Integrazione numerica

Matteo Duranti

matteo.duranti@pg.infn.it

(cfr. http://www.fisica.unipg.it/~borromeo/Appunti/FisComp/FisComp2014/pdf/integrali.pdf
https://pomax.github.io/bezierinfo/legendre-gauss.html
http://mathworld.wolfram.com/Legendre-GaussQuadrature.html)

Integrazione *numerica*

Sicuramente:

- integrali → somme
- infinitesimi → intervalli piccoli

In generale l'idea è quella di suddividere il range di integrazione in *N* intervalli:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{N} w_j f(x_j) \qquad a \leq x \leq b$$

dove:

- *N* deve essere il più grande possibile (ma questo "costa" tempo CPU);
- w_j sono dei pesi che dipendono dal singolo intervallo scelto

Integrazione a spaziatura fissa

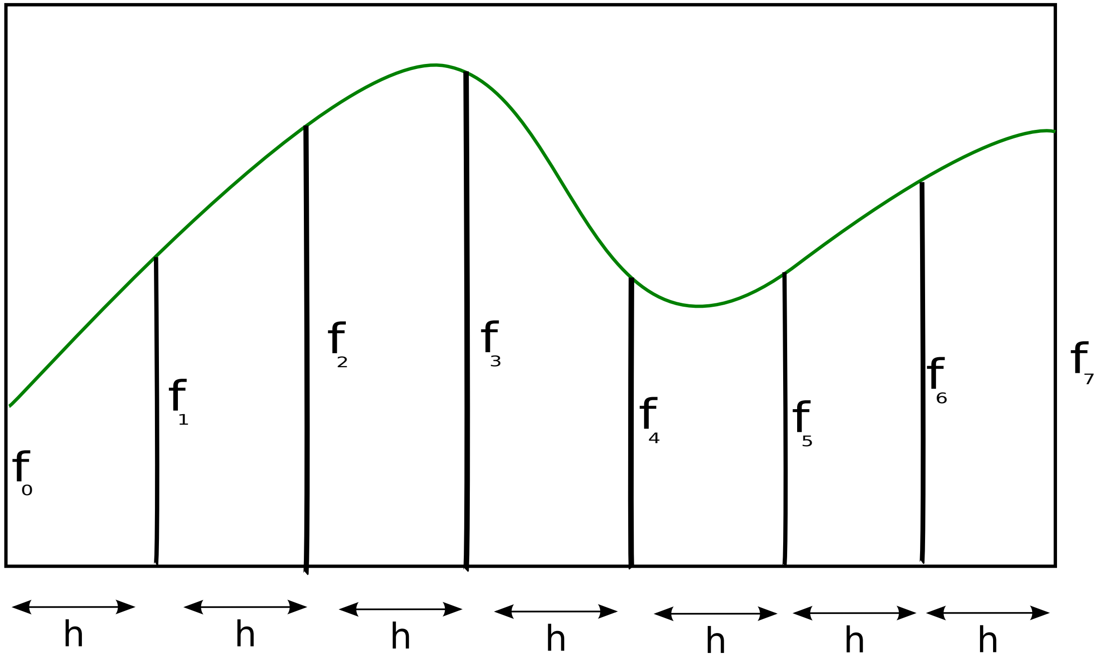
$$\int_a^b f(x)\,dx \longrightarrow \quad x_j = a + h \cdot j \qquad 0 \leq j \leq N \qquad h = \frac{b-a}{N}$$

dove:

- *h* è la dimensione dell'intervallino;
- x_j è una posizione "caratteristica" ed univoca dell'intervallino (i.e. il bordo sinistro, ma anche il centro, quello destro, etc… sono scelte valide)

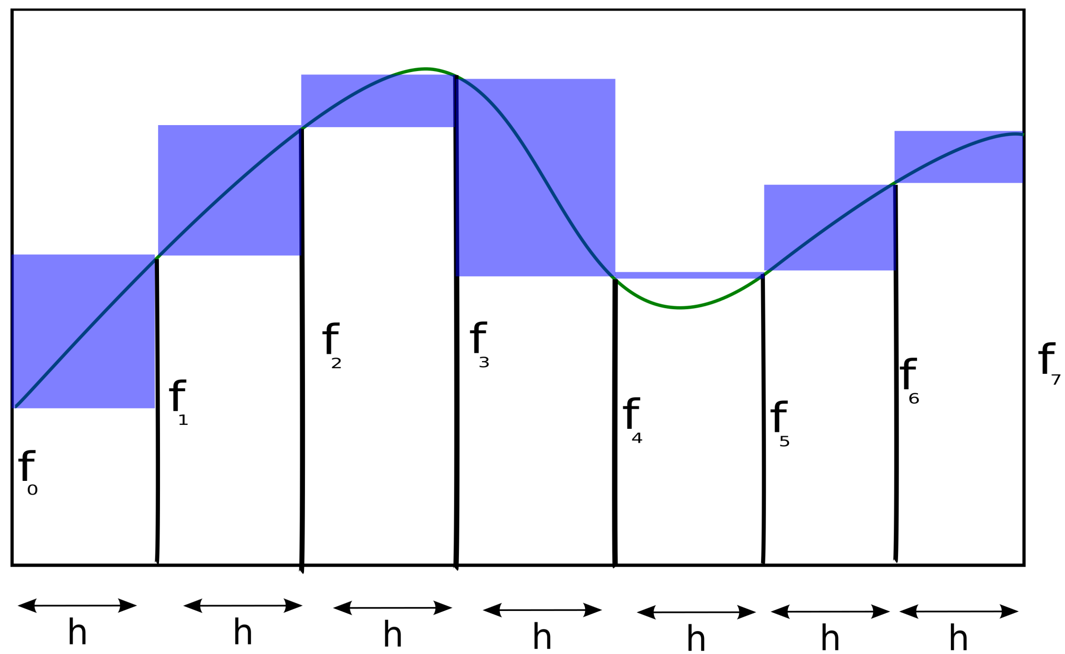
→

$x_0=a$
$x_N=b$



Integrazione a spaziatura fissa: metodo del rettangolo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{N} w_j f(x_j)$$



