Simulazione di uno spettrometro magnetico

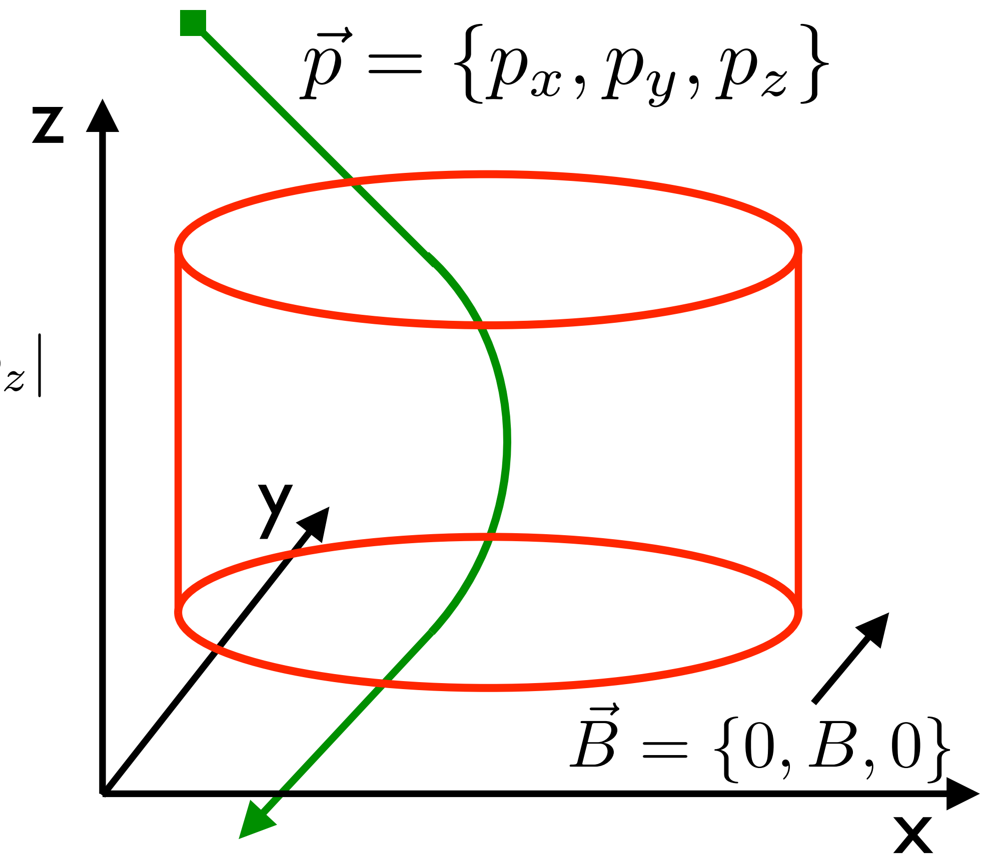
Matteo Duranti

matteo.duranti@pg.infn.it

Spettrometro

Simulazione di uno spettrometro magnetico costituito da un magnete cilindrico:

la bontà di uno spettrometro (~ la risoluzione in momento) dipende dal *bending power*



$$\Delta p = |\vec{\Delta p}| = |\vec{\Delta p}_x + \vec{\Delta p}_y + \vec{\Delta p}_z|$$

$$\Big(\frac{d\vec{p}}{dt} = q\,\vec{v} \times \vec{B} = q\,\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B}$$

$$\rightarrow \; \Delta\vec{p} = -q \int \vec{B} \times d\vec{r}$$

e quindi, ad esempio

$$\Delta p_x = -q\left(\int B_y\,dz - \int B_z\,dy\right)\Big)$$

Spettrometro

Simulazione di uno spettrometro magnetico costituito da un magnete cilindrico:

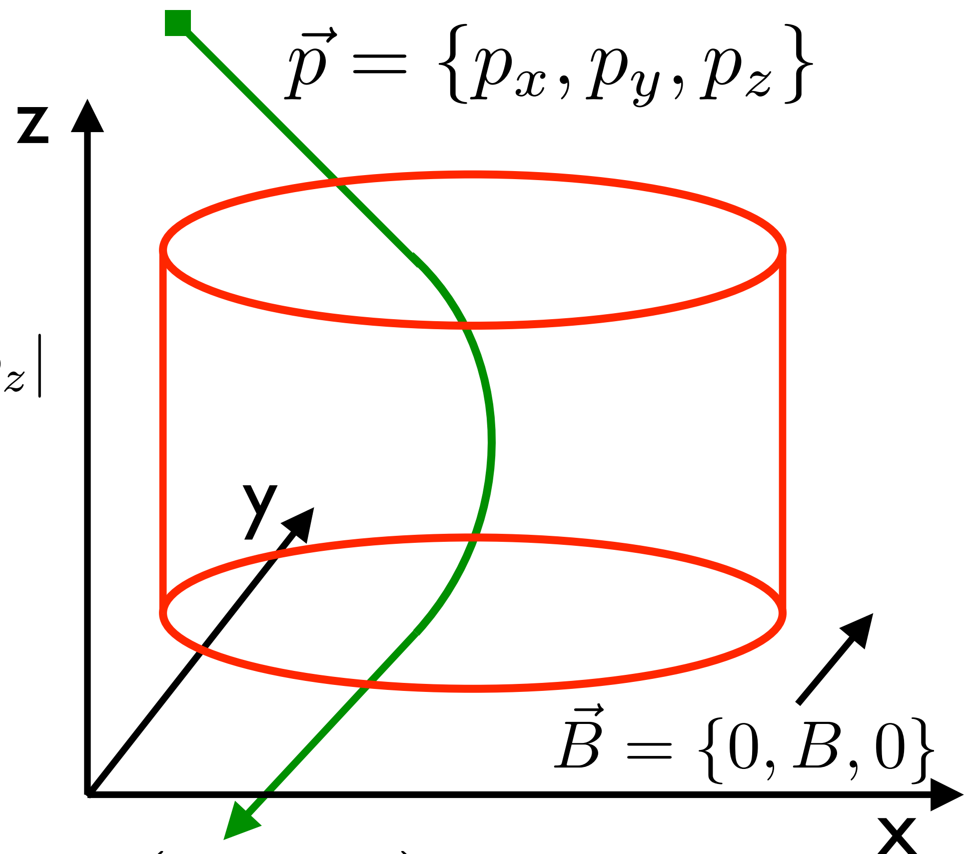
la bontà di uno spettrometro (~ la risoluzione in momento) dipende dal *bending power*

$$\Delta p = |\Delta \vec{p}| = |\Delta \vec{p}_x + \Delta \vec{p}_y + \Delta \vec{p}_z|$$

che, nel caso *B* = {*0*, *B*, *0*}:

$$\Delta p_\perp \equiv |\Delta \vec{p}| = |\Delta \vec{p}_x + \Delta \vec{p}_z|$$

calcolabile come la somma in quadratura di



$$|\Delta p_x| = q\left(\int B_y\, dz\right) \quad \text{e} \quad |\Delta p_z| = q\left(\int B_y\, dx\right)$$

Spettrometro

Simulazione di uno spettrometro magnetico costituito da un magnete cilindrico:

- il campo (*1* T, uniforme lungo *y*) è limitato nella zona del cilindro (alto *1* m e di *1* m di diametro) e nullo fuori
- integrare l'equazione del moto, sia nella regione di campo magnetico che fuori (nel caso di vettori, la propagazione deve essere effettuata per tutte e tre le componenti contemporaneamente, ad ogni step)
  → decidete voi il "livello" del vostro "prodotto": il vostro sw funzionerà solamente per $\mathbf{B} = \{0, B, 0\}$, anche per $\mathbf{B} = \{B_x, B_y, B_z\}$, o addirittura per $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \{B_x(\mathbf{r}), B_y(\mathbf{r}), B_z(\mathbf{r})\}$?
- generare le particelle a partire da un piano di generazione, un quadrato di lato *3.9* m, distante *3.9/2* m dal centro del cilindro
- generare le particelle con uno spettro isotropo

Spettrometro

Simulazione di uno spettrometro magnetico costituito da un magnete cilindrico:

- valutare, per particelle generate con spettro in momento p^{-3} in *[0.1, 1000] GeV/c*, l'integrale

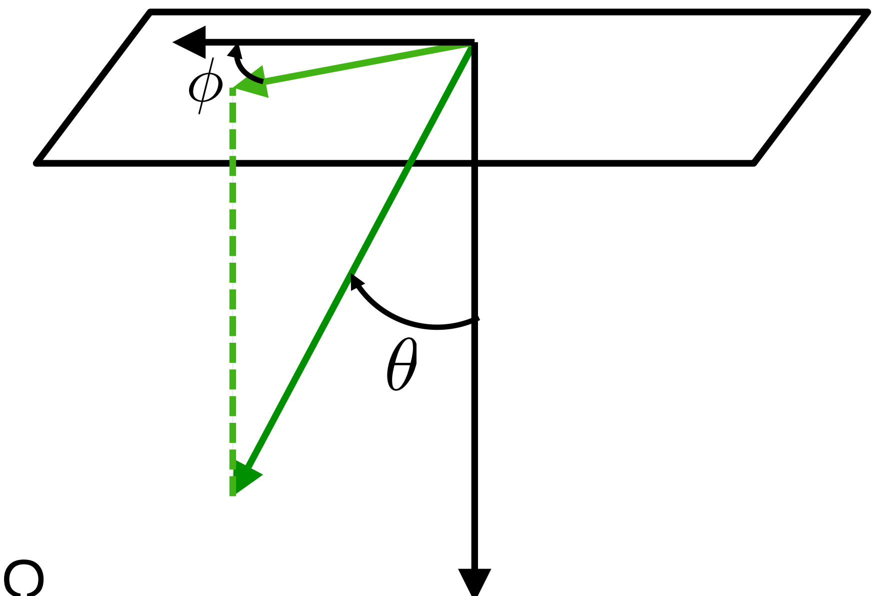
  $$\Delta p_\perp \equiv |\Delta \vec{p}| = |\Delta \vec{p}_x + \Delta \vec{p}_z|$$

  e farne la distribuzione (istogramma: occorrenze vs $\Delta p_\perp$). Dato il campo uniforme l'integrale è banale: questo permette di confrontare il valore numerico con quello "esatto";
- valutare, a 5 valori del momento (0.1, *1*, *10*, *100* e *1000* GeV/c), la media e la deviazione standard della distribuzione di $\Delta p_{\perp,}$ e graficarle in funzione del momento stessa;
- valutare la frazione (i.e. ~ efficienza) di particelle che attraversano l'intero cilindro (i.e. passano attraverso le due basi circolari), in funzione del momento;
- riportare tutto il lavoro in una relazione, sintetica ma completa;

Generazione

F*lusso isotropo,* Φ:

$$\vec{p} = \{p_x, p_y, p_z\} \to \{|p|, \theta, \phi\}$$



Isotropo significa che

$$\frac{d\Phi}{d\Omega} = \frac{d\Phi}{d\phi\, d\cos\theta} = k$$

Il numero di particelle che attraversano un elemento di area, Ω

$$N \propto \int_\Sigma \vec{\Phi} \cdot d\vec{\sigma} \implies \frac{dN}{d\phi\, d\cos\theta} \propto \cos\theta$$

$$\frac{dN}{d\phi\, \cos\theta\, d\cos\theta} \sim k \sim \frac{dN}{d\phi\, d\cos^2\theta}$$

Details on geometrical acceptance

The counting rate C for a telescope located in **x** at a given time t_o can be generally expressed as:

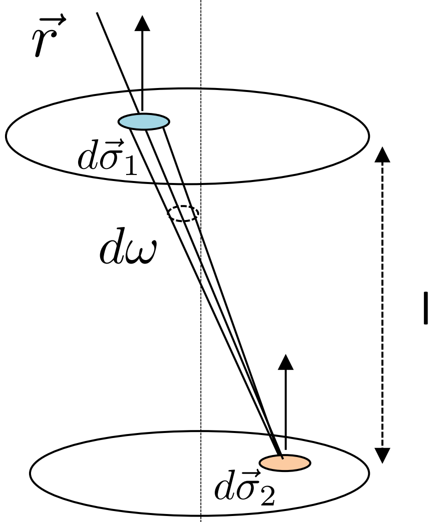
$$C(\vec{x}, t_0) = \boxed{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} dt}\boxed{\int_S d\vec{\sigma}\cdot\hat{r}}\boxed{\int_\Omega d\omega}\boxed{\int_0^\infty dE \times \sum_\alpha \epsilon_\alpha(E, \vec{\sigma}, \omega, t) J_\alpha(E, \omega, \vec{x}, t)}$$

Average on the observation time

Integration on the surface S of the last element of the telescope.

Integration on the solid angle $d\omega = d\phi d\cos\theta$ as determined from the other telescope elements Ω

Integration over energy of the sum over all possible signals α of the incoming flux J_α and their detection efficiency ε_α



(with some semplifications:

- $d\sigma$, x, ω are not depending on time [this could happen for a rotating instrument]
- flux J_α does not depend on σ
- straight trajectories
- ε_α take into account all detection effects are known and independent from x

ref. Sullivan, NIM 95 (1971) 5-11

Details on geometrical acceptance

Let's make further simplifications:

1) just one kind of particle α=1
2) Efficiency = 1 and independent of energy, time, position
3) Flux independent of position and constant in time $J = J_0(E)F(\omega)$
4) Just a reduced energy interval $\Delta E=[E_1,E_2]$

$$C(\vec{x},t_0) = \underbrace{\cancel{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}} dt}_{=1} \int_S d\vec{\sigma}\cdot\hat{r}\int_\Omega d\omega \underline{\int_0^\infty dE} \times \cancel{\sum_\alpha} \underbrace{\epsilon_\alpha(E,\vec{\sigma},\omega,t)}_{=1} \underline{J_\alpha(E,\omega,\vec{x},t)}$$

$$\Downarrow$$

$$C = I\left[\int_\Omega d\omega \int_S d\vec{\sigma}\cdot\hat{r}F(\omega)\right] \qquad I = \int_{E_1}^{E_2} dE J_0(E)$$

Geometrical acceptance (gathering power) of the instrument for an incoming flux with a given angular distribution.

ref. Sullivan, NIM 95 (1971) 5-11

Details on geometrical acceptance

$$G = \int_\Omega F(\omega) A(\omega) d\omega \;\; \text{where} \;\; A(\omega) = \int_S d\vec{\sigma} \cdot \hat{r}$$

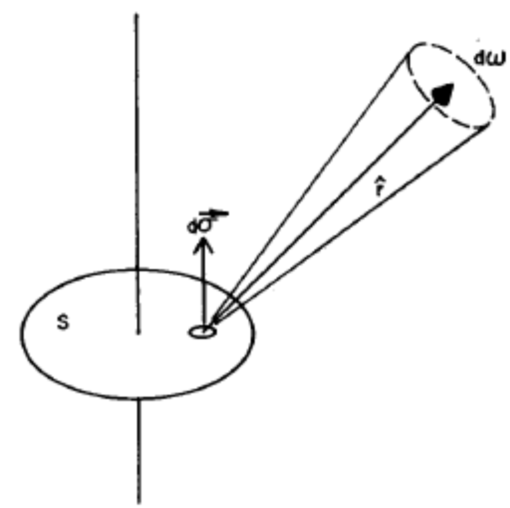
describes the directional response of the instrument.

For an isotropic flux there is no dependence of the flux from the arrival direction: F(ω)=1 and the geometrical acceptance reduces to

$$G = \int_\Omega A(\omega) d\omega$$

Let's try the estimate for the simples case: just one planar detector receiving a flux from above:.

$$G = \int_\Omega d\omega \int_S d\vec{\sigma} \cdot \hat{r} = \int_\Omega \int_S \cos\theta d\sigma d\omega$$
$$= 2\pi A \int_0^1 \cos\theta d\cos\theta = \pi A$$



ref. Sullivan, NIM 95 (1971) 5-11

Relatività

Relatività:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$E^2 = m_0^2\, c^4 + p^2 c^2$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{p} = m_0 \vec{\beta}\, c\, \gamma \\[2ex] E = m_0\, c^2\, \gamma = m\, c^2 \end{array}\right\} \vec{\beta} = \frac{\vec{p}\, c}{E}$$

Unità di misura

Unità di misura:

- ✓ $eV = 1.6021766208(98)*10^{-19}\,J$ (cfr. https://en.wikipedia.org/wiki/Electronvolt)
  ma tipicamente si utilizza il $GeV = 10^9\,eV$
  - E in GeV
  - p in GeV/c → $1\ GeV/c = 5.344286*10^{-19}\ kg\ m/s$
  - m in GeV/c^2 → $1\ GeV/c^2 = 1.783*10^{-27}\ kg$

  spesso si usa $c=1$ e quindi tutte sono in GeV.
- ✓ Le cariche si misurano in *carica elementare*, e.

→ Particelle "comuni":

- elettrone: q = -e, $m \sim 0.5\ MeV$
- protone: q = e, $m \sim 1\ GeV$
- nucleo di ^{4}He: $q = 2e$, $m \sim 4\ GeV$

Relatività e unità di misura

Relatività:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$E^2 = m_0^2\, c^4 + p^2 c^2$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{p} &= m_0 \vec{\beta}\, c\, \gamma \\ E &= m_0\, c^2\, \gamma = m\, c^2 \end{aligned}\right\} \vec{\beta} = \frac{\vec{p}\, c}{E}$$

che in un sistema di unità in cui *c=1*:

$$E^2 = m_0^2 + p^2$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{p} &= m_0 \vec{\beta}\, \gamma \\ E &= m_0\, \gamma = m \end{aligned}\right\} \vec{\beta} = \frac{\vec{p}}{E}$$

- un protone di *1 GeV* di momento ha ~ $\sqrt{2}$ *GeV* di energia
- un protone di *10 GeV* di momento ha ~ *10 GeV* di energia
- un elettrone di *1 GeV* di momento ha ~ *1 GeV* di energia

Forza di Lorentz e unità di misura

→ Nel caso dell'elettromagnetismo la conversione è banale.

Ad esempio il raggio di girazione, ρ , di una particella carica, in un campo magnetico uniforme è:

$$\rho = \frac{p}{qB}$$ → la variabile che "domina" il moto è la *rigidità* $$R = \frac{p\,c}{q} \quad (\mathrm{V})$$

Per *p=1GeV*, *q=1e* (→ *R=1V*) e *B=1T*

$$\rho = \frac{5.34 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{Kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1.6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}\,\frac{\mathrm{Kg}}{\mathrm{C\,s}}} \approx \frac{1}{0.3}\,\mathrm{m}$$

che può essere "mnemonizzato" come "mettere 0.3 davanti al campo B, utilizzando le formule in metri, GeV, cariche elementari e Tesla":

$$\frac{\rho}{1\mathrm{m}} = \frac{\frac{p}{1\,\mathrm{Kg\,m/s}}}{\frac{q}{1\,\mathrm{C}}\,\frac{B}{1\,\mathrm{T}}} \approx \frac{1}{0.3}\,\frac{\frac{p}{1\,\mathrm{GeV}}}{\frac{q}{1\,\mathrm{e}}\,\frac{B}{1\,\mathrm{T}}}$$