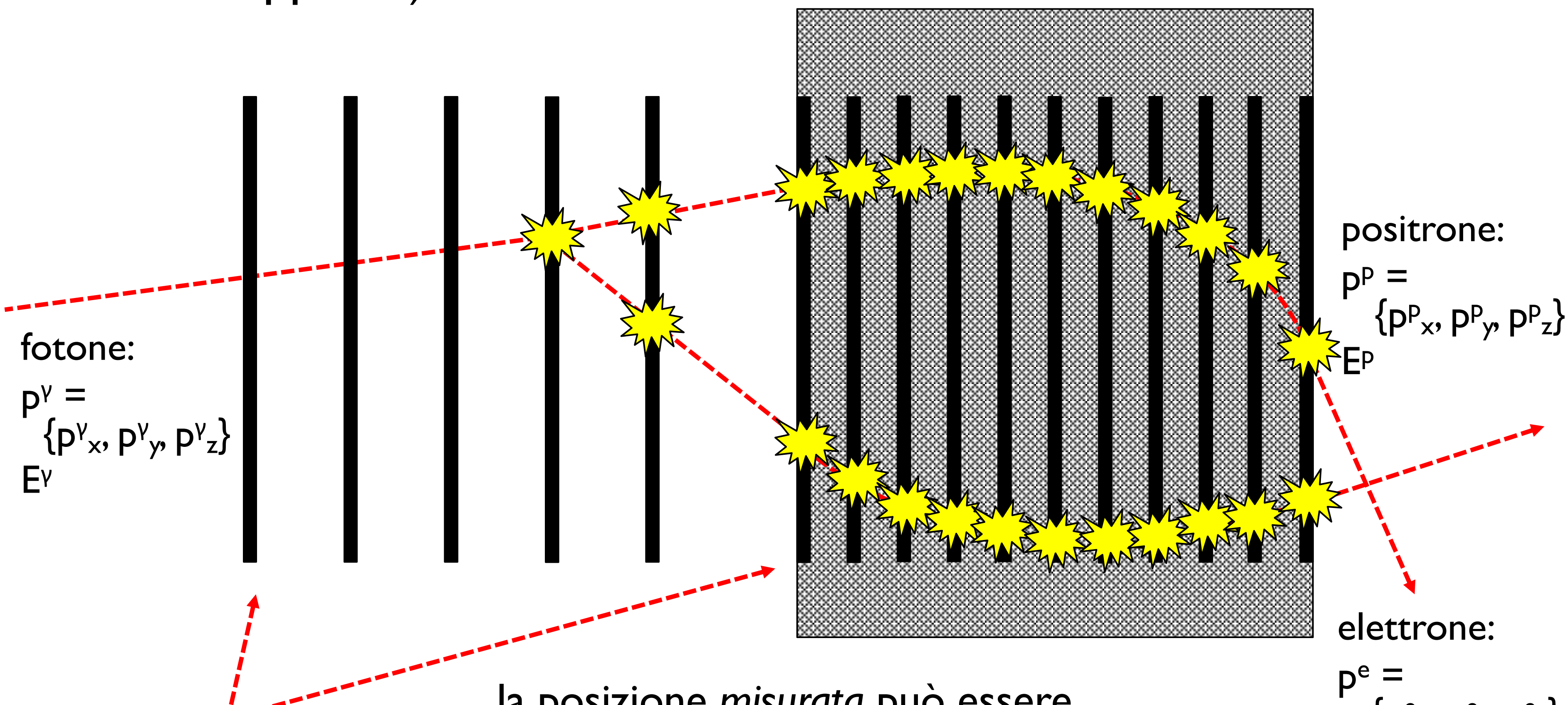
Elettrone e positrone dentro il campo magnetico curvano (in direzioni opposte)



tracciando le posizioni di passaggio delle particelle (simulando la risoluzione spaziale) nei piani di silicio uno può ricostruire la traiettoria curva della particella e quindi il suo momento (o meglio: il modulo della componente *trasversa* al campo magnetico)

Spettrometro magnetico

Elettrone e positrone dentro il campo magnetico curvano (in direzioni opposte)



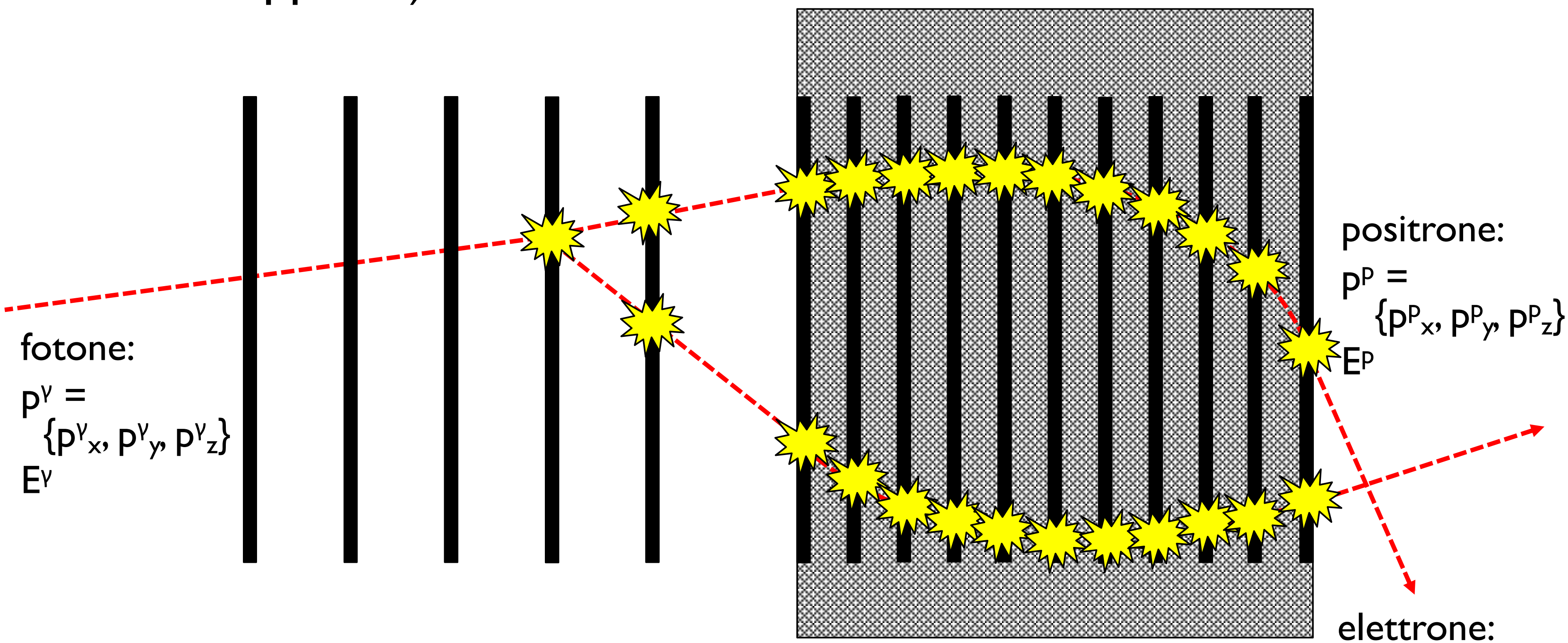
la posizione *misurata* può essere simulata come la posizione *vera* con uno *smearing* gaussiano con σ uguale alle risoluzione spaziale del rivelatore

risoluzione spaziale:

- σ_x = 30 μm
- σ_y = 10 μm

Spettrometro magnetico

Elettrone e positrone dentro il campo magnetico curvano (in direzioni opposte)

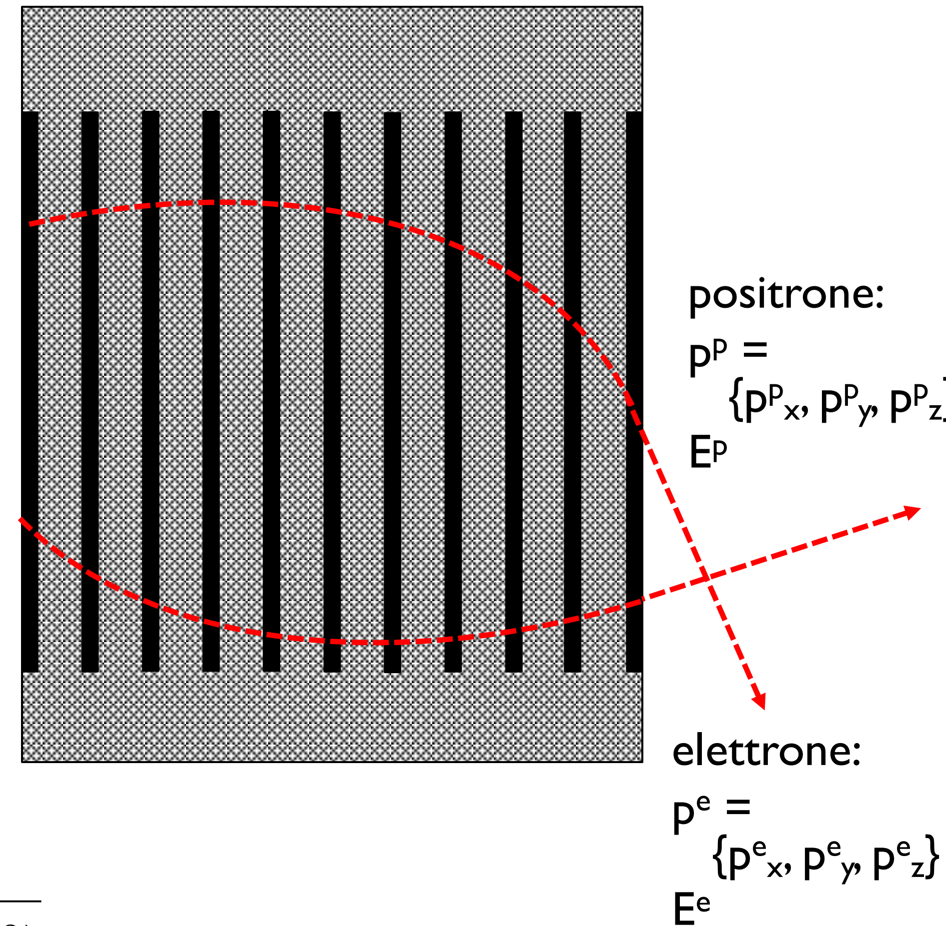


Una volta misurato il modulo della componente *trasversa* al campo magnetico, $p^{p,e}$, si può ricostruire anche la componente parallela, e quindi il modulo totale ($p^{p,e} = p_{\perp}^{p,e} + p_{\parallel}^{p,e}$), e poi il vettore completo, tenendo conto delle direzioni (misurate) delle tracce

Spettrometro magnetico

→ propagare le particelle nel campo magnetico

→ ricostruire la traiettoria curva, fittando i parametri dell'arco di circonferenza che minimizzano il χ^2 (punti misurati dal tracciatore vs fit)