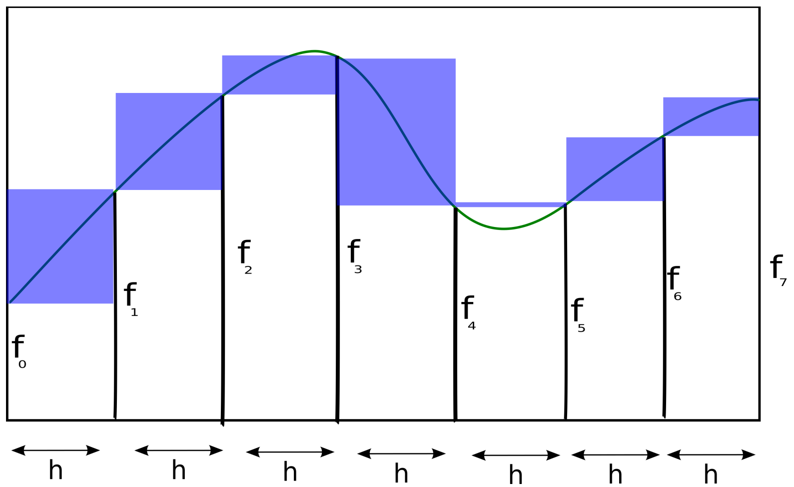
l'area di ogni intervallo viene calcolata come quella del rettangolo definito da *h* e *f(x*j*)*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = h\sum_{j=1}^{N} f(x_j)$$

quindi:

- $w_j = h$

Integrazione a spaziatura fissa: sviluppo in serie di Taylor

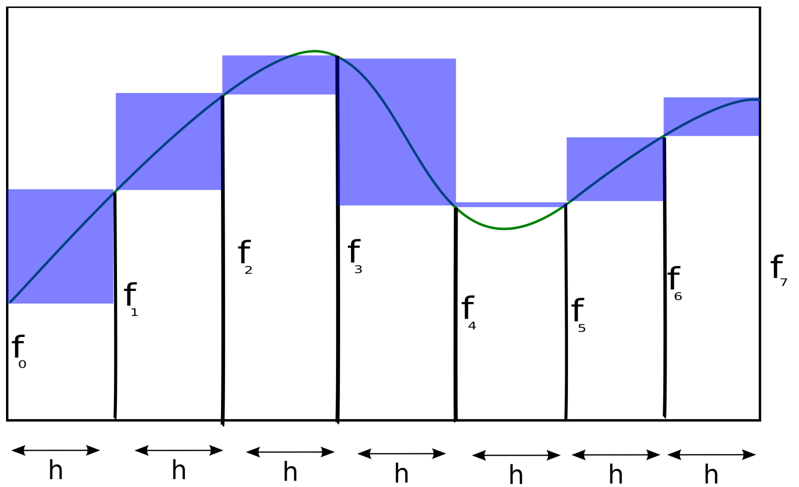


Si può anche pensare di "migliorare" la cosa usando la formula di Taylor.
Per ogni intervallo *[x_j, x_j+h]*:

$$\int_0^h f(x)\,dx = \int_0^h \left(f(0) + x \cdot f'(0) + O(x^2)\right)\,dx$$

$$= h \cdot f(0) + \frac{h^2}{2} f'(0) + O(h^3)$$

Integrazione a spaziatura fissa: sviluppo in serie di Taylor



Si può anche pensare di "migliorare" la cosa usando la formula di Taylor. Per ogni intervallo $[x_j, x_j+h]$:

$$\int_0^h f(x)\,dx = \int_0^h \left(f(0) + x \cdot f'(0) + O(x^2)\right)\,dx$$

$$= h \cdot f(0) + \frac{h^2}{2} f'(0) + O(h^3)$$

ovviamente questo lo possiamo fare se, oltre a conoscere $f(x_j)$, sappiamo anche $f'(x_j)$, cioè non è applicabile, ad esempio, se la nostra f(x) è una cosa, essa stessa, numerica:

```
double func(double x)
```

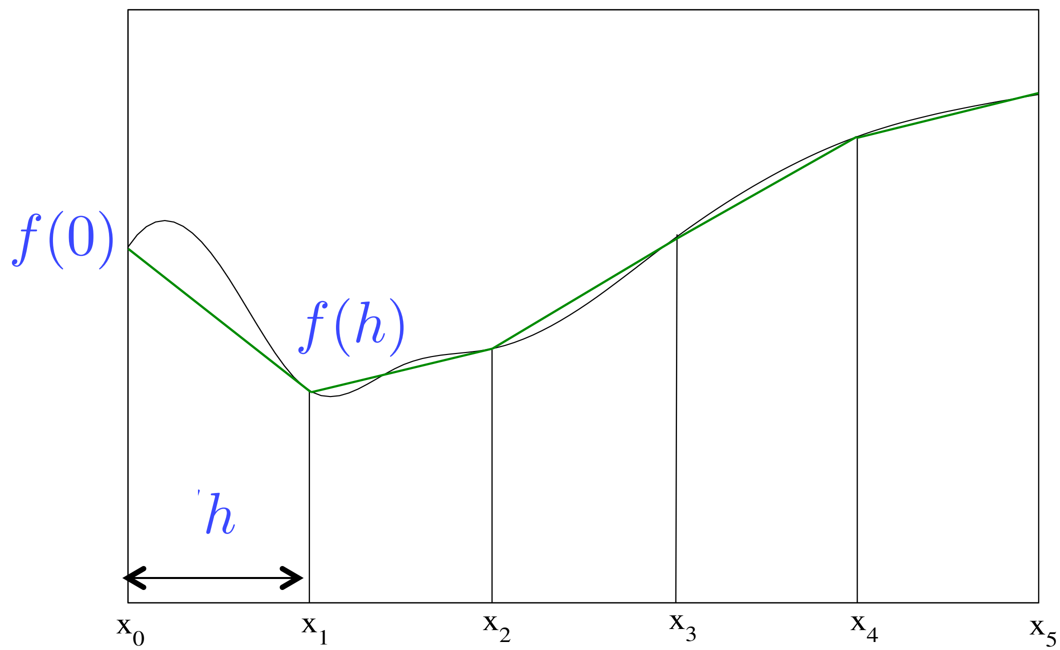
Integrazione a spaziatura fissa: sviluppo in serie di Taylor al primo ordine

Per ogni intervallo *[x_j, x_j+h]*:

$$\int_0^h f(x)\,dx = \int_0^h \left(f(0) + x \cdot f'(0) + O(x^2)\right)\,dx$$

$$= h \cdot f(0) + \frac{h^2}{2} f'(0) + \cancel{O(h^3)}$$

Fra due generici punti, però, posso sempre "tracciare una lina" e *f'* sarà, banalmente, il coefficiente angolare $f'(0) = m = \left(f(h) - f(0)\right)/h$



Integrazione a spaziatura fissa: sviluppo in serie di Taylor al primo ordine

Per ogni intervallo *[x_j, x_j+h]*:

$$\int_0^h f(x)\,dx = \int_0^h \left(f(0) + x\cdot f'(0) + O(x^2)\right)\,dx$$
$$= h\cdot f(0) + \frac{h^2}{2} f'(0) + \cancel{O(h^3)}$$

Fra due generici punti, però, posso sempre “tracciare una lina” e *f’* sarà, banalmente, il coefficiente angolare $f'(0) = m = \left(f(h) - f(0)\right)/h$

$$\rightarrow \quad \int_0^h f(x)dx = h\cdot f(0) + \frac{h}{2}\cdot\left(f(h) - f(0)\right) = \frac{h}{2}\cdot f(0) + \frac{h}{2}\cdot f(h)$$

andando a integrare su *2* intervalli:

$$\int_0^{2h} f(x)dx = \frac{h}{2}\cdot f(0) + h\cdot f(h) + \frac{h}{2}\cdot f(2h)$$

e generalizzando a *N* (tali da coprire tutto il range *[a,b]*):

$$\int_0^{Nh} f(x)dx = \frac{h}{2} f(0) + hf(h) + \cdots + hf((N-1)h) + \frac{h}{2} f(Nh)$$

Integrazione a spaziatura fissa: sviluppo in serie di Taylor al primo ordine

Per ogni intervallo *[x_j, x_j+h]*:

$$\int_0^h f(x)\,dx = \int_0^h \left(f(0) + x\cdot f'(0) + O(x^2)\right)\,dx$$
$$= h\cdot f(0) + \frac{h^2}{2}f'(0) + \cancel{O(h^3)}$$

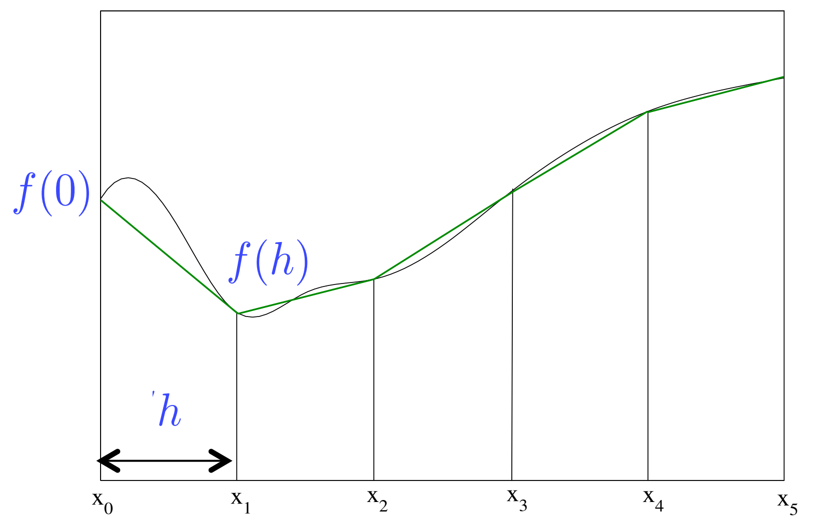
"interpolando" linearmente e generalizzando a *N* (tali da coprire tutto il range *[a,b]*):

$$\int_0^{Nh} f(x)dx = \frac{h}{2}f(0) + hf(h) + \cdots + hf((N-1)h) + \frac{h}{2}f(Nh)$$

che quindi, in generale, significa:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{N} w_j f(x_j)$$

