

Esercitazione sui metodi di risoluzione di ODE

Matteo Duranti

matteo.duranti@pg.infn.it

Metodo di Eulero

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad y(x_0) = y_0$$

Sostituendo la derivata con il rapporto incrementale

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h} \approx f(x, y(x))$$

$$\rightarrow y(x+h) = y(x) + h \cdot f(x, y(x))$$

scritto comunemente come

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

cioè $y_n \approx y(x_n)$ è un'approssimazione valida per la

soluzione dell'ODE a $x_n = x_0 + nh$

Metodo di Eulero

$$y'(x) = f(x, y(x)) = y(x) \quad y(x_0) = y_0 = 1$$

e si vuole “risolvere” per $y(4)$: la soluzione “analitica”, in questo caso, è banale, $y(x) = e^x$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

che, con $h=1$

$$f(x_0, y_0) = f(0, 1) = 1 \quad h \cdot f(y_0) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\rightarrow y_1 = y_0 + h f(y_0) = 1 + 1 \cdot 1 = 2$$

$$y_2 = y_1 + h f(y_1) = 2 + 1 \cdot 2 = 4$$

$$y_3 = y_2 + h f(y_2) = 4 + 1 \cdot 4 = 8$$

$$y_4 = y_3 + h f(y_3) = 8 + 1 \cdot 8 = 16$$

Metodo di Eulero

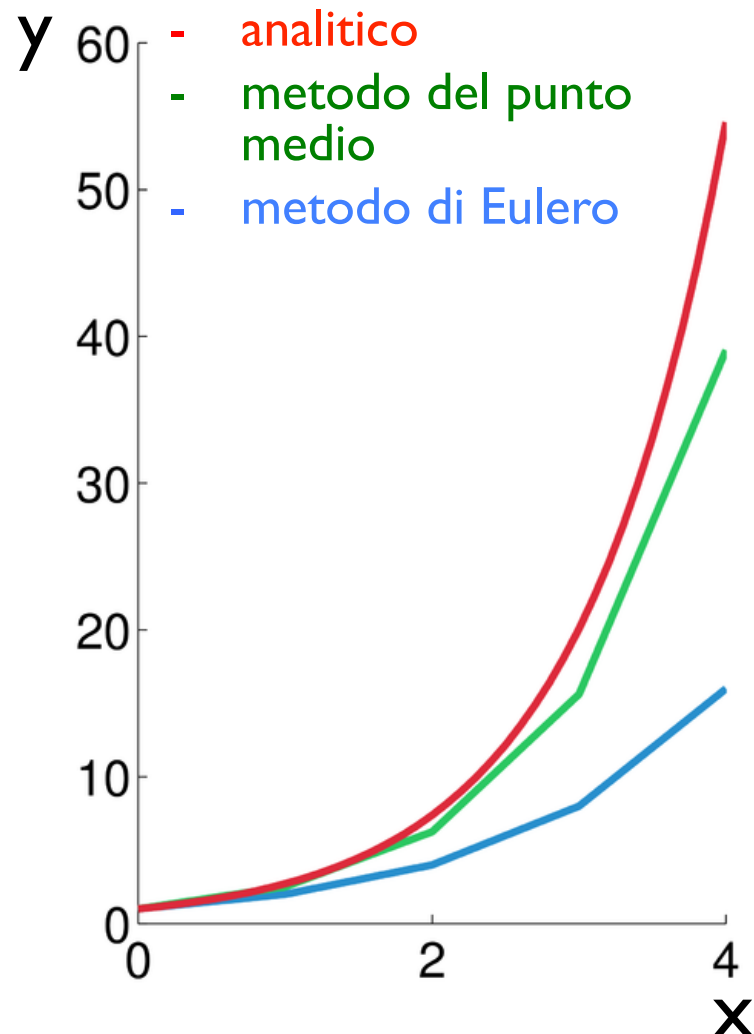
$$y'(x) = f(x, y(x)) = y(x)$$

$$y(x_0) = y_0 = 1$$

→

n	e^n	y_n	Δ
1	~2.718	2	~0.7
2	~7.389	4	~3
3	~20.085	8	~12
4	~54.598	16	~40

n	$e^n - e^{n-1}$	$y_n - y_{n-1}$	Δ
1	~1.7	1	~0.7
2	~4.7	2	~2.7
3	~12.7	4	~8.7
4	~34.5	8	~26.5



Metodo del punto medio

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad y(x_0) = y_0$$

Possiamo fare due scelte:

- metodo esplicito del punto medio (o di Eulero modificato):

$$y_{n+1} = y_n + hf \left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n) \right)$$

- metodo implicito del punto medio:

$$y_{n+1} = y_n + hf \left(x_n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y_n + y_{n+1}) \right)$$

Metodo del punto medio

$$y'(x) = f(x, y(x)) = y(x) \quad y(x_0) = y_0 = 1$$

- metodo esplicito del punto medio:

$$y_{n+1} = y_n + hf \left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n) \right)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \left(y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n) \right) = y_n + hy_n + \frac{h^2}{2} y_n$$

- metodo implicito del punto medio:

