Laboratorio di Elettronica e Tecniche di Acquisizione Dati
2025-2026

Analisi segnali

(cfr. http://wpage.unina.it/verdoliv/tds/appunti/Appunti_03.pdf

Luise, Vitetta, D'Amico Teoria dei segnali analogici)

Segnali e Sistemi di Acquisizione

Segnale	**Rumore**	**Sistema DAQ**
Suono di un strumento	Brusio del pubblico	Sala di incisione
Trasmissione radiofonica	Segnale del cellulare	Registratore
Movimenti di un vigile	Persone a passeggio	Occhio e cervello guidatore
Voce del professore	Chiacchere degli studenti	Occhio e cervello degli studenti

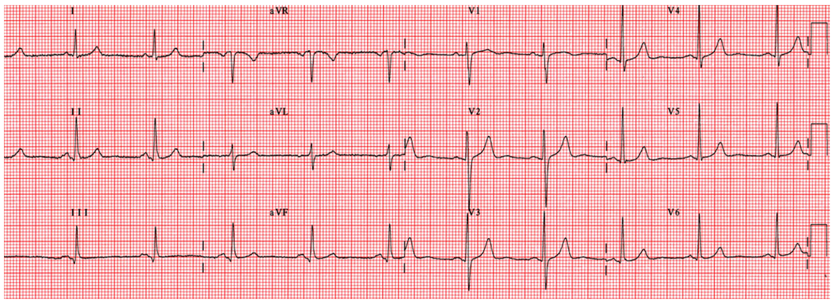
SEGNALE: Grandezza fisica variabile nel tempo a cui è associata una informazione

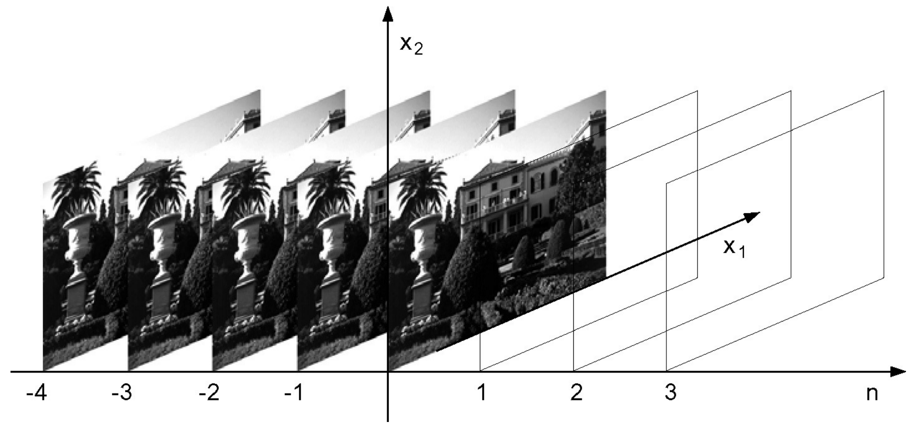
RUMORE: Variazione di una grandezza fisica non associata a una informazione

SISTEMA DAQ: Sistema per rivelare/acquisire e meorizzare la variazione di una grandezza fisica

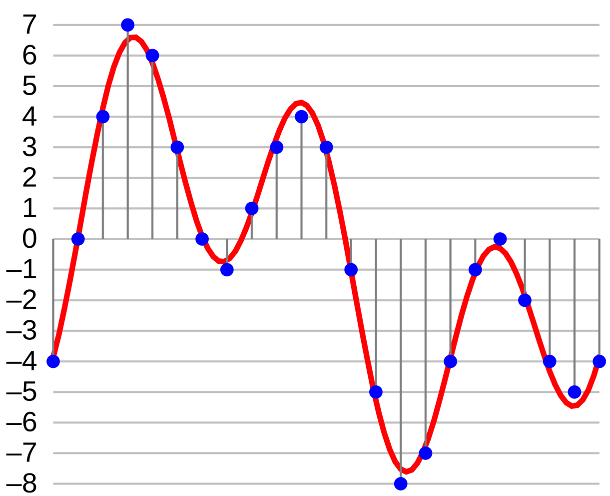
Classificazione dei segnali

Segnali a:
- **tempo continuo**: $x(t)$, t reale
- **tempo discreto**: $x[t]$, t intero





Segnali a:
- **ampiezza continua**
- **ampiezza discreta**



	T continuo	T discreto
A continua	Analogico	Campionato
A discreta		Digitale

Classificazione dei segnali

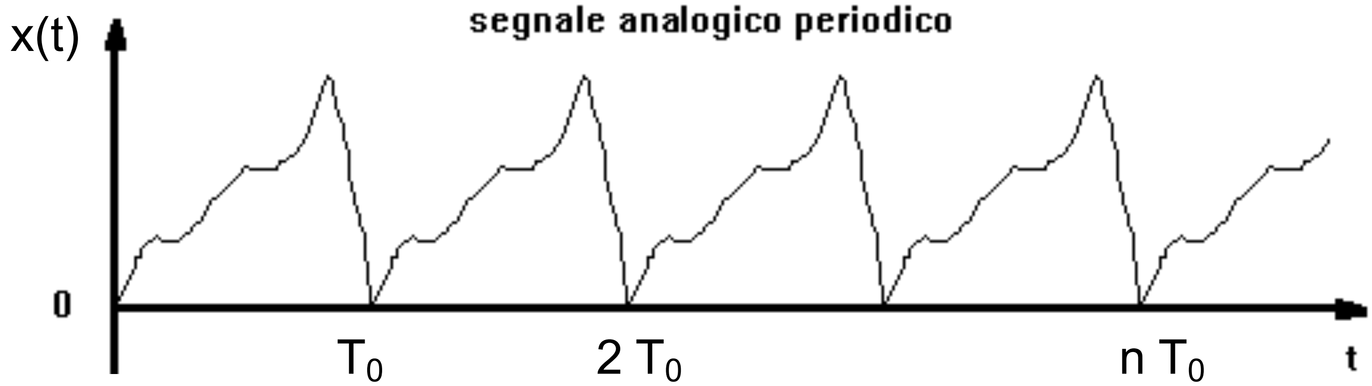
Segnali periodici:

$x(t) = x(t + T_0)$

T_0 periodo

$f_0 = 1/T_0$

frequenza portante

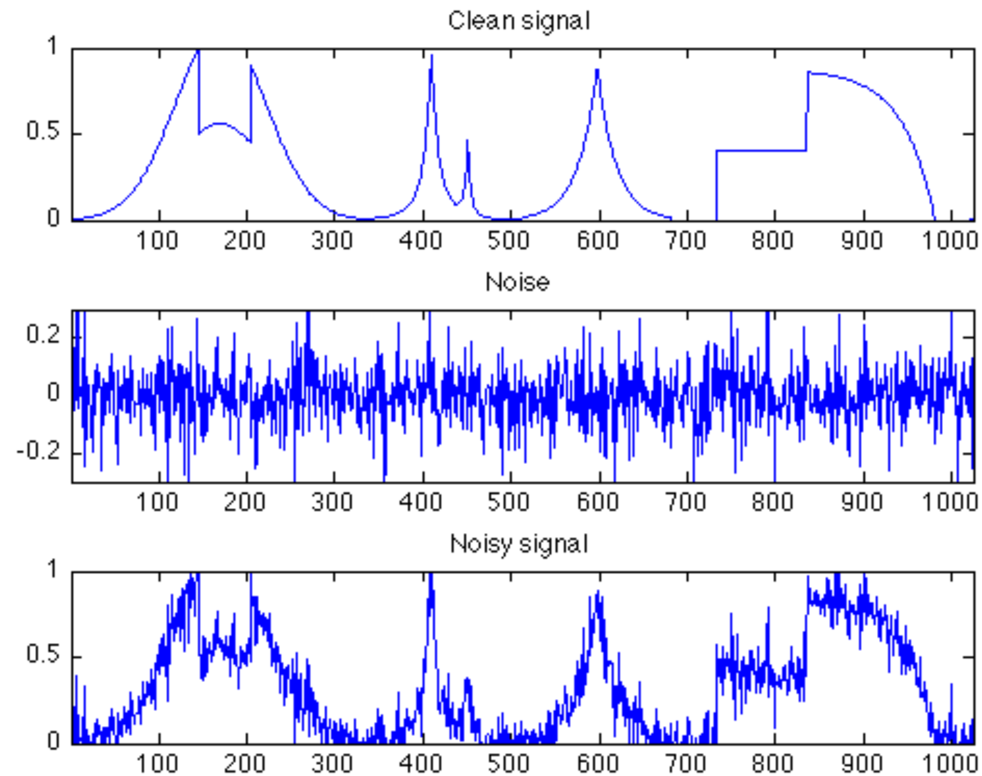


Segnali deterministici:

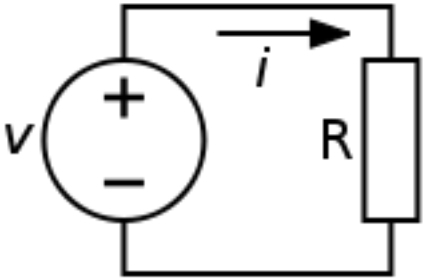
- univocamente determinabile se noti i valori delle variabili indipendenti (tempo):

Segnali aleatori:

- “imprevedibili” conoscibili solamente a posteriori, misurandoli. A priori sono note solo proprietà generali del sistema;



Potenza di un segnale

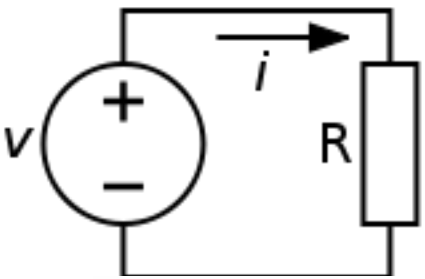


Potenza elettrica: $p(t) = R\, i^2(t)$

Energia elettrica: $E = \int_{-\infty}^{+\infty} R\, i^2(t)\, \mathrm{d}t$

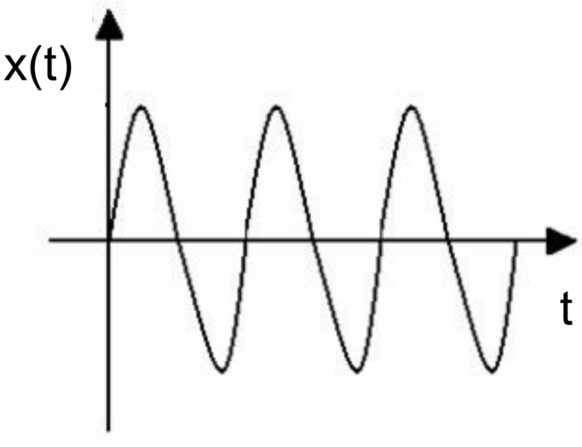
Al segnale “corrente” $i(t)$ è associata una potenza $\propto i^2(t)$
Estendiamo il concetto di potenza ed energia a un segnale generico

Potenza di un segnale



Potenza elettrica: $p(t) = R\, i^2(t)$

Energia elettrica: $E = \int_{-\infty}^{+\infty} R\, i^2(t)\, \mathrm{d}t$



Potenza istantanea: $p_x(t) = x^*(t)\; x(t) = |x(t)|^2$

Energia del segnale: $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)^2|\, \mathrm{d}t$

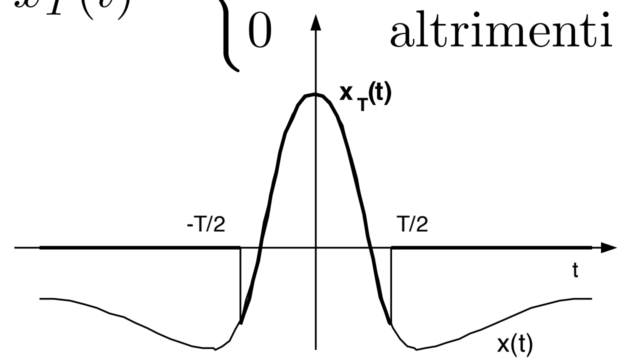
(La normalizzazione si ricava dal contesto fisico)

Tutti i segnali fisici portano energia finita.

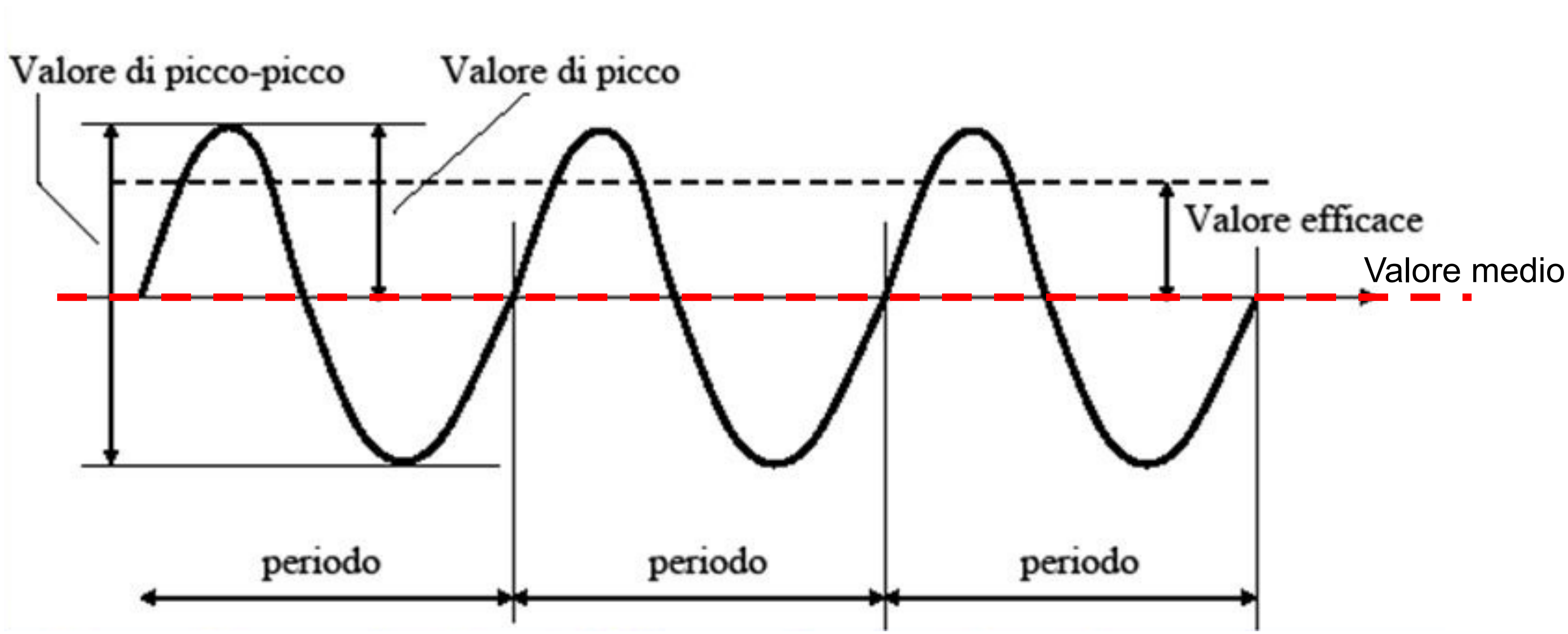
Definizione generale di potenza (per segnali "troncati)

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$p_x(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{E_x}{T} = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)^2|\, \mathrm{d}t$$



Valori notevoli di un segnale



Valore medio: $\overline{x} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\, \mathrm{d}t$ (componente "continua")

Valore efficace: $x_{eff} = \sqrt{(P_x)}$ ("RMS" – Root mean square)

Valore efficace = Valore medio che dovrebbe assumere un segnale costante per avere la stessa potenza del segnale dato

$$x = A \sin(t) \to \overline{x} = 0; \quad x_{eff} = A/\sqrt{2}$$

Segnali Periodici

$$x(t) = x(t + T_0); \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

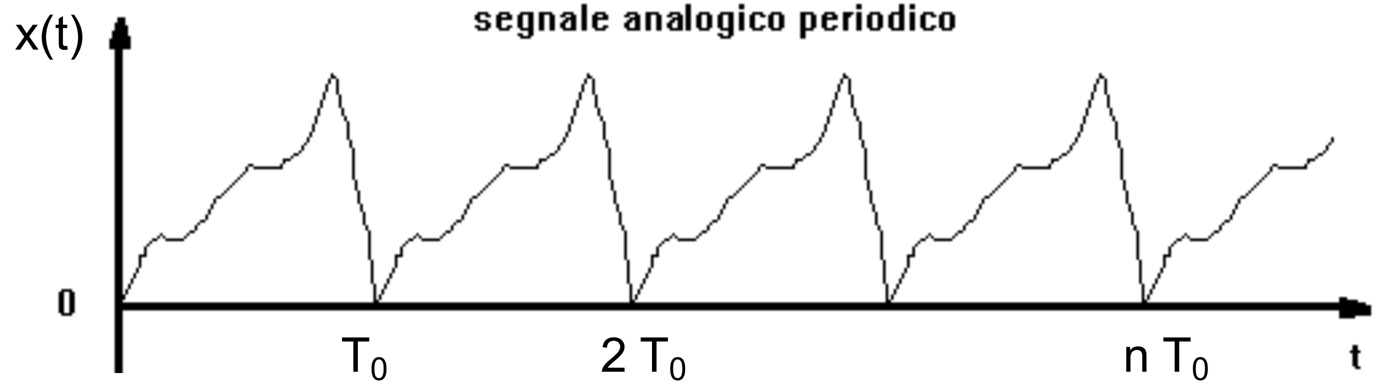
Segnali periodici:

$x(t) = x(t + T_0)$

T_0 periodo

$f_0 = 1/T_0$

frequenza portante



$$\bar{x} = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) \ \mathrm{dt} \qquad P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 \ \mathrm{dt}$$

(NB: segnali periodici generici e non fisici possono avere energia infinita ma potenza finita)

SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER: ogni segnale reale e periodico può essere espresso come sommatoria di oscillazioni sinusoidali di ampiezza, fase e frequenza determinate

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + a_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) + \ldots$$

$\omega_k = 2\pi k f_0$ **Frequenze: multipli interi della frequenza portante o fondamentale**

Sviluppo in Serie di Fourier per Segnali Periodici

$$x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)}_{\text{k-esima oscillazione armonica (o "armonica")}}$$

termine "continuo"

k-esima oscillazione armonica (o "armonica")

$$A_0 = a_0 \cos(2\pi 0 f_0 t + \phi_0) = a_0 \cos(\phi_0)$$

$$2A_k \cos(2\pi k f_k t + \phi_k) = a_k \cos(2\pi k f_k t + \phi_k)$$

$$2A_k = a_k$$

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + a_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) + \ldots$$

$$\omega_k = 2\pi k f_0$$

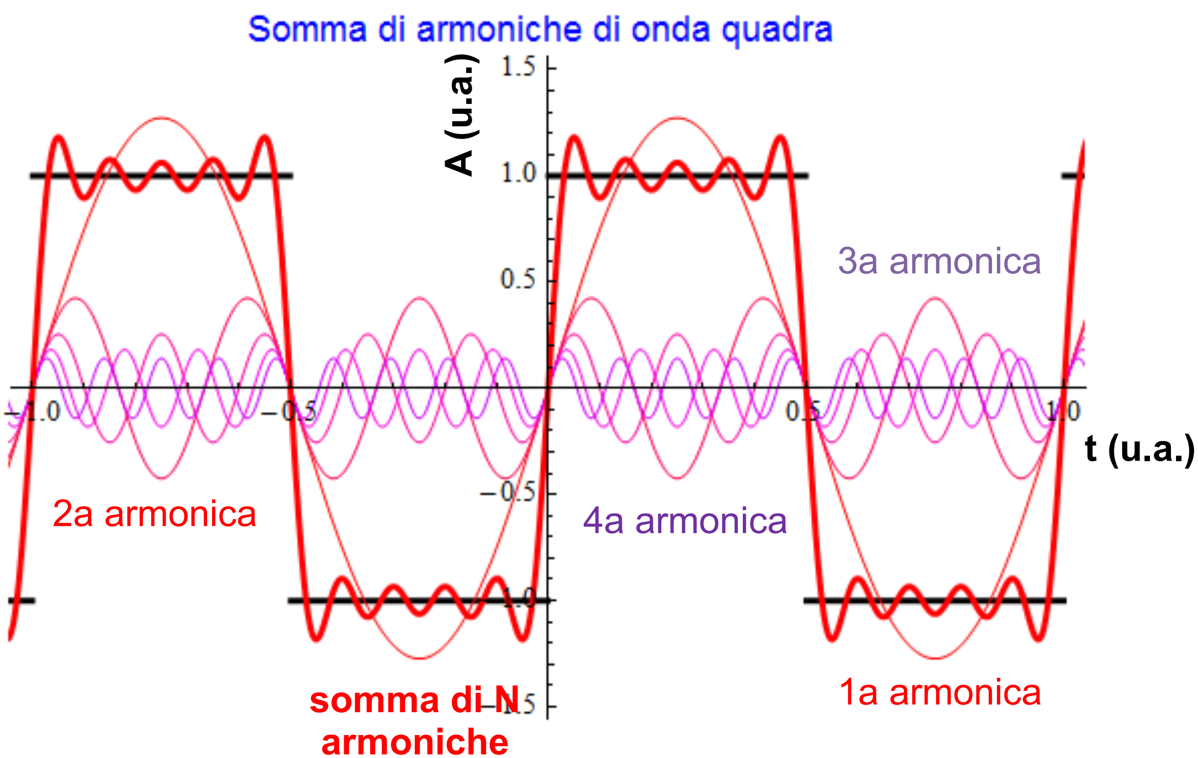
Sviluppo in Serie di Fourier per Segnali Periodici

$$x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)}$$

termine "continuo" **k-esima oscillazione armonica (o "armonica")**

$$x(t) = \lim_{N\to\infty} S_N(t)$$

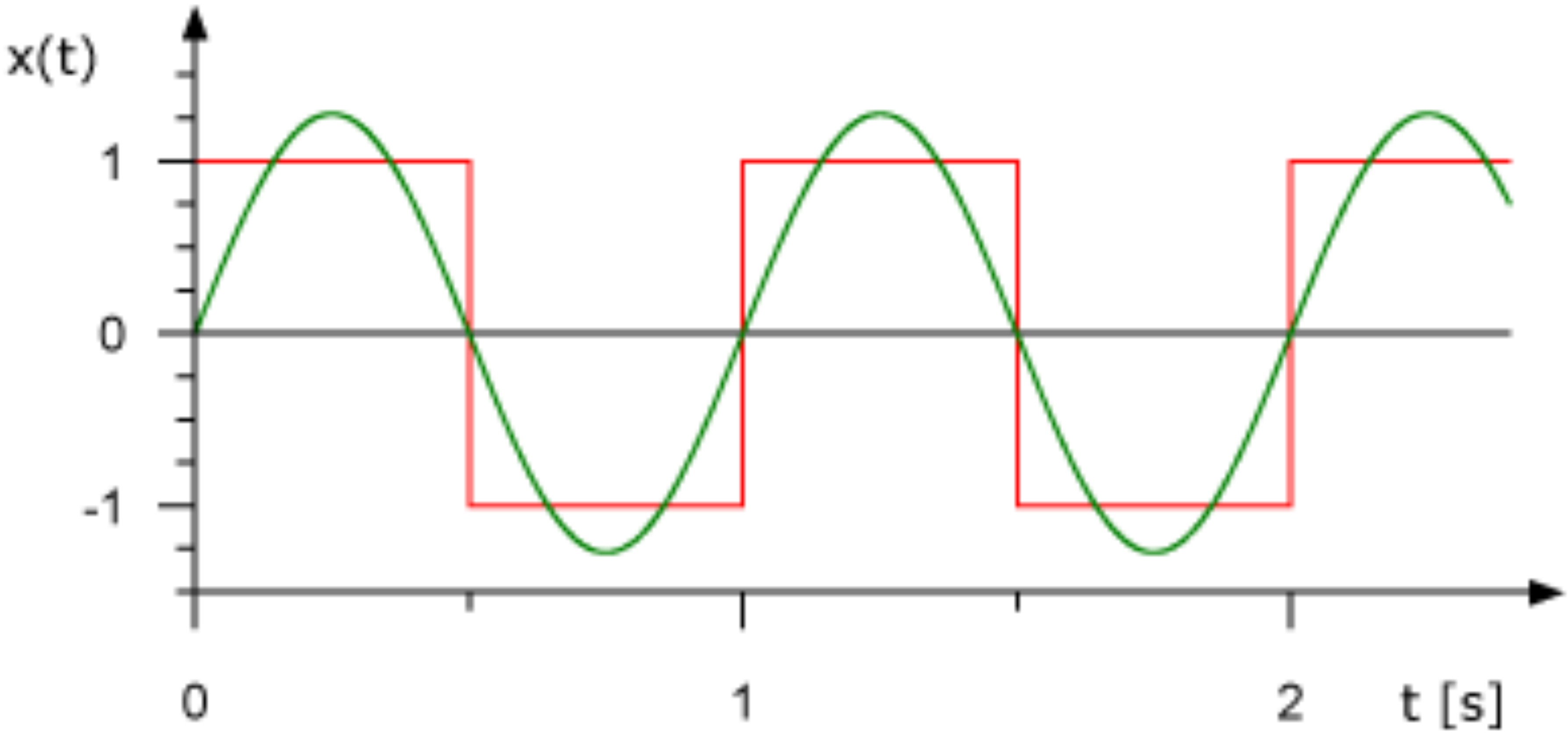
$S_N(t)$ "Serie" di Fourier troncata all' N-esima armonica



Sviluppo in Serie di Fourier per Segnali Periodici

$$x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)}_{\text{k-esima oscillazione armonica (o “armonica”)}}$$

termine “continuo”



Sviluppo in Serie di Fourier per Segnali Periodici

$$x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$ Forma “polare” della serie di Fourier

$$\zeta_k \equiv 2\pi k f_0 t \qquad x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\zeta_k + \phi_k)$$

$$x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\zeta_k + \phi_k) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \, \frac{e^{i(\zeta_k+\phi_k)} + e^{-i(\zeta_k+\phi_k)}}{2}$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \, e^{i\zeta_k} e^{i\phi_k} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{A_k \, e^{-i\zeta_k} e^{-i\phi_k}}$$

$$= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \, e^{i\zeta_k} e^{i\phi_k} + \sum_{k=-\infty}^{-1} A_{-k} \, e^{+i\zeta_k} e^{-i\phi_{-k}}$$

$$k \rightarrow -k$$
$$\zeta_k - \rightarrow -\zeta_{-k}$$
$$\zeta_k \equiv 2\pi k f_0 t$$

$$X_k = A_k \, e^{i\phi_k} \quad k = 1, 2, ..., +\infty$$
$$X_k = A_{-k} \, e^{-i\phi_{-k}} \quad k = -\infty, ..., -2, -1$$

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k \, e^{i\zeta_k} + \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k \, e^{i\zeta_k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \, e^{i2\pi k f_o t}$$

Forma “complessa” della serie di Fourier

Sviluppo in Serie di Fourier per Segnali Periodici (2)

$$x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$ Forma “polare” della serie di Fourier

$$x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \left[\cos\left(2\pi k f_0 t\right)\cos\phi_k - \sin\left(2\pi k f_0 t\right)\sin\phi_k\right]$$

Forma “rettangolare” della serie di Fourier

→ il termine di fase, Φ_k, di fatto può essere assorbito in un termine di sviluppo con il *sin*

Sviluppo in Serie di Fourier per Segnali Periodici

Determiniamo ora una espressione per il calcolo del coefficiente X_n, andando ad anti-trasformare:

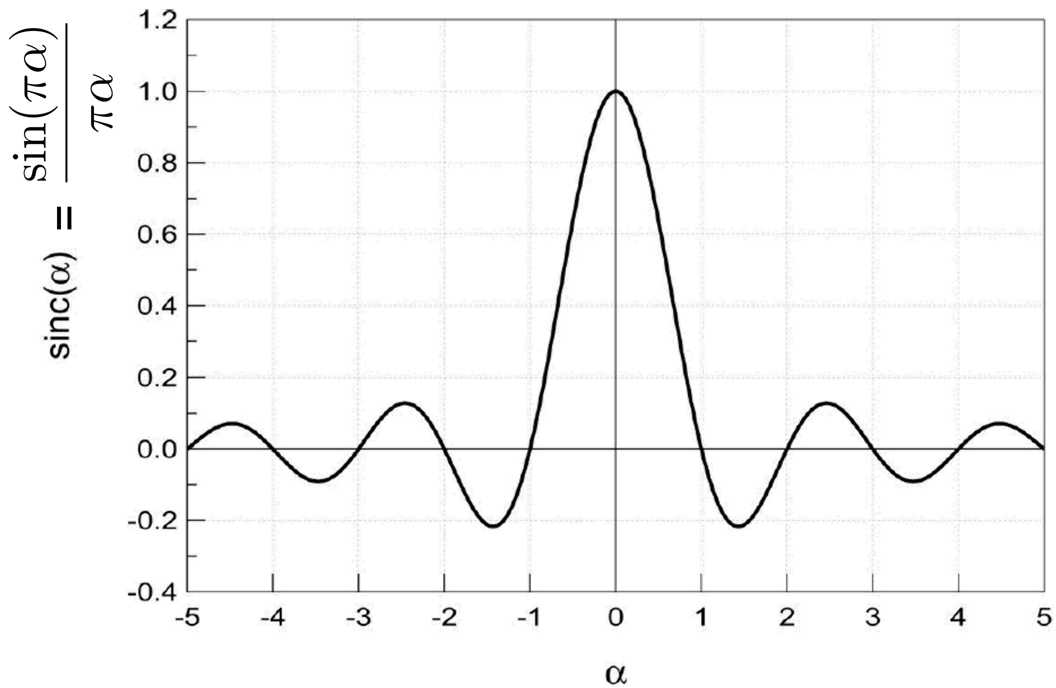
$$\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)\, e^{-i2\pi n f_0 t}\,\mathrm{d}t = \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k\, e^{i2\pi k f_0 t}\, e^{-i2\pi n f_0 t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} e^{i2\pi (k-n) f_0 t}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} e^{i2\pi (k-n) f_0 t}\,\mathrm{d}t = \left.\frac{\exp[i2\pi(k-n)f_0 t]}{i2\pi(k-n)f_0}\right|_{-T_0/2}^{+T_0/2} = \frac{\sin[\pi(k-n)]}{\pi(k-n)f_0}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

$$f_0 T_0 = 1$$

$$\frac{\sin[\pi(k-n)]}{\pi(k-n)f_0} = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ T_0 & k = n \end{cases}$$



sinc = cardinal sine

Sviluppo in Serie di Fourier per Segnali Periodici

Determiniamo ora una espressione per il calcolo del coefficiente $X_{\boxed{n}}$, andando ad anti-trasformare:

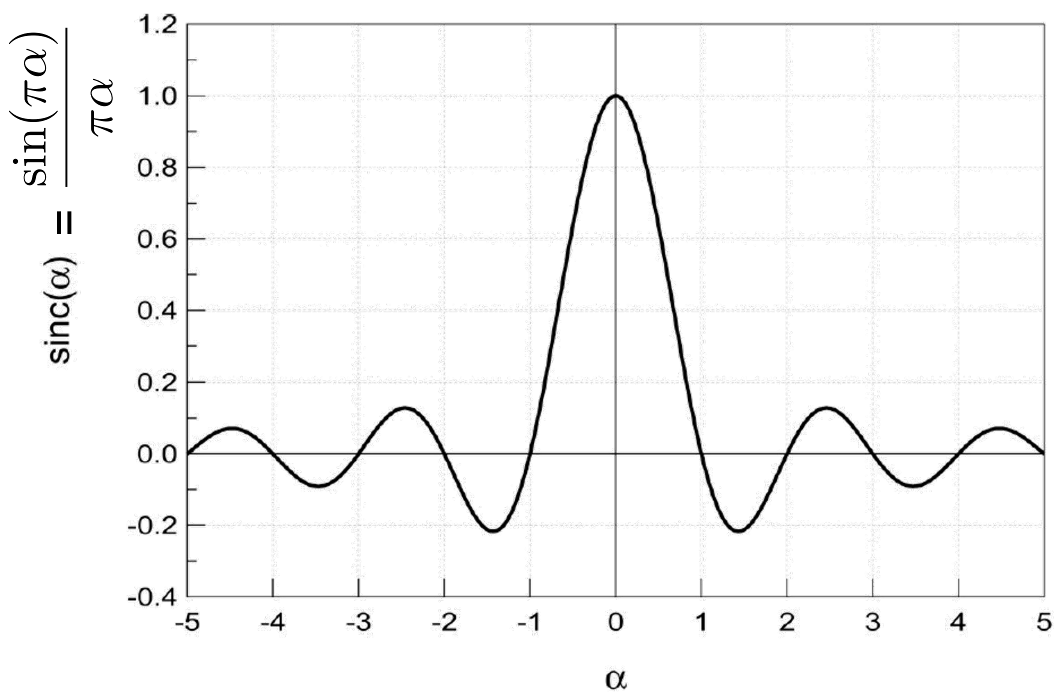
$$\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)\, e^{-i2\pi \boxed{n} f_0 t}\, \mathrm{d}t = \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k\, e^{i2\pi k f_0 t}\, e^{-i2\pi n f_0 t}\, \mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} e^{i2\pi(k-n) f_0 t}\, \mathrm{d}t$$

$$\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} e^{i2\pi(k-n) f_0 t}\, \mathrm{d}t = \left.\frac{\exp[i2\pi(k-n)f_0 t]}{i2\pi(k-n)f_0}\right|_{-T_0/2}^{+T_0/2} = \frac{\sin[\pi(k-n)]}{\pi(k-n)f_0}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

$$f_0 T_0 = 1$$

$$\frac{\sin[\pi(k-n)]}{\pi(k-n)f_0} = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ T_0 & k = n \end{cases}$$



sinc = cardinal sine

Sviluppo in Serie di Fourier per Segnali Periodici

Determiniamo ora una espressione per il calcolo del coefficiente X_n, andando ad anti-trasformare:

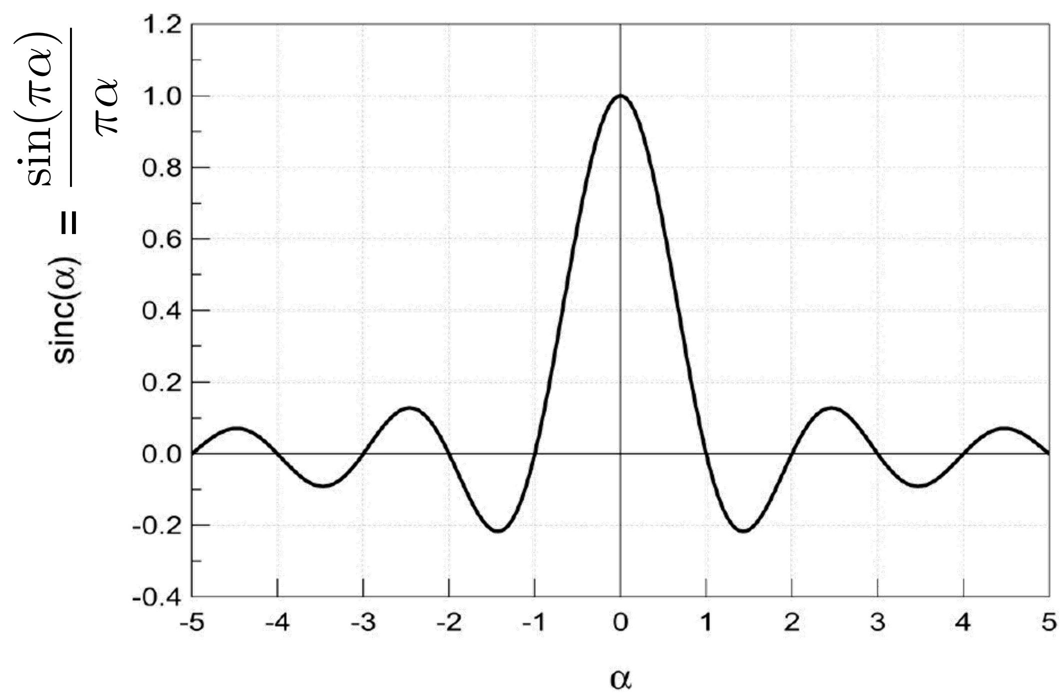
$$\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)\, e^{-i2\pi n f_0 t}\, \mathrm{d}t = \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k\, e^{i2\pi k f_0 t}\, e^{-i2\pi n f_0 t}\, \mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \boxed{\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} e^{i2\pi(k-n) f_0 t}\, \mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} e^{i2\pi(k-n) f_0 t}\, \mathrm{d}t} = \frac{\exp[i2\pi(k-n) f_0 t]}{i2\pi(k-n) f_0}\Bigg|_{-T_0/2}^{+T_0/2} = \frac{\sin[\pi(k-n)]}{\pi(k-n) f_0}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

$$f_0 T_0 = 1$$

$$\frac{\sin[\pi(k-n)]}{\pi(k-n) f_0} = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ T_0 & k = n \end{cases}$$



sinc = cardinal sine

Sviluppo in Serie di Fourier per Segnali Periodici

Determiniamo ora una espressione per il calcolo del coefficiente X_n, andando ad anti-trasformare:

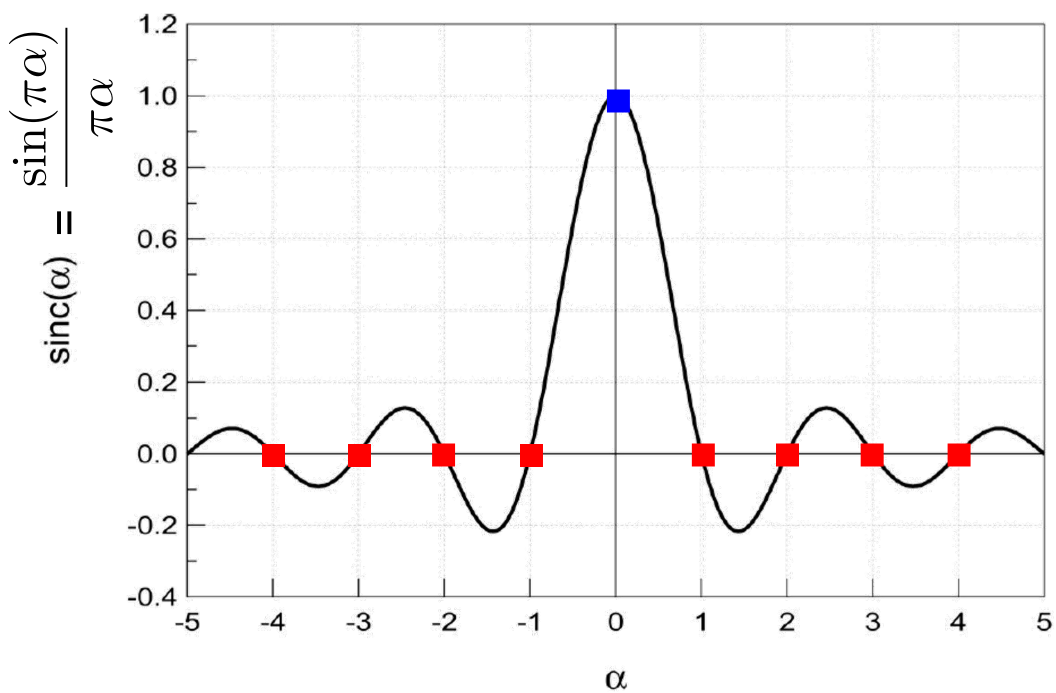
$$\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)\, e^{-i2\pi n f_0 t}\,\mathrm{d}t = \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k\, e^{i2\pi k f_0 t}\, e^{-i2\pi n f_0 t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} e^{i2\pi (k-n) f_0 t}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} e^{i2\pi (k-n) f_0 t}\,\mathrm{d}t = \left.\frac{\exp[i2\pi(k-n) f_0 t]}{i2\pi(k-n) f_0}\right|_{-T_0/2}^{+T_0/2} = \frac{\sin[\pi(k-n)]}{\pi(k-n) f_0}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

$$f_0 T_0 = 1$$

$$\frac{\sin[\pi(k-n)]}{\pi(k-n) f_0} = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ T_0 & k = n \end{cases}$$



sinc = cardinal sine

Sviluppo in Serie di Fourier per Segnali Periodici

Determiniamo ora una espressione per il calcolo del coefficiente X_n, andando ad anti-trasformare:

$$\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)\, e^{-i2\pi n f_0 t}\,\mathrm{d}t = \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k\, e^{i2\pi k f_0 t}\, e^{-i2\pi n f_0 t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} e^{i2\pi(k-n) f_0 t}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} e^{i2\pi(k-n) f_0 t}\,\mathrm{d}t = \left.\frac{\exp[i2\pi(k-n)f_0 t]}{i2\pi(k-n)f_0}\right|_{-T_0/2}^{+T_0/2} = \frac{\sin[\pi(k-n)]}{\pi(k-n)f_0}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

$$f_0 T_0 = 1$$

$$\frac{\sin[\pi(k-n)]}{\pi(k-n)f_0} = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ T_0 & k = n \end{cases}$$

$$\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)\, e^{-i2\pi n f_0 t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} e^{i2\pi(k-n) f_0 t}\,\mathrm{d}t = X_n T_0$$

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)\, e^{-i2\pi n f_0 t}\,\mathrm{d}t$$

Sviluppo in Serie di Fourier per Segnali Periodici

Forma complessa della trasformata di Fourier

$$\begin{cases} X_k = \dfrac{1}{T_0} \displaystyle\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, \mathrm{d}t \\ x(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k\, e^{j2\pi k f_0 t} \end{cases}$$

antitrasformata di Fourier

trasformata di Fourier

$$x(t) \Longleftrightarrow X_k$$

Sviluppo in Serie di Fourier per Segnali Periodici

Forma complessa della trasformata di Fourier

$$\begin{cases} X_k = \dfrac{1}{T_0} \displaystyle\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, \mathrm{d}t \\ x(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k\, e^{j2\pi k f_0 t} \end{cases}$$

equazione di ANALISI: studio del contenuto in frequenza del segnale

equazione di SINTESI: ricostruzione del segnale a partire dalle sue armoniche

$$x(t) \Longleftrightarrow X_k$$

La conoscenza del segnale x(t) nel dominio temporale è equivalente alla conoscenza della successione dei termini di Fourier nel dominio delle frequenze

Sviluppo in Serie di Fourier per Segnali Periodici

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int\limits_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, \mathrm{d}t$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k\, e^{j2\pi k f_0 t}$$

Che dimensioni fisiche ha X_k?

- l'argomento dell'esponenziale deve essere adimensionale! → ok!
  Tutto il termine esponenziale è, di fatto, adimensionale: chiamiamolo *A*

- $1/T_0$ per l'integrale in *dt*:

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int\limits_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)\, A\, \mathrm{d}t$$

→ stesse dimensioni di *x(t)*

Equazione di sintesi per segnali periodici

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \, e^{j2\pi k f_0 t}$$

equazione di SINTESI: ricostruzione del segnale a partire dalle sue armoniche

Prevede l'uso di infinte armoniche per ricostruire il segnale (non fisico).

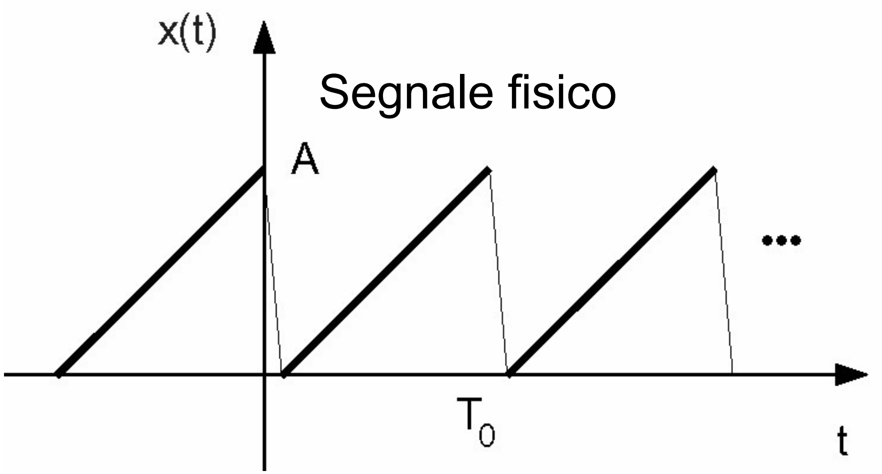
In generale possiamo ricostruire segnali a partire da un numero FINITO di armoniche.

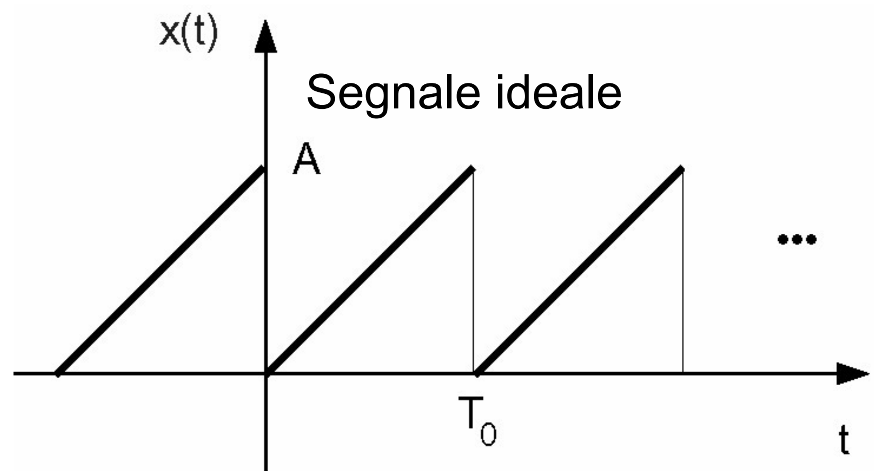
Dal criterio di convergenza delle serie sappiamo però che

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \, e^{j2\pi k f_0 t} < \infty \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} |X_k| = 0$$

cioè l'ampiezza delle armoniche con frequenze "alte" deve risultare trascurabile rispetto all'ampiezza delle armoniche a frequenze "basse".

Segnali fisici e segnali ideali





Segnali fisici spesso approssimati da segnali ideali (più semplici, ma non fisici). Chi ne garantisce la possibilità dello sviluppo in frequenza?

Criterio di Dirichlet:

Un segnale *x(t)* può essere sviluppato in serie di Fourier se valgono

- *x(t)* è assolutamente integrabile nel suo periodo $$\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} |x(t)|\mathrm{d}t < \infty$$
- *x(t)* è continua o presenta un numero finito di discontinuità di primo tipo
- *x(t)* è derivabile rispetto a *t* escluso al più un numero finito di punti
- *x(t)* presenta un numero finito di massimi e minimi

Proprietà

Linearità:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) \Longleftrightarrow X_k \\ y(t) \Longleftrightarrow Y_k \\ z(t) = a\,x(t) \,+\, b\,y(t) \end{array}\right\} Z_k = a\,X_k \,+\, b\,Y_k$$

Simmetria Hermitiana:

$$X_{-k} = X_k^* \Longleftrightarrow \begin{array}{l} |X_k| = |X_{-k}| \\ \arg(X_k) = -\arg(X_{-k}) \end{array}$$

- Definisce la simmetria degli spettri in ampiezza (modulo) e fase (arg)

Spettri di segnali notevoli

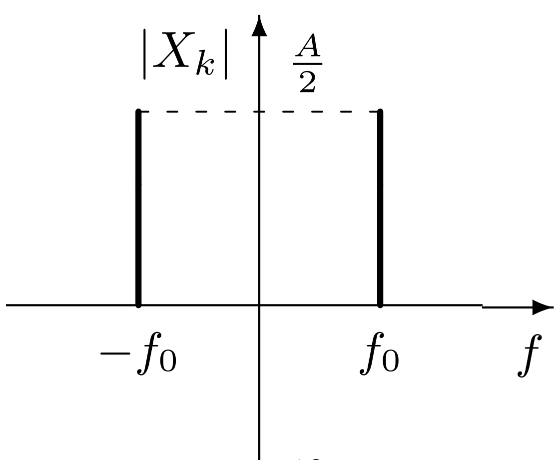
$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$$

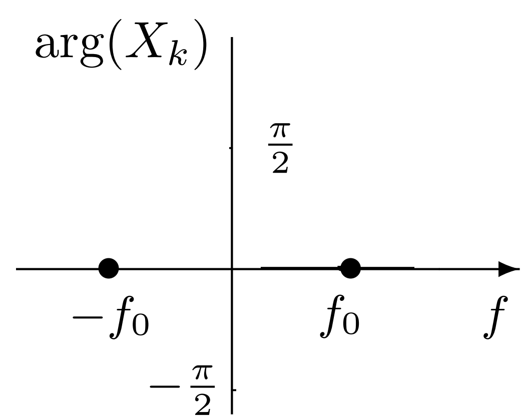
$$x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

$$\boxed{A_1 = A/2,\ \phi_1 = 0; \quad A_k,\ \phi_k = 0\ \forall k \neq 1}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k\, e^{j2\pi k f_0 t} \qquad \begin{array}{ll} X_k = A_k\, e^{i\phi_k} & k = 1, 2, ..., +\infty \\ X_k = A_{-k}\, e^{-i\phi_{-k}} & k = -\infty, ..., -2, -1 \end{array}$$

$$\boxed{X_1 = A/2,\ X_{-1} = A/2; \quad X_k,\ \phi_k = 0\ \forall k \neq 1}$$





Spettri di segnali notevoli

$$x(t) = A\sin(2\pi f_0 t) = A\cos(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2})$$

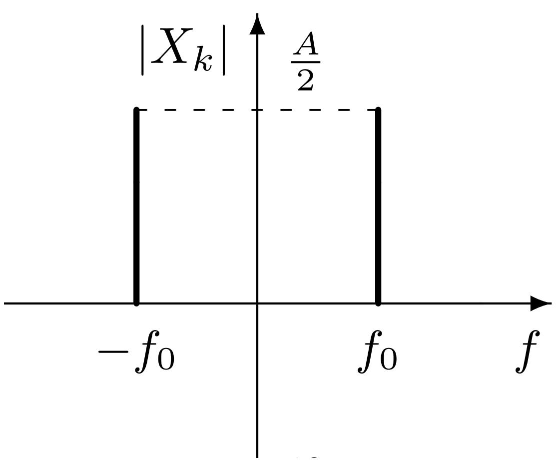
$$x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

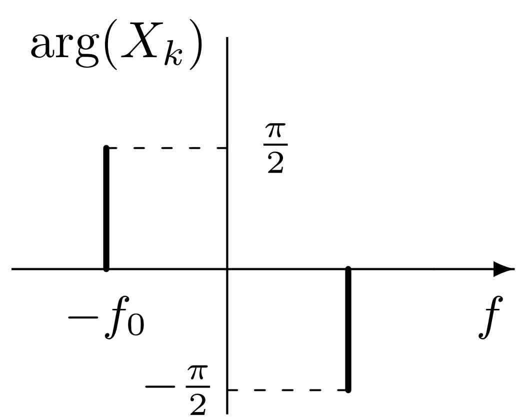
$$\boxed{A_1 = A/2,\ \phi_1 = -\frac{\pi}{2};\quad A_k,\ \phi_k = 0\ \forall k \neq 1}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k\, e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$X_k = A_k\, e^{i\phi_k} \quad k = 1, 2, ..., +\infty$$
$$X_k = A_{-k}\, e^{-i\phi_{-k}} \quad k = -\infty, ..., -2, -1$$

$$\boxed{X_1 = A/2\, e^{-j\frac{\pi}{2}},\ X_{-1} = A/2\, e^{j\frac{\pi}{2}};\quad X_k,\ \phi_k = 0\ \forall k \neq 1}$$





Segnali pari e dispari

- Un segnale è *pari* se $x(t) = x(-t)$
  - $X_k = X_{-k}$

- Un segnale è *dispari* se $x(t) = -x(-t)$
  - $X_k = - X_{-k}$

Segnali pari e dispari

- Un segnale è *pari* se $x(t) = x(-t)$
  - $X_k = X_{-k}$
    esempio: *cos*

$$X_1 = X_{-1} = A/2 \quad \textit{(reali)}$$

- Un segnale è *dispari* se $x(t) = -x(-t)$
  - $X_k = - X_{-k}$
    esempio: *sin*

$$X_1 = A/2\, e^{-i\pi/2},\ X_{-1} = A/2\, e^{i\pi/2} \quad \textit{(immaginari puri)}$$

Segnali pari e dispari

- Un segnale è *pari* se $x(t) = x(-t)$
  - $X_k = X_{-k}$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \, e^{j2\pi k f_0 t}$$

siccome X_k è reale:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

siccome $X_k = X_{-k}$

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k \left(e^{j2\pi k f_0 t} + e^{-j2\pi k f_0 t}\right) = X_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} X_k \cos\left(2\pi k f_0 t\right)$$

cioè in soli coseni

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Segnali pari e dispari

- Un segnale è dis*pari* se *x(t) = -x(-t)*
  - $X_k = -X_{-k}$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \, e^{j2\pi k f_0 t}$$

siccome X_k è reale:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

siccome $X_k = - X_{-k}$

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k \left(e^{j2\pi k f_0 t} - e^{-j2\pi k f_0 t}\right) = X_0 + 2i \sum_{k=1}^{\infty} X_k \sin\left(2\pi k f_0 t\right)$$

cioè in soli seni

$$\sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

Segnali pari e dispari

- Un segnale è *pari* se $x(t) = x(-t)$
  - $X_k = X_{-k}$

oppure, in alternativa, scrivendo l'esponenziale in sin e cos:

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, \mathrm{d}t$$

otteniamo

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x\left(t\right) \cos\left(2\pi k f_0 t\right) dt - \frac{j}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x\left(t\right) \sin\left(2\pi k f_0 t\right) dt$$

Segnali pari e dispari

- Un segnale è *pari* se $x(t) = x(-t)$
  - $X_k = X_{-k}$

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x\left(t\right)\cos\left(2\pi k f_0 t\right)dt - \cancel{\frac{j}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x\left(t\right)\sin\left(2\pi k f_0 t\right)dt}$$

cioè:

$$X_k = \frac{2}{T_o}\int_0^{T_o/2} x(t)cos(2\pi k f_o t)dt$$

Segnali pari e dispari

- Un segnale è dis*pari* se $\quad x(t) = -\,x(-t)$
  - $X_k = -X_{-k}$

$$X_k = \cancel{\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x\left(t\right)\cos\left(2\pi k f_0 t\right)dt} - \frac{j}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x\left(t\right)\sin\left(2\pi k f_0 t\right)dt$$

cioè:

$$X_k = -\frac{2i}{T_o}\int_0^{T_o/2} x(t) sin(2\pi k f_o t)dt$$

Proprietà

Parità:

un qualsiasi segnale reale può essere scomposto nella somma di un termine pari e uno dispari

$$x(t) = x_p(t) + x_d(t) \qquad X_k = X_{pk} + X_{dk}$$

la componente pari ha armoniche puramente reali ed è sviluppabile in serie di soli coseni

$$x_p(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \qquad X_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) \, \mathrm{d}t$$

la componente dispari ha armoniche puramente immaginarie ed è sviluppabile in serie di soli seni

$$x_d(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} \qquad X_k = \frac{-2\,j}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) \, \mathrm{d}t$$

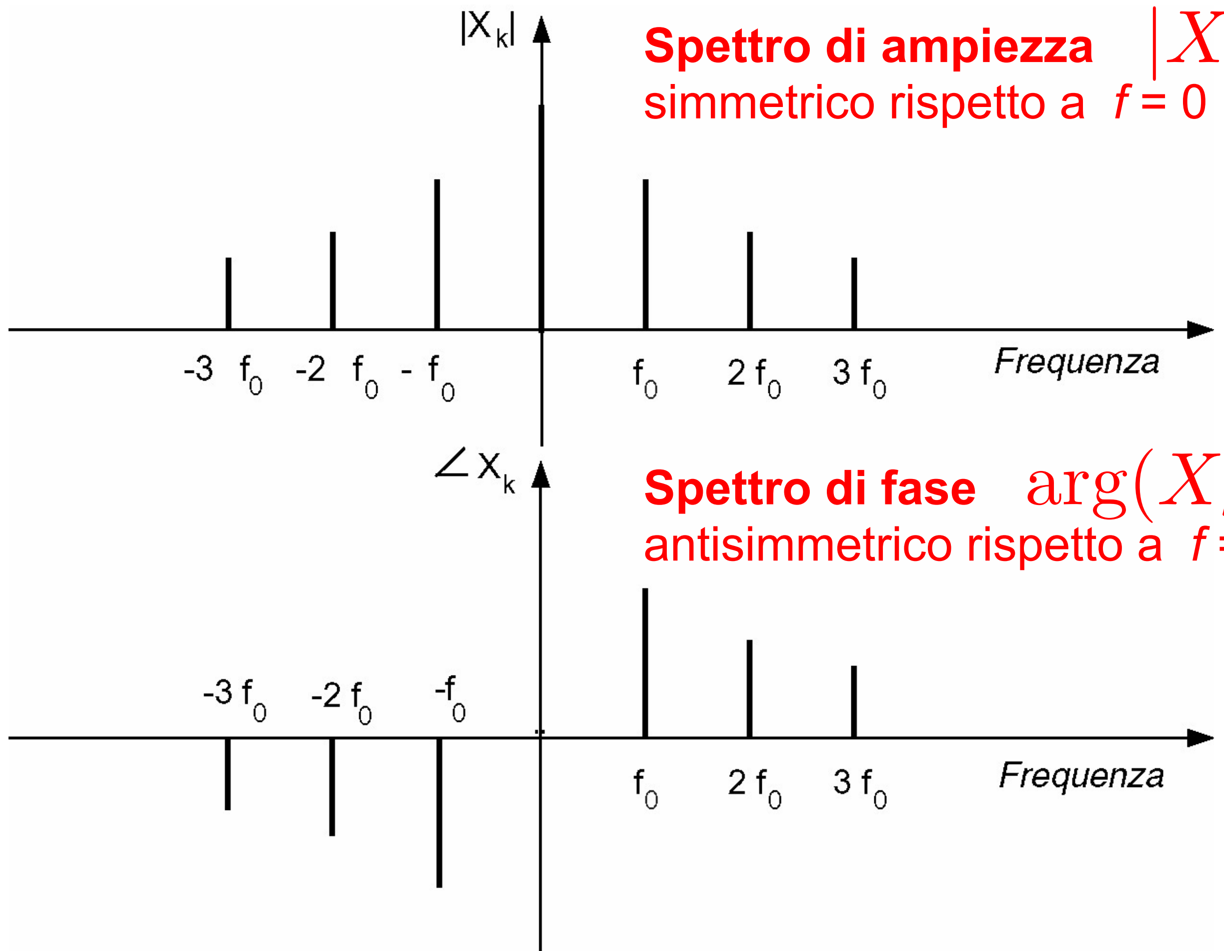
segnale è *pari*: *x(t) = x(-t)*

segnale è dis*pari*: *x(t) = -x(-t)*

** x_p e x_d sono *definite* andando a "cancellare" la parte dispari o quella pari, lasciando solo l'altra

Spettri di ampiezza e di fase

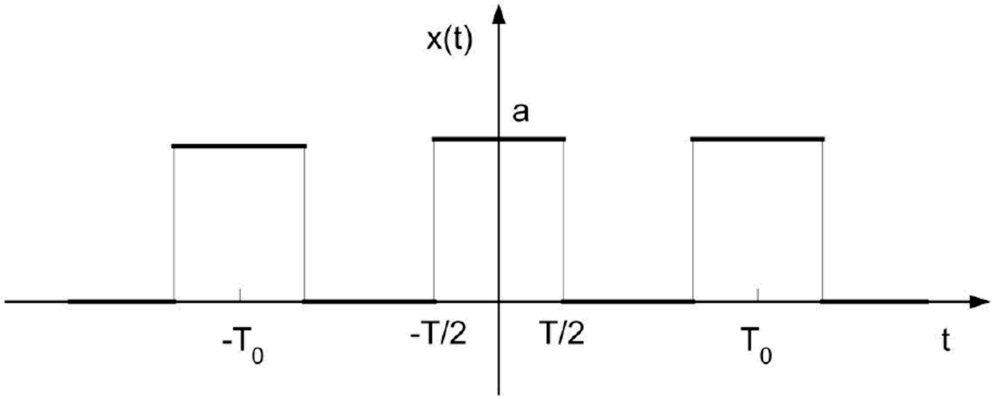
$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, \mathrm{d}t$$



Spettro di ampiezza $|X_k|$
simmetrico rispetto a $f = 0$

Spettro di fase $\arg(X_k)$
antisimmetrico rispetto a $f = 0$

Spettri di segnali notevoli



Treno di impulsi

periodo

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t-nT_0}{T}\right)$$

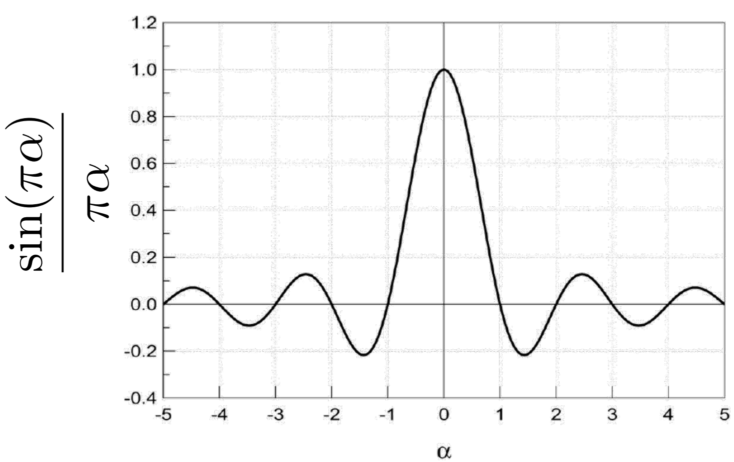
$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

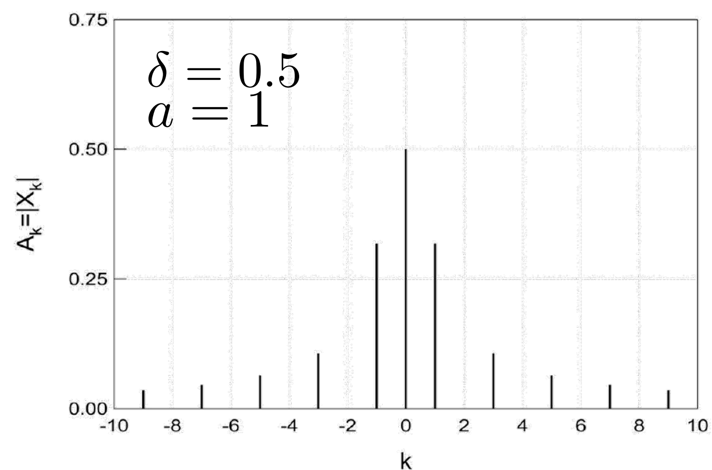
durata temporale della parte "alta" della quadra

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} a \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi k f_0 t}\,\mathrm{d}t = \frac{a}{T_0} \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-j2\pi k f_0 t}\,\mathrm{d}t$$

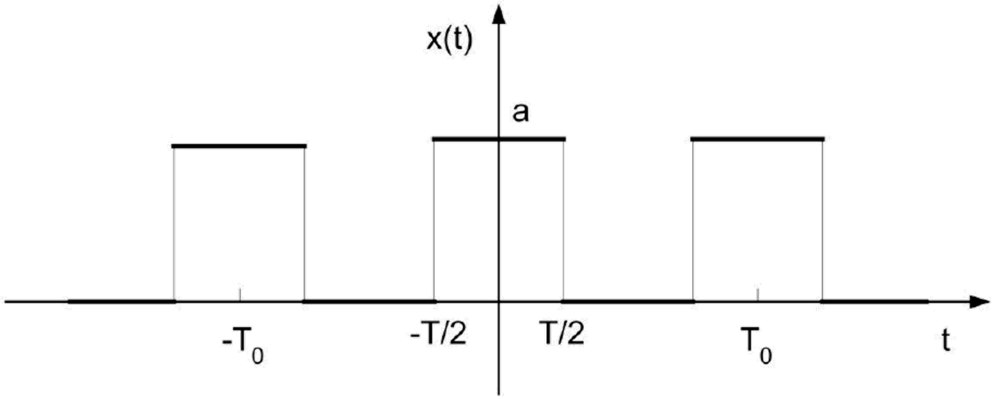
$$= \frac{a}{T_0} \frac{\sin(\pi k f_0 T)}{\pi k / T_0} = \frac{aT}{T_0} \frac{\sin(\pi k T/T_0)}{\pi k T/T_0} = a\delta \frac{\sin(\pi k \delta)}{\pi k \delta}$$

Duty factor: $\delta = T/T_0$





Spettri di segnali notevoli



Treno di impulsi

periodo

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t - nT_0}{T}\right)$$

$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

durata temporale della parte "alta" della quadra

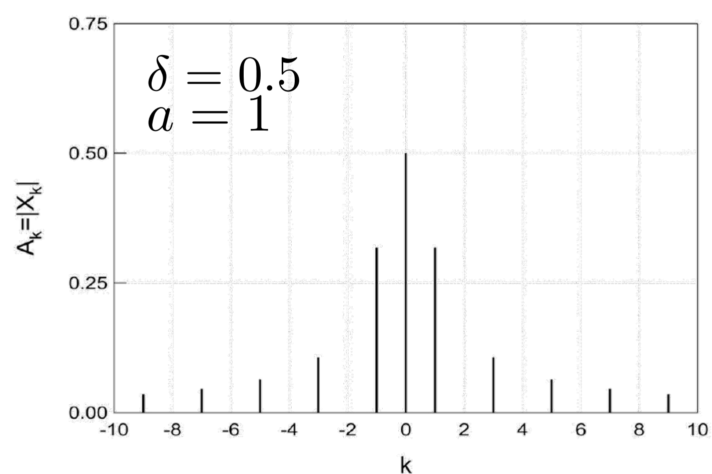
$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} a \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi k f_0 t}\,\mathrm{d}t = \frac{a}{T_0}\int_{-T/2}^{+T/2} e^{-j2\pi k f_0 t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a}{T_0}\frac{\sin(\pi k f_0 T)}{\pi k/T_0} = \frac{aT}{T_0}\frac{\sin(\pi k T/T_0)}{\pi k T/T_0} = a\delta\frac{\sin(\pi k\delta)}{\pi k\delta}$$

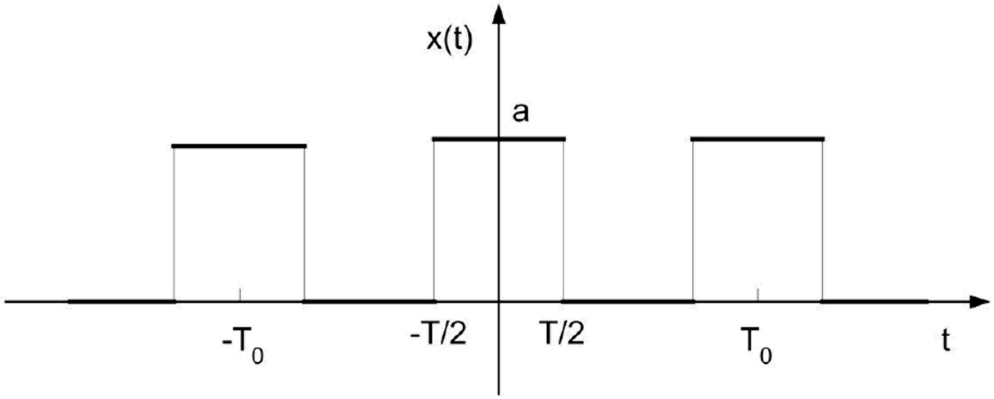
Duty factor: $\delta = T/T_0$

Le ampiezze, X_k:

- decrescono al crescere di k
- sono "modulate" dal seno di $\pi k\delta$, che le rende massime (rispetto alla "portante" $1/k$) per $k\delta = ½\,(n+1)$ e nulle per $k\delta = n+1$



Spettri di segnali notevoli



Treno di impulsi

periodo

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t - nT_0}{T}\right)$$

$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

durata temporale della parte "alta" della quadra

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} a \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi k f_0 t}\,\mathrm{d}t = \frac{a}{T_0}\int_{-T/2}^{+T/2} e^{-j2\pi k f_0 t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a}{T_0}\frac{\sin(\pi k f_0 T)}{\pi k/T_0} = \frac{aT}{T_0}\frac{\sin(\pi k T/T_0)}{\pi k T/T_0} = a\delta\frac{\sin(\pi k\delta)}{\pi k\delta}$$

Duty factor: $\delta = T/T_0$

$\boxed{\delta = 0.5}$

$a = 1$

k=0 → 0.5*1

k=1 → 0.5 * sin(π * 0.5)/(π * 0.5) = 0.5 * 1/(π * 0.5) = 1/π = 1/kπ

k=2 → 0.5 * sin(π)/π = 0

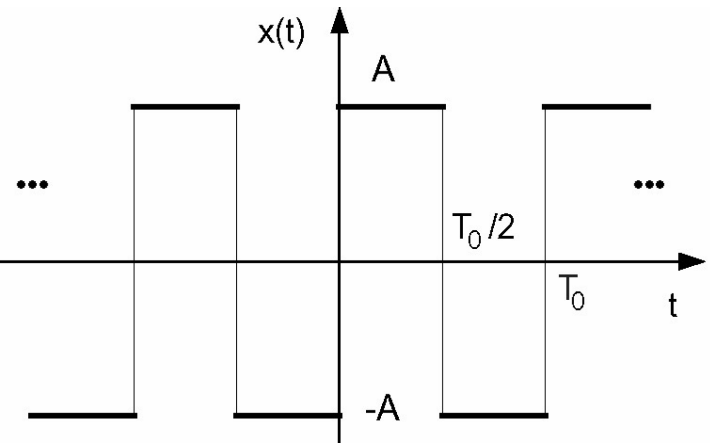
k=3 → 0.5 * sin(π * 1.5)/(π * 3 * 0.5) = 0.5 * -1/(π * 3 * 0.5) = -1/(3*π) = -1/kπ

k=4 → 0.5 * sin(2π)/2π = 0

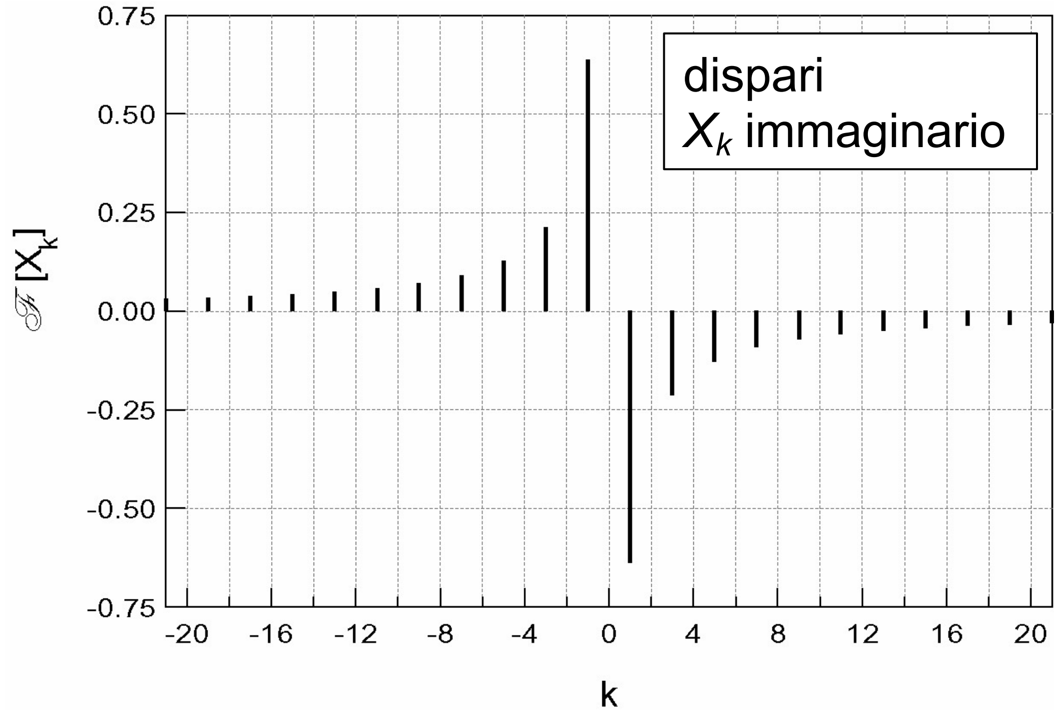
k=5 → 0.5 * sin(π * 2.5)/(π * 5 * 0.5) = 0.5 * 1/(π * 5 * 0.5) = 1/(5*π) = 1/kπ

→ $|X_k| \propto 1/k$ k dispari e k=0

Spettri di segnali notevoli



$$x(t) = A \quad t \in \left[0, \frac{T_0}{2}\right]$$

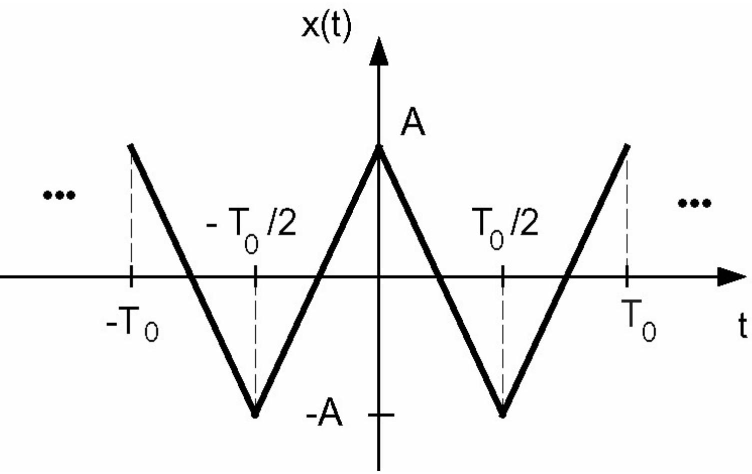


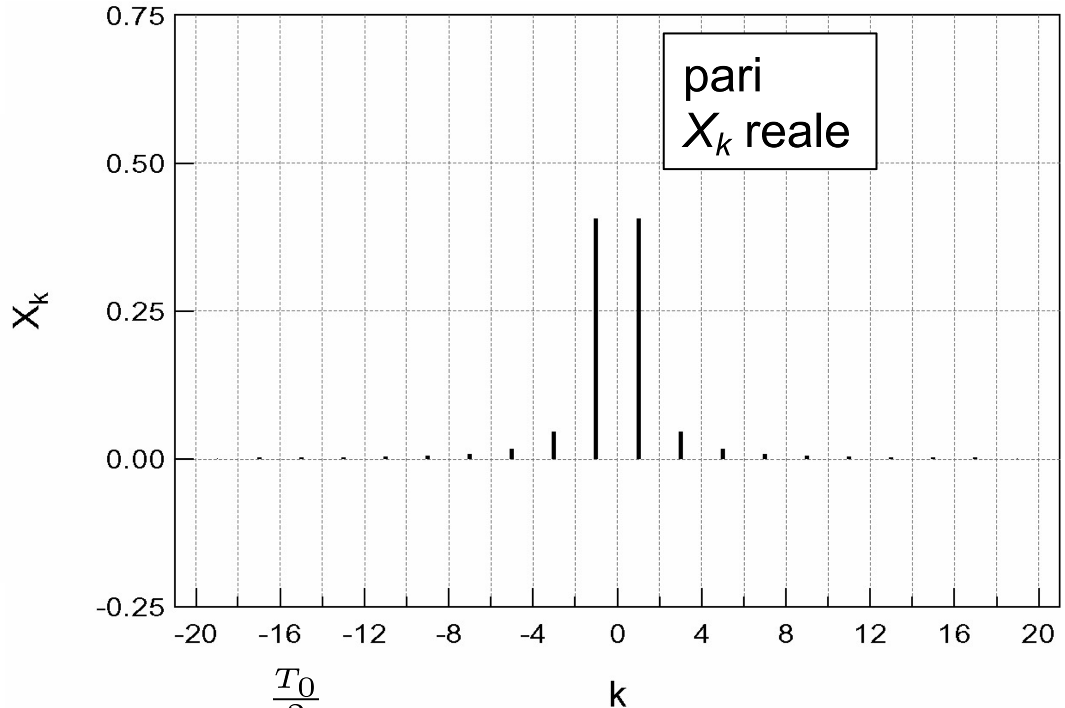
Segnale dispari: possiamo utilizzare $X_k = \frac{-2\,j}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) \sin(2\pi k f_0 t)\,\mathrm{d}t$

$$X_k = \frac{-2iA}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} \sin(2\pi k f_0 t)\,\mathrm{d}t = \frac{2iA}{2\pi k f_0 T_0} \cos(2\pi k f_0 t)\Big|_0^{\frac{T_0}{2}}$$

$$X_k = \frac{iA}{\pi k}[\cos(\pi k) - 1] = \frac{iA}{\pi k}[(-1)^k - 1] = \frac{2A}{i\pi k}, \quad k \text{ dispari}$$

Spettri di segnali notevoli



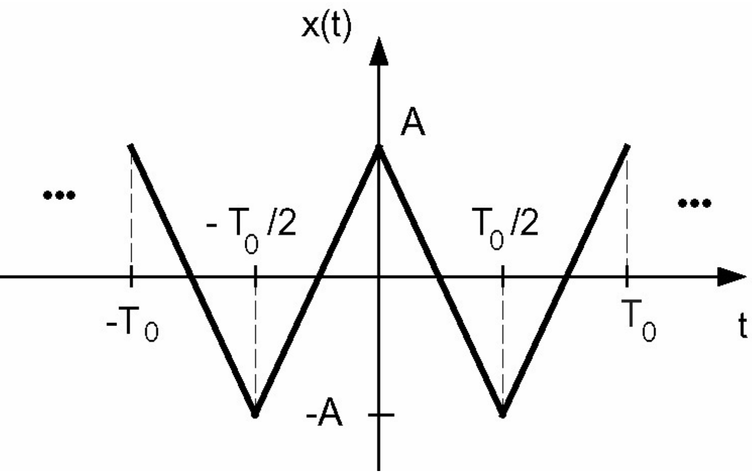


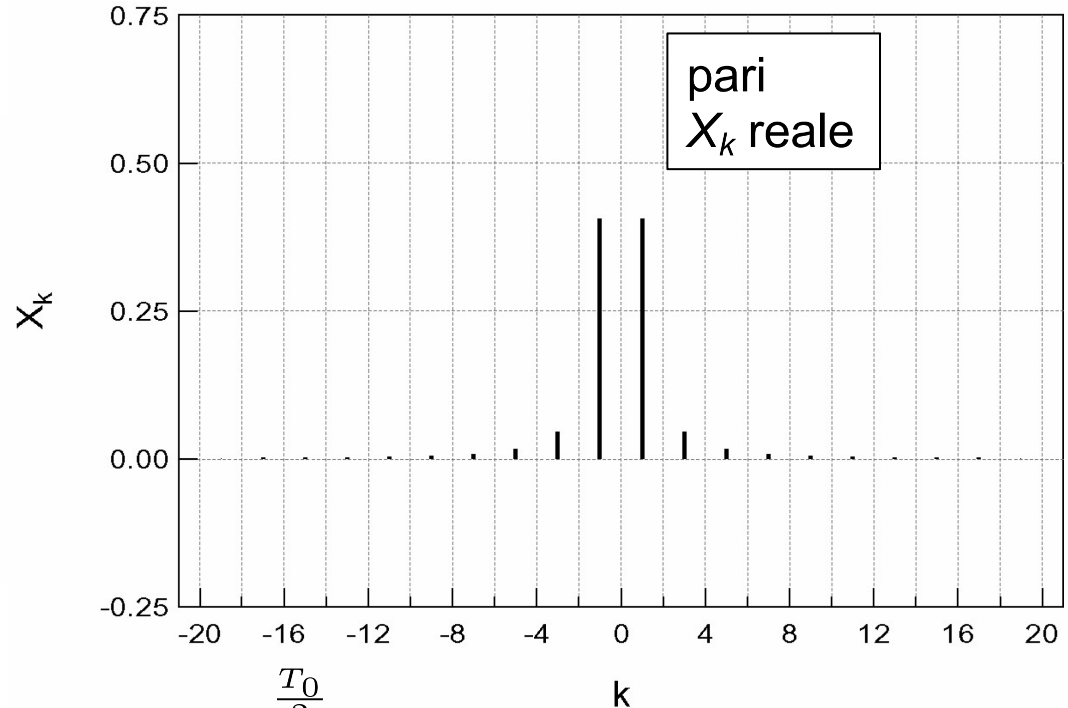
$$x(t) = A - 4A\frac{t}{T_0} \quad t \in \left[0, \frac{T_0}{2}\right]$$

Segnale pari: possiamo utilizzare $X_k = \dfrac{2}{T_0} \displaystyle\int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t)\cos(2\pi k f_0 t)\,\mathrm{d}t$

$$X_k = -\frac{8A}{T_0}\int_0^{T_0/2} \frac{t}{T_0}\cos\left(2\pi k f_0 t\right) dt + \underbrace{\boxed{\frac{2A}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} \cos(2\pi k f_0 t)\,\mathrm{d}t}}_{= 0}$$

Spettri di segnali notevoli





$$x(t) = A - 4A\frac{t}{T_0} \quad t \in \left[0, \frac{T_0}{2}\right]$$

Segnale pari: possiamo utilizzare $X_k = \dfrac{2}{T_0}\displaystyle\int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t)\cos(2\pi k f_0 t)\,\mathrm{d}t$

perchè valutato in due punti
multipli del periodo

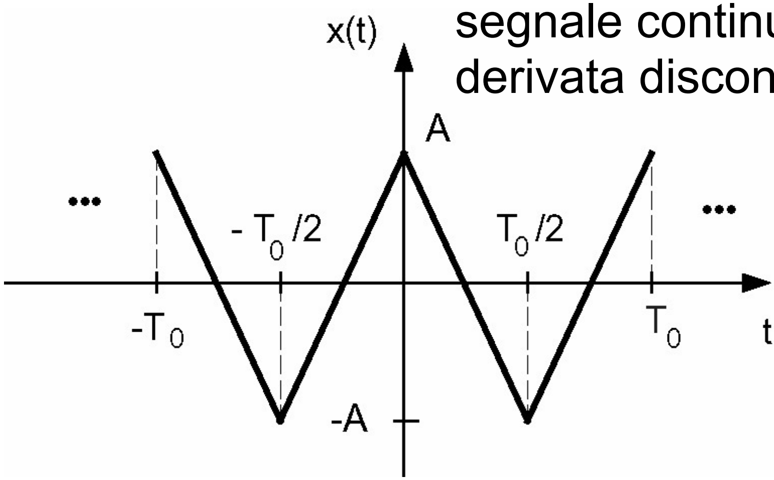
$$\int t\cos(k\,t)\,dt = \frac{k\,t\sin(k\,t) + \cos(k\,t)}{k^2} + \text{constant}$$

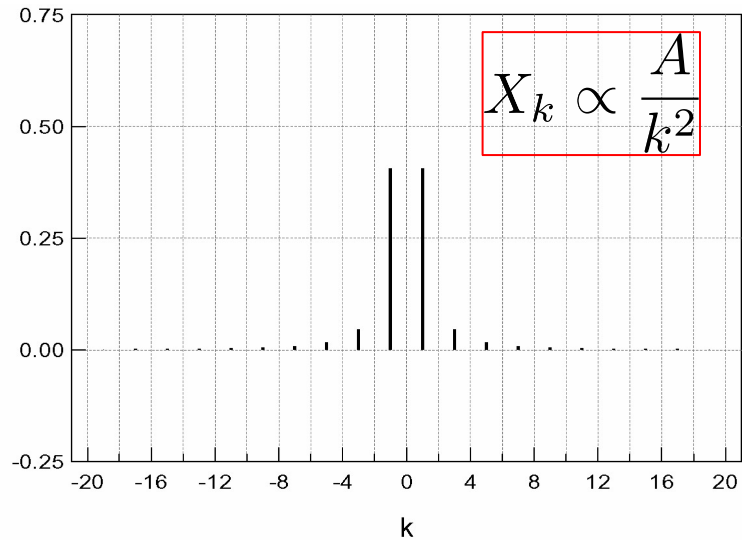
$$X_k = -\frac{8A}{T_0}\int_0^{T_0/2} \frac{t}{T_0}\cos\left(2\pi k f_0 t\right)dt$$

$$= -\frac{8A}{T_0}\frac{T_0}{(2\pi k)^2}\left[(-1)^k - 1\right] = \frac{4A}{(\pi k)^2}, \quad k \text{ dispari}$$

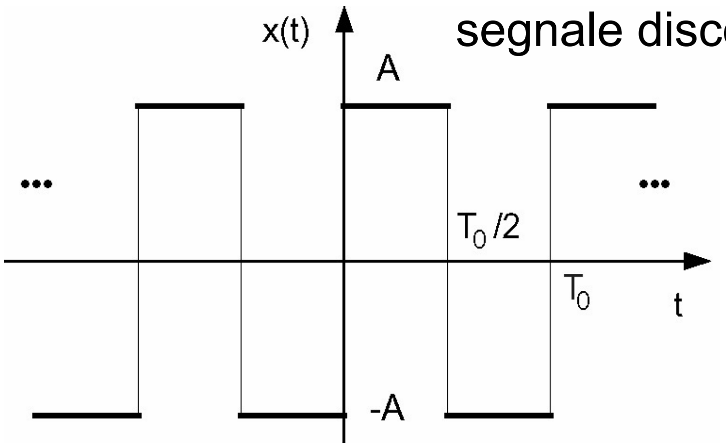
Contributo delle armoniche nella sintesi

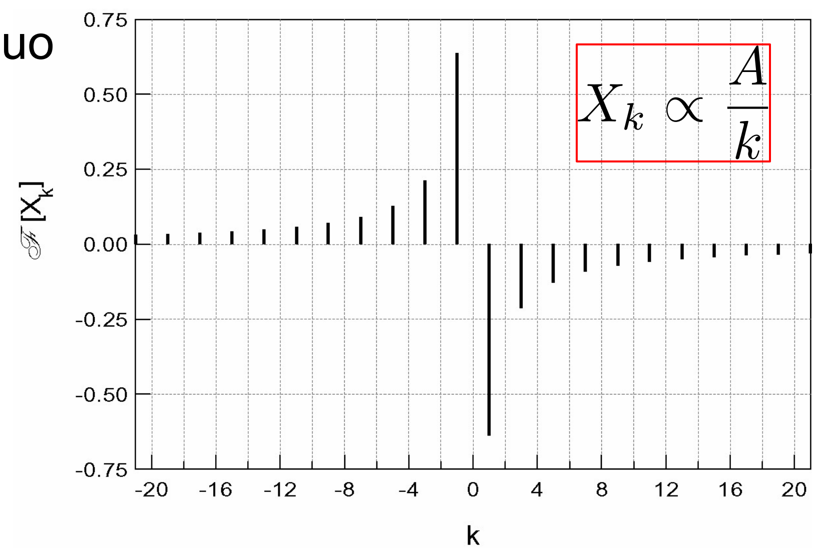
segnale continuo
derivata discontinua





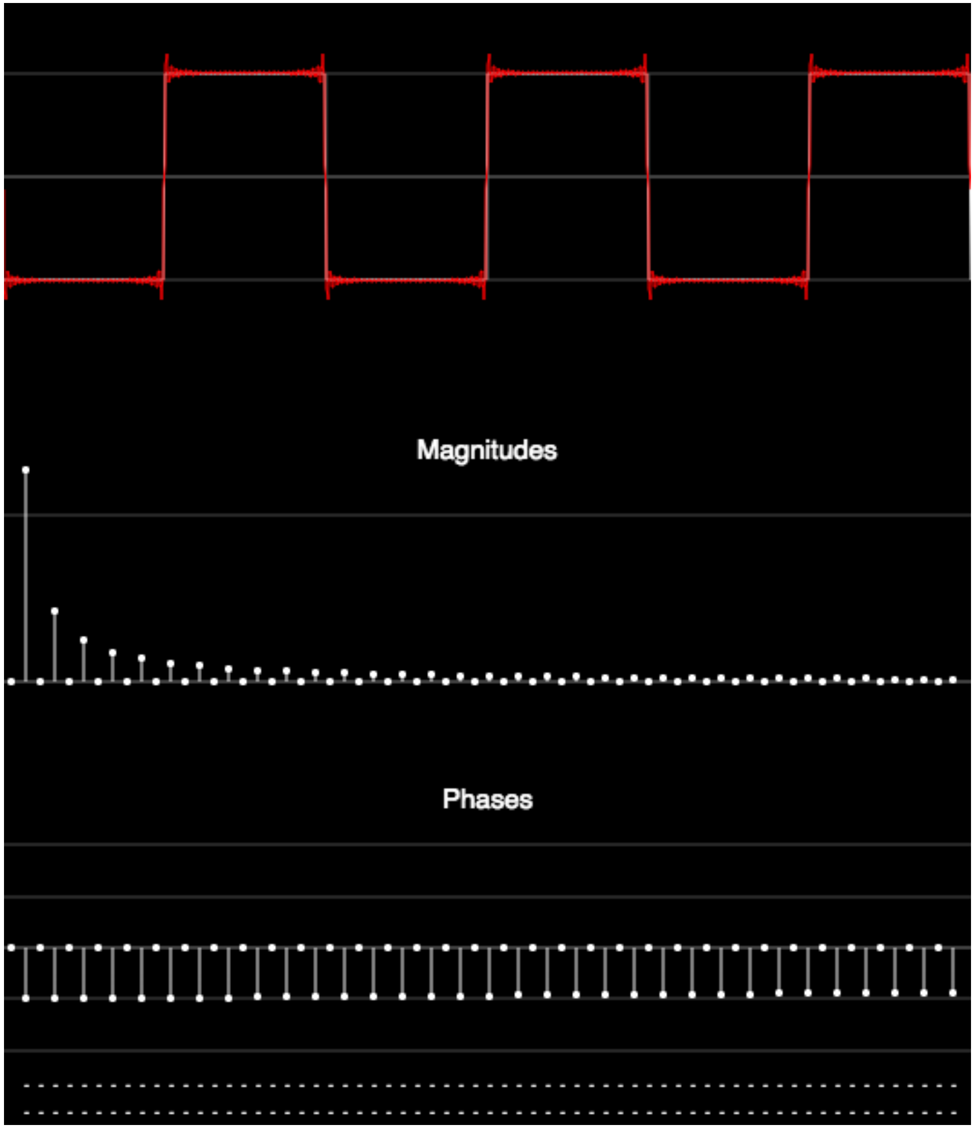
segnale discontinuo





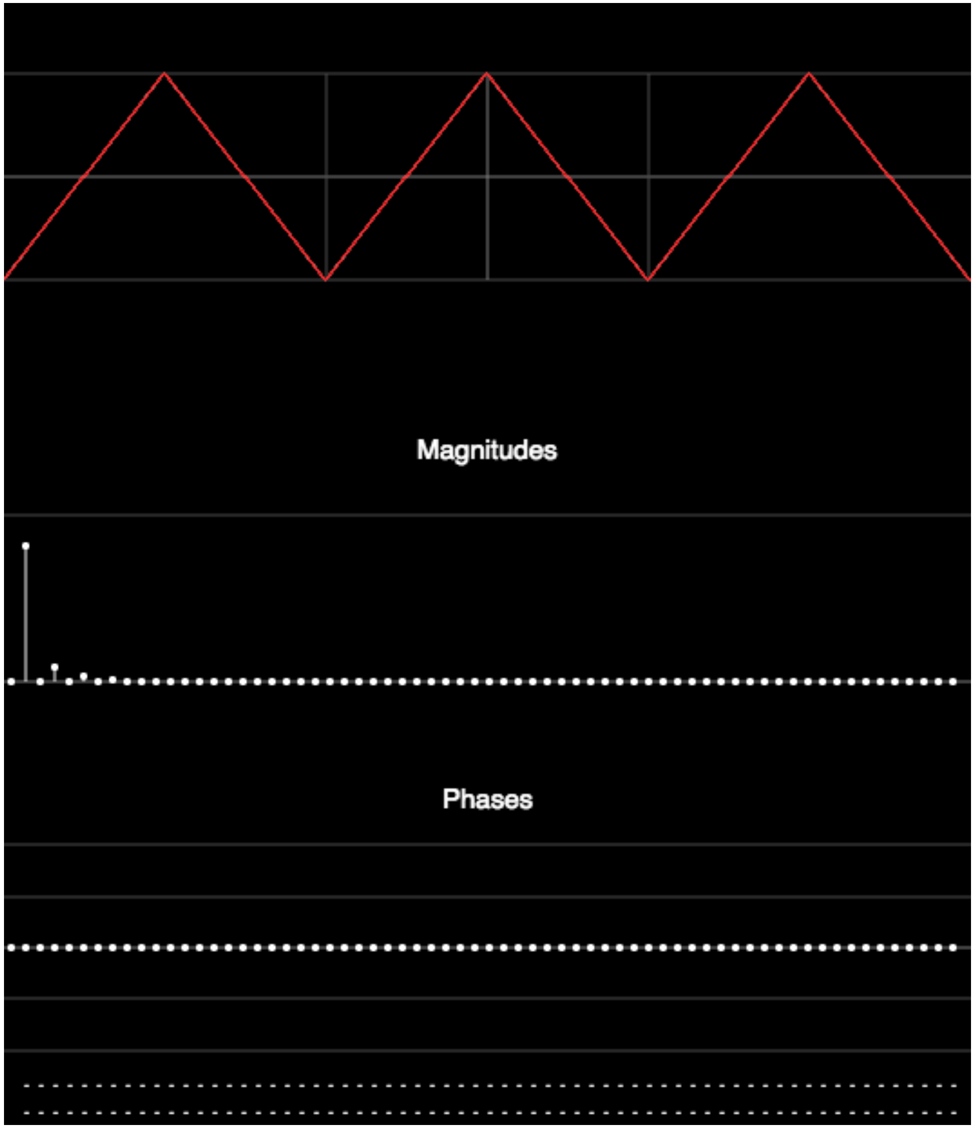
L'errore di sintesi dovuto al numero finito di armoniche utilizzate nella ricostruzione aumenta per segnali con "velocità di variazione" maggiori

Contributo delle armoniche nella sintesi



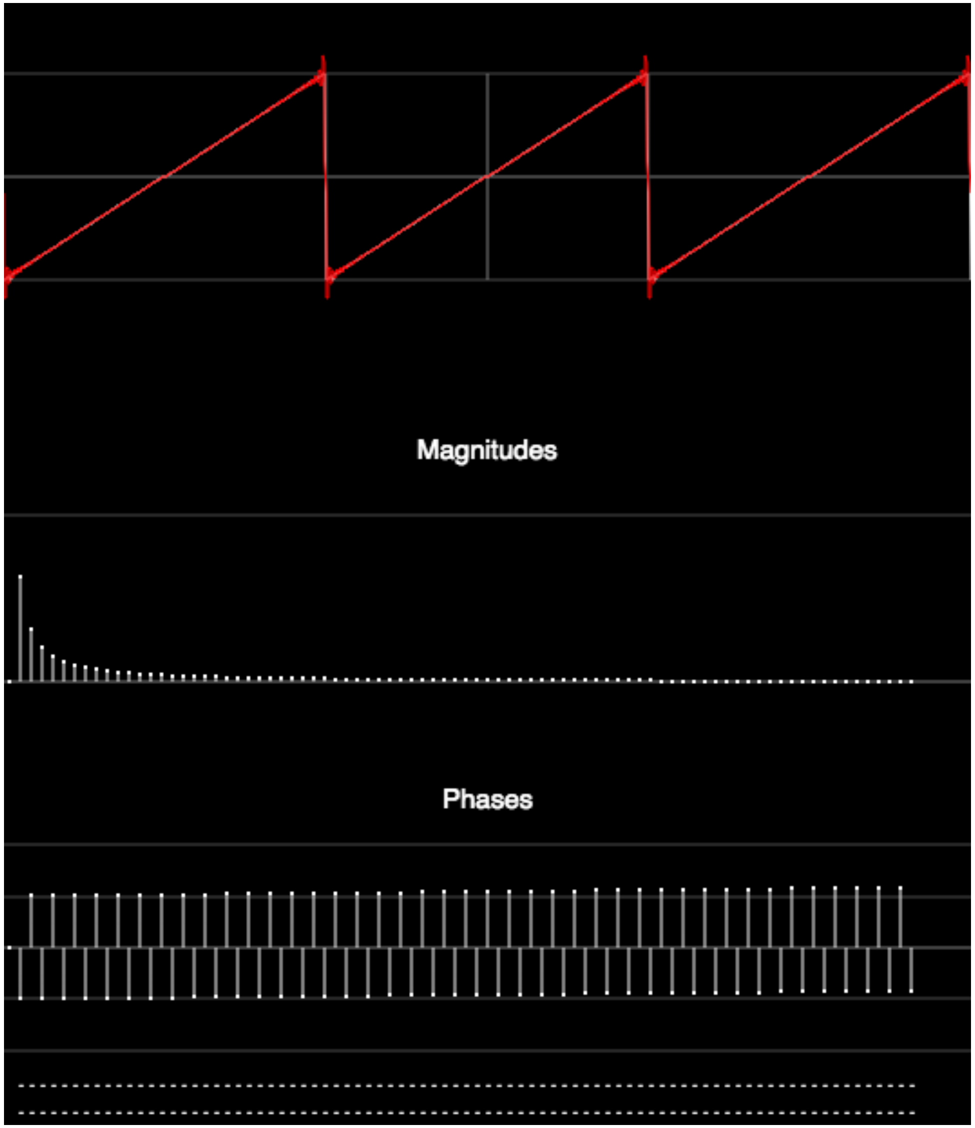
http://www.falstad.com/fourier/

Contributo delle armoniche nella sintesi



http://www.falstad.com/fourier/

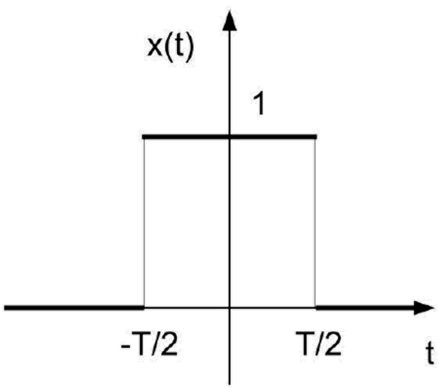
Contributo delle armoniche nella sintesi

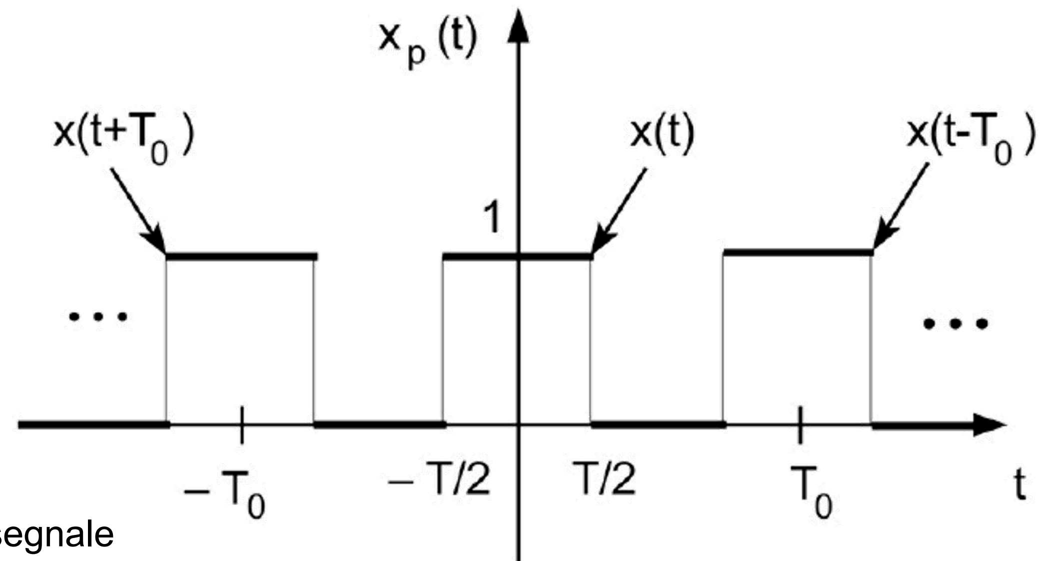


http://www.falstad.com/fourier/

Segnali Aperiodici

Possiamo esprimere un segnale aperiodico come sovrapposizione di segnali sinusoidali?





$$x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

segnale "periodicizzato"

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t - nT_0}{T}\right)$$

$$\boxed{x(t) = \lim_{T_0 \to \infty} x_p(t)}$$

(al limite in cui il periodo di *ripetizione* è infinito)

Un segnale APERIODICO può essere considerato il caso limite di un segnale periodico nel limite in cui il periodo di ripetizione è infinito

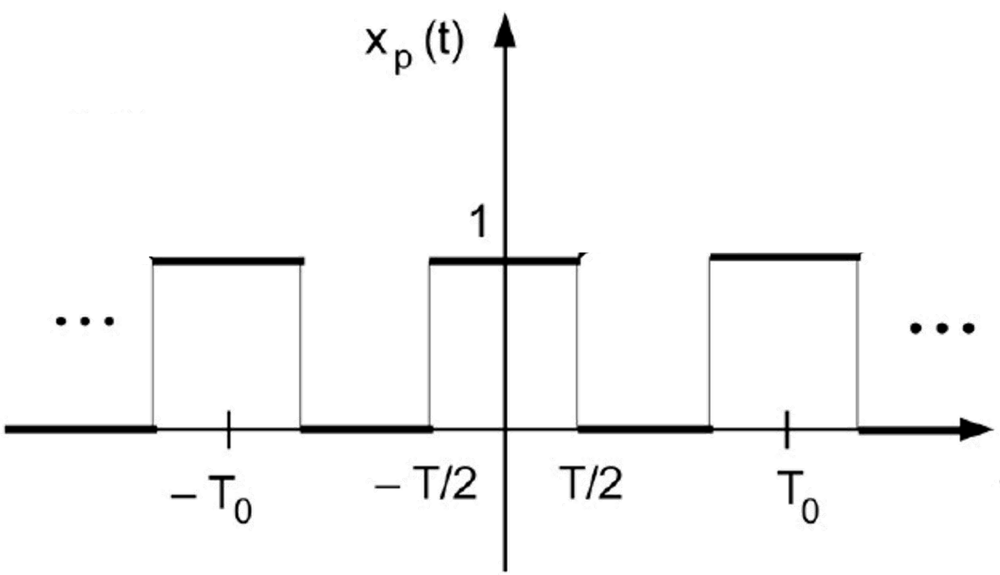
Segnali Aperiodici

$x_p(t)$ periodico, quindi posso sviluppare in serie di Fourier

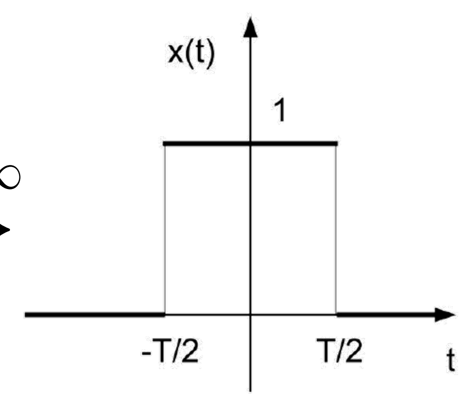
$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t - nT_0}{T}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i2\pi k f_o t}$$

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t) e^{-i2\pi k f_0 t} dt$$

Cosa succede allo spettro di ampiezza per $T_0 \longrightarrow \infty$?



$$T_0 \longrightarrow \infty$$

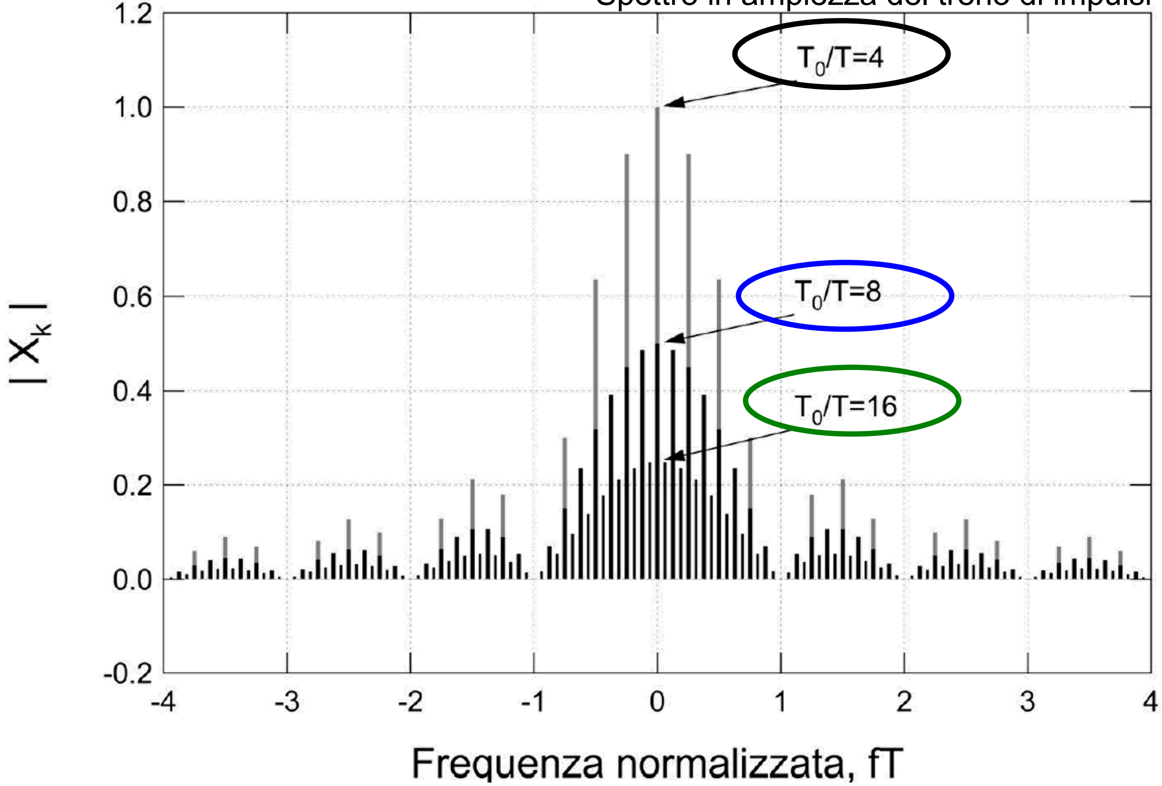


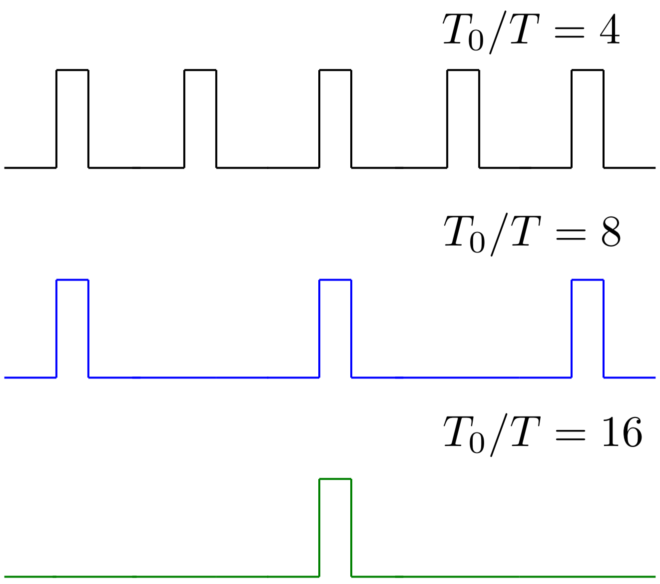
Segnali Aperiodici

Cosa succede allo spettro di ampiezza per $T_0 \longrightarrow \infty$?

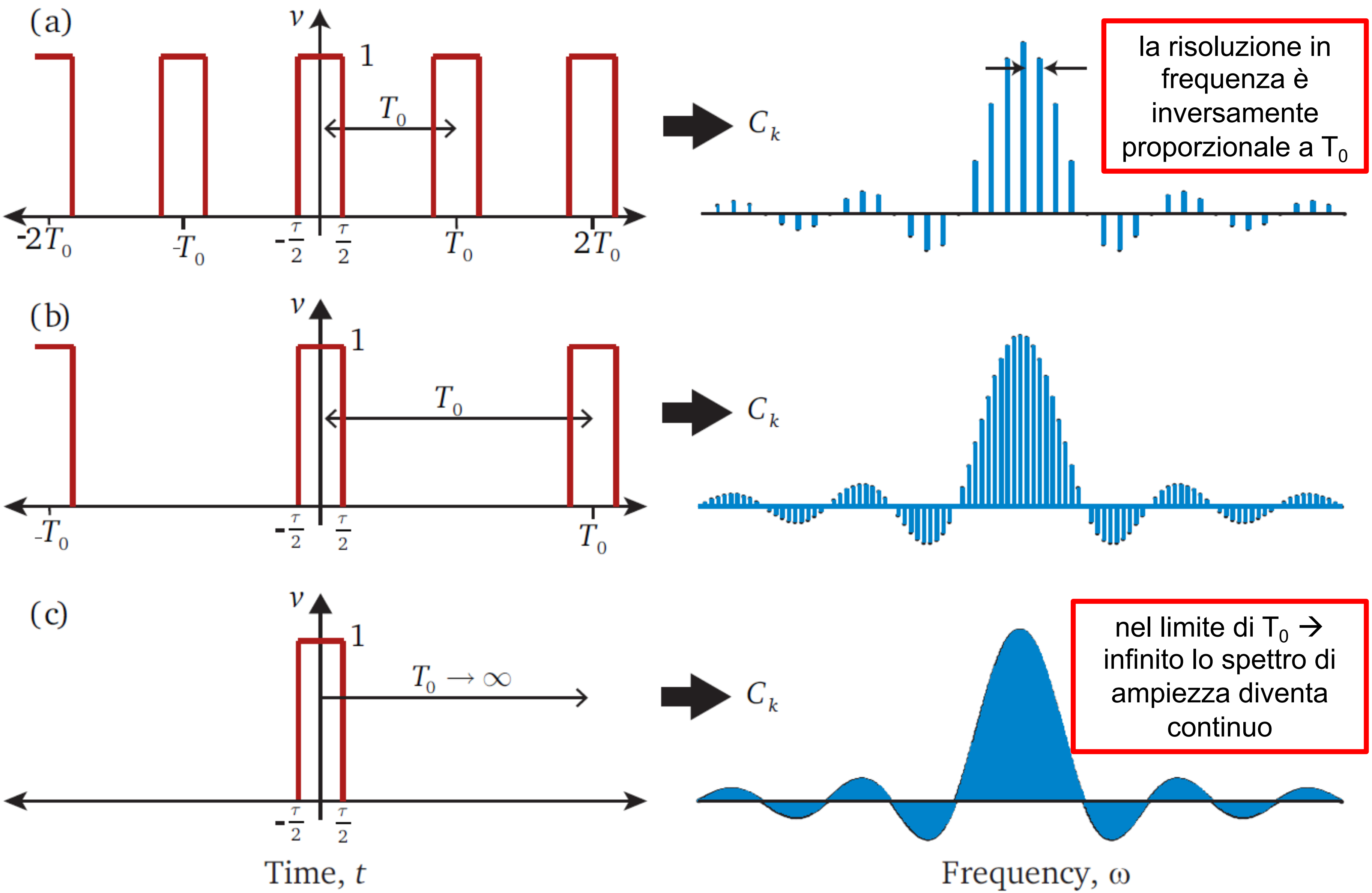
- diminuisce f_0, le righe si avvicinano
- aumenta T_0, diminisce l'ampiezza delle righe

Spettro in ampiezza del treno di impulsi

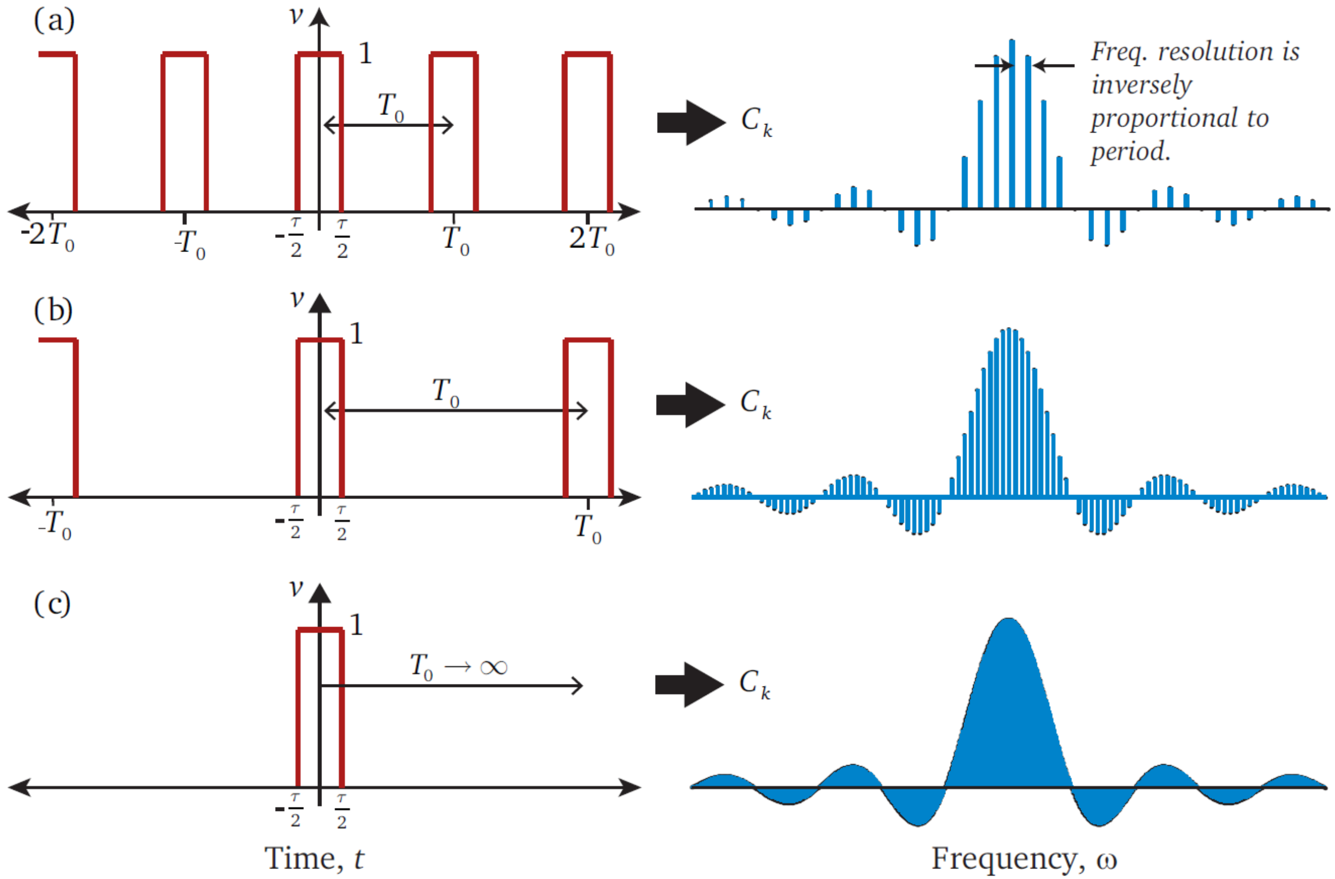




Segnali Aperiodici



Segnali Aperiodici

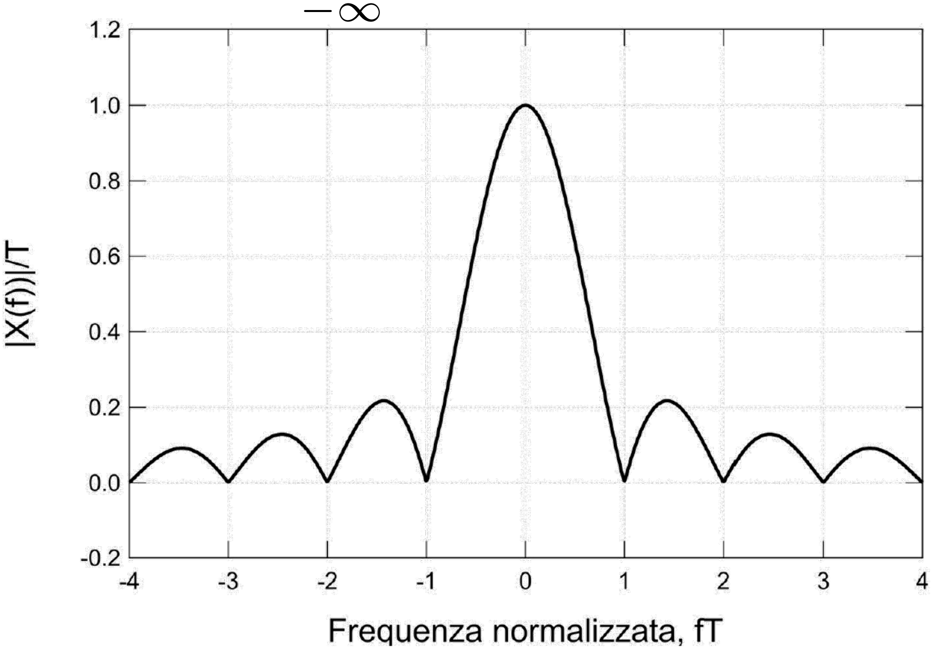


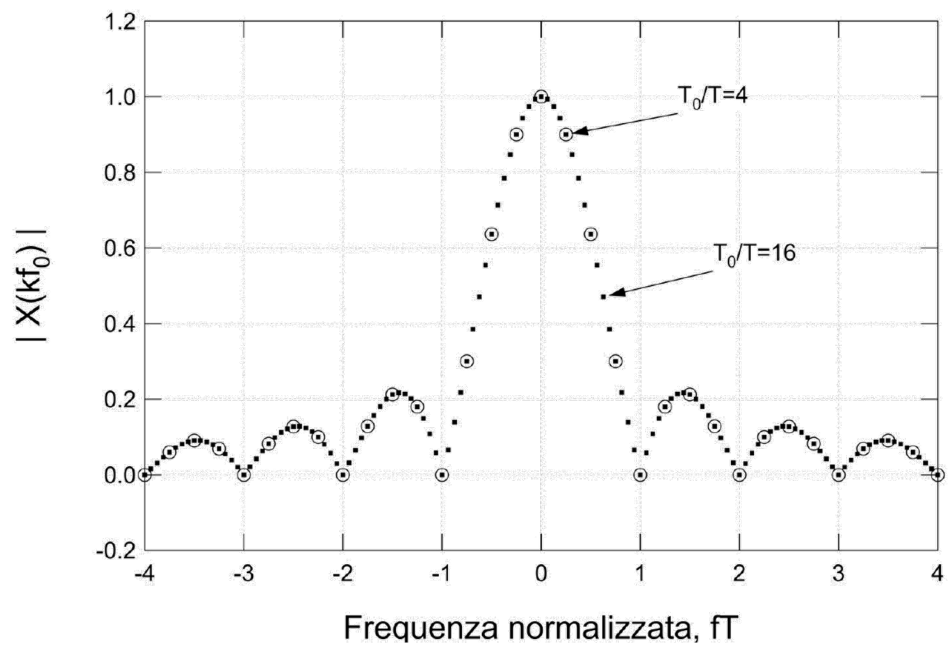
$$X_k = \boxed{\frac{1}{T_0}} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, \mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad X(f) \boxed{\equiv} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, \mathrm{d}t$$

Segnali Aperiodici

Definiamo un coefficiente di Fourier modificato la cui ampiezza non sia infinitesima

$$X(f) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, \mathrm{d}t \Longrightarrow X_k = \frac{1}{T_0} X(f)\big|_{f=\frac{k}{T_0}} = f_0 X(k f_0)$$





$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} X(kf_o) e^{i2\pi k f_o t} f_o$$

$$x_p(t) \xrightarrow[f_0 \to 0]{T_0 \to \infty} x(t) \qquad X(kf_o) \xrightarrow[f_0 \to 0]{T_0 \to \infty} X(f) \qquad f_o \xrightarrow[f_0 \to 0]{T_0 \to \infty} \mathrm{d}f$$

Segnali Aperiodici

$$\underbrace{x_p(t)}_{\substack{T_0\to\infty \\ f_0\to 0 \\ \downarrow \\ x(t)}} = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \underbrace{X(kf_o)}_{\substack{T_0\to\infty \\ f_0\to 0 \\ \downarrow \\ X(f)}} e^{i2\pi k f_o t} \underbrace{f_o}_{\substack{T_0\to\infty \\ f_0\to 0 \\ \downarrow \\ \mathrm{d}f}}$$

Somma di valori di una funzione valutata su punti equispaziati e moltiplicati per il valore della distanza tra due punti infinitesima = integrale

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{i2\pi f t}\, \mathrm{d}f$$ Integrale di Fourier

Per determinare X(f) effettuo il limite per il coefficiente di Fourier modificato

$$X(f) = \lim_{\substack{T_0\to\infty \\ f_0\to 0}} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p\,(t)\, e^{-i2\pi k f_0 t} dt = \int_{\infty}^{\infty} x\,(t)\, e^{-i2\pi f t} dt$$ Trasformata di Fourier

→ sostanzialmente:

X(f) non è infinitesimo (come non lo è *x(t)*…) a differenza di X_k

←→

X(f) non ha le stesse di dimensioni di *x(t)*

Segnali Aperiodici

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{i2\pi f t}\, \mathrm{d}f$$

equazione di SINTESI: ricostruzione del segnale a partire dalle sue armoniche

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-i2\pi f t}\, \mathrm{d}t$$

equazione di ANALISI: studio del contenuto in frequenza del segnale

$$x(t) \Longleftrightarrow X(f)$$ oppure $$x(t) = \mathcal{F}^{-1}(X(f))$$ $$X(f) = \mathcal{F}(x(t))$$

La conoscenza del segnale *x(t)* nel dominio temporale è equivalente alla conoscenza della trasformata di Fourier nel dominio delle frequenze

Segnali Aperiodici

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{i2\pi f t}\, \mathrm{d}f \qquad X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-i2\pi f t}\, \mathrm{d}t$$

$$X(f) = A(f)\, e^{i\phi(f)}$$

$$x(t) \Longleftrightarrow X(f)$$

$A(f) = |X(f)|$ spettro in ampiezza

$\phi(f) = \arg(X(f))$ spettro in fase

Cosa abbiamo fatto?
Abbiamo schematizzato un segnale aperiodico come un segnale periodico con periodo di ripetizione infinito e quindi con frequenza fondamentale infinitesima.

Segnale periodico:

- **Somma (serie) di componenti sinusoidali ad armoniche discrete con ampiezza finita e con frequenza multipla della frequenza fondamentale**

Segnale aperiodico:

- **Somma (integrale) di componenti sinusoidali ad armoniche continue con ampiezza infinitesima |*X(f)*|d*f* e con frequenza *f* variabile con continuità**

Segnali Periodici e Aperiodici

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \, e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) \, e^{-j2\pi k f_0 t} \, \mathrm{d}t$$

$$x(t) \Longleftrightarrow X_k$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \, e^{i2\pi f t} \, \mathrm{d}f$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \, e^{-i2\pi f t} \, \mathrm{d}t$$

$$x(t) \Longleftrightarrow X(f)$$

Segnale periodico:

- **Somma (serie) di componenti sinusoidali a armoniche discrete con ampiezza finita e con frequenza multipla della frequenza fondamentale**

Segnale aperiodico:

- **Somma (integrale) di componenti sinusoidali a armoniche continue con ampiezza infinitesima |*X(f)*|d*f* e con frequenza *f* variabile con continuità**

Teoremi e proprietà della trasformata di Fourier

Linearità:

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \Rightarrow X(f) = aX_1(f) + bX_2(f)$$

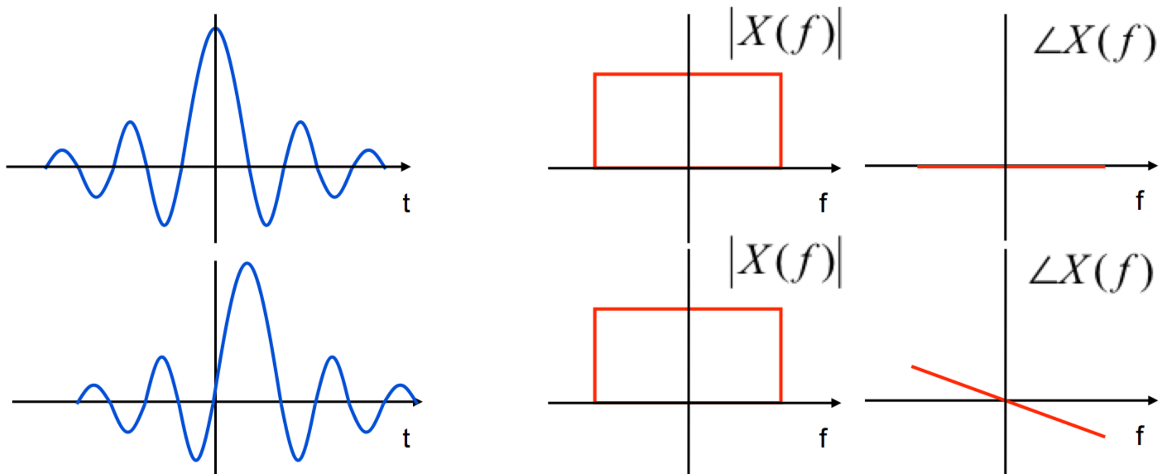
Dualità:

$$x(t) \Leftrightarrow X(f) \quad \rightarrow \quad X(t) \Leftrightarrow x(-f)$$

Teorema del ritardo:

$$y(t) = x(t - t_0) \quad \Leftrightarrow \quad Y(f) = X(f)e^{-i2\pi f t_0}$$

un ritardo temporale modifica lo spettro di fase della trasformata (cambia la "parità"…) ma non lo spettro in ampiezza

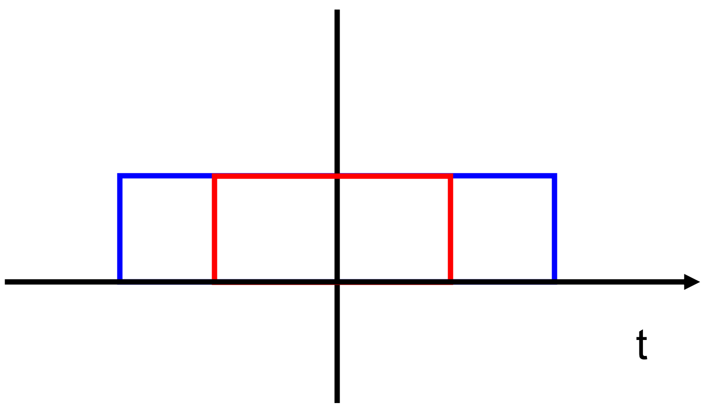


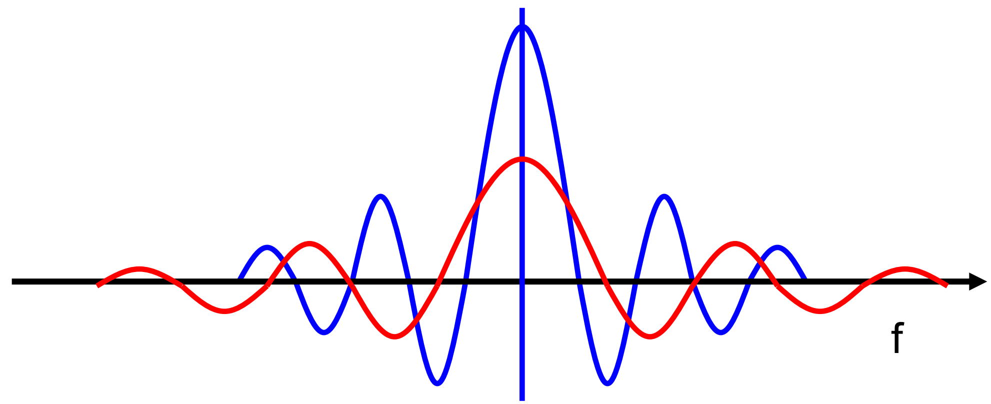
Teoremi e proprietà della trasformata di Fourier

Teorema del cambiamento di scala:

$$x(\alpha t) \Longleftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

Dilatazione dell'asse dei tempi (rallentamento del segnale) = compressione dell'asse delle frequenze (aumenta l'importanza delle basse frequenze)





Teorema di derivazione e integrazione:

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \Longleftrightarrow i2\pi f \cdot X(f)$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha \Longleftrightarrow \frac{X(f)}{i2\pi f}$$

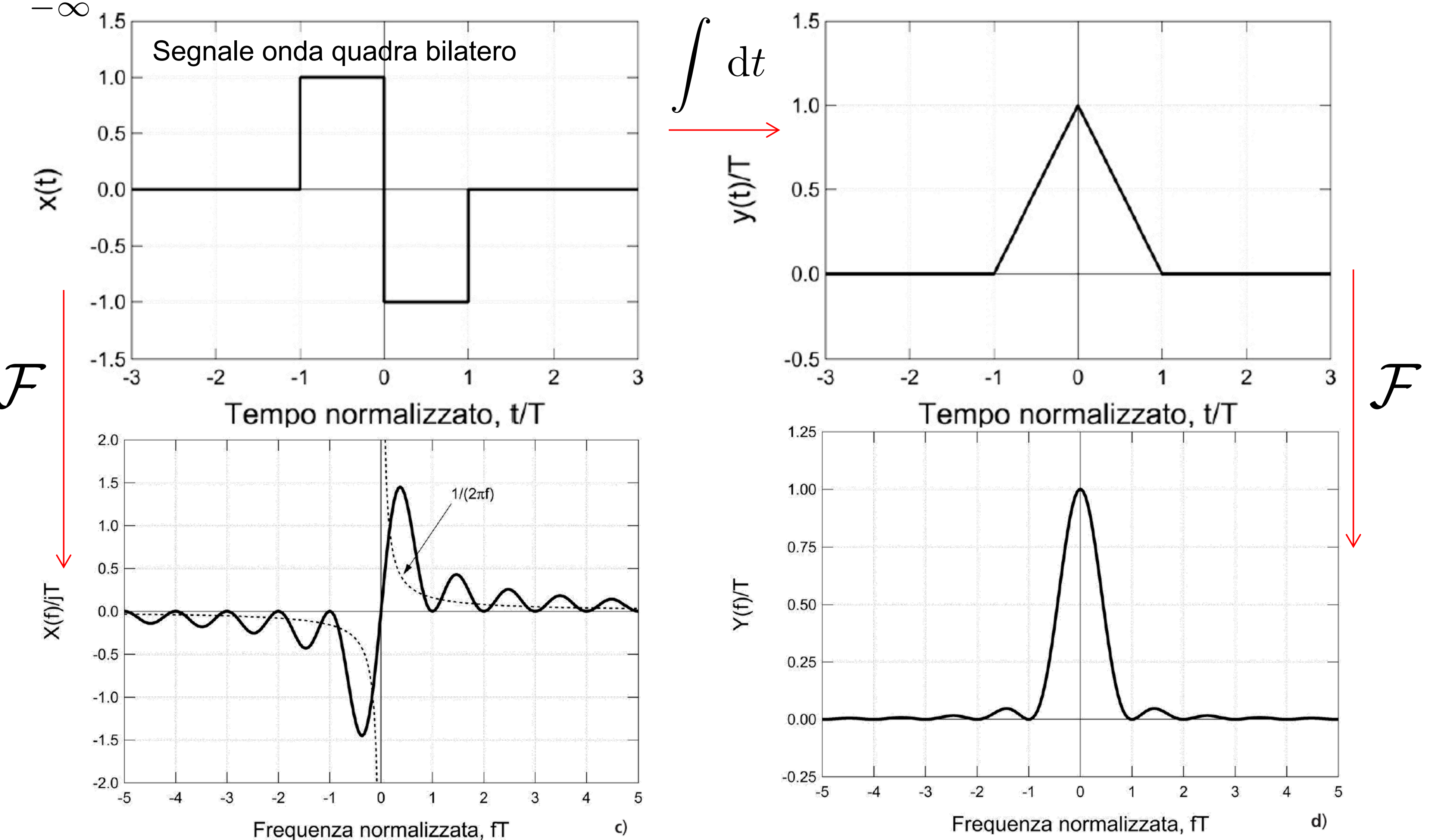
Derivazione = soppressione basse freq.

Integrazione = soppressione alte freq.

Teoremi e proprietà della trasformata di Fourier

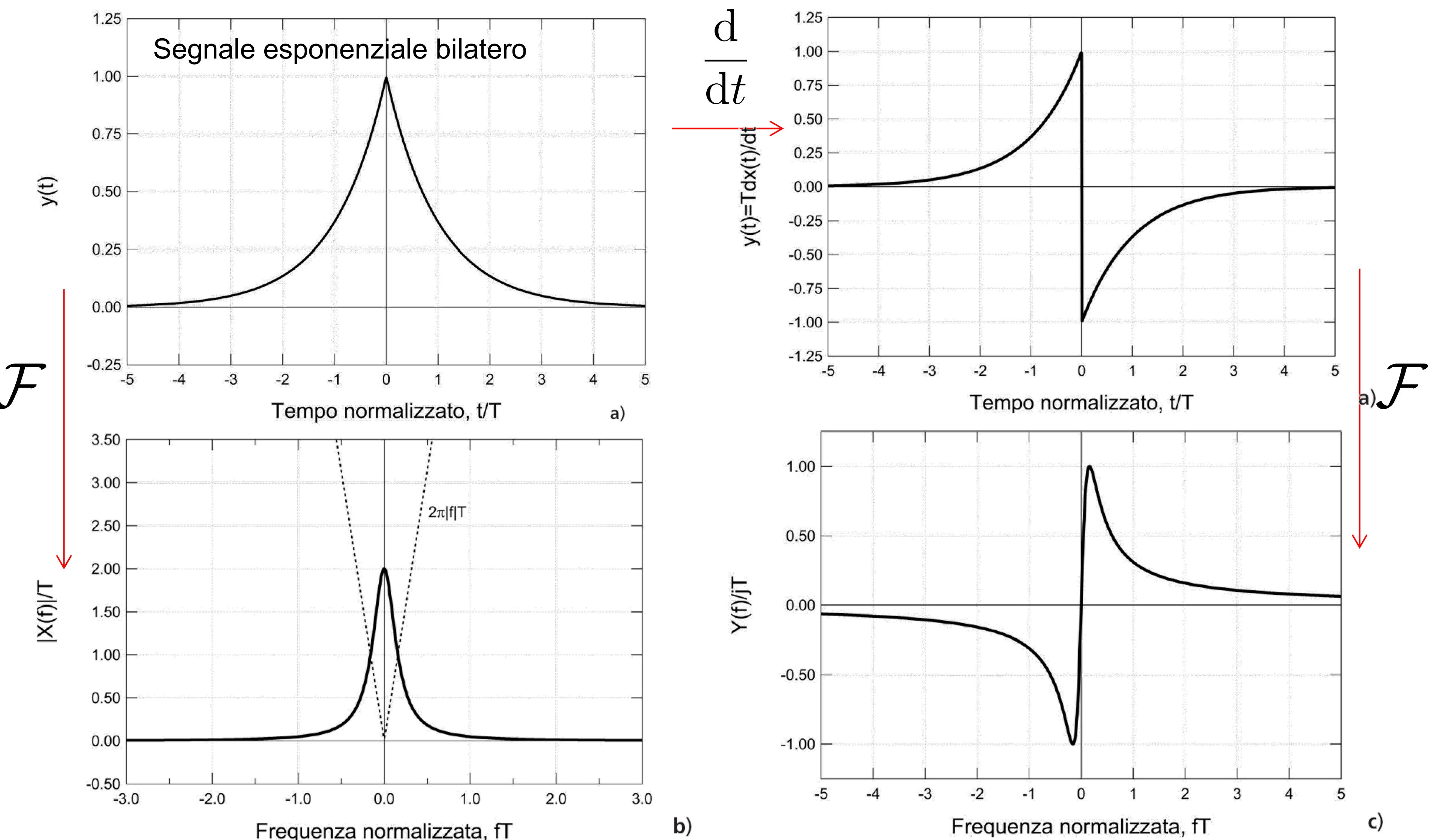
$$\int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha \Longleftrightarrow \frac{X(f)}{i2\pi f}$$

Integrazione = soppressione alte freq.



Teoremi e proprietà della trasformata di Fourier

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \Longleftrightarrow i2\pi f \cdot X(f)$$ **Derivazione = soppressione basse freq.**



Teoremi e proprietà della trasformata di Fourier

Teorema del prodotto e convoluzione:

$$z(t) = x(t) \otimes y(t) \quad \Leftrightarrow \quad Z(f) = X(f)Y(f)$$

$$z(t) = x(t)y(t) \quad \Leftrightarrow \quad Z(f) = X(f) \otimes Y(f)$$

$$a(t) \otimes b(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\tau)b(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau$$

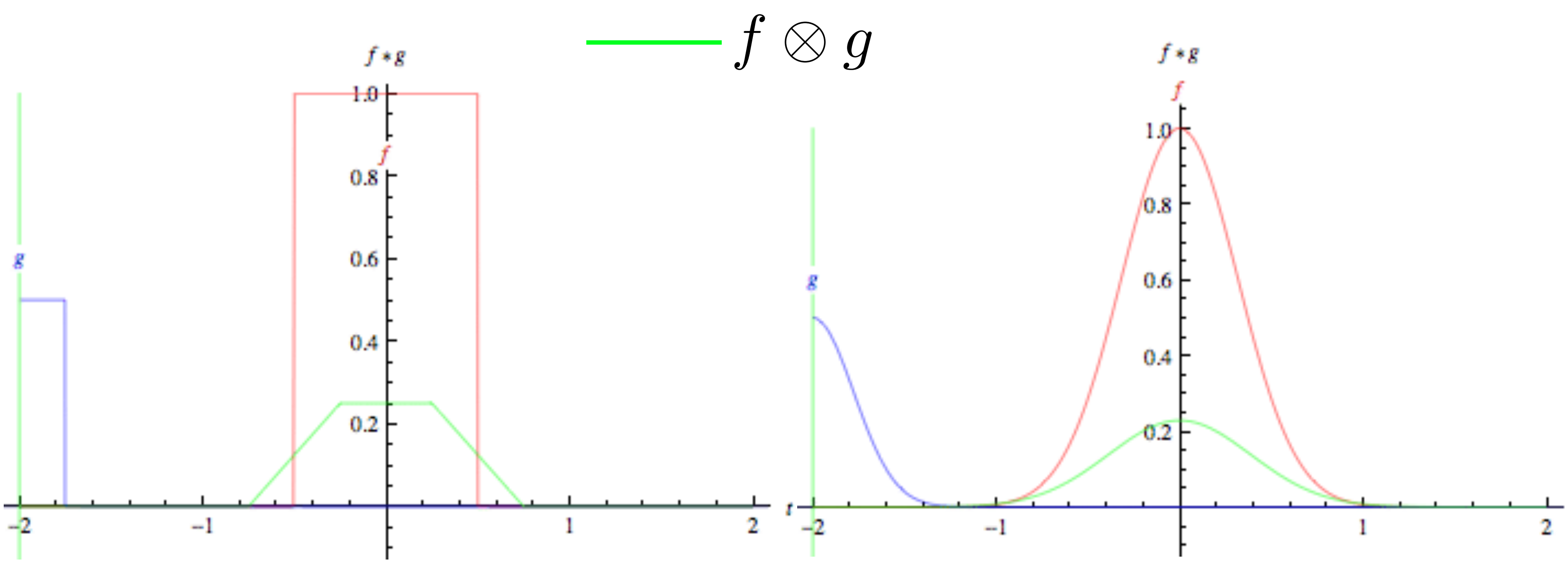
Teoremi e proprietà della trasformata di Fourier

Teorema del prodotto e convoluzione:

$$z(t) = x(t) \otimes y(t) \quad \Leftrightarrow \quad Z(f) = X(f)Y(f)$$

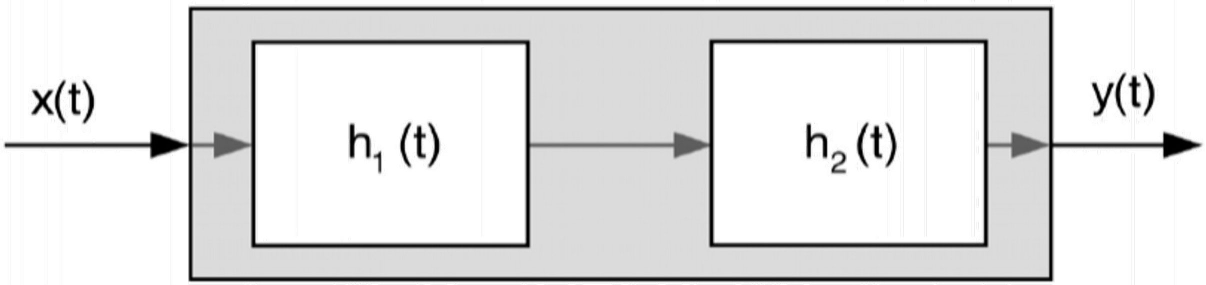
$$z(t) = x(t)y(t) \quad \Leftrightarrow \quad Z(f) = X(f) \otimes Y(f)$$

$$a(t) \otimes b(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\tau) b(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau$$



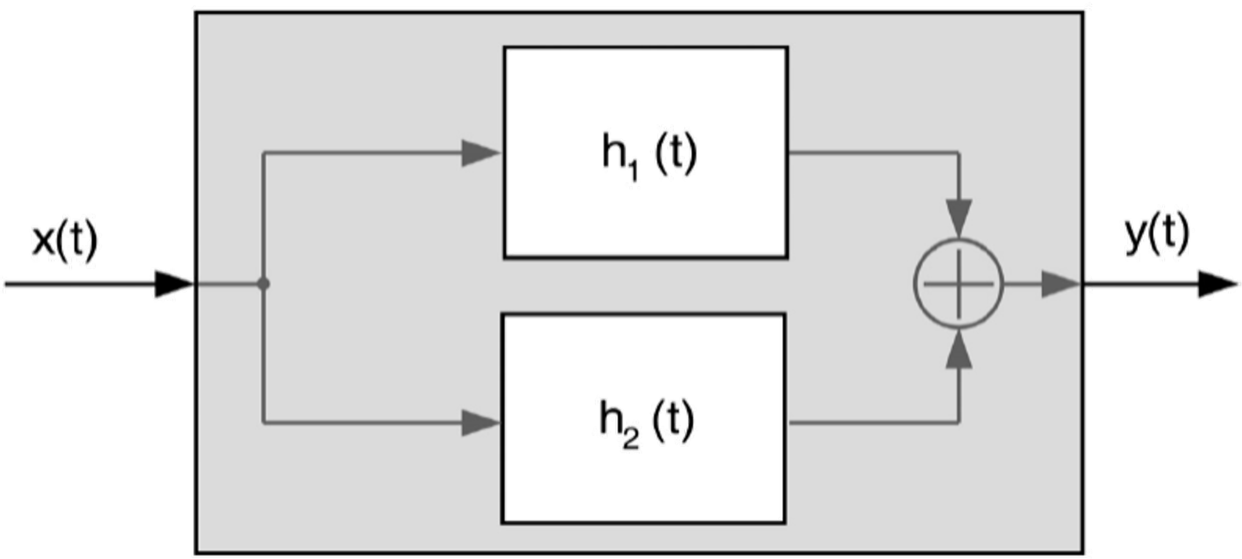
http://mathworld.wolfram.com/Convolution.html

Sistemi in cascata e in parallelo



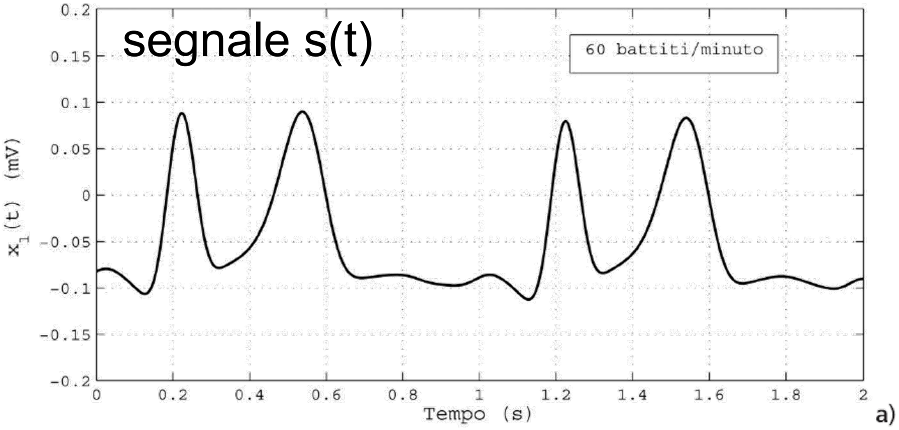
$$h(t) = h_1(t) \otimes h_2(t)$$
$$H(f) = H_1(f) \cdot H_2(f)$$

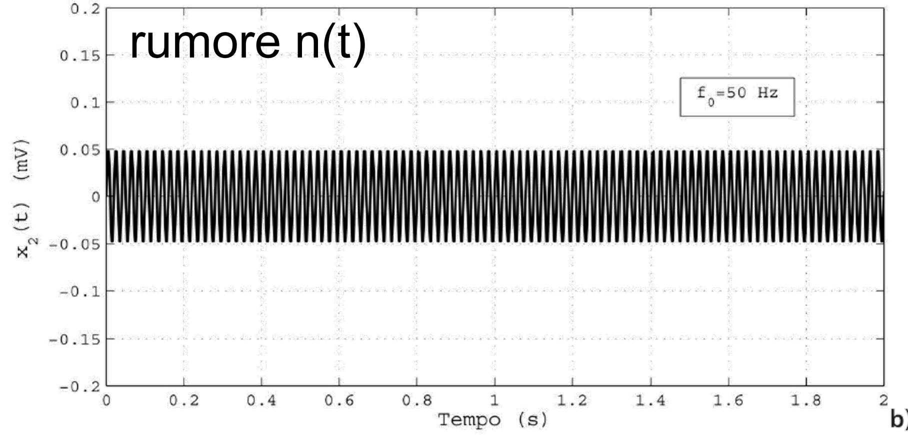
(questo è vero se i circuiti sono disaccoppiati, ovvero se la loro risposta impulsiva è uguale a quella che avrebbero in configurazione isolata)

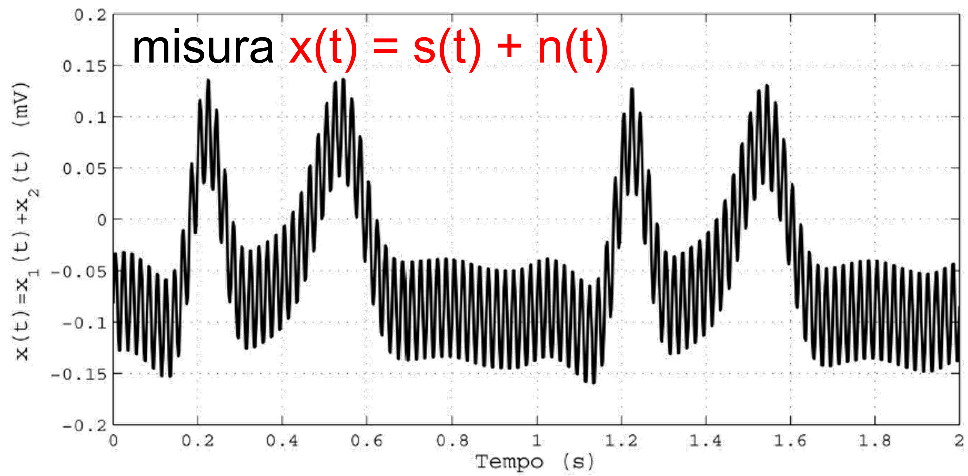


$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$
$$H(f) = H_1(f) + H_2(f)$$

Sovrapposizione di segnali





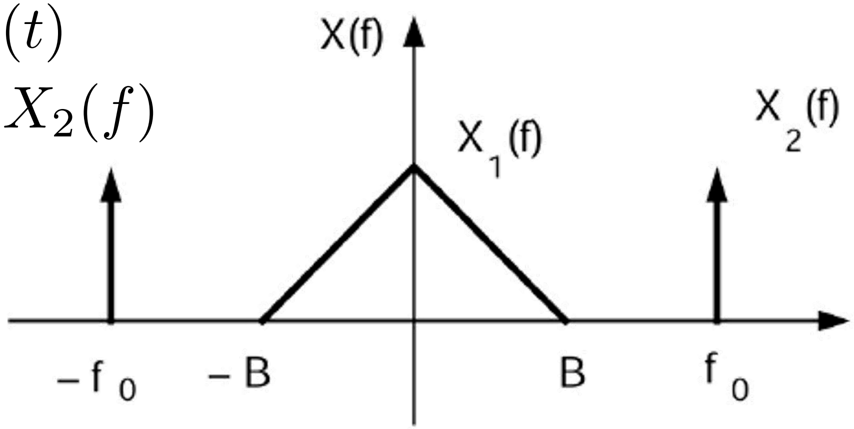


Nel dominio del tempo, dalla misura non è immediato estrarre il segnale

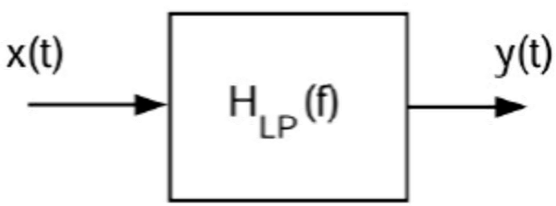
Se invece osservo nel dominio delle frequenze….

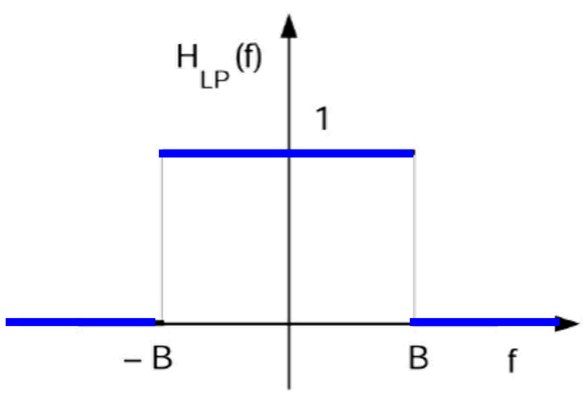
Sovrapposizione di segnali

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$
$$X(f) = X_1(f) + X_2(f)$$

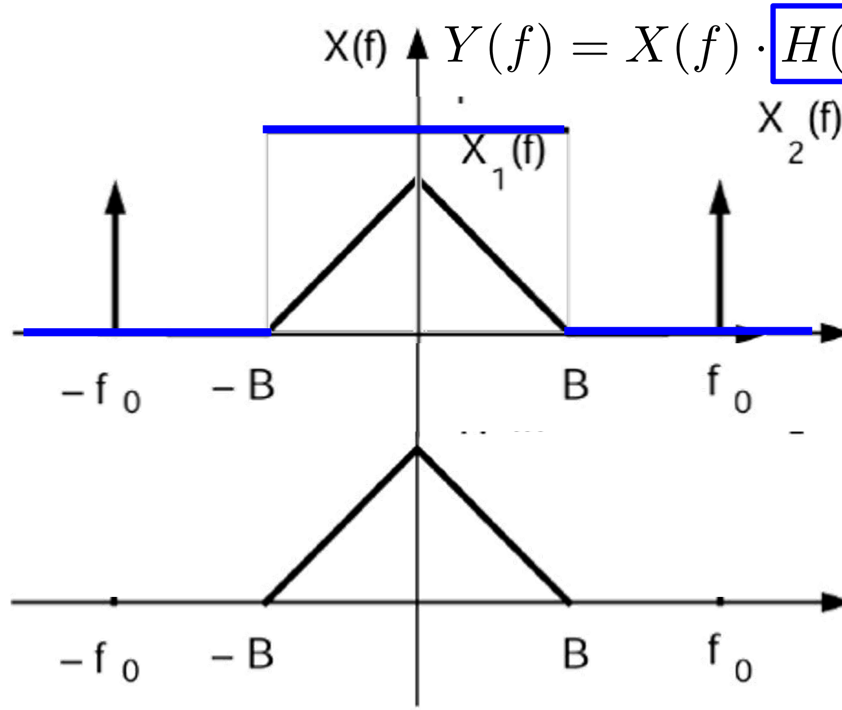


Segnale e rumore insistono su due regimi di frequenze distinte. Posso applicare un **filtro**

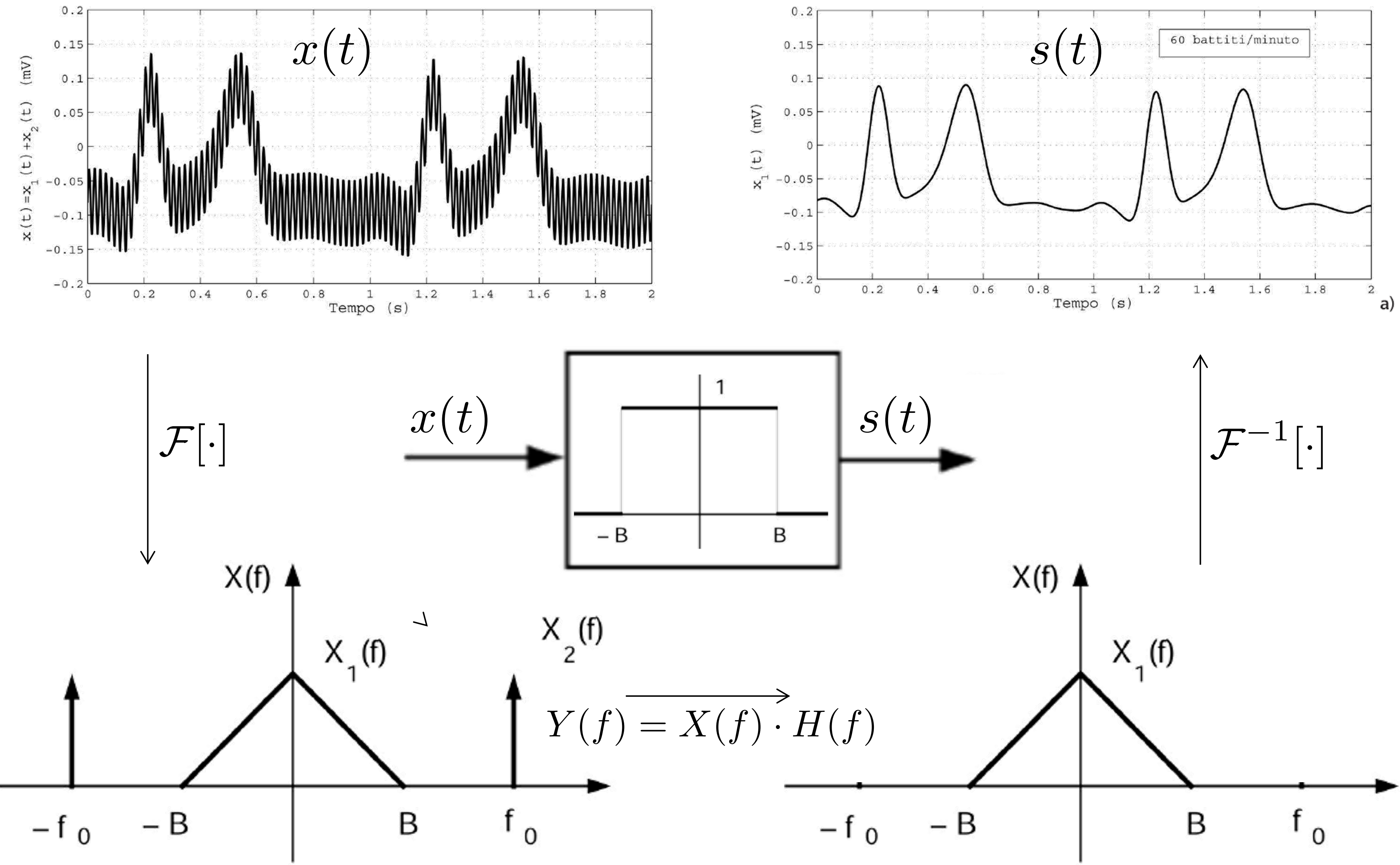




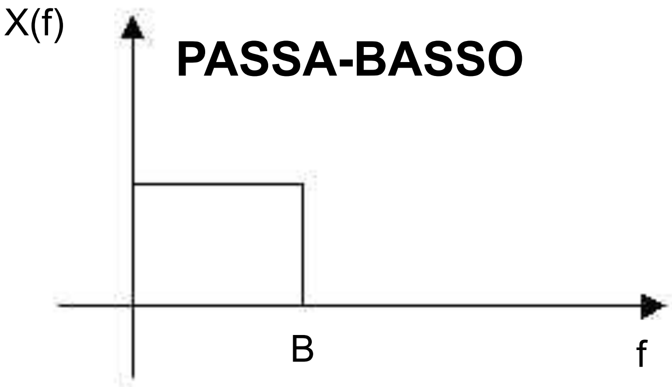
$$Y(f) = X(f) \cdot \boxed{H(f)}$$

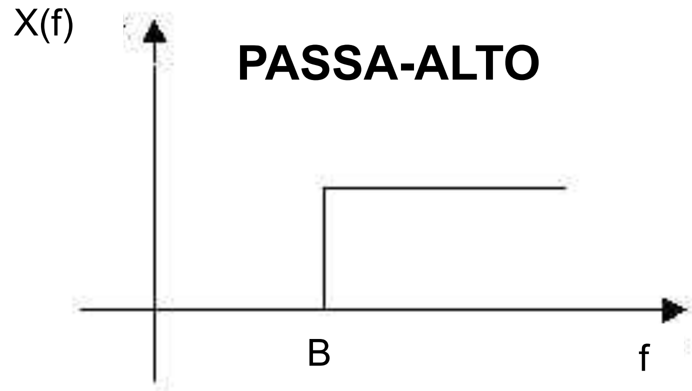


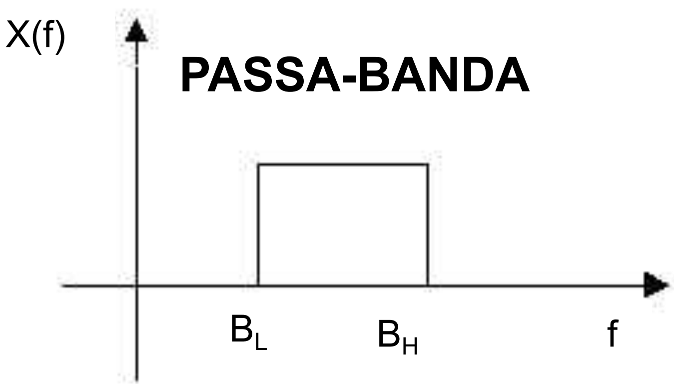
Sovrapposizione di segnali

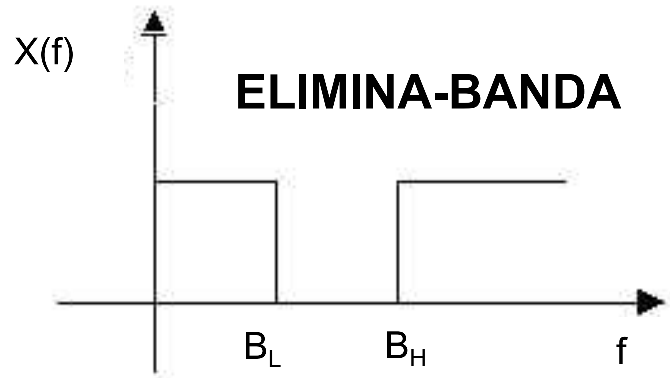


Filtri

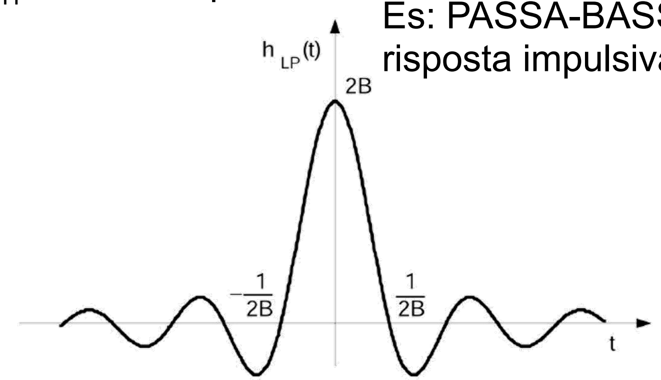








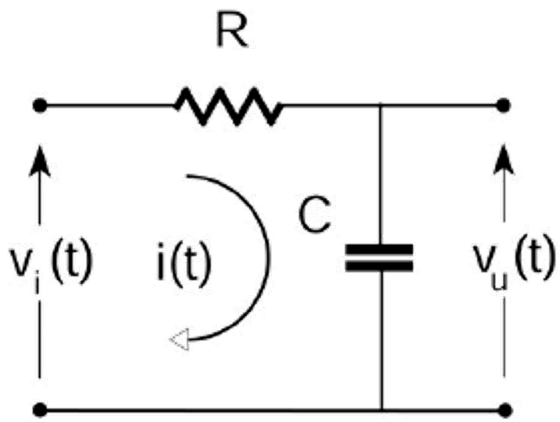
Es: PASSA-BASSO risposta impulsiva



Questi filtri non sono realizzabili. Infatti, la loro risposta impulsiva è non-causale.

$$h(t < 0) \neq 0$$

Risposta in frequenza di un circuito RC



$$v_u(t) = v_i(t) - R\, i(t)$$

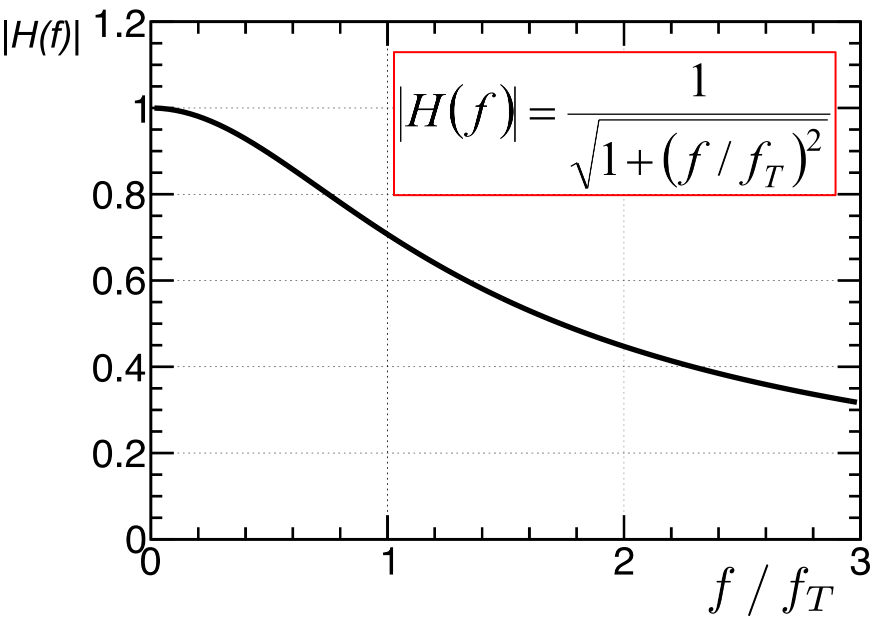
$$i(t) = C\,\frac{dv_u(t)}{d\ \ t}$$

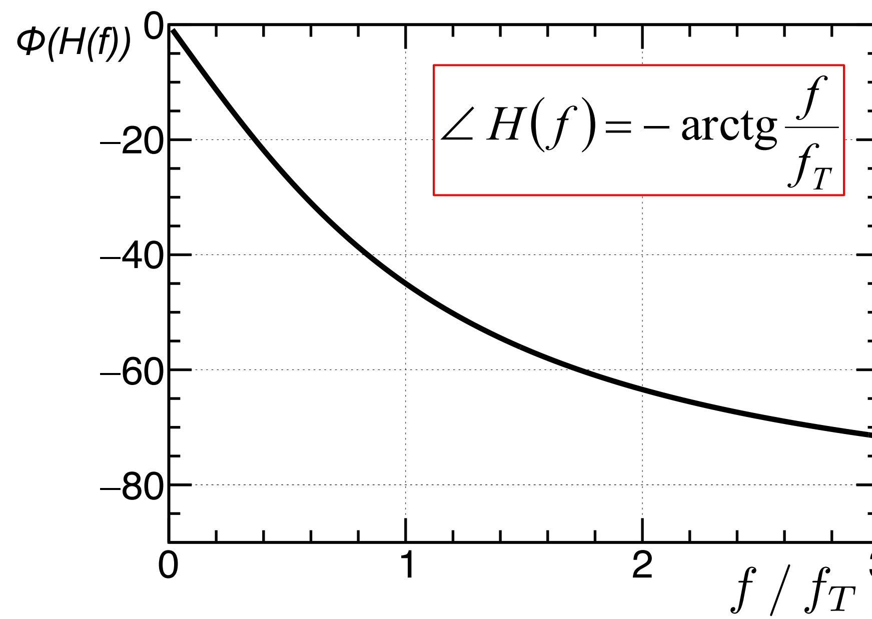
$$v_u(t) = v_i(t) - RC\,\frac{dv_u(t)}{d\ \ t}$$

$$\Big\downarrow \mathcal{F}[\cdot]$$

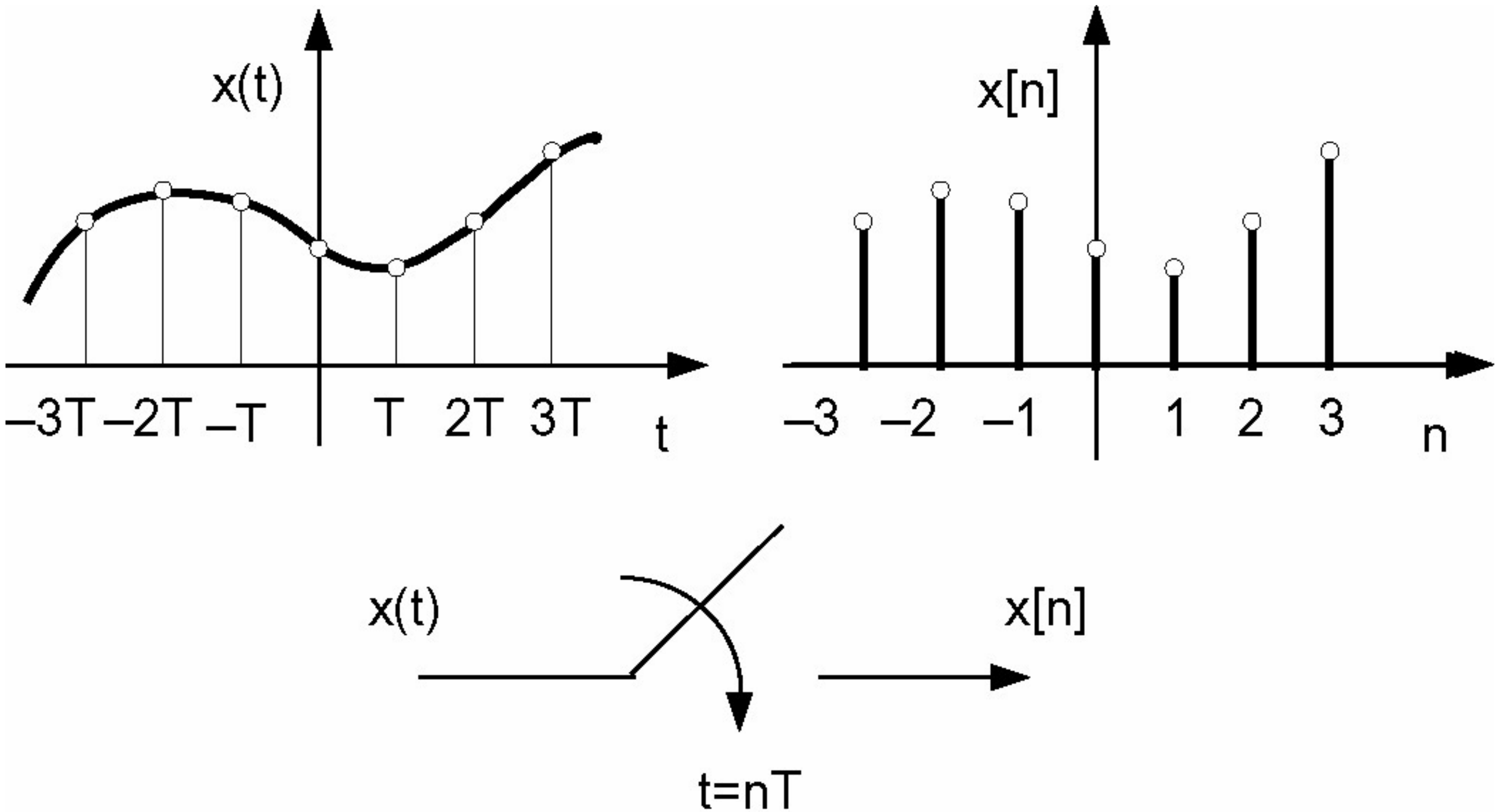
$$V_u(f) = V_i(f) - j2\pi f\ \ RC\ \ V_u(f)$$

$$H(f) = \frac{V_u(f)}{V_i(f)} = \frac{1}{1 + j2\pi f\ \ RC} = \frac{1}{1 + jf/f_T}$$





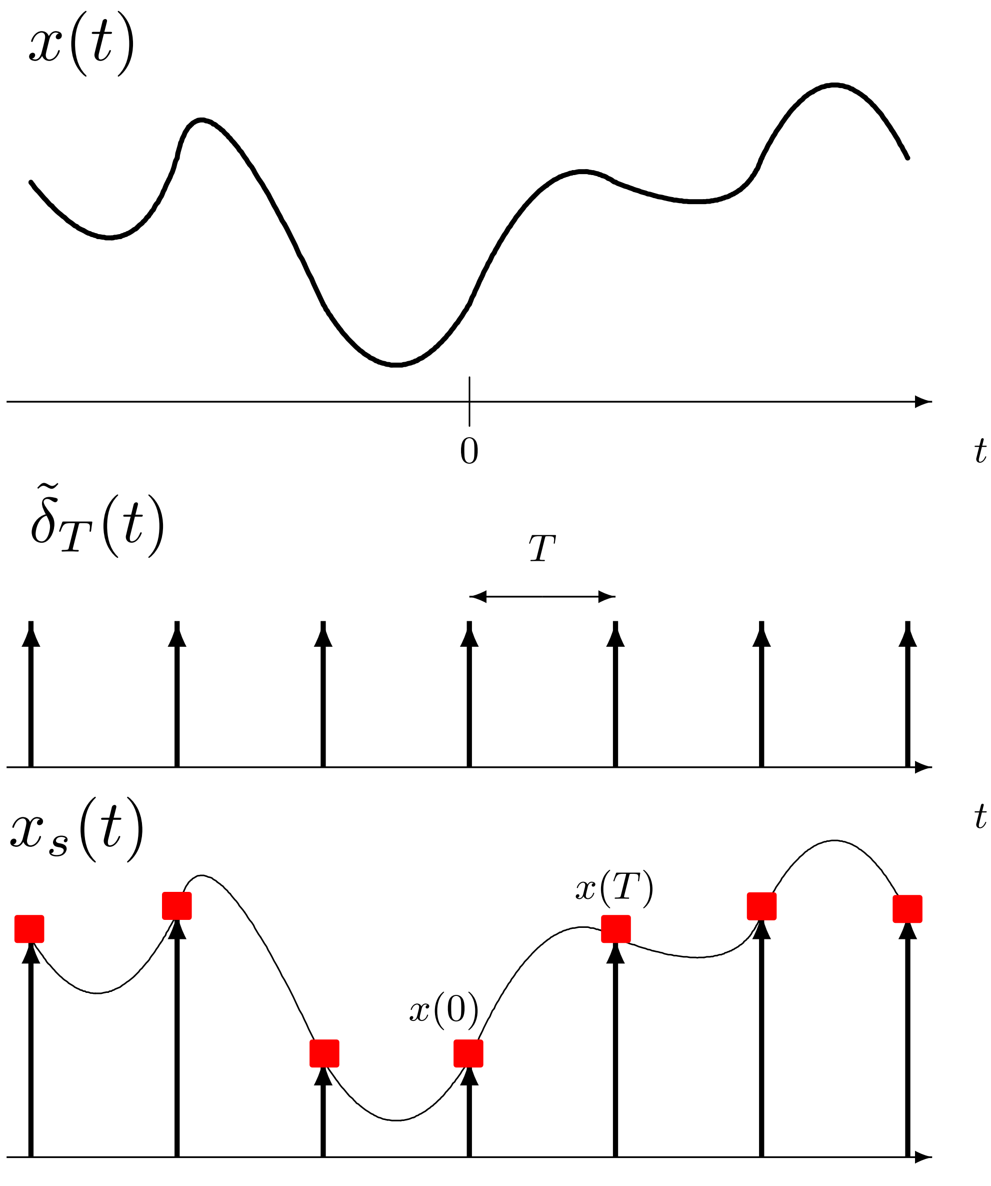
Dal tempo continuo al tempo discreto



$$f_c = \frac{1}{T}$$ Frequenza di campionamento

Sistema ideale: estrae il valore *x(t)* al tempo di campionamento
Sistema (e.g. ADC) reale: estrae il valore *x(t)* digitalizzato medio/di picco attorno al tempo di campionamento

Trasformata di Fourier di una sequenza



T periodo di campionamento

$f_C = \dfrac{1}{T}$ frequenza di campionamento

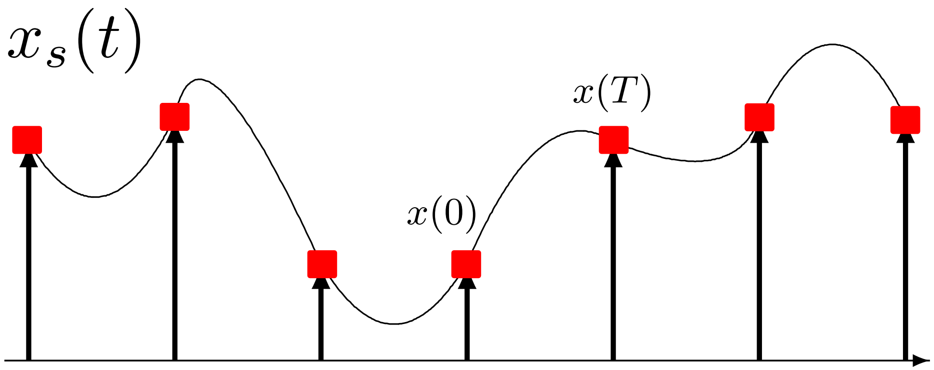
"treno di delta"

$$\tilde{\delta}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

Segnale a tempo discreto *$x_s(t)$*: sequenza di impulsi le cui ampiezze rappresentano il segnale *$x(t)$* agli istanti di campionamento

$$\boxed{x(t) \cdot \tilde{\delta}_T(t) = x_s(t)}$$

Trasformata di Fourier di una sequenza



$$x_s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t - nT)$$

"Delta" di Dirac $\delta(x) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x = f(0)$

Proprietà utile: $f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0)$

$$\mathcal{F}[f(t)\delta(t - t_0)] = f(t_0)\mathcal{F}[\delta(t - t_0)]$$

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\,\delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,\delta(t - nT)$$

Trasformata di Fourier di una sequenza

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\,\delta(t-nT)$$

$x_s(t)$ è (in generale) un segnale aperiodico → applico il formalismo noto

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{-i2\pi f t}\,\mathrm{d}t$$ (Trasformata di Fourier di un segnale aperiodico)

$$X_s(f) = \mathcal{F}\Big[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\,\delta(t-nT)\Big] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\,\mathcal{F}[\delta(t-nT)]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,e^{-i2\pi f t}\,\mathrm{d}t = e^{-i2\pi f t}|_{t=0} = 1 \qquad \mathcal{F}[\delta(t)] = 1$$

$$\mathcal{F}[x(t-t_0)] = X(f)e^{-i2\pi f t_0}$$ Teorema del ritardo

$$\mathcal{F}[\delta(t-nT)] = 1 \cdot e^{-i2\pi n f T}$$

$$y(t) = x(t-t_0) \quad \Leftrightarrow \quad Y(f) = X(f)e^{-i2\pi f t_0}$$

$$X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,e^{-i2\pi n f T}$$

Trasformata di Fourier di una sequenza

Equazione di analisi per un segnale aperiodico a tempo discreto

Trasformata di Fourier di una sequenza

$$X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-i2\pi n f T}$$ **Trasformata di Fourier di una sequenza**

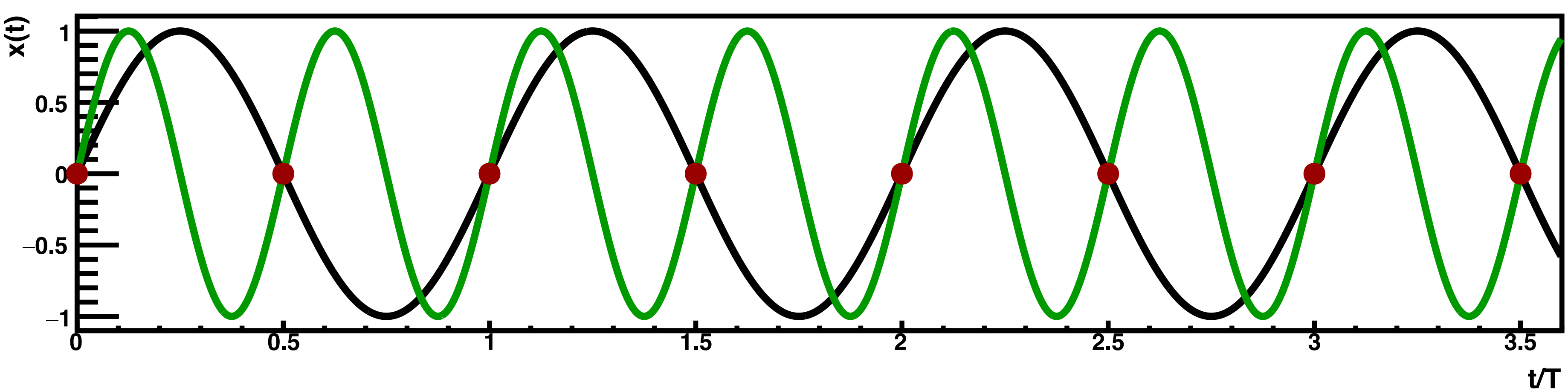
T *1/T = 1

$$X_s(f + \frac{1}{T}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-i2\pi n f T}\, e^{-i2\pi n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-i2\pi n f T} = X_s(f)$$

Proprietà: periodicità con periodo $f_C = \frac{1}{T}$

$X_s(f)$ completamente definita dal suo comportamento in $[-\frac{f_C}{2}, \frac{f_C}{2}] = [-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]$

Infatti, per segnali a tempo discreto, non si può distinguere tra due segnali sinusoidali di frequenza f_0 e $f_0 + k/T$ $\quad e^{i2\pi(f_0 + m/T)nT} = e^{i2\pi(f_0 nT)} e^{i2\pi mn} = e^{i2\pi(f_0 nT)}$



Trasformata di Fourier di una sequenza

$$X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-i2\pi nfT}$$ **Trasformata di Fourier di una sequenza**

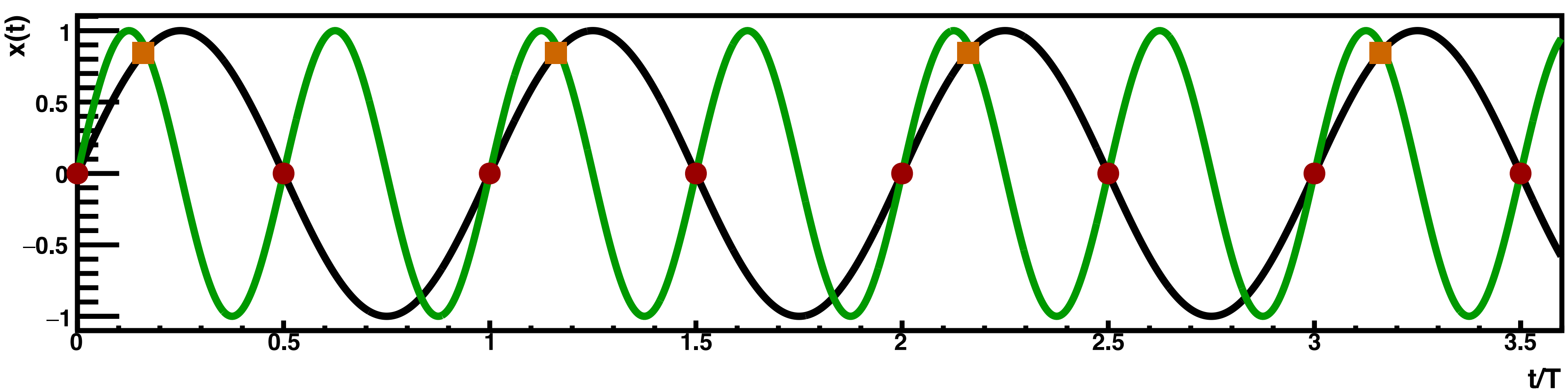
T *1/T = 1

$$X_s(f+\frac{1}{T}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-i2\pi nfT}\, e^{-i2\pi n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-i2\pi nfT} = X_s(f)$$

Proprietà: periodicità con periodo $f_C = \frac{1}{T}$

$X_s(f)$ completamente definita dal suo comportamento in $[-\frac{f_C}{2}, \frac{f_C}{2}] = [-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]$

Infatti, per segnali a tempo discreto, non si può distinguere tra due segnali sinusoidali di frequenza f_0 e f_0+k/T $\quad e^{i2\pi(f_0+m/T)nT} = e^{i2\pi(f_0 nT)} e^{i2\pi mn} = e^{i2\pi(f_0 nT)}$



Trasformata di Fourier di una sequenza

$$X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-i2\pi n f T}$$ **Trasformata di Fourier di una sequenza**

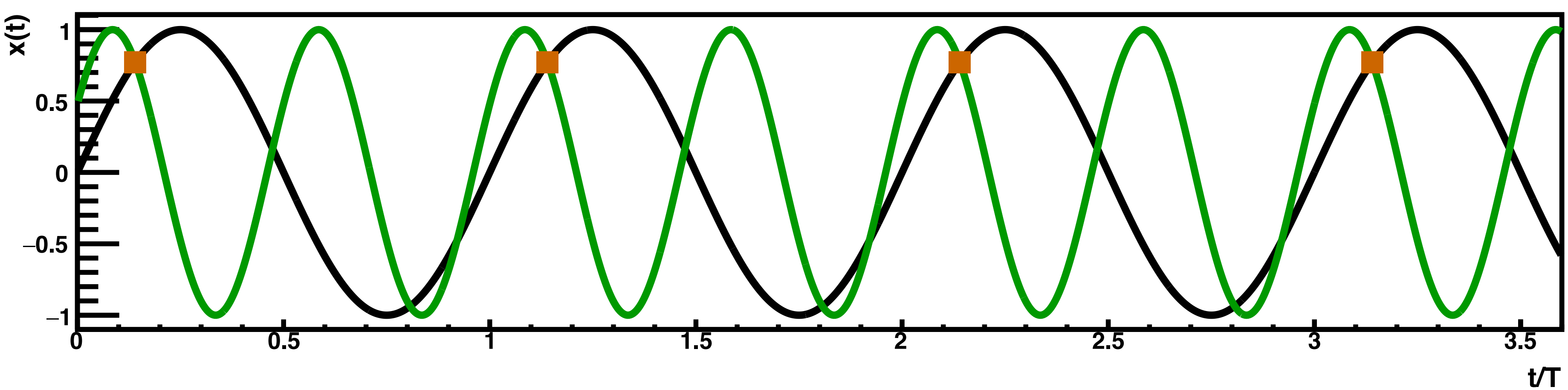
T *1/T = 1

$$X_s(f+\frac{1}{T}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-i2\pi n f T}\, e^{-i2\pi n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-i2\pi n f T} = X_s(f)$$

Proprietà: periodicità con periodo $f_C = \frac{1}{T}$

$X_s(f)$ completamente definita dal suo comportamento in $[-\frac{f_C}{2}, \frac{f_C}{2}] = [-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]$

Infatti, per segnali a tempo discreto, non si può distinguere tra due segnali sinusoidali di frequenza f_0 e f_0+k/T $$e^{i2\pi(f_0+m/T)nT} = e^{i2\pi(f_0 nT)} e^{i2\pi mn} = e^{i2\pi(f_0 nT)}$$



Trasformata di Fourier di una sequenza

Trasformata inversa: moltiplico per un fattore di fase e integro nel periodo di base

$$\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} X_s(f)\, e^{i2\pi f nT}\, \mathrm{d}f = \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)\, e^{-i2\pi f kT}\, e^{i2\pi f nT}\, \mathrm{d}f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} e^{i2\pi f(n-k)T}\, \mathrm{d}f$$

$$\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} e^{i2\pi f(n-k)T}\, \mathrm{d}f = \frac{\sin(\pi(n-k))}{\pi(n-k)T} = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \frac{1}{T} & k = n \end{cases}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} e^{i2\pi f(n-k)T}\, \mathrm{d}f = x(nT) \cdot \frac{1}{T}$$

$$x(nT) = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} X_s(f)\, e^{i2\pi f nT}\, \mathrm{d}f$$

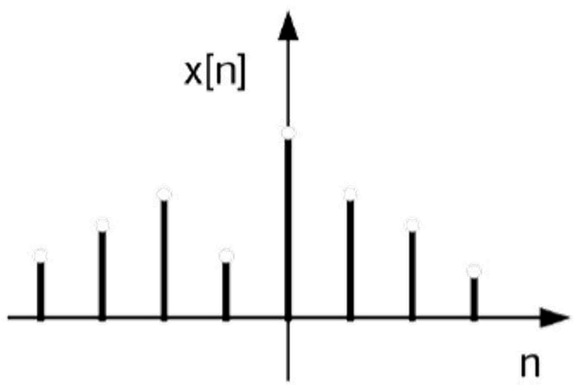
Antitrasformata di Fourier di una sequenza

Equazione di sintesi per un segnale aperiodico a tempo discreto

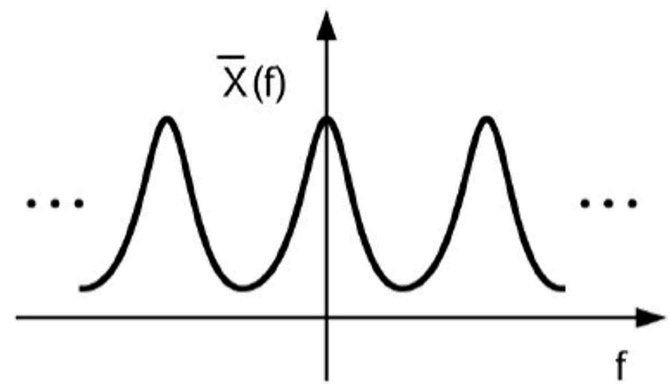
Per esprimere una sequenza campionata con frequenza *f_c=1/T* sono necessarie solamente le frequenze nell'intervallo *[0,1/T]*

Segnali aperiodici a tempo <u>discreto</u> e continuo

$$x(nT) = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} X_s(f)\, e^{i2\pi f n T}\, \mathrm{d}f \qquad X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-i2\pi n f T}$$



Segnale a tempo discreto aperiodico

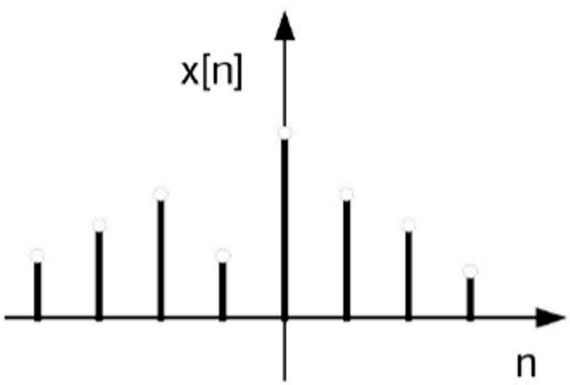


Spettro continuo periodico

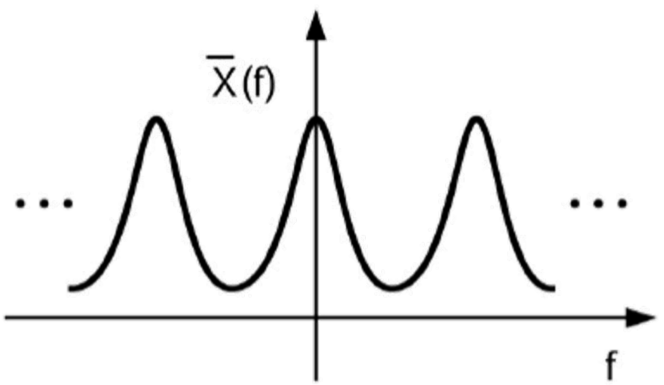
segnale aperiodico a tempo discreto → spettro in frequenza periodico

Segnali aperiodici a tempo discreto e continuo

$$x(nT) = T\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} X_s(f)\, e^{i2\pi \boxed{f}\boxed{nT}}\, \boxed{\mathrm{d}f} \qquad X_s(f) = \sum_{\boxed{n}=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-i2\pi \boxed{n}\boxed{fT}}$$



Segnale a tempo discreto aperiodico

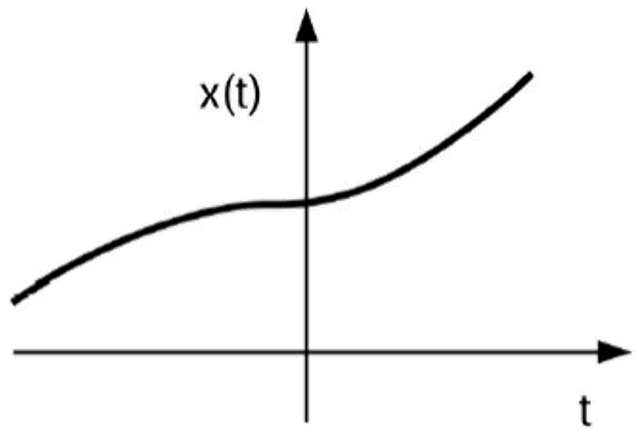


Spettro continuo periodico

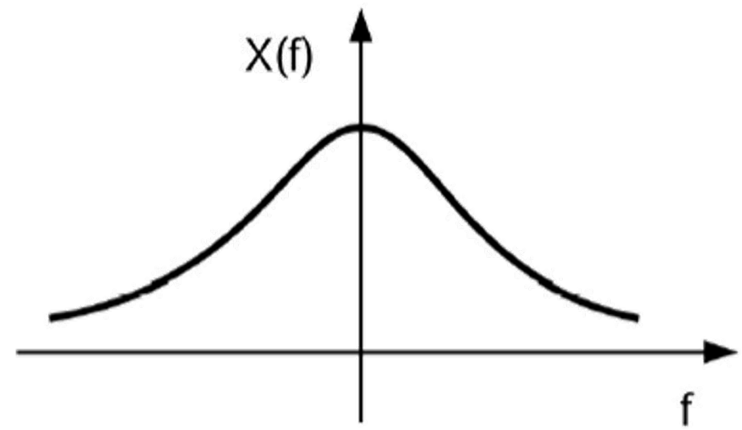
segnale aperiodico a tempo discreto → spettro in frequenza periodico

Segnali aperiodici a tempo discreto e <u>continuo</u>

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{i2\pi f t}\, \mathrm{d}f \qquad X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-i2\pi f t}\, \mathrm{d}t$$



Segnale a tempo continuo aperiodico



Spettro continuo aperiodico

Segnale aperiodico a tempo continuo → spettro in frequenza aperiodico

Trasformata discreta di Fourier (DFT)

Finora abbiamo trattato sequenze con numero infinito di termini.
I sistemi di acquisizione acquisiscono un numero limitato di campioni.

- sequenza infinita → intervallo di campionamento infinito → *df → 0*
- sequenza finita → intervallo di campionamento finito, T_0 → $\Delta f = 1/T_0$

Attenzione:
- T_0 è l'intervallo di campionamento: "*il segnale audio è stato campionato per 10.4s*"
- f_c è la frequenza di campionamento: "*il segnale audio è stato campionato a 44.1kHz*"

→ $T = 1/f_c$ è la distanza temporale fra due campioni
→ $\Delta f = 1/T^0$ è la "risoluzione" in frequenza dell'analisi di Fourier

Esercitazione – parte A

realizzare un piccolo programma python per:

- aprire un piccolo file di testo (.txt) e plottarne la waveform
- fare la FFT dell'array ottenuto dal file e plottare: potenza, fase, parte reale e parte immaginaria dei coefficienti
- ri-sintetizzare il segnale a partire da quello in frequenza
- mascherare (i.e. ponendo a zero i coefficienti associati alla componente di rumore sinusoidale) il segnale
- ri-sintetizzare il segnale a partire da quello in frequenza, filtrato
  - utilizzando la libreria FFT di python
  - utilizzando seni e coseni (*np.sin* e *np.cos*)
    - l'unità di frequenza NON è la frequenza fondamentale del segnale (i.e. f_0), ma è quella di campionamento! Quanto è f_0?
    - *x(t)* è continua ma voi potete sintetizzare e plottare vs t con t ad intervalli regolari

$$x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

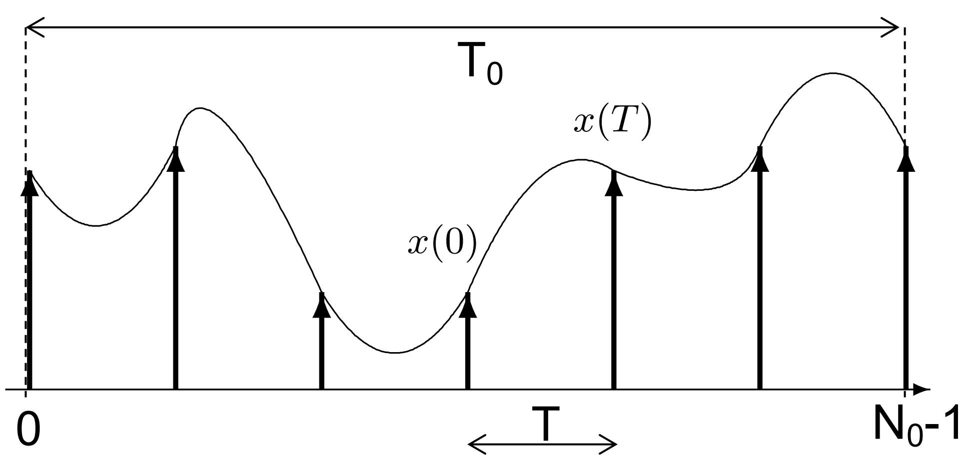
Trasformata discreta di Fourier (DFT)

Finora abbiamo trattato sequenze con numero infinito di termini.
I sistemi di acquisizione acquisiscono un numero limitato di campioni.

- sequenza infinita → <u>intervallo</u> di campionamento infinito → *df → 0*
- sequenza finita → <u>intervallo</u> di campionamento finito, T_0 → $\Delta f = 1/T_0$

Attenzione:
- T_0 è l'intervallo di campionamento: "*il segnale audio è stato campionato per 10.4s*"
- f_c è la frequenza di campionamento: "*il segnale audio è stato campionato a 44.1kHz*"

→ $T = 1/f_c$ è la distanza temporale fra due campioni
→ $\Delta f = 1/T^0$ è la "risoluzione" in frequenza dell'analisi di Fourier



$$N_0 T = T_0$$

$$\Delta f = f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{N_0 T}$$

frequenza fondamentale

$$f_{\max} = k_{\max} \Delta f = \frac{k_{\max}}{T_0} = \frac{N_0}{N_0 T} = \frac{1}{T}$$

frequenza massima

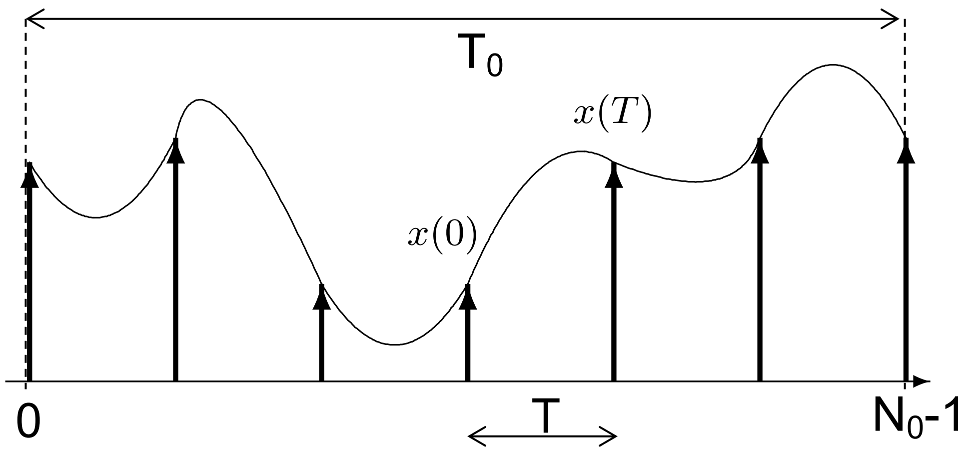
Trasformata discreta di Fourier (DFT)

Finora abbiamo trattato sequenze con numero infinito di termini.
I sistemi di acquisizione acquisiscono un numero limitato di campioni.

- sequenza infinita → intervallo di campionamento infinito → *df → 0*
- sequenza finita → intervallo di campionamento finito, T_0 → $\Delta f = 1/T_0$

Sostanzialmente:
- il nostro segnale, aperiodico, è contenuto all'interno di un "periodo", T_0

→ torniamo ad un problema con frequenza fondamentale finita
→ somma (invece che integrale) su un numero finito di frequenze



$$N_0 T = T_0$$

$$\Delta f = f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{N_0 T}$$

frequenza fondamentale

$$f_{\max} = k_{\max} \Delta f = \frac{k_{\max}}{T_0} = \frac{N_0}{N_0 T} = \frac{1}{T}$$

frequenza massima

Trasformata discreta di Fourier (DFT)

Finora abbiamo trattato sequenze con numero infinito di termini.
I sistemi di acquisizione acquisiscono un numero limitato di campioni.

- sequenza infinita → <u>intervallo</u> di campionamento infinito → *df → 0*
- sequenza finita → <u>intervallo</u> di campionamento finito, T_0 → $\Delta f = 1/T_0$

Nel caso di un segnale campionato con N_0 campioni con frequenza $f_c=1/T$, identifichiamo la sequenza periodica, con periodo N_0, $x[n] = x[n + N_0]$ con un insieme di N_0 numeri reali $[x_0, x_1, .. x_{N-1}]$

$$X_{s,k} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]\, e^{-i2\pi nk/N_0}$$

equazione di ANALISI: studio del contenuto in frequenza del segnale

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} X_{s,k}\, e^{i2\pi nk/N_0}$$

equazione di SINTESI: ricostruzione del segnale a partire dalle sue armoniche

Nel caso di sequenze periodiche la rappresentazione mediante antitrasformata discreta consiste in una somma con un numero finito di addendi

Trasformata discreta di Fourier (DFT)

$$X_{s,k} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]\, e^{-i2\pi nk/N_0}$$

equazione di ANALISI:
studio del contenuto in frequenza del segnale

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} X_{s,k}\, e^{i2\pi nk/N_0}$$

equazione di SINTESI:
ricostruzione del segnale a partire dalle sue armoniche

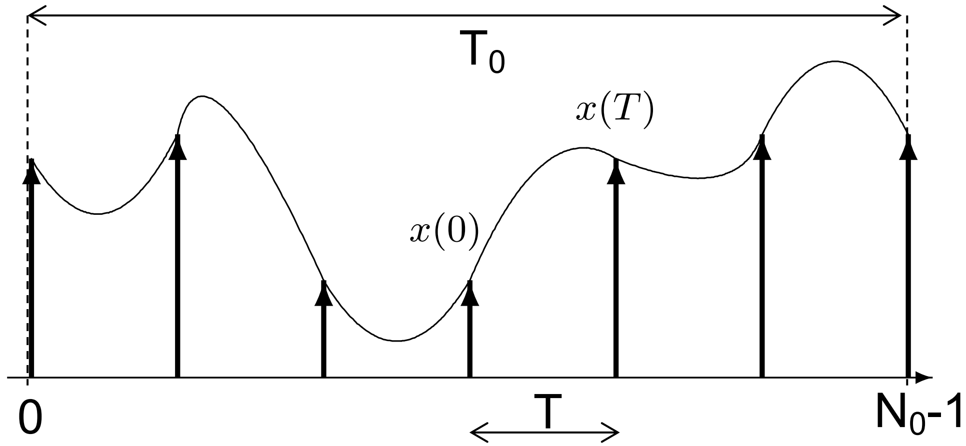
Nel caso di sequenze periodiche la rappresentazione mediante antitrasformata discreta consiste in una somma con un numero finito di addendi

Infatti la trasformata di una sequenza periodica di periodo N_0 è essa stessa periodica con il medesimo periodo:

$$X_{s,k+N_0} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]\, e^{-i2\pi n(k+N_0)/N_0} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]\, e^{-i2\pi nk/N_0}\, e^{-i2\pi n} =$$

$$= \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]\, e^{-i2\pi nk/N_0} = X_{s,k}$$

Trasformata discreta di Fourier (DFT)



$$N_0 T = T_0$$

$$\Delta f = f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{N_0 T}$$

frequenza fondamentale

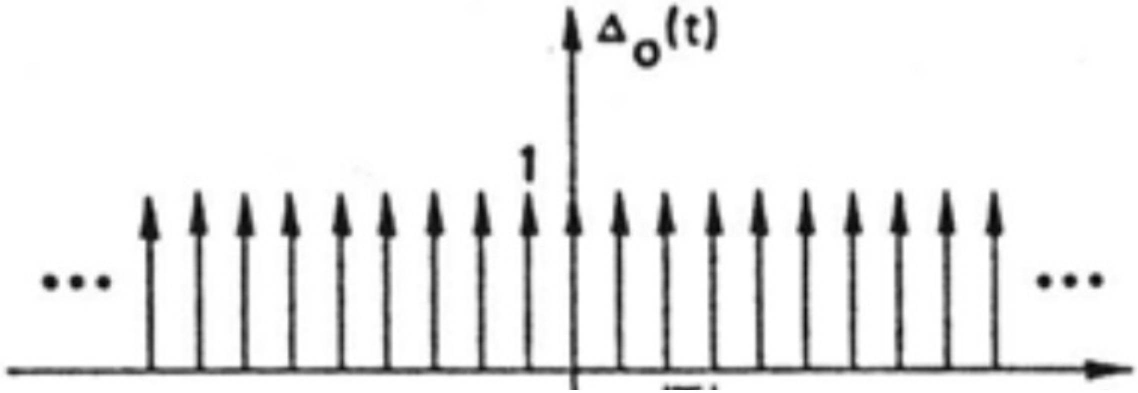
$$f_{\max} = k_{\max} \Delta f = \frac{k_{\max}}{T_0} = \frac{N_0}{N_0 T} = \frac{1}{T}$$

frequenza massima

$$x(nT) = \sum_{k=0}^{N_0 - 1} X_{s,k}\, e^{i 2\pi n k / N_0} = \sum_{k=0}^{N_0 - 1} X_{s,k}\, e^{i 2\pi \frac{k}{N_0 T} n T}$$

***x[n]* può essere espressa come somma finita di N_0 termini esponenziali complessi che oscillano con frequenze $f_k = (k / N_0 T)$, dette armoniche, multiple della frequenza fondamentale $f_0 = 1 / N_0 T$**

Dal tempo continuo al tempo discreto



$$\int_a^b \delta(t-t_0)\,x(t)\,\mathrm{d}t = x(t_0) \iff a < t_0 < b$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \xrightarrow{\text{periodico}} X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \delta(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T_0}$$

I coeff di Fourier sono tutti costanti

$$x(t) = \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{i2\pi n t f_0}$$

teorema del ritardo

Il contributo di ogni coefficiente è shiftato di una fase $2\pi n f t_0$

$$X(f) = f_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k f_0)$$

La trasformata di Fourier di un treno di impulsi (in tempo) di periodo T_0 è un treno di impulsi (in frequenza) di periodo $1/T_0$ e ampiezza $1/T_0$

Teorema del campionamento

$$x[n] = x(nT)$$ Segnale campionato

$$X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-i2\pi n f T}$$

$$x(t = nT) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu)\, e^{i2\pi\nu n T}\, \mathrm{d}\nu$$

Trasformata del segnale continuo *x*(*t*) associato al segnale campionato *x[n]*

$$X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} X(\nu)\, e^{i2\pi\nu n T}\, \mathrm{d}\nu \right] e^{-i2\pi n f T} = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi(f-\nu)nT}\, \mathrm{d}\nu$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi k t f}$$

Applico la trasformata di Fourier al “treno di delta”

Transformo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-i2\pi n f T} = f_C \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k f_C)$$

Sostituisco la serie di esponenziali complessi con la serie di delta di Dirac

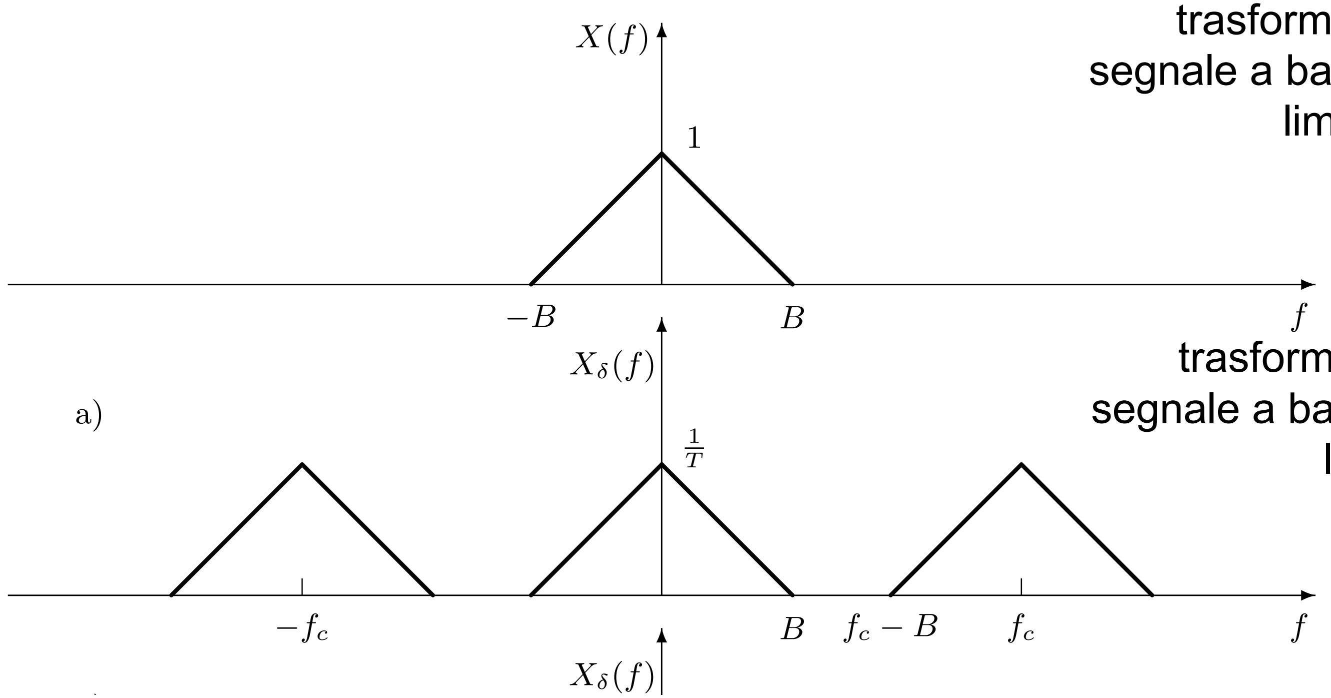
$$X_s(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - (f - k f_C))\, \mathrm{d}\nu = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - k f_C)$$

praticamente è un "treno" di trasformate (del segnale continuo *x(t)*)

Teorema del campionamento

$$X_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kf_C) \quad \text{con } f_C = \frac{1}{T}$$

La trasformata di Fourier di una sequenza *x[n]* ottenuta per campionamento del segnale continuo *x(t)* si ricava dalla periodicizzazione della trasformata di *x(t)* con periodo di ripetizione in frequenza pari alla frequenza di campionamento f_C



trasformata di Fourier di un segnale a banda rigorosamente limitata (** vedi dopo)

trasformata di Fourier di un segnale a banda rigorosamente limitata campionato

Parentesi: densità spettrale di energia e di potenza

Segnale a energia finita $E_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t < \infty$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t) \, \mathrm{d}t = \int\limits_{t=-\infty}^{\infty} x(t) \left[\int\limits_{f=-\infty}^{\infty} X^*(f) e^{-i2\pi f t} \, \mathrm{d}f \right] \mathrm{d}t$$

$$= \int\limits_{f=-\infty}^{\infty} X^*(f) \left[\int\limits_{t=-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} \, \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}f = \int\limits_{f=-\infty}^{\infty} X^*(t) X(f) \, \mathrm{d}f = \int\limits_{f=-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 \, \mathrm{d}f$$

Teorema di Parseval

$$E_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 \, \mathrm{d}f$$

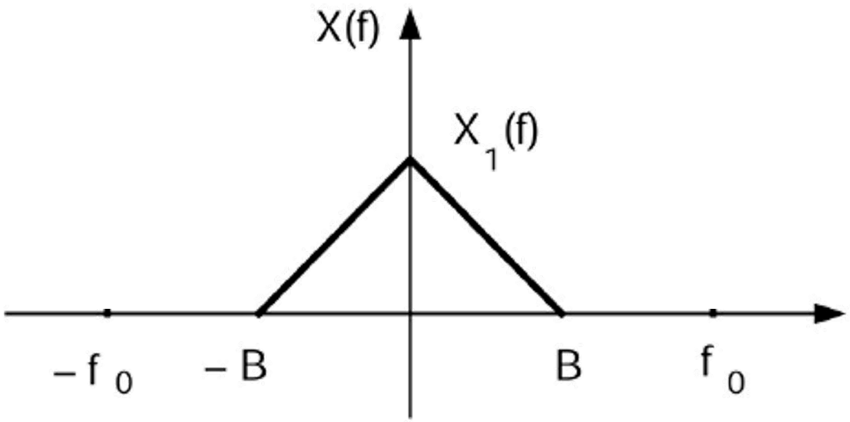
$|X(f)|^2$ **Densità spettrale di energia**: indica quali frequenze contribuiscono a definire l'energia totale del segnale (si misura in $[u]^2/\mathrm{Hz}$)

Lo spettro in ampiezza determina l'energia di un segnale x(t), lo spettro in fase è ininfluente

Se vogliamo che l'energia si conservi durante un filtraggio, è necessario conservare le frequenze che contribuiscono maggiormente all'energia

Parentesi: banda e durata di un segnale

L'analogo del concetto di durata temporale nel dominio del tempo è il concetto di banda



Si definiscono:

- Segnali a banda rigorosamente limitata (solo i seni…)
- Segnali a banda illimitata
- Segnali a banda praticamente limitata

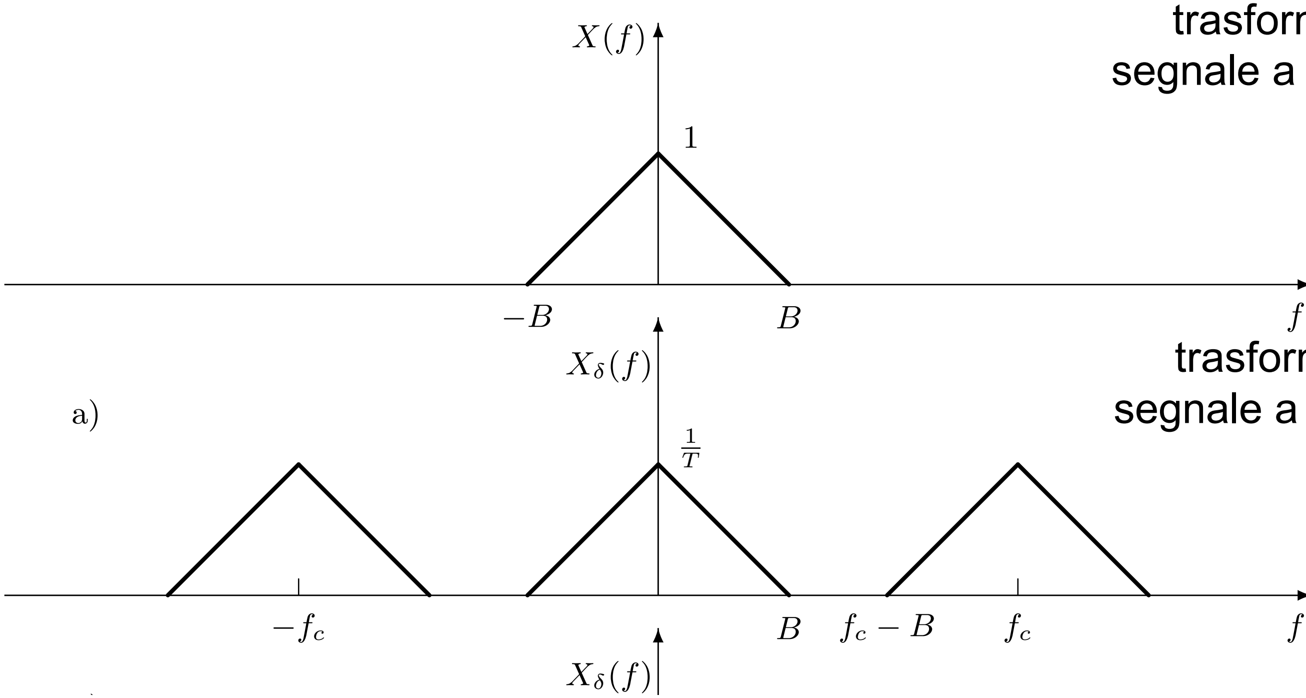
$$\int_{-B_L}^{B_U} |X(f)|^2 \mathrm{d}f = \alpha E_x$$

con 0<α<1 (es. 0.9: "banda al 90% dell'energia")

Teorema del campionamento

$$X_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - k f_C) \quad \text{con } f_C = \frac{1}{T}$$

La trasformata di Fourier di una sequenza *x[n]* ottenuta per campionamento del segnale continuo *x(t)* si ricava dalla periodicizzazione della trasformata di *x(t)* con periodo di ripetizione in frequenza pari alla frequenza di campionamento f_C



trasformata di Fourier di un segnale a banda *praticamente* limitata

trasformata di Fourier di un segnale a banda *praticamente* limitata campionato

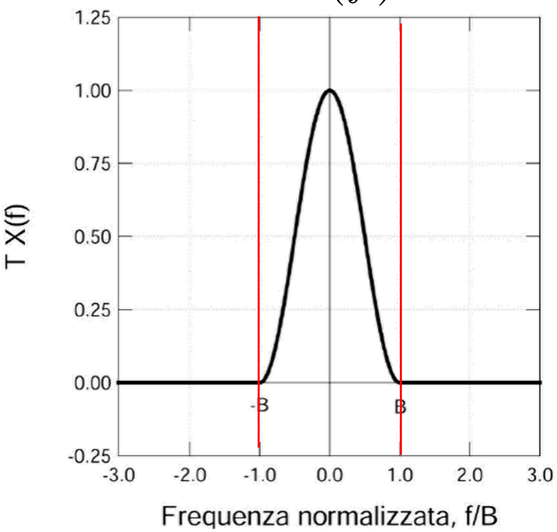
Teorema del campionamento

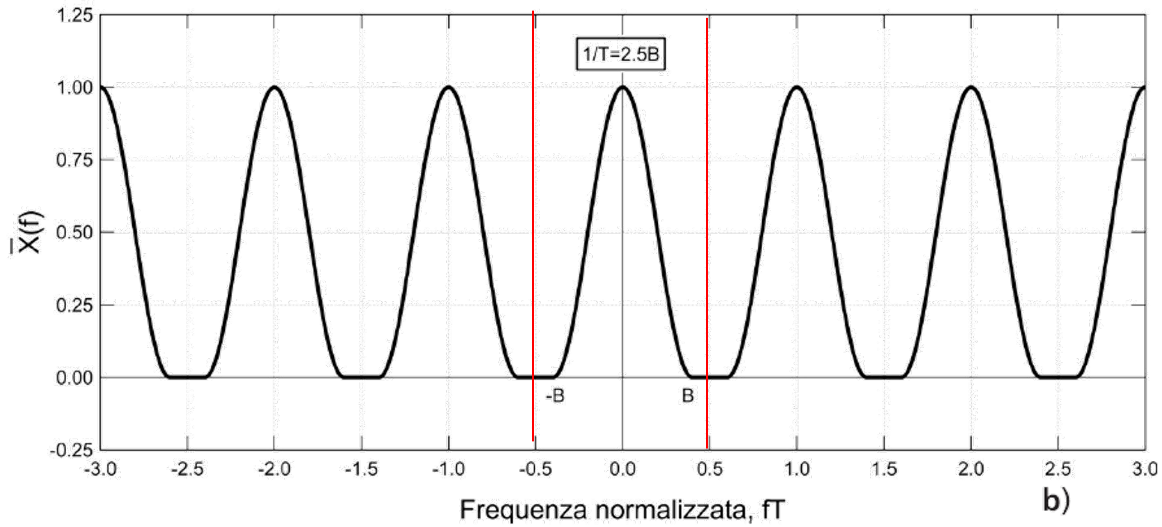
$$X_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - k f_C) \quad \text{con } f_C = \frac{1}{T}$$

La trasformata di Fourier di una sequenza *x[n]* ottenuta per campionamento del segnale continuo *x(t)* si ricava dalla periodicizzazione della trasformata di *x(t)* con periodo di ripetizione in frequenza pari alla frequenza di campionamento f_C

Campionamento

$X(f)$ $\longrightarrow$ $X_s(f), \quad f_C = 2.5\,B$





“Banda”: intervallo di frequenze in cui lo spettro è non nullo

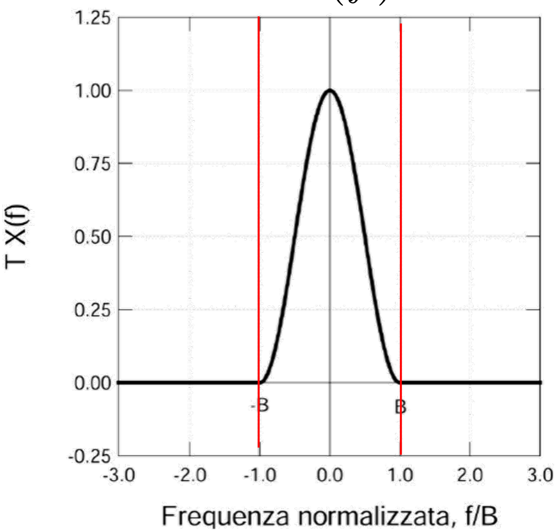
Per frequenze di campionamento “alte”, il periodo frequenziale base contiene una copia non distorta della trasformata del segnale originario

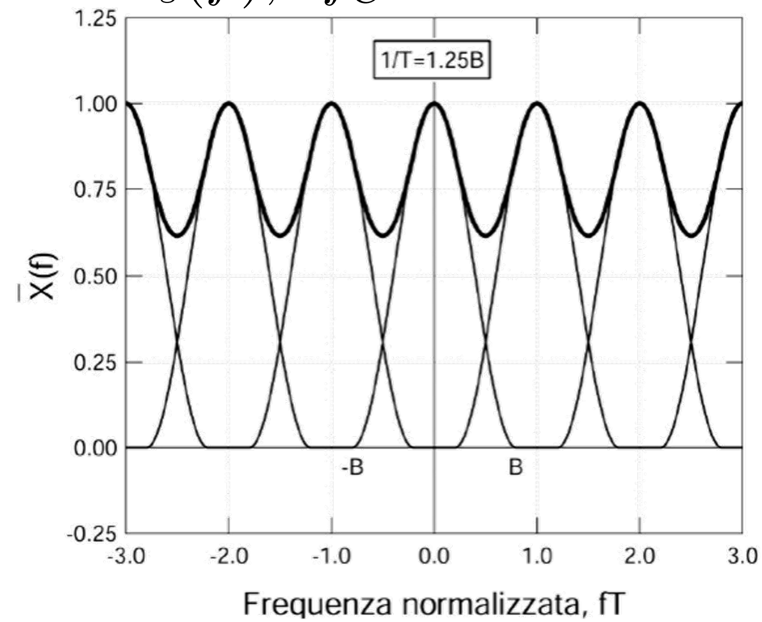
Teorema del campionamento

$$X_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kf_C) \quad \text{con } f_C = \frac{1}{T}$$

La trasformata di Fourier di una sequenza *x[n]* ottenuta per campionamento del segnale continuo *x(t)* si ricava dalla periodicizzazione della trasformata di *x(t)* con periodo di ripetizione in frequenza pari alla frequenza di campionamento f_C

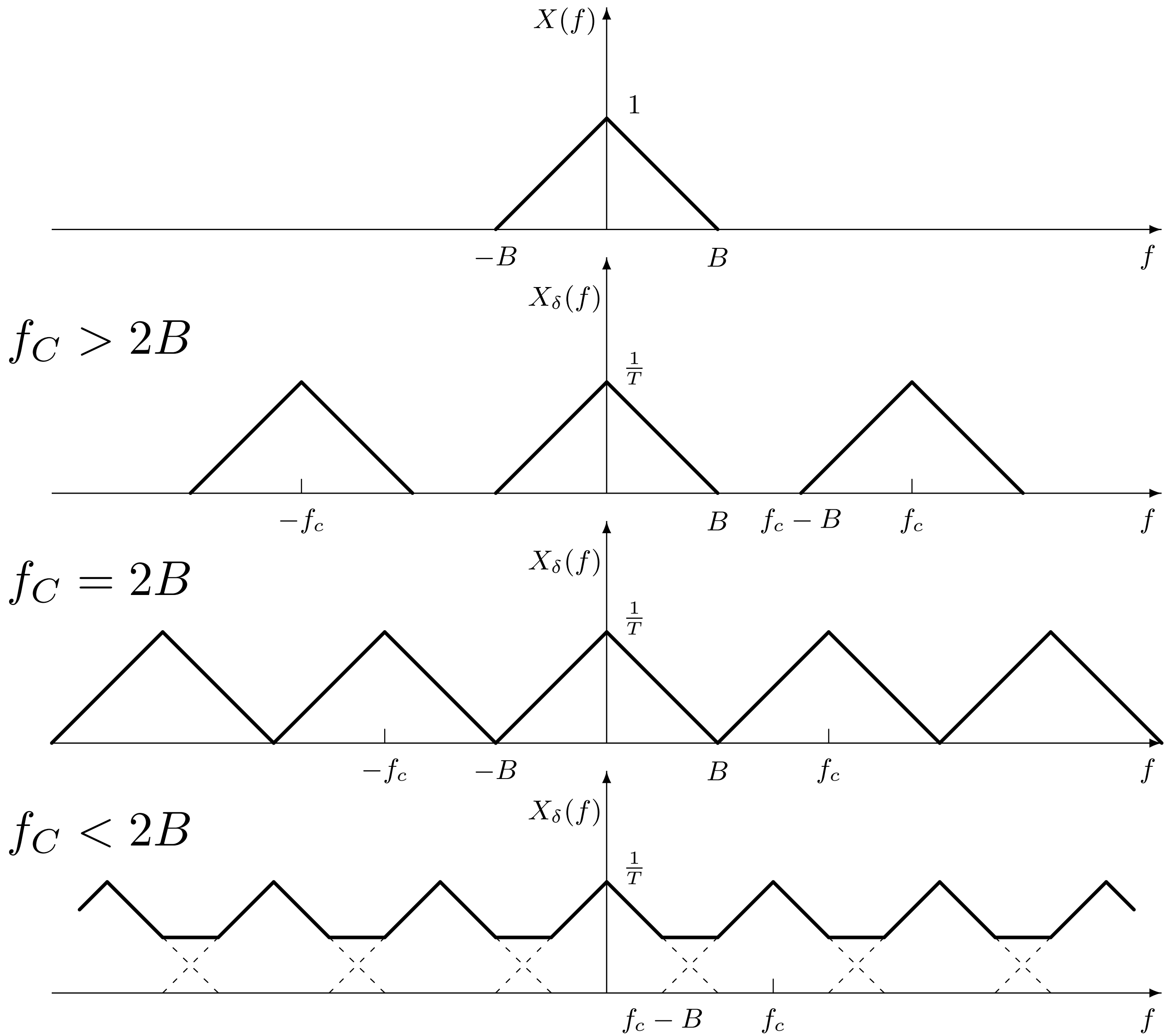
$X(f)$ $\xrightarrow{\text{Campionamento}}$ $X_s(f), \quad f_C = 1.25\,B$





Per frequenze di campionamento “basse”, il periodo frequenziale base contiene una copia DISTORTA della trasformata del segnale originario

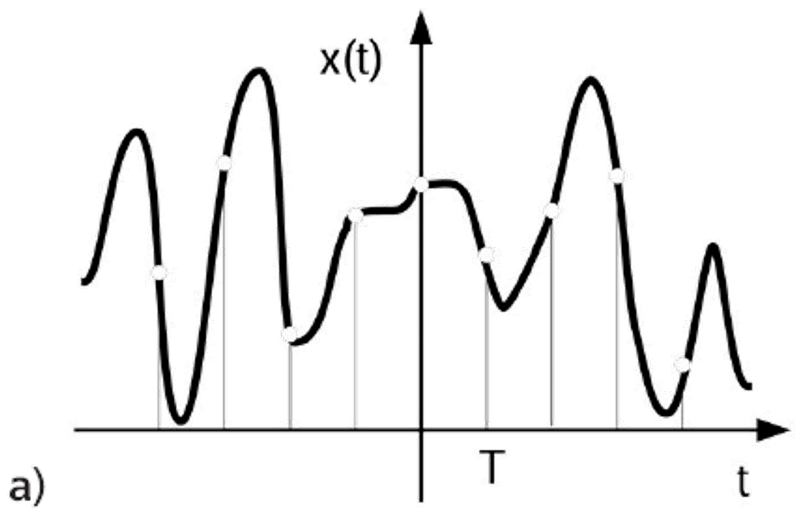
Teorema del campionamento



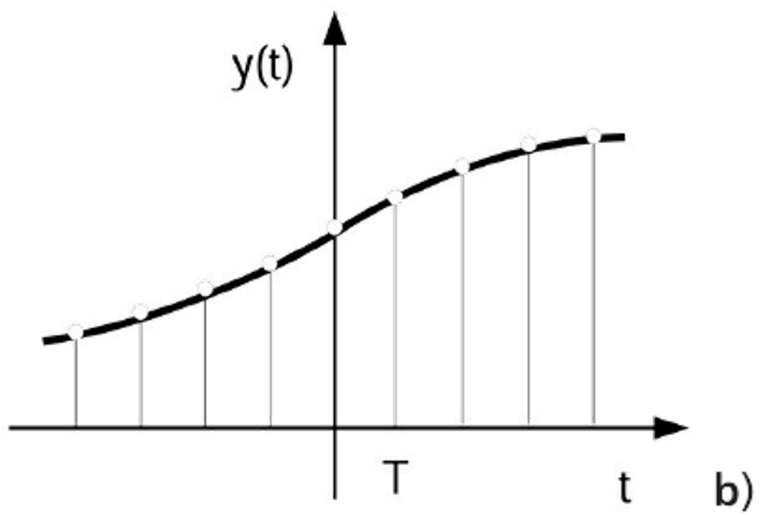
Teorema del campionamento

Teorema di Nyquist-Shannon: dato un segnale *x(t)* a banda limitata, la minima frequenza necessaria per campionare il segnale *x(t)* evitando aliasing e quindi ricostruire il segnale originale senza perdita di informazione è data dal doppio della banda del segnale.

$$f_C = \frac{1}{T} \geq 2B$$

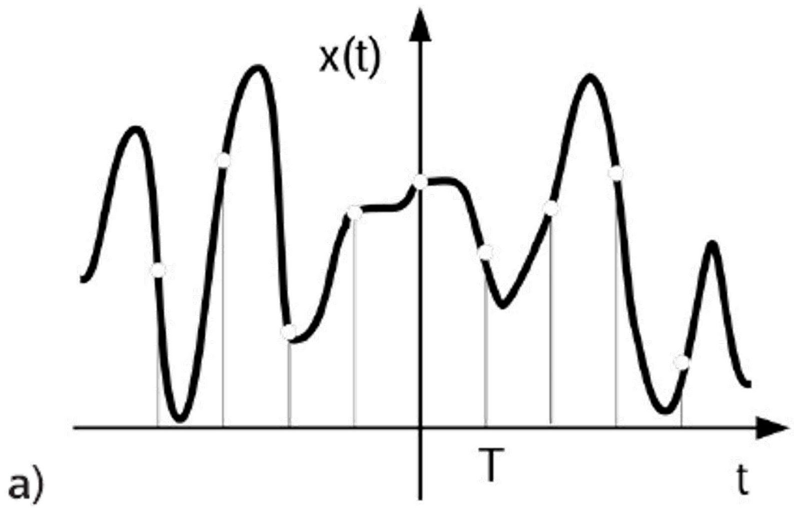


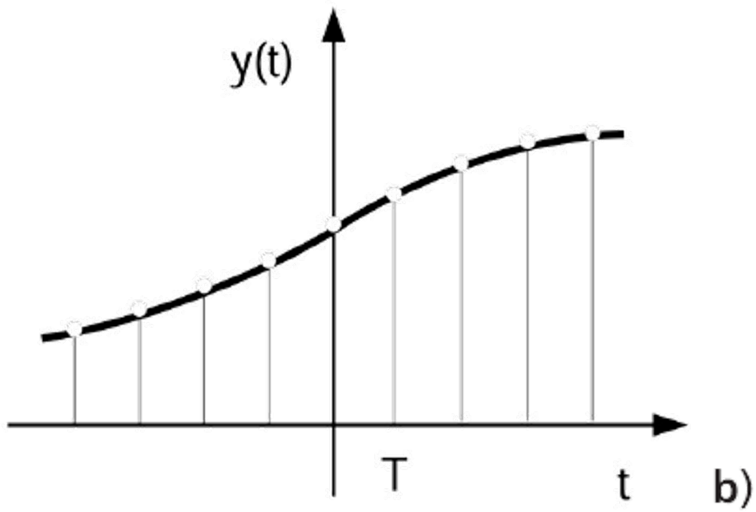
Alta rapidità di variazione → larga banda.
Segnale sottocampionato



Segnale campionato correttamente

Teorema del campionamento





Alta rapidità di variazione → larga banda.
Segnale sottocampionato

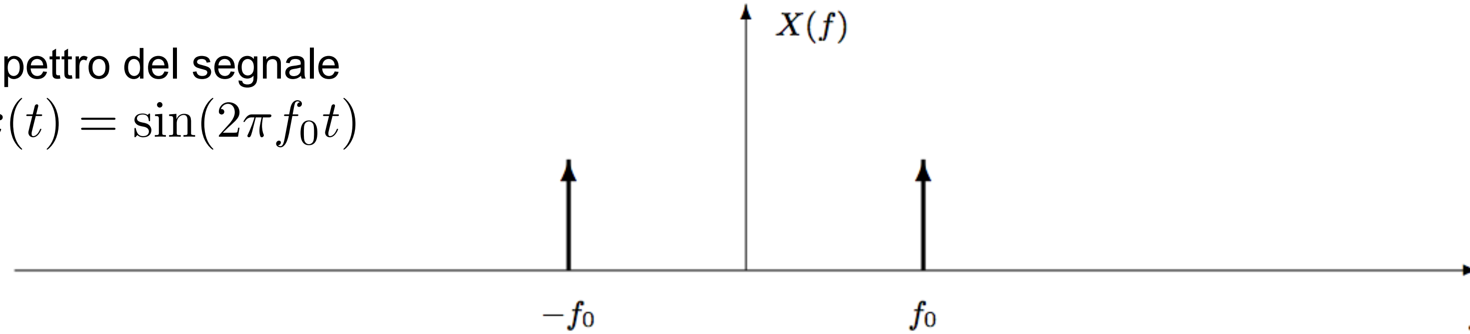
Segnale campionato correttamente

Il periodo di campionamento deve essere scelto in funzione della banda del segnale analogico *x(t)*

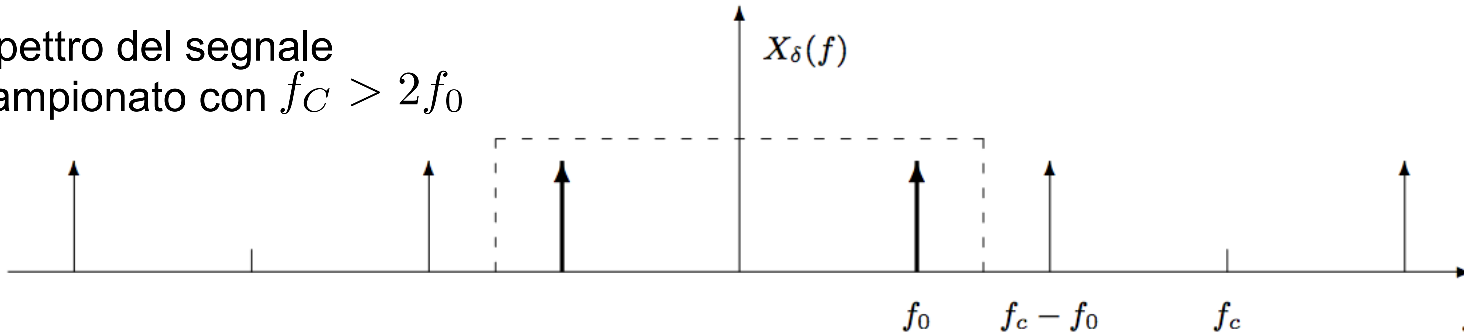
Teorema del campionamento

Esempio: campionamento di un segnale sinusoidale

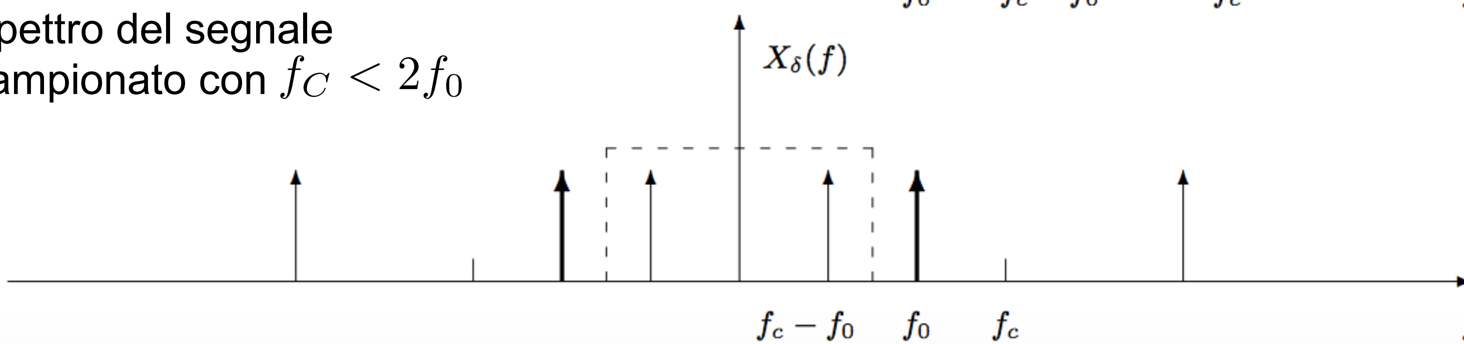
Spettro del segnale
$x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$



Spettro del segnale
campionato con $f_C > 2f_0$

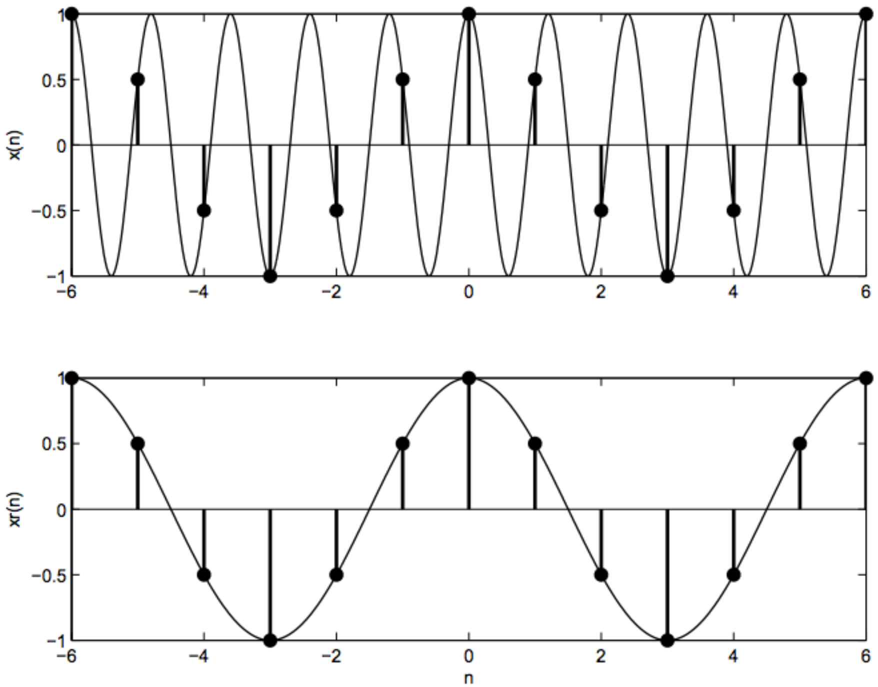


Spettro del segnale
campionato con $f_C < 2f_0$



Teorema del campionamento

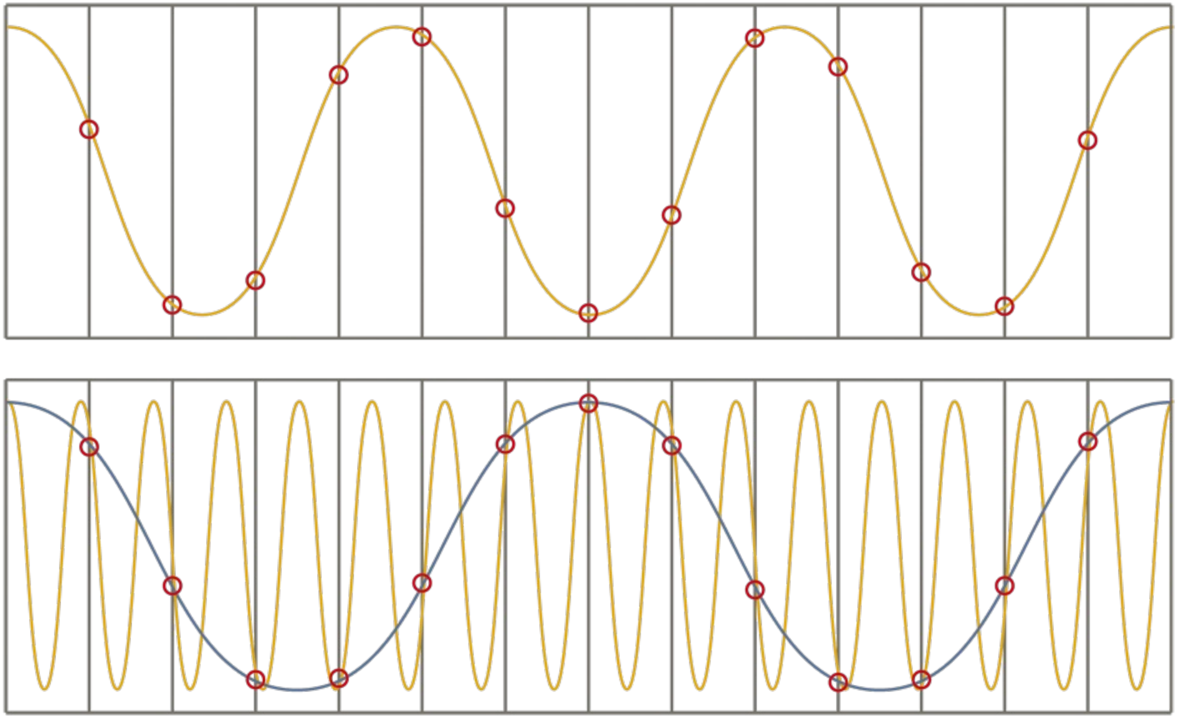
Esempio: campionamento di un segnale sinusoidale



Segnale originale (in alto) e segnale ricostruito (in basso) nell'ipotesi in cui $f_0 = \frac{5}{6} f_c$.

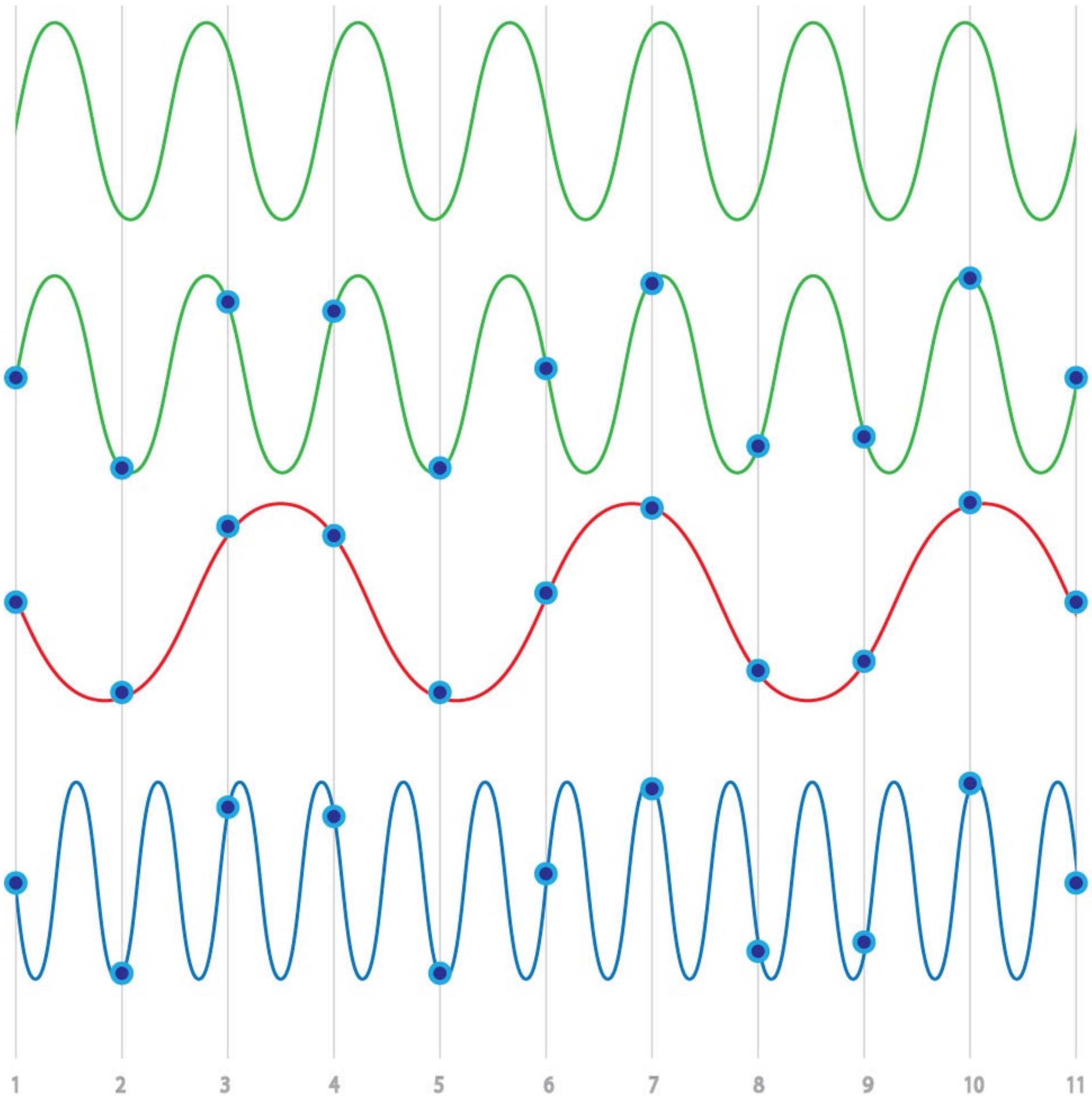
Nel caso di sottocampionamento di un segnale sinusoidale, viene ricostruita ancora una sinusoide, ma a frequenza diversa da quella originale e senza evidente effetto di distorsione nel segnale: ALIASING

Aliasing



Wagon wheel effect:
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/ef/The_wagon-wheel_effect.ogv

Aliasing



Segnale
f_0 = 7 kHz

Campionamento
f_C = 10 kHz < 14 kHz

Segnale ricostruito
f_1 = 3 kHz

Segnale ricostruito
f_2 = 13 kHz