$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

$$x^2 + x_0^2 - 2xx_0 + y^2 + y_0^2 - 2yy_0 - \rho^2 = 0$$

$$y^2 - 2yy_0 + \left(x^2 + x_0^2 - 2xx_0 + y_0^2 - \rho^2\right) = 0$$

$$y_{1,2} = y_0 \pm \sqrt{y_0^2 - (x^2 + x_0^2 - 2xx_0 + y_0^2 - \rho^2)} =$$

$$y_{1,2} = y_0 \pm \sqrt{-\,(x^2 + x_0^2 - 2xx_0 - \rho^2)}$$

dipende dal segno di *q* e *B*

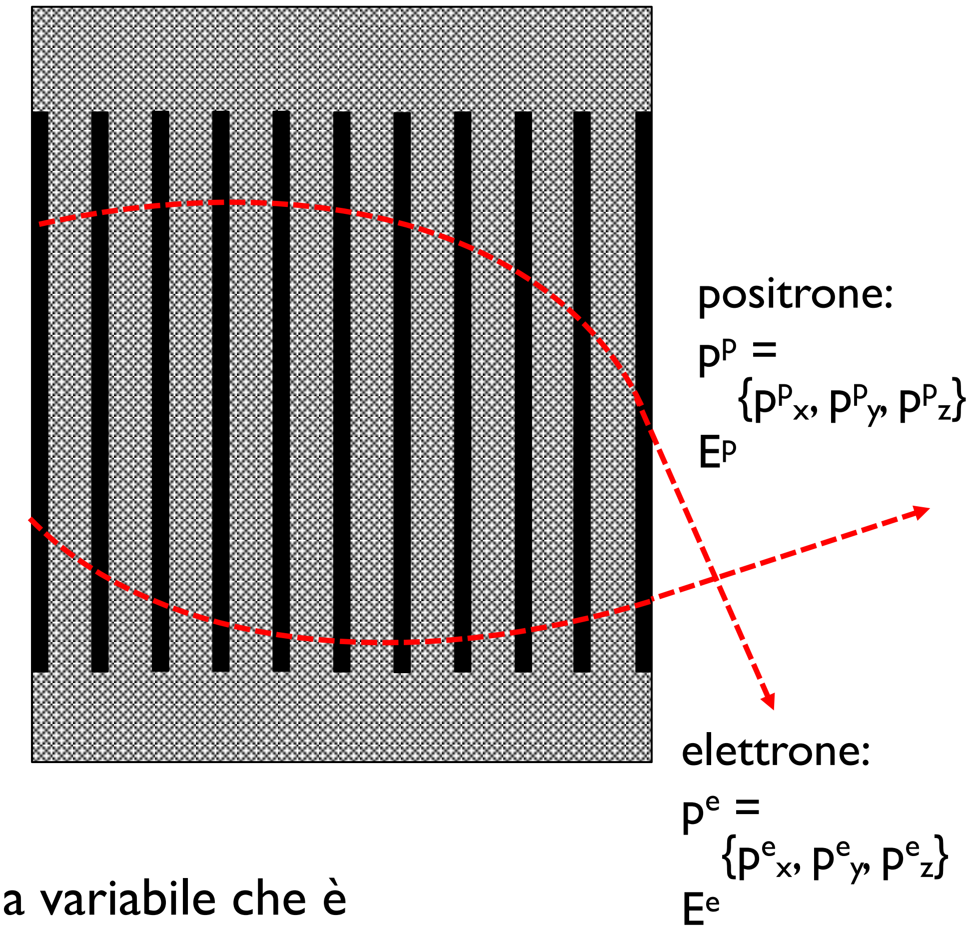
Spettrometro magnetico

→ propagare le particelle nel campo magnetico

→ ricostruire la traiettoria curva, fittando i parametri dell'arco di circonferenza che minimizzano il χ^2 (punti misurati dal tracciatore vs fit)

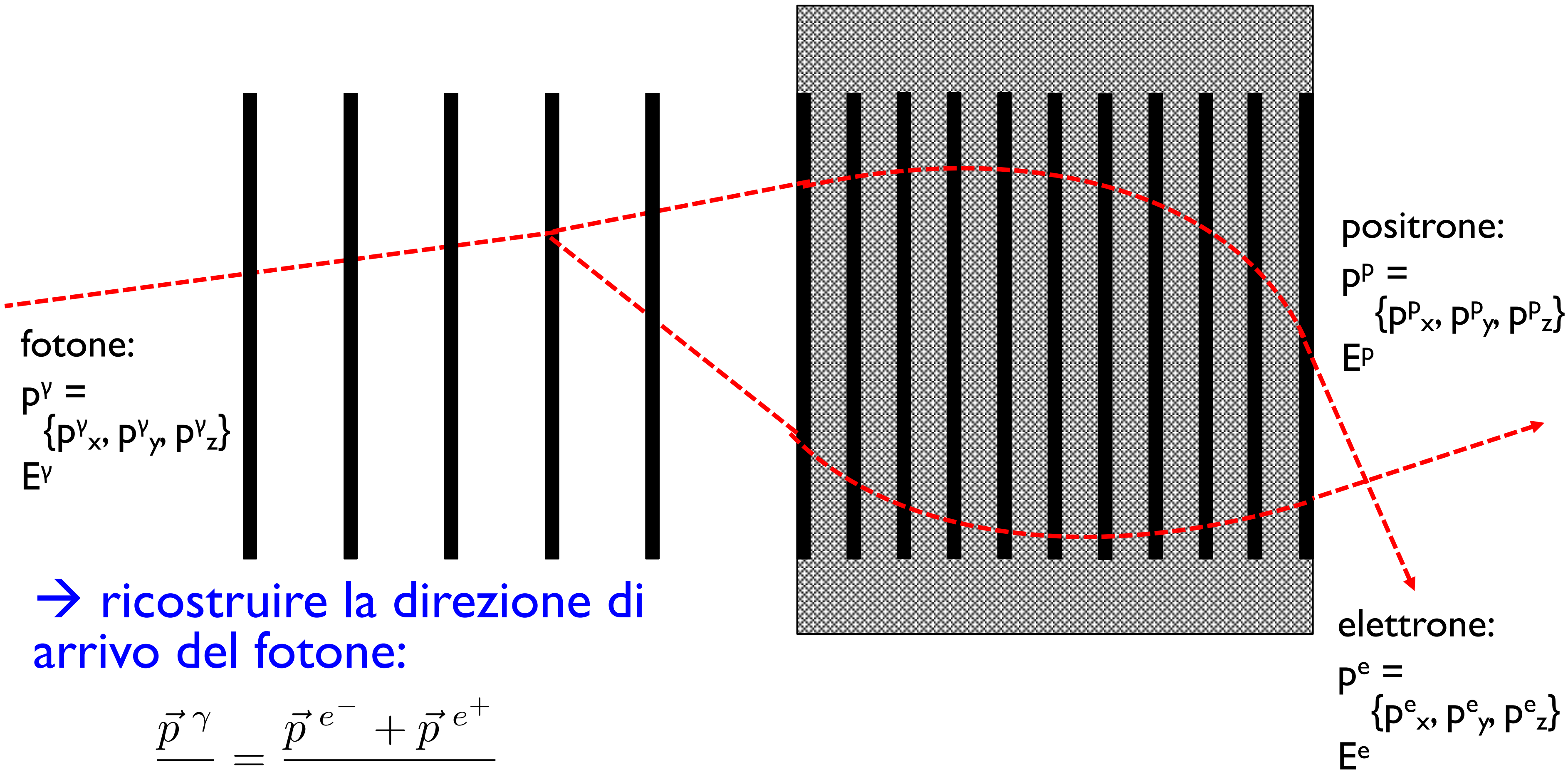
→ confrontare il momento ricostruito (la curvatura fittata) con quello generato e ricavare la risoluzione in momento dello spettrometro (i.e. la deviazione standard)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$



la variabile che è distribuita gaussianamente non è la curvatura (o il momomento) ma il suo inverso (e quindo l'inverso del momento)

Telescopio per fotoni



→ ricostruire la direzione di arrivo del fotone:

$$\frac{\vec{p}^{\,\gamma}}{p^{\gamma}} = \frac{\vec{p}^{\,e^-} + \vec{p}^{\,e^+}}{p^{\gamma}}$$

→ confrontarla con la "verità MC" (i.e. quella di generazione) e ricavare la risoluzione angolare del telescopio (i.e. deviazione standard di θ_x e θ_y)

Programma e relazione

- Il programma scritto dovrà essere accompagnato da opportuno *Makefile* e istruzioni (se sono più di tre righe c'è un problema!) di come compilarlo ed eseguirlo e come guardare i risultati (terminale, root file da aprire o immagini salvate su disco);

- Il programma scritto dovrà essere accompagnato da una relazione che descriva le scelte fatte e i risultati ottenuti, ma che sia anche sintetica

Relatività

Relatività:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$E^2 = m_0^2\, c^4 + p^2 c^2$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{p} &= m_0 \vec{\beta}\, c\, \gamma \\ E &= m_0\, c^2\, \gamma = m\, c^2 \end{aligned}\right\} \vec{\beta} = \frac{\vec{p}\, c}{E}$$

Unità di misura

Unità di misura:

- ✓ $eV = 1.6021766208(98)*10^{-19}\ J$ (cfr. https://en.wikipedia.org/wiki/Electronvolt)
  ma tipicamente si utilizza il $GeV = 10^9\ eV$
  - E in GeV
  - p in GeV/c → $1\ GeV/c = 5.344286*10^{-19}\ kg\ m/s$
  - m in GeV/c^2 → $1\ GeV/c^2 = 1.783*10^{-27}\ kg$

  spesso si usa $c=1$ e quindi tutte sono in GeV.
- ✓ Le cariche si misurano in *carica elementare*, e.

→ Particelle "comuni":

- elettrone: q = -e, $m \sim 0.5\ MeV$
- protone: q = e, $m \sim 1\ GeV$
- nucleo di ^{4}He: $q = 2e$, $m \sim 4\ GeV$

Relatività e unità di misura

Relatività:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$E^2 = m_0^2\, c^4 + p^2 c^2$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{p} &= m_0 \vec{\beta}\, c\, \gamma \\ E &= m_0\, c^2\, \gamma = m\, c^2 \end{aligned}\right\} \vec{\beta} = \frac{\vec{p}\, c}{E}$$

che in un sistema di unità in cui *c=1*:

$$E^2 = m_0^2 + p^2$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{p} &= m_0 \vec{\beta}\, \gamma \\ E &= m_0\, \gamma = m \end{aligned}\right\} \vec{\beta} = \frac{\vec{p}}{E}$$

- un protone di *1 GeV* di momento ha ~ $\sqrt{2}$ *GeV* di energia
- un protone di *10 GeV* di momento ha ~ *10 GeV* di energia
- un elettrone di *1 GeV* di momento ha ~ *1 GeV* di energia

Forza di Lorentz e unità di misura

→ Nel caso dell'elettromagnetismo la conversione è banale.

Ad esempio il raggio di girazione, ρ, di una particella carica, in un campo magnetico uniforme è:

$$\rho = \frac{p}{qB}$$ → la variabile che "domina" il moto è la *rigidità* $$R = \frac{p\,c}{q} \quad (\mathrm{V})$$

Per *p=1GeV*, *q=1*e (*→ R=1V*) e *B=1T*

$$\rho = \frac{5.34 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{Kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1.6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}\,\frac{\mathrm{Kg}}{\mathrm{C\,s}}} \approx \frac{1}{0.3}\,\mathrm{m}$$

che può essere "mnemonizzato" come "mettere 0.3 davanti al campo B, utilizzando le formule in metri, GeV, cariche elementari e Tesla":

$$\frac{\rho}{1\mathrm{m}} = \frac{\frac{p}{1\,\mathrm{Kg\,m/s}}}{\frac{q}{1\,\mathrm{C}}\,\frac{B}{1\,\mathrm{T}}} \approx \frac{1}{0.3}\,\frac{\frac{p}{1\,\mathrm{GeV}}}{\frac{q}{1\,\mathrm{e}}\,\frac{B}{1\,\mathrm{T}}}$$