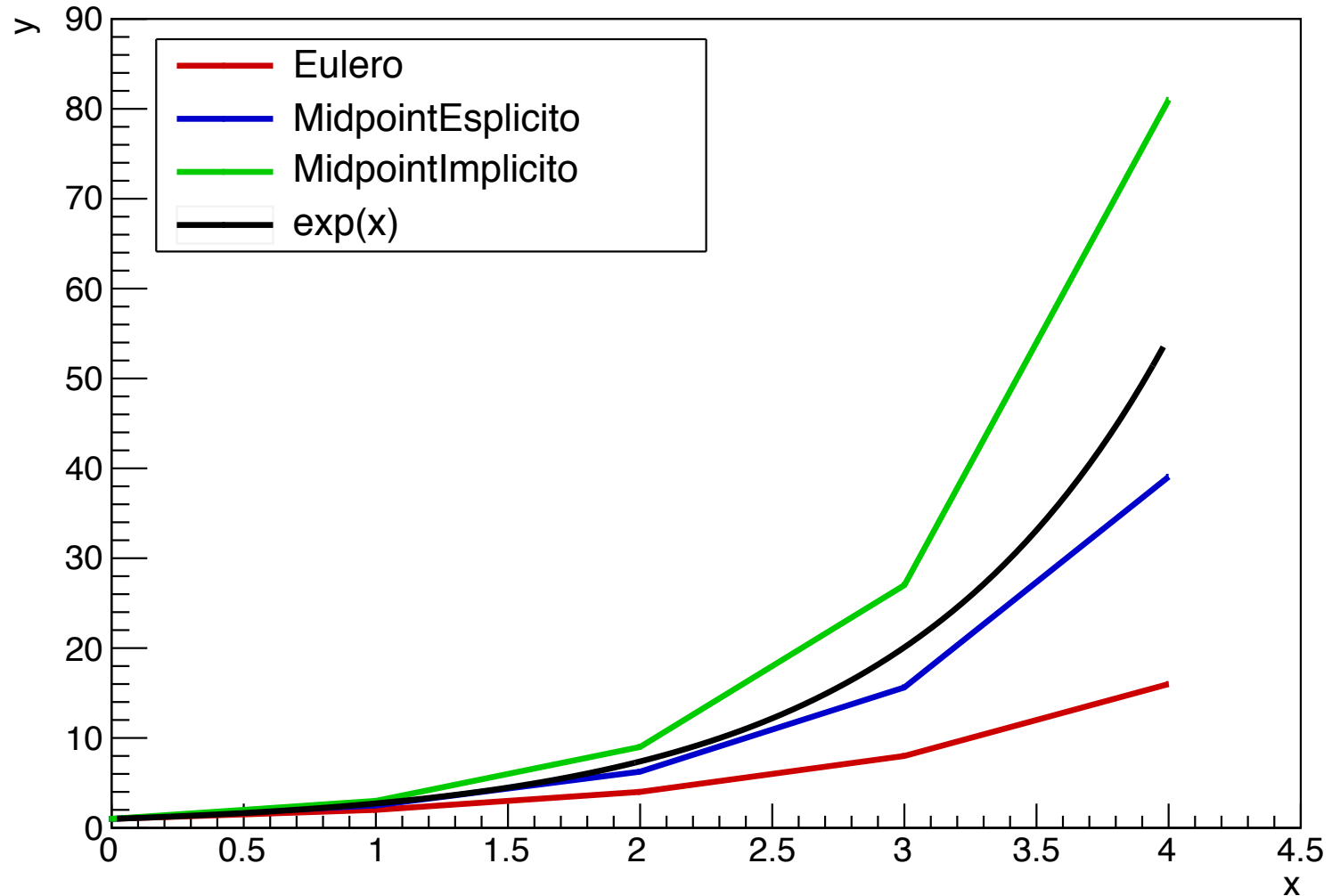
$$y_{n+1} = y_n + hf \left(x_n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y_n + y_{n+1}) \right)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{1}{2}(y_n + y_{n+1}) \right) = y_n + \frac{h}{2} y_n + \frac{h}{2} y_{n+1}$$

$$y_{n+1} = \frac{1 + \frac{h}{2}}{1 - \frac{h}{2}} y_n$$

Metodo del punto medio

$$y'(x) = f(x, y(x)) = y(x) \quad y(x_0) = y_0 = 1$$



Esercitazione

A. Implementare una classe, “wrapper” di diversi metodi, che permetta di risolvere un’ODE del primo ordine generica

B. Implementare i metodi:

- Eulero
- Punto medio esplicito
- Punto medio implicito (*)

C. Risolvere il caso “particolare”:

$$y'(x) = f(x, y(x)) = y(x) \quad y(x_0) = y_0 = 1$$

plottando (**) i vari risultati in funzione dello step

D. Fate il punto C per diversi valori di h

(*) nel caso di equazione generica NON è banale. Provateci o quantomeno stabilite cosa vi “manca” per farlo...

(**) come al solito: i grafici/istogrammi li potete fare con il metodo che volete: Excel, Calc, Numbers, Gnuplot, Scipy, Mathematica, Matlab, ROOT, etc...