- $w_0 = w_5 = h/2$
- $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = h$



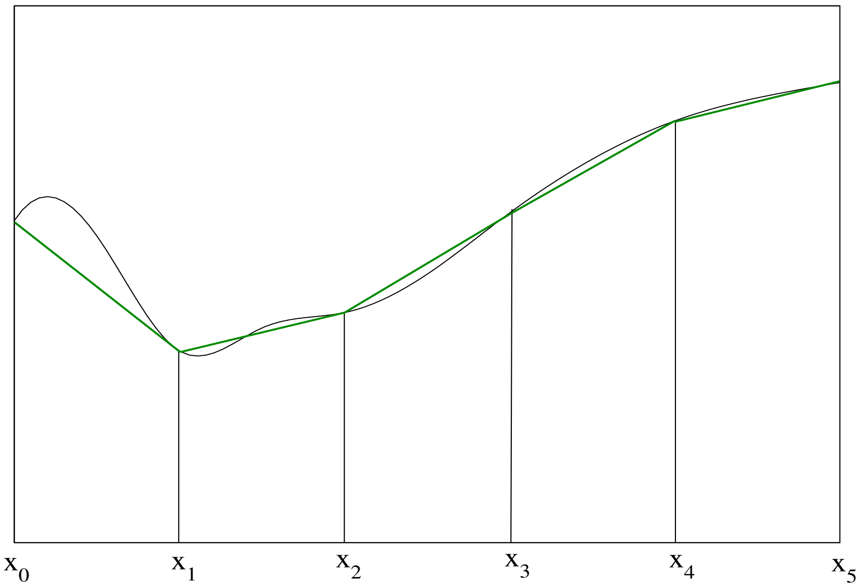
Integrazione a spaziatura fissa: metodo del trapezio

Invece che integrale tanti rettangolini possiamo pensare di fare meglio ed integrare tanti trapezi:

L'area di ogni trapezio sarà:

$$\frac{1}{2}\left(f_j + f_{j+1}\right)\left(x_{j+1} - x_j\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(f_j + f_{j+1}\right) h$$



e quindi, nell'esempio con *N=5, x0=a, x5=b*:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h \cdot \Big(\frac{1}{2} \cdot (f_0 + f_1) + \frac{1}{2} \cdot (f_1 + f_2) + \frac{1}{2} \cdot (f_2 + f_3) + \frac{1}{2} \cdot (f_3 + f_4) + \frac{1}{2} \cdot (f_4 + f_5) \Big)$$

Cioè, in generale*:*

- $w_0 = w_5 = h/2$
- $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = h$

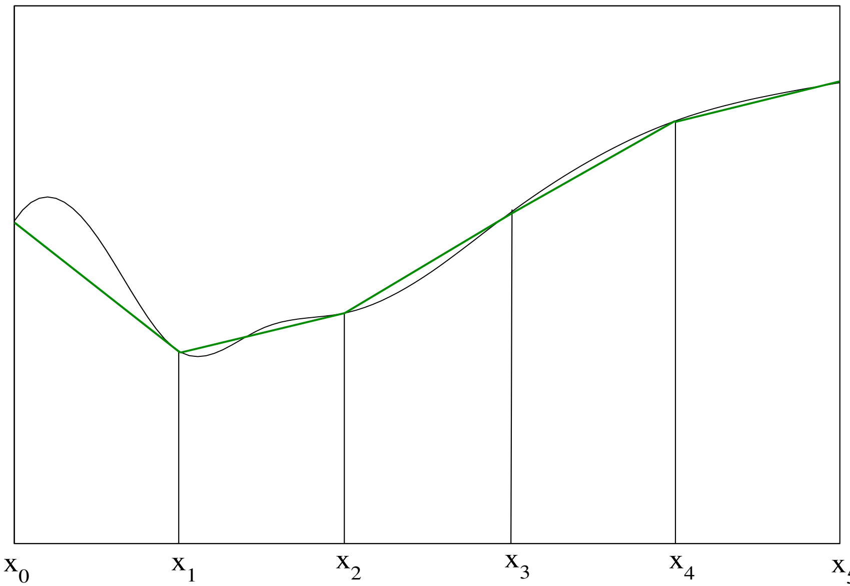
Integrazione a spaziatura fissa: metodo del trapezio

Invece che integrale tanti rettangolini possiamo pensare di fare meglio ed integrare tanti trapezi:

L'area di ogni trapezio sarà:

$$\frac{1}{2}\left(f_j + f_{j+1}\right)\left(x_{j+1} - x_j\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(f_j + f_{j+1}\right) h$$



e quindi, nell'esempio con *N=5, x0=a, x5=b*:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h \cdot \Big(\frac{1}{2} \cdot (f_0 + f_1) + \frac{1}{2} \cdot (f_1 + f_2)$$
$$+ \frac{1}{2} \cdot (f_2 + f_3) + \frac{1}{2} \cdot (f_3 + f_4) + \frac{1}{2} \cdot (f_4 + f_5) \Big)$$

Cioè, in generale*:*
- $w_0 = w_5 = h/2$
- $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = h$

Equivale a sviluppare in serie di Taylor, fermandosi al primo ordine

Integrazione a spaziatura fissa: formula di Simpson

Assumiamo che l'integrale, nell'intervallo *[xj, xj+2h]*, possa essere scritto così:

$$\int_0^{2h} f(x)\,dx = Af(0) + Bf(h) + Cf(2h)$$

Sviluppando la *f(x)* in serie di Taylor ed integrandola:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2}x^2 f''(0) + \frac{1}{6}x^3 f'''(0) + \frac{1}{24}x^4 f^{iv}(0)$$

$$\int_0^{2h} f(x)\,dx = 2hf(0) + \frac{1}{2}(2h)^2 f'(0) + \frac{1}{6}(2h)^3 f''(0)$$

$$+ \frac{1}{24}(2h)^4 f'''(0) + \frac{1}{120}(2h)^5 f^{iv}(0) + O(h^6)$$

$$\int_0^{2h} f(x)\,dx = 2hf(0) + 2h^2 f'(0) + \frac{4}{3}h^3 f''(0)$$

$$+ \frac{2}{3}h^4 f'''(0) + \frac{4}{15}h^5 f^{iv}(0) + O(h^6)$$

Integrazione a spaziatura fissa: formula di Simpson

$$\int_0^{2h} f(x)\,dx = Af(0) + Bf(h) + Cf(2h)$$

Se ora usiamo lo sviluppo per calcolare f(h) e f(2h):

$$= Af(0) + B\left[f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2}f''(0) + \frac{h^3}{6}f'''(0) + \frac{h^4}{24}f^{iv}(0)\right]$$
$$+ C\left[f(0) + 2hf'(0) + 2h^2 f''(0) + \frac{4}{3}h^3 f'''(0) + \frac{2}{3}h^4 f^{iv}(0)\right]$$
$$= (A + B + C)f(0) + h(B + 2C)f'(0) + h^2\left[\frac{B}{2} + 2C\right] f''(0)$$
$$+ h^3\left[\frac{1}{6}B + \frac{4}{3}C\right] f'''(0) + h^4\left[\frac{1}{24}B + \frac{2}{3}C\right] f^{iv}(0)$$

che dovrà essere uguale a:

$$= 2hf(0) + 2h^2 f'(0) + \frac{4}{3}h^3 f''(0) + \frac{2}{3}h^4 f'''(0) + \frac{4}{15}h^5 f^{iv}(0) + O(h^6)$$

Integrazione a spaziatura fissa: formula di Simpson

$$\int_0^{2h} f(x)\,dx = Af(0) + Bf(h) + Cf(2h)$$

I coefficienti delle derivate dello stesso ordine dovranno coincidere:

1. $A + B + C = 2h$
2. $h(B + 2C) = 2h^2$
3. $h^2(\frac{1}{2}B + 2C) = \frac{4}{3}h^3$
4. $h^3(\frac{1}{6}B + \frac{4}{3}C) = \frac{2}{3}h^4$
5. $h^4(\frac{1}{24}B + \frac{2}{3}) = \frac{4}{15}h^5$

Le prime tre equazioni sono un sistema di 3 equazioni in 3 incognite.
Sottraendo *h/2* volte la seconda dalla terza, si ottiene:

$$C = \frac{h}{3} \qquad B = 2h - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}h \qquad A = 2h - \frac{4}{3}h = \frac{1}{3}h$$

Integrazione a spaziatura fissa: formula di Simpson

E le altre due equazioni? Sono soddisfatte?

Prendiamo la quarta:

$$B + 8C = 4h \quad \text{con} \quad B = \frac{4}{3}h \quad \text{e} \quad C = \frac{1}{3}h$$

$$\frac{4}{3}h + \frac{8}{3}h = \frac{12}{3}h = 4h$$

è soddisfatta. La quinta, invece, non lo è. Questo significa che

$$\int_0^{2h} f(x)\,dx = Af(0) + Bf(h) + Cf(2h)$$

non è in grado di descrivere una qualsiasi funzione. Ci sarà un errore di ordine h^5

$$5. \quad h^4(\tfrac{1}{24}B + \tfrac{2}{3}) = \tfrac{4}{15}h^5$$

Integrazione a spaziatura fissa: formula di Simpson

La formula di Simpson integra, esattamente, i polinomi di grado non superiore al terzo.

Se prendiamo, infatti, x^3, che sappiamo integrare “a mano”:

$$\int_0^{2h} x^3\, dx = \left|\frac{x^4}{4}\right|_0^{2h} = \frac{2^4 h^4}{4} = 4h^4$$

La formula di Simpson ci da esattamente lo stesso valore:

$$\int_0^{2h} f(x)\, dx = Af(0) + Bf(h) + Cf(2h)$$

$$C = \frac{h}{3} \qquad B = 2h - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}h \qquad A = 2h - \frac{4}{3}h = \frac{1}{3}h$$

$\rightarrow \quad \frac{1}{3}hf(x=0) + \frac{4}{3}hf(x=h) + \frac{1}{3}hf(x=2h)$

$$= 0 + \frac{4}{3}h^4 + \frac{8}{3}h^4 = \frac{12}{3}h^4 = 4h^4$$

Integrazione a spaziatura fissa: formula di Simpson

Nel caso generale dell'intervallo *[a, b]*, diviso in tanti intervalli di ampiezza *2h*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+2h} f(x)\,dx + \int_{a+2h}^{a+4h} f(x)\,dx + \int_{a+4h}^{a+6h} f(x)\,dx + \\ \cdots + \int_{b-2h}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{1}{3}f_0 + \frac{4}{3}f_1 + \frac{1}{3}f_2\right) + h\left(\frac{1}{3}f_2 + \frac{4}{3}f_3 + \frac{1}{3}f_4\right) + \\ + \cdots + h\left(\frac{1}{3}f_{N-2} + \frac{4}{3}f_{N-1} + \frac{1}{3}f_N\right)$$

$$\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{1}{3}f_0 + \frac{4}{3}f_1 + \frac{2}{3}f_2 + \frac{4}{3}f_3 + \cdots + \frac{4}{3}f_{N-1} + \frac{1}{3}f_N\right)$$

Cioè, in generale*:*

- $w_0 = w_N = 1/3\ h$
- $w_1 = w_3 = \ldots = w_{N-3} = w_{N-1} = 4/3\ h$
- $w_2 = w_4 = \ldots = w_{N-4} = w_{N-2} = 2/3\ h$

… ed è bene verificare che N sia multiplo di 2 …

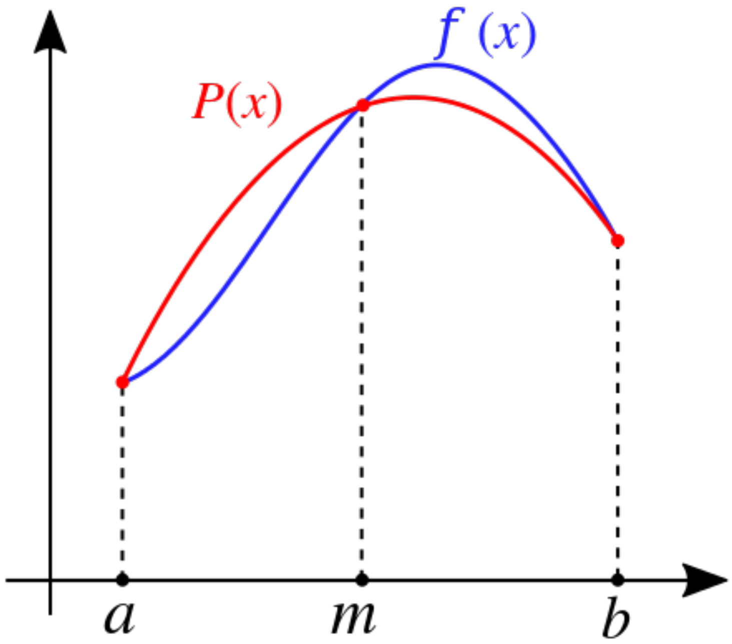
Integrazione a spaziatura fissa: formula di Simpson

Aver ricondotto l'integrale ad un'espressione con 3 coefficienti liberi, *A*, *B* e *C*

$$\int_0^{2h} f(x)\,dx = Af(0) + Bf(h) + Cf(2h)$$

significa descrivere la *f(x)*, all'interno di ogni intervallo, con una *parabola*

$$f(x) \approx P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$



Metodo di Gauss

Finora ci siamo limitati a intervalli regolari (spaziatura fissa) e l'unico modo per "migliorare" la precisione era quella di aumentare il grado dello sviluppo di Taylor, per integrare polinomi di ordine crescente.

Usando l'arbitrarietà nelle posizioni x_j, si possono trovare formule esatte.

Consideriamo, per semplicità, solo intervalli *[-1, 1]*. Ogni intervallo generico *[a, b]*, potrà esservici ricondotto con un cambio di variabile:

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}y$$

con $-1 \leq y \leq 1$, $dx = \dfrac{b-a}{2}\,dy$ ottengo

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}y)\,dy}$$

Metodo di Gauss

Se suppongo di conoscere i punti x_j dove viene valutata la funzione, posso risalire ai pesi w_j per i quali deve essere moltiplicato $p(x_j)$ per rendere esatto l'integrale. Il sistema di N equazioni in N incognite w_j

$$\int_{-1}^{1} p(x)dx = \sum_{j=1}^{N} w_j \cdot p(x_j)$$

da' una soluzione unica se si conderano i primi N monomi $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^{N-1}$ e le loro combinazioni lineari, quindi tutti i polinomi di grado inferiore a N.

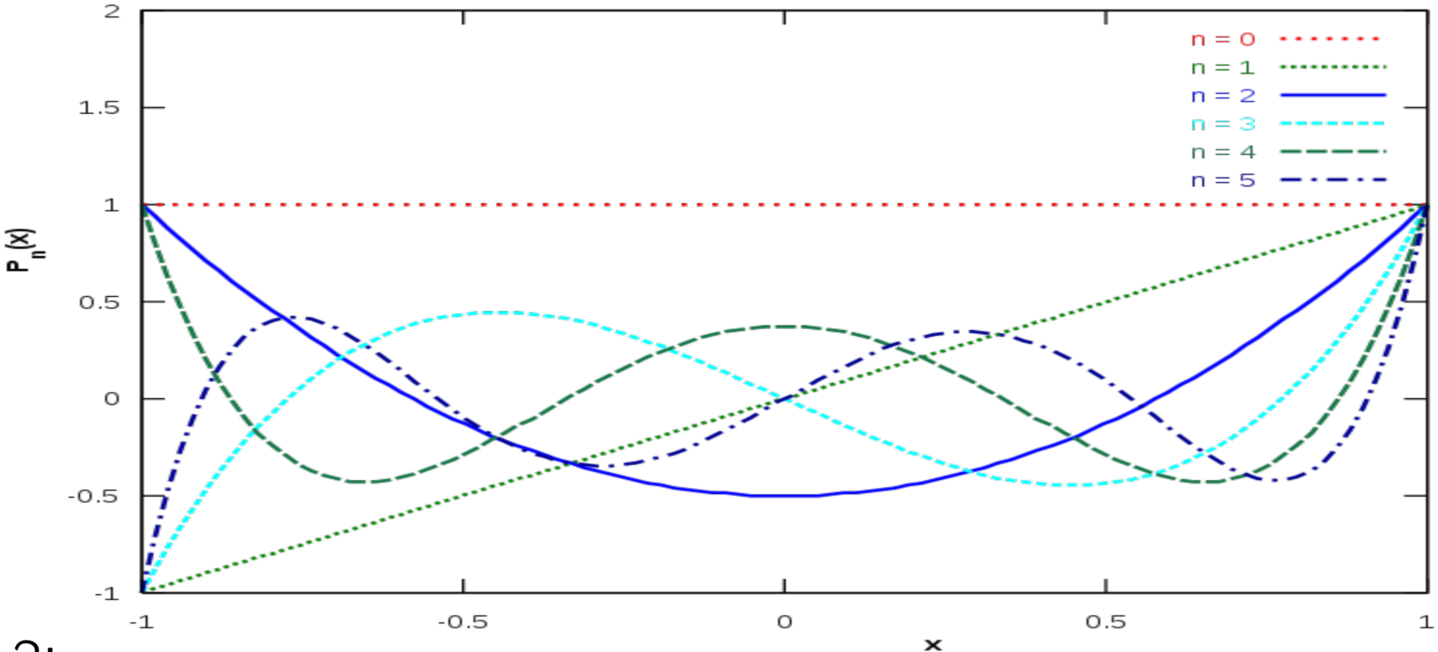
Metodo di Gauss

Posso allora usare la scelta degli x_j per integrare anche polinomi di grado superiore.

Definisco i polinomi di Legendre $P_n(x)$.

$P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = x$

$nP_n(x) = (2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x)$



Per $n = 2$:

$$2P_2(x) = 3xP_1(x) - P_0(x) = 3x^2 - 1 \Longrightarrow P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

Metodo di Gauss

Se $p(x)$ è un polinomio di grado $2N - 1$ posso scrivere

$$p(x) = q(x)P_N(x) + r(x)$$

dove $q(x)$ e $r(x)$ sono rispettivamente quoziente e resto, entrambi di grado $N - 1$.

Ne segue in particolare che:

$$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = \int_{-1}^{1} q(x)P_N(x)\,dx + \int_{-1}^{1} r(x)\,dx$$

Metodo di Gauss

Sfrutto ora una particolare proprietà dei polinomi di Legendre, quella di essere ortogonali a tutti i polinomi di grado inferiore, cioè

$\int_{-1}^{1} q(x) P_N(x)\, dx = 0$ se $q(x)$ è di grado inferiore a

$$\int_{-1}^{1} p(x)\, dx = \int_{-1}^{1} r(x)\, dx = \sum_{k=1}^{N} w_k r(x_k)$$

L'integrazione del polinomio di grado $2N - 1$ è ridotta a quella di un polinomio di grado $N - 1$, che però non conosco.

Metodo di Gauss

Uso l'arbitrarietà nello scegliere x_j per liberarmi di $r(x)$

Poiché

$$p(x) = q(x)P_N(x) + r(x)$$

Scelgo per x_j i valori degli N zeri di $P_N(x)$, che esistono e sono reali. Allora, dato che

$$p(x_j) = q(x_j)P_N(x_j) + r(x_j) = r(x_j)$$

trovo

$$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = \sum_{k=1}^{N} w_k r(x_k) = \sum_{k=1}^{N} w_k p(x_k)$$

Metodo di Gauss

- gli N x_k sono gli zeri di $P_N(x)$ → tabulati
- si dimostra che anche gli w_k non dipendono da $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ ma solo da $P_N(x)$ → tabulati

Per una generica funzione $f(x)$ si scriverà:

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{N} w_k f(x_k)}$$

Questa formula a N punti è esatta per polinomi fino al grado $2N-1$. Integra bene funzioni polinomiali o che assomigliano a polinomi.

Non va usata con funzioni come: e^{-x} ed e^{-x^2}

Metodo di Gauss

- gli N x_k sono gli zeri di $P_N(x)$ → tabulati
- si dimostra che anche gli w_k non dipendono da $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ ma solo da $P_N(x)$ → tabulati

Oct 25, 1941

TABLE OF THE ZEROS OF THE LEGENDRE POLYNOMIALS OF ORDER 1–16 AND THE WEIGHT COEFFICIENTS FOR GAUSS' MECHANICAL QUADRATURE FORMULA[1]

ARNOLD N. LOWAN, NORMAN DAVIDS AND ARTHUR LEVENSON

Gauss' method of mechanical quadrature has the advantage over most methods of numerical integration in that it requires about half the number of ordinate computations. This is desirable when such computations are very laborious, or when the observations necessary to determine the average value of a continuously varying physical quantity are very costly. Gauss' classical result[2] states that, for the range $(-1, +1)$, the "best" accuracy with n ordinates is obtained by choosing the corresponding abscissae at the zeros $x_1, \cdots, x_n$ of the Legendre polynomials $P_n(x)$. With each x_i is associated a constant a_i such that

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \sim a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + \cdots + a_n f(x_n). \tag{1}$$

The accompanying table computed by the Mathematical Tables Project gives the roots x_i for each $P_n(x)$ up to $n=16$, and the corresponding weight coefficients a_i, to 15 decimal places.

The first such table, computed by Gauss gave 16 places up to $n=7$.[3] More recently work was done by Nyström,[4] who gave 7 decimals up to $n=10$, but for the interval $(-1/2, +1/2)$. B. de F. Bayly has given the roots and coefficients of $P_{12}(x)$ to 13 places.[5]

The Gaussian quadrature formula for evaluating an integral with arbitrary limits (p, q) is given by

Presented to the Society, October 25, 1941, under the title *Tables for Gauss' mechanical quadrature formula*; received by the editors December 18, 1941.

[1] The results reported here were obtained in the course of the work done by the Mathematical Tables Project conducted by the Work Projects Administration for New York City under the sponsorship of the National Bureau of Standards, Dr. Lyman J. Briggs, Director.

Metodo di Gauss

- gli N x_k sono gli zeri di $P_N(x)$ → tabulati
- si dimostra che anche gli w_k non dipendono da $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ ma solo da $P_N(x)$ → tabulati

Qui un codice Mathematica per calcolare nodi e zeri:

```
In[37]:= symboliclegendre[n_, x_] := Solve[LegendreP[n, x] == 0];
         legendreprime[n_, a_] := D[LegendreP[n, x], x] /. x → a;
         weights[n_, x_] := 2 / ((1 - x^2) legendreprime[n, x]^2);

         (*how many terms should be generated*)
         h = 10;

         (*what numerical precision is desired?*)
         precision = 16;
```

Metodo di Gauss

Qui un codice Mathematica per calcolare nodi e zeri:

```
str = OpenWrite["~/Desktop/lgvalues.txt"];
Do[
  WriteString[str,
   "\nn = ",
   n,
   "\n"
  ];
  WriteString[str,
   "i = \t\t\t weight, w_{i} \t\t\t abscissa x_{i}\n"
  ];
  Print[
   "\nn = ",
   n
  ];
  Print[
   "i  \t\t\t weight, w_{i} \t\t\t abscissa x_{i}"
  ];
  nlist = symboliclegendre[n, x];
  xnlist = x /. nlist;
  Do[
   WriteString[str,
    i,
    ": \t\t\t ",
    ScientificForm[Re[N[weights[n, Part[xnlist, i]], {Infinity, precision}]],
      NumberFormat → (#1 <> "*10^(" <> #3 <> ")" &)] // ToString,
    " \t\t\t ",
    ScientificForm[Re[N[Part[xnlist, i], {Infinity, precision}]],
      NumberFormat → (#1 <> "*10^(" <> #3 <> ")" &)] // ToString,
    "\n"
   ];
   Print[
```

Metodo di Gauss

Qui un codice Mathematica per calcolare nodi e zeri:

```
   Print[
    i,
    ": \t\t\t ",
    Re[N[weights[n, Part[xnlist, i]], {Infinity, precision}]],
    " \t\t\t ",
    Re[N[Part[xnlist, i], {Infinity, precision}]]
   ]
   , {i, Length[xnlist]}];
  , {n, 2, h}];
Write[str];
Close[str];
```

Metodo di Gauss

E qui il suo output:

n = 2

i	weight, w_{i}	abscissa x_{i}
1:	1.000000000000000	-0.577350269189626
2:	1.000000000000000	0.577350269189626

n = 3

i	weight, w_{i}	abscissa x_{i}
1:	0.888888888888889	$0. \times 10^{-16}$
2:	0.555555555555556	-0.774596669241483
3:	0.555555555555556	0.774596669241483

n = 4

i	weight, w_{i}	abscissa x_{i}
1:	0.652145154862546	-0.339981043584856
2:	0.652145154862546	0.339981043584856
3:	0.347854845137454	-0.861136311594053
4:	0.347854845137454	0.861136311594053

n = 5

i	weight, w_{i}	abscissa x_{i}
1:	0.568888888888889	$0. \times 10^{-16}$
2:	0.478628670499366	-0.538469310105683

Metodo di Gauss

E qui il suo output:

```
4:              0.236926885056189          -0.906179845938664
5:              0.236926885056189          0.906179845938664

n = 6
i               weight, w_{i}              abscissa x_{i}
1:              0.3607615730481386          0.6612093864662645
2:              0.3607615730481386          -0.6612093864662645
3:              0.4679139345726910          -0.2386191860831969
4:              0.4679139345726910          0.2386191860831969
5:              0.1713244923791703          -0.9324695142031520
6:              0.1713244923791703          0.9324695142031520

n = 7
i               weight, w_{i}              abscissa x_{i}
1:              0.417959183673469          0. × 10^-16
2:              0.3818300505051189          0.4058451513773972
3:              0.3818300505051189          -0.4058451513773972
4:              0.2797053914892767          -0.7415311855993944
5:              0.2797053914892767          0.7415311855993944
6:              0.1294849661688697          -0.9491079123427585
7:              0.1294849661688697          0.9491079123427585
```