

# **Esercitazione sui metodi di risoluzione di ODE**

Matteo Duranti

[matteo.duranti@pg.infn.it](mailto:matteo.duranti@pg.infn.it)

# Metodo di Eulero

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad y(x_0) = y_0$$

Sostituendo la derivata con il rapporto incrementale

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h} \approx f(x, y(x))$$

$$\rightarrow y(x+h) = y(x) + h \cdot f(x, y(x))$$

scritto comunemente come

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

cioè  $y_n \approx y(x_n)$  è un'approssimazione valida per la

soluzione dell'ODE a  $x_n = x_0 + nh$

# Metodo di Eulero

$$y'(x) = f(x, y(x)) = y(x) \quad y(x_0) = y_0 = 1$$

e si vuole “risolvere” per  $y(4)$ : la soluzione “analitica”, in questo caso, è banale,  $y(x) = e^x$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

che, con  $h=1$

$$f(x_0, y_0) = f(0, 1) = 1 \quad h \cdot f(y_0) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\rightarrow y_1 = y_0 + h f(y_0) = 1 + 1 \cdot 1 = 2$$

$$y_2 = y_1 + h f(y_1) = 2 + 1 \cdot 2 = 4$$

$$y_3 = y_2 + h f(y_2) = 4 + 1 \cdot 4 = 8$$

$$y_4 = y_3 + h f(y_3) = 8 + 1 \cdot 8 = 16$$

# Metodo di Eulero

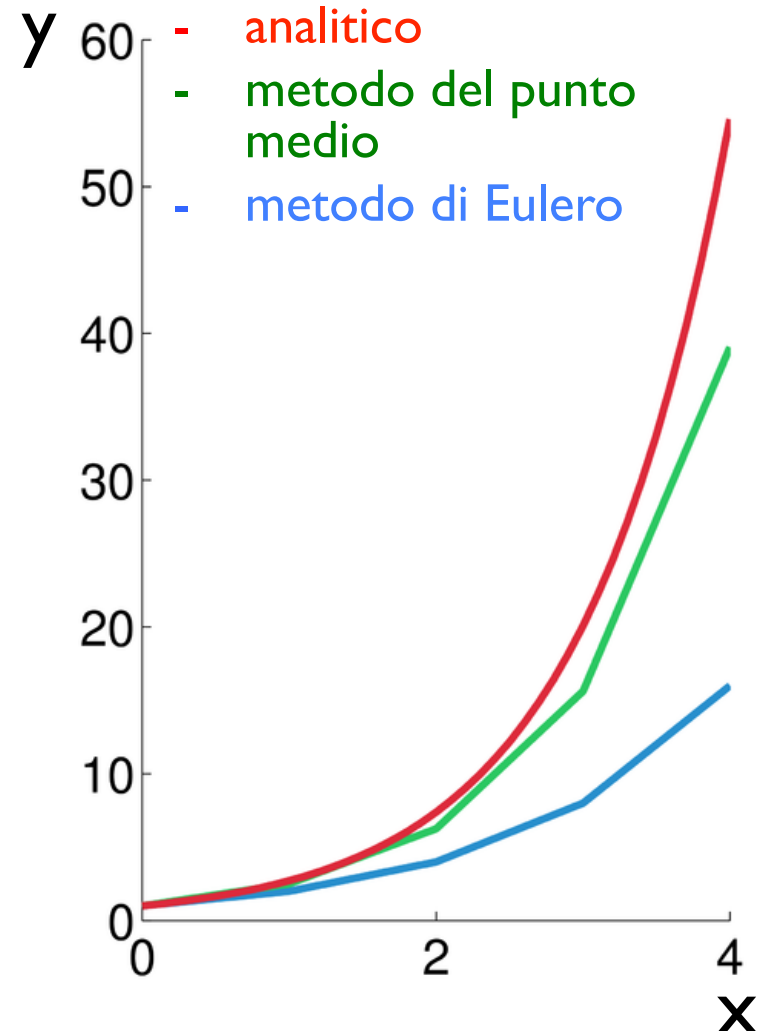
$$y'(x) = f(x, y(x)) = y(x)$$

$$y(x_0) = y_0 = 1$$

→

n	$e^n$	$y_n$	$\Delta$
1	~2.718	2	~0.7
2	~7.389	4	~3
3	~20.085	8	~12
4	~54.598	16	~40

n	$e^n - e^{n-1}$	$y_n - y_{n-1}$	$\Delta$
1	~1.7	1	~0.7
2	~4.7	2	~2.7
3	~12.7	4	~8.7
4	~34.5	8	~26.5



# Metodo del punto medio

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad y(x_0) = y_0$$

Possiamo fare due scelte:

- metodo esplicito del punto medio (o di Eulero modificato):

$$y_{n+1} = y_n + hf \left( x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n) \right)$$

# Metodo del punto medio

$$y'(x) = f(x, y(x)) = y(x) \quad y(x_0) = y_0 = 1$$

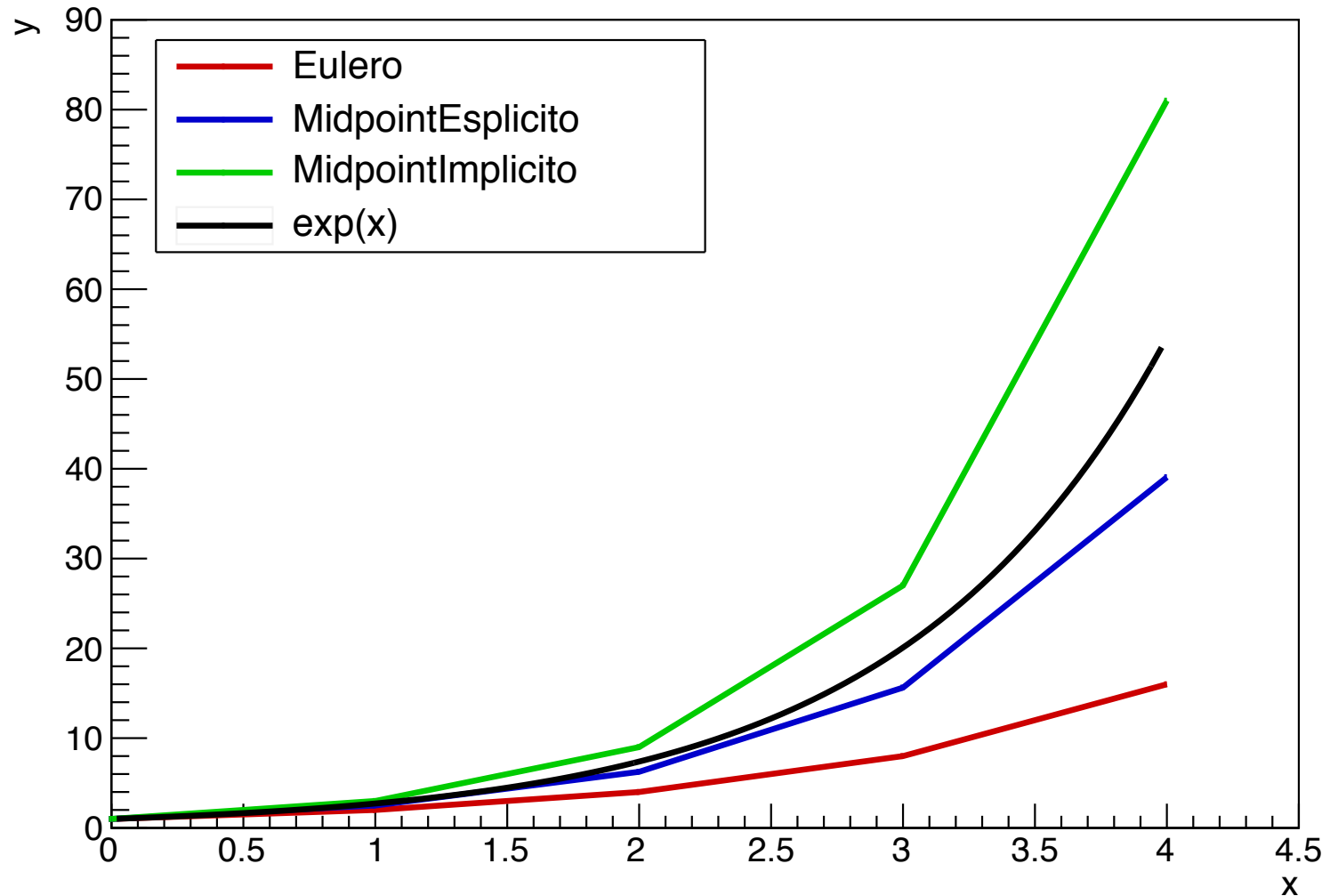
- metodo esplicito del punto medio:

$$y_{n+1} = y_n + h f \left( x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n) \right)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \left( y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n) \right) = y_n + h y_n + \frac{h^2}{2} y_n$$

# Metodo del punto medio

$$y'(x) = f(x, y(x)) = y(x) \quad y(x_0) = y_0 = 1$$



# Esercitazione

- A. Implementare una classe, “wrapper” di diversi metodi, che permetta di risolvere un’ODE del primo ordine generica (testatene varie)
- B. Implementare i metodi:
- Eulero
  - Punto medio esplicito

- C. Risolvere il caso “particolare”:

$$y'(x) = f(x, y(x)) = y(x) \quad y(x_0) = y_0 = 1$$

plottando (\*) i vari risultati in funzione dello step (plot in slide precedente)

- D. Fate il punto C per diversi valori di  $h$

(\*) come al solito: i grafici/istogrammi li potete fare con il metodo che volete: Excel, Calc, Numbers, Gnuplot, Scipy, Mathematica, Matlab, ROOT, etc...