

# **Laboratorio di Elettronica e Tecniche di Acquisizione Dati 2024-2025**

## **Analisi segnali**

**(cfr. [http://wpage.unina.it/verdoliv/tds/appunti/Appunti\\_03.pdf](http://wpage.unina.it/verdoliv/tds/appunti/Appunti_03.pdf)**

**Luise, Vitetta, D'Amico Teoria dei segnali analogici)**

# Segnali e Sistemi di Acquisizione

Segnale	Rumore	Sistema DAQ
Suono di un strumento	Brusio del pubblico	Sala di incisione
Trasmissione radiofonica	Segnale del cellulare	Registratore
Movimenti di un vigile	Persone a passeggio	Occhio e cervello guidatore
Voce del professore	Chiacchiere degli studenti	Occhio e cervello degli studenti

**SEGNALE:** Grandezza fisica variabile nel tempo a cui è associata una informazione

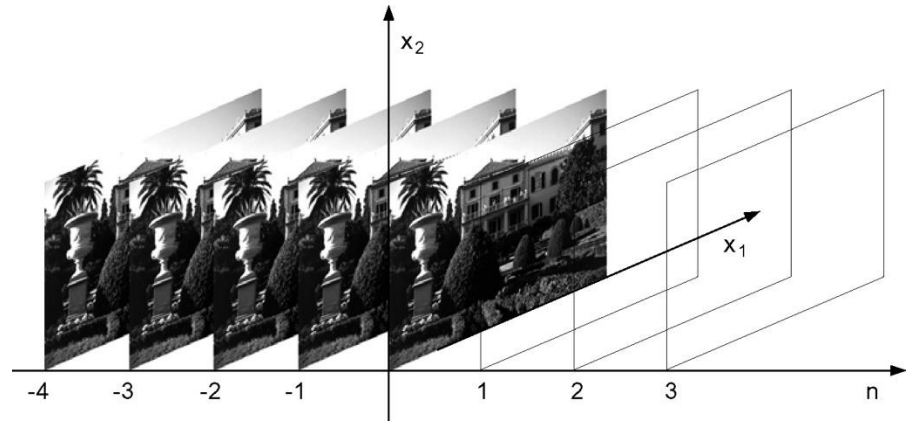
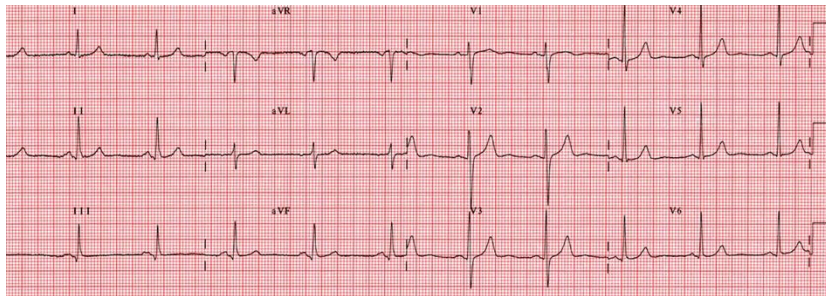
**RUMORE:** Variazione di una grandezza fisica non associata a una informazione

**SISTEMA DAQ:** Sistema per rivelare/acquisire e memorizzare la variazione di una grandezza fisica

# Classificazione dei segnali

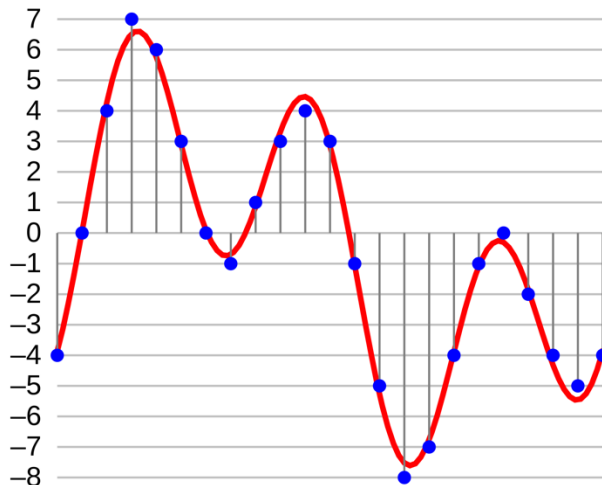
Segnali a:

- **tempo continuo:**  $x(t)$ ,  $t$  reale
- **tempo discreto:**  $x[t]$ ,  $t$  intero



Segnali a:

- **ampiezza continua**
- **ampiezza discreta**



	T continuo	T discreto
A continua	Analogico	Campionato
A discreta		Digitale

# Classificazione dei segnali

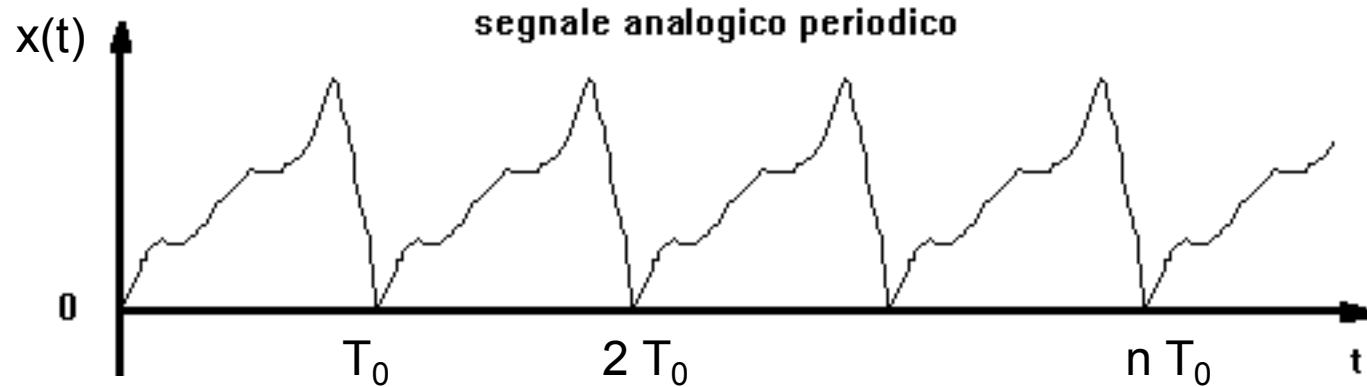
## Segnali periodici:

$$x(t) = x(t + T_0)$$

$T_0$  periodo

$$f_0 = 1/T_0$$

frequenza portante

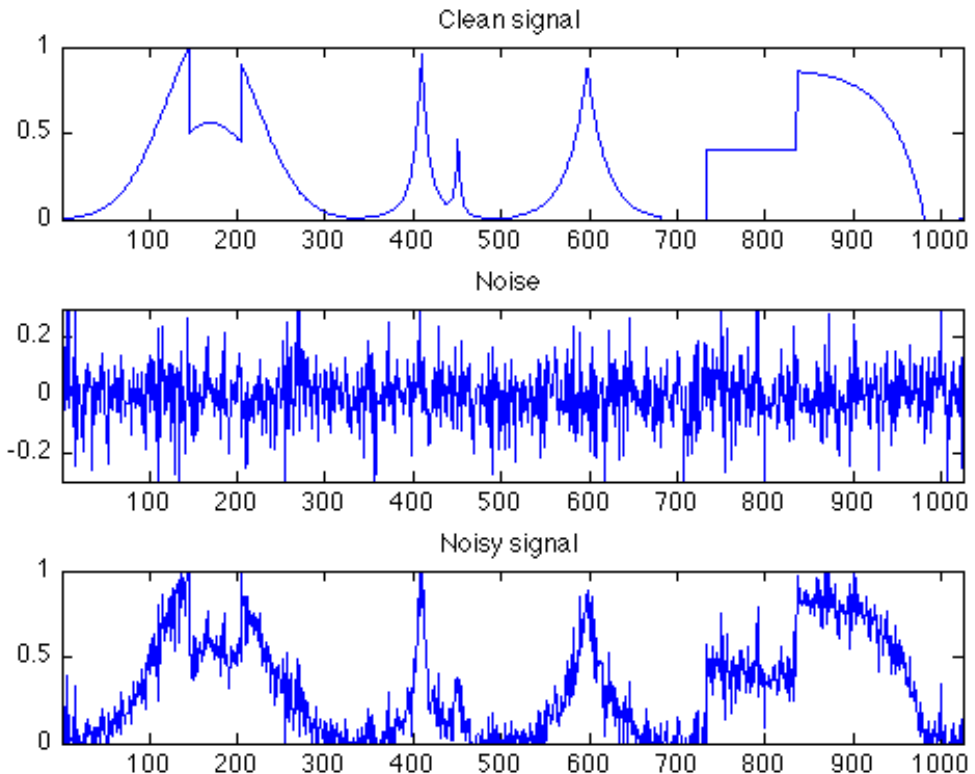


## Segnali deterministici:

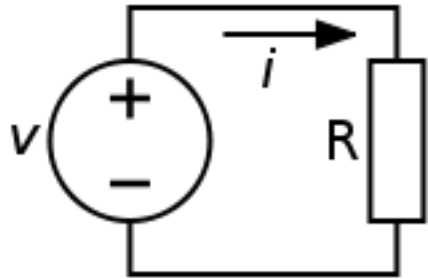
- univocamente determinabile se noti i valori delle variabili indipendenti (tempo):

## Segnali aleatori:

- “imprevedibili” conoscibili solamente a posteriori, misurandoli. A priori sono note solo proprietà generali del sistema;



# Potenza di un segnale



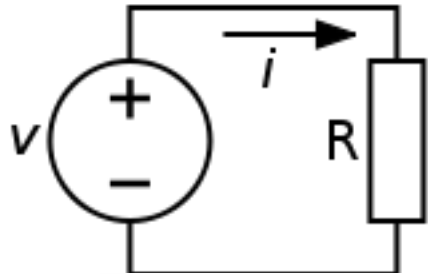
Potenza elettrica:  $p(t) = R i^2(t)$

Energia elettrica:  $E = \int_{-\infty}^{+\infty} R i^2(t) dt$

Al segnale “corrente”  $i(t)$  è associata una potenza  $\propto i^2(t)$

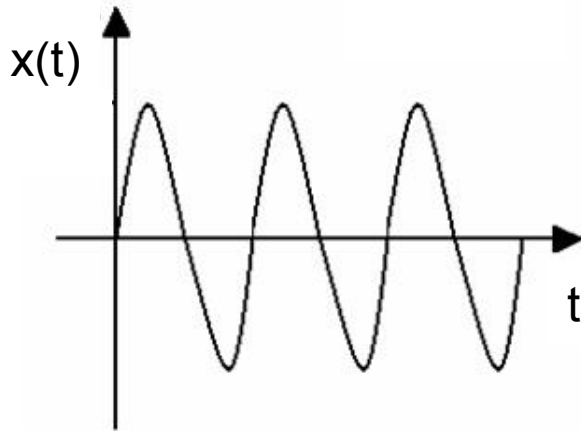
Estendiamo il concetto di potenza ed energia a un segnale generico

# Potenza di un segnale



Potenza elettrica:  $p(t) = R i^2(t)$

Energia elettrica:  $E = \int_{-\infty}^{+\infty} R i^2(t) dt$



**Potenza istantanea:**  $p_x(t) = x^*(t) x(t) = |x(t)|^2$

**Energia del segnale:**  $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$

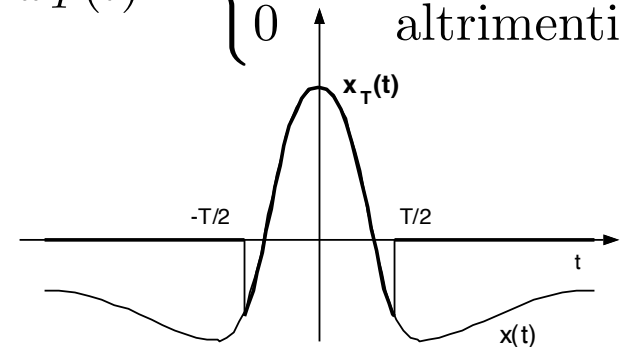
(La normalizzazione si ricava dal contesto fisico)

**Tutti i segnali fisici portano energia finita.**

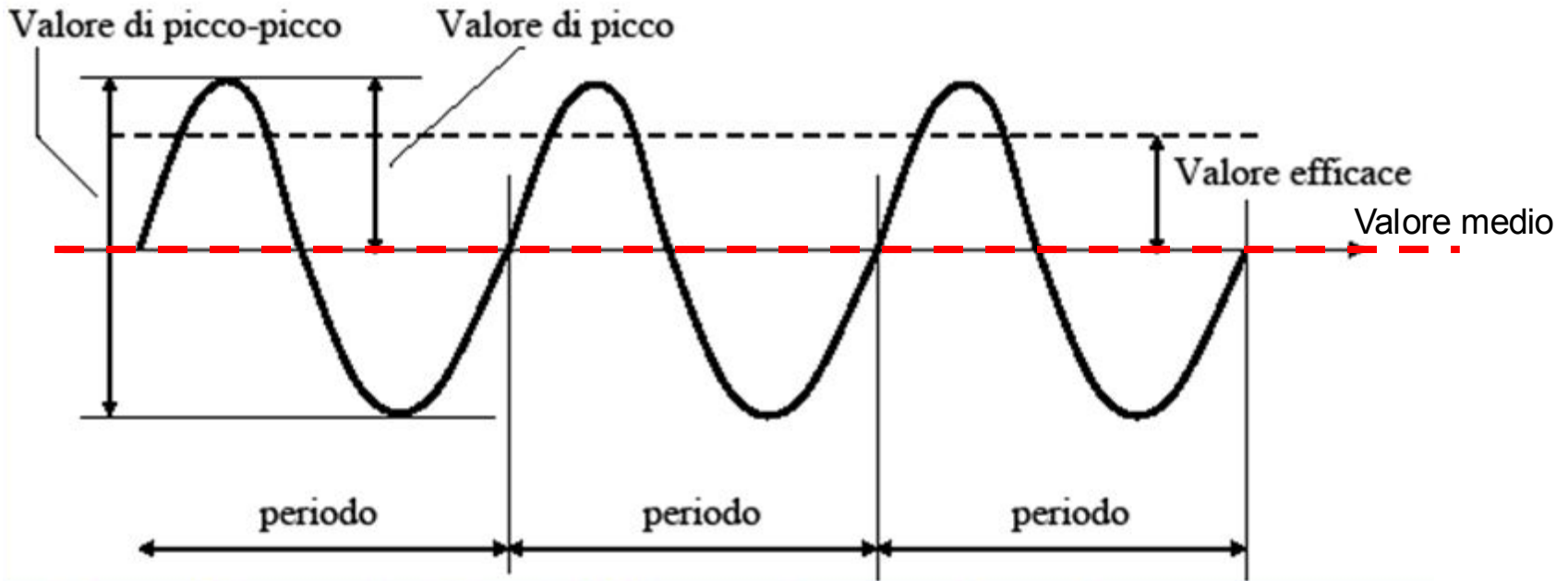
Definizione generale di potenza (per segnali “troncati”)

$$p_x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_x}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt$$

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



# Valori notevoli di un segnale



**Valore medio:**  $\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) dt$  (componente “continua”)

**Valore efficace:**  $x_{eff} = \sqrt{(P_x)}$  (“RMS” – Root mean square)

Valore efficace = Valore medio che dovrebbe assumere un segnale costante per avere la stessa potenza del segnale dato

$$x = A \sin(t) \rightarrow \bar{x} = 0; \quad x_{eff} = A/\sqrt{2}$$

# Segnali Periodici

$$x(t) = x(t + T_0); \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

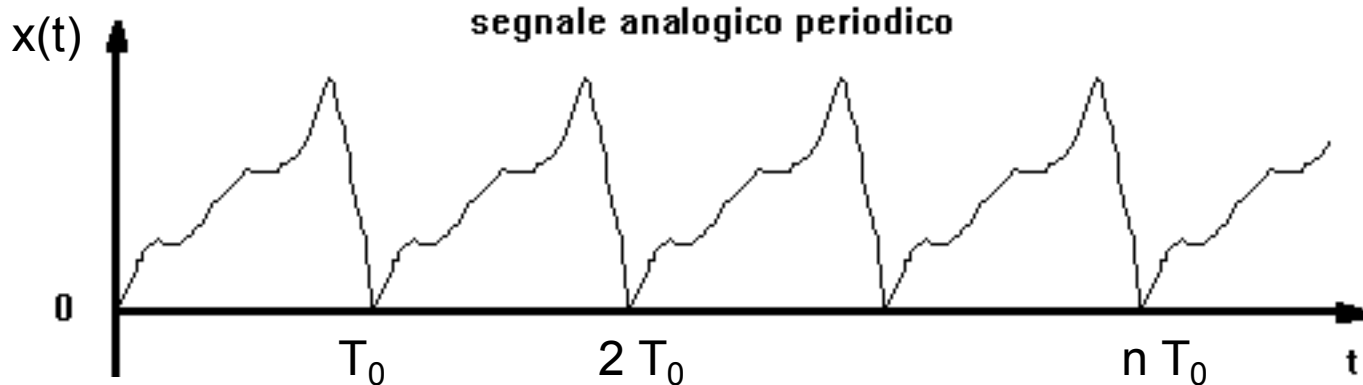
**Segnali periodici:**

$$x(t) = x(t + T_0)$$

$T_0$  periodo

$$f_0 = 1/T_0$$

frequenza portante



$$\bar{x} = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) dt \quad P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt$$

(NB: segnali periodici generici e non fisici possono avere energia infinita ma potenza finita)

**SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER: ogni segnale reale e periodico può essere espresso come sommatoria di oscillazioni sinusoidali di ampiezza, fase e frequenza determinate**

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + a_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) + \dots$$

$$\omega_k = 2\pi k f_0 \quad \text{Frequenze: multipli interi della frequenza portante o fondamentale}$$

# Sviluppo in Serie di Fourier per Segnali Periodici

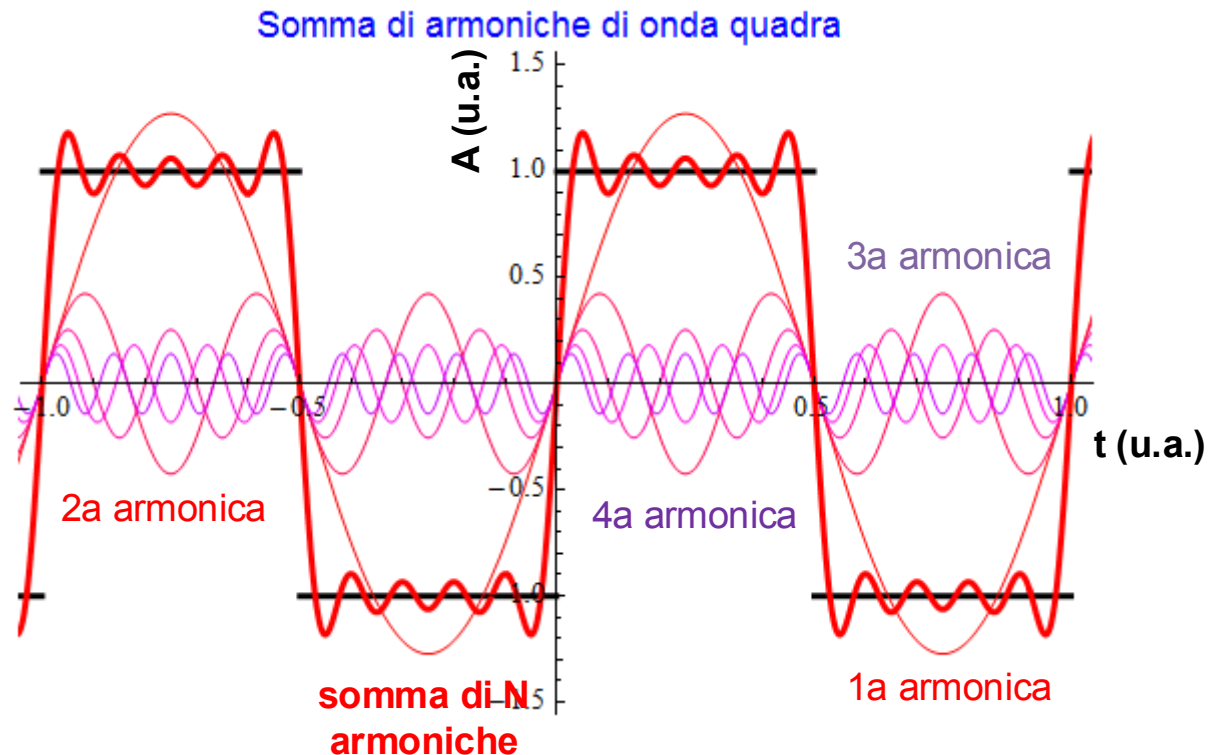
$$x(t) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

termine “continuo”

k-esima oscillazione armonica (o “armonica”)

$$x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(t)$$

$S_N(t)$  “Serie” di Fourier  
troncata all’ N-esima  
armonica

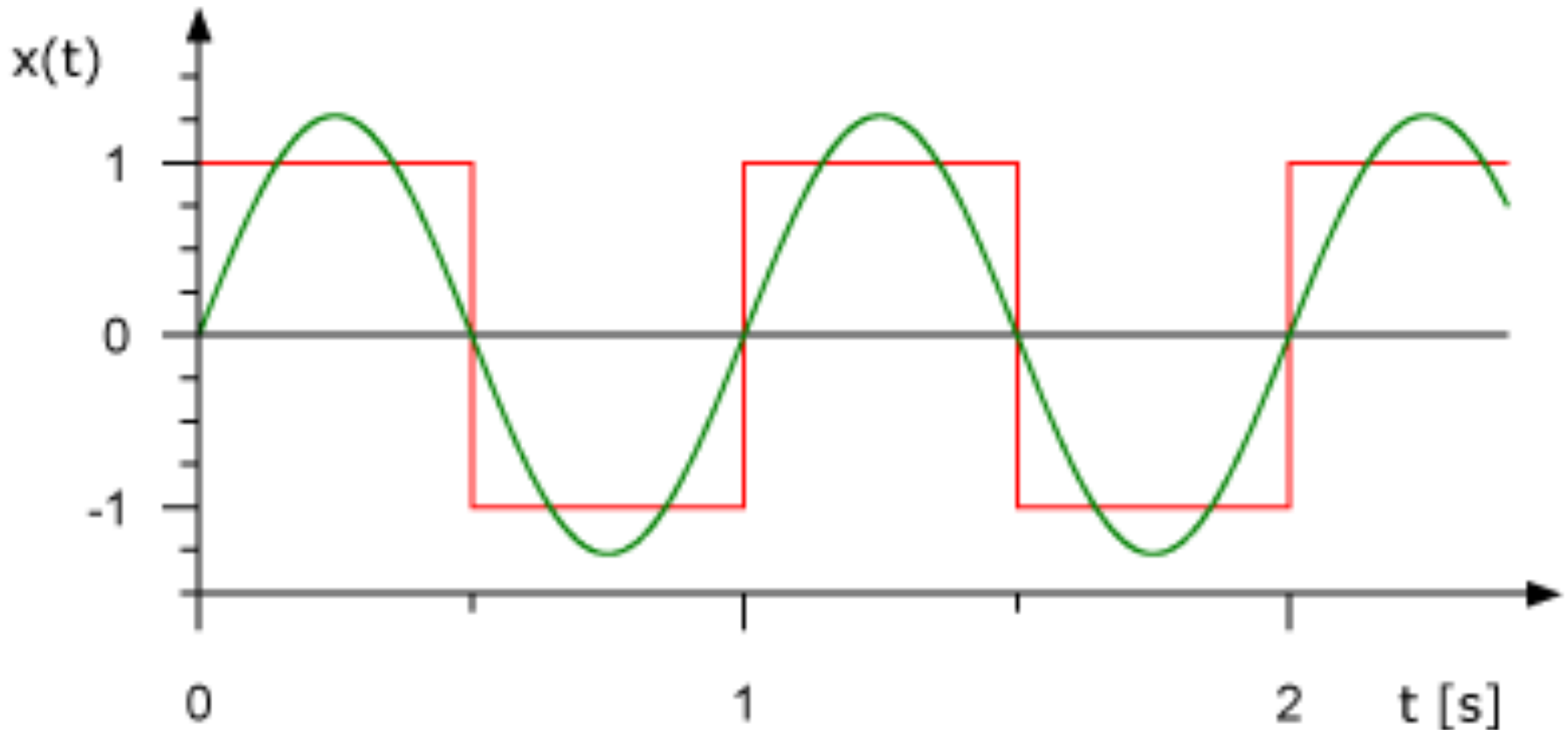


# Sviluppo in Serie di Fourier per Segnali Periodici

$$x(t) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

termine “continuo”

k-esima oscillazione armonica (o “armonica”)



# Sviluppo in Serie di Fourier per Segnali Periodici

$$x(t) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) \quad \text{Forma "polare" della serie di Fourier}$$

$$\zeta_k \equiv 2\pi k f_0 t \quad x(t) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\zeta_k + \phi_k)$$

$$x(t) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\zeta_k + \phi_k) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{e^{i(\zeta_k + \phi_k)} + e^{-i(\zeta_k + \phi_k)}}{2}$$

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i\zeta_k} e^{i\phi_k} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-i\zeta_k} e^{-i\phi_k}$$

$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

$$= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i\zeta_k} e^{i\phi_k} + \sum_{k=-\infty}^{-1} A_{-k} e^{+i\zeta_k} e^{-i\phi_{-k}}$$

$k \rightarrow -k$   
 $\zeta_k \rightarrow -\zeta_{-k}$   
 $\zeta_k \equiv 2\pi k f_0 t$

$$X_k = A_k e^{i\phi_k} \quad k = 1, 2, \dots, +\infty$$

$$X_k = A_{-k} e^{-i\phi_{-k}} \quad k = -\infty, \dots, -2, -1$$

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{i\zeta_k} + \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k e^{i\zeta_k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{i2\pi k f_0 t}$$

Forma "complessa" della serie di Fourier

## Sviluppo in Serie di Fourier per Segnali Periodici (2)

$$x(t) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) \quad \text{Forma "polare" della serie di Fourier}$$

$$x(t) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k [\cos(2\pi k f_0 t) \cos \phi_k - \sin(2\pi k f_0 t) \sin \phi_k]$$

Forma "rettangolare" della serie di Fourier

→ il termine di fase,  $\phi_k$ , di fatto può essere assorbito in un termine di sviluppo con il *sin*

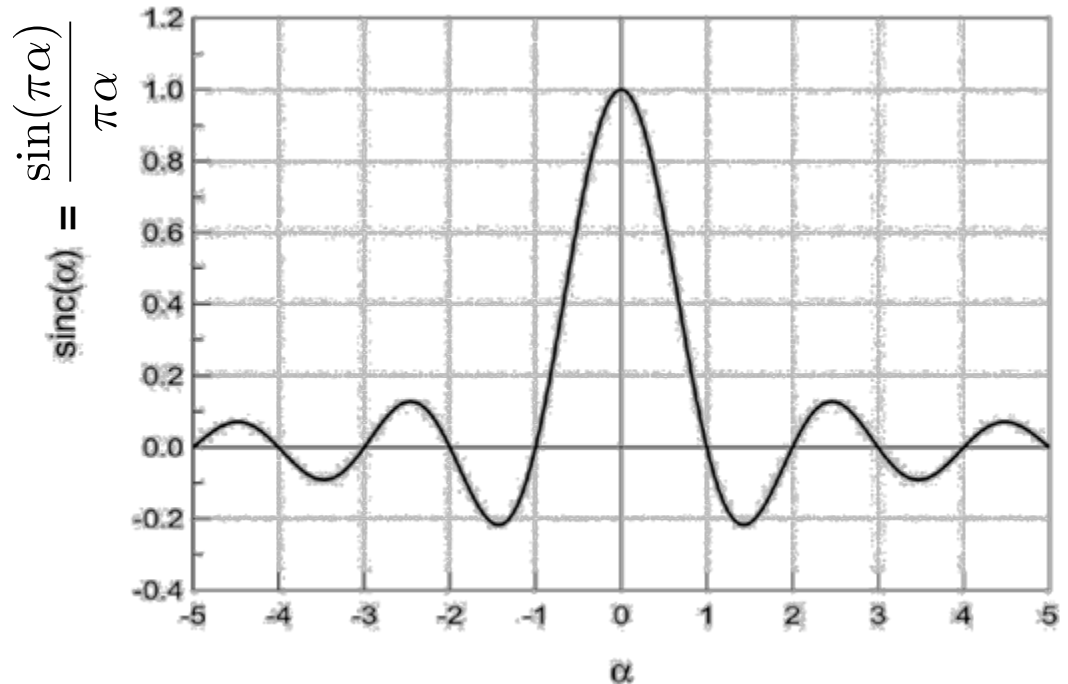
# Sviluppo in Serie di Fourier per Segnali Periodici

Determiniamo ora una espressione per il calcolo del coefficiente  $X_n$ , andando ad anti-trasformare:

$$\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt = \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{i2\pi k f_0 t} e^{-i2\pi n f_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} e^{i2\pi(k-n)f_0 t} dt$$

$$\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} e^{i2\pi(k-n)f_0 t} dt = \frac{\exp[i2\pi(k-n)f_0 t]}{i2\pi(k-n)f_0} \Big|_{-T_0/2}^{+T_0/2} = \frac{\sin[\pi(k-n)]}{\pi(k-n)f_0} \quad \begin{aligned} \sin(\alpha) &= \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \\ f_0 T_0 &= 1 \end{aligned}$$

$$\frac{\sin[\pi(k-n)]}{\pi(k-n)f_0} = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ T_0 & k = n \end{cases}$$



sinc = cardinal sine

# Sviluppo in Serie di Fourier per Segnali Periodici

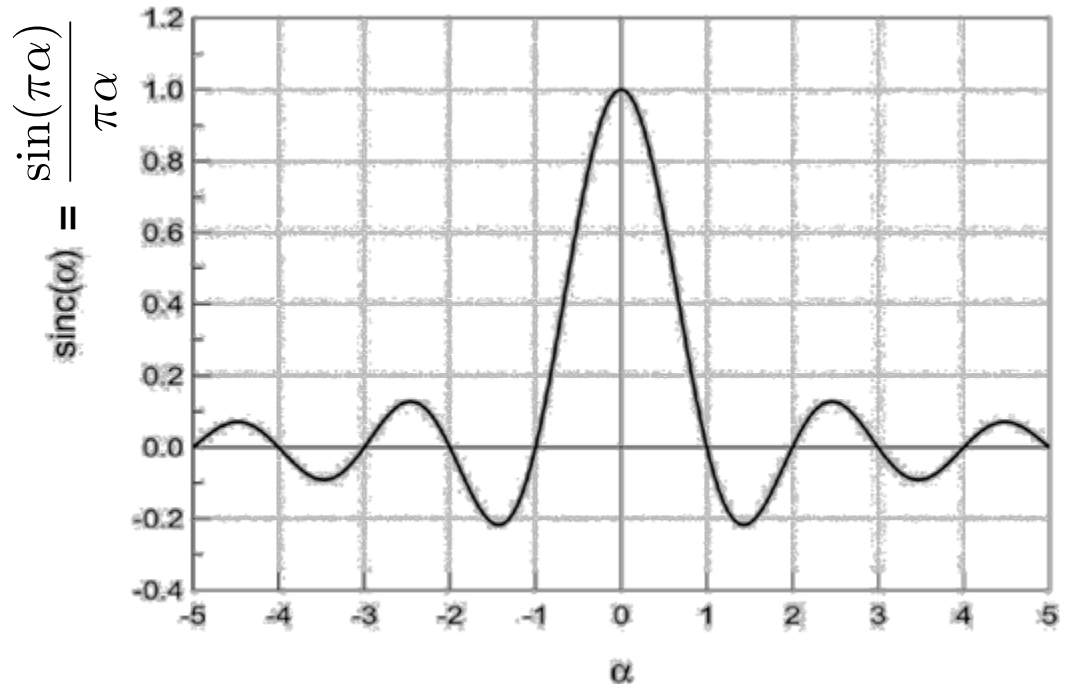
Determiniamo ora una espressione per il calcolo del coefficiente  $X_n$  andando ad anti-trasformare:

$$\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt = \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{i2\pi k f_0 t} e^{-i2\pi n f_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} e^{i2\pi(k-n)f_0 t} dt$$

$$\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} e^{i2\pi(k-n)f_0 t} dt = \frac{\exp[i2\pi(k-n)f_0 t]}{i2\pi(k-n)f_0} \Big|_{-T_0/2}^{+T_0/2} = \frac{\sin[\pi(k-n)]}{\pi(k-n)f_0} \quad \sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

$$f_0 T_0 = 1$$

$$\frac{\sin[\pi(k-n)]}{\pi(k-n)f_0} = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ T_0 & k = n \end{cases}$$



sinc = cardinal sine

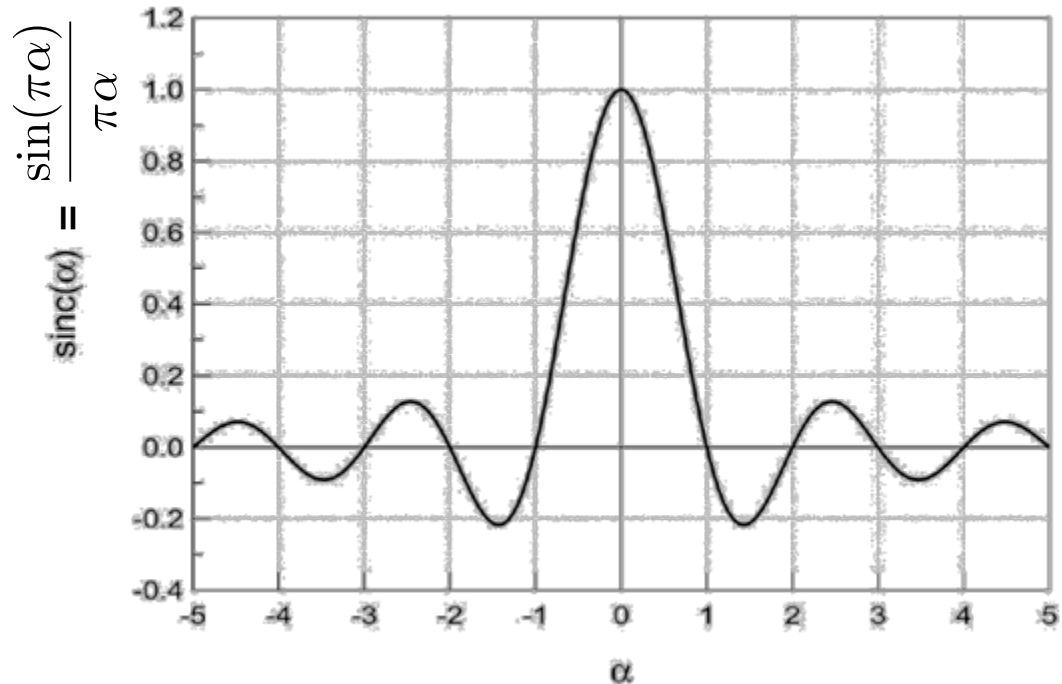
# Sviluppo in Serie di Fourier per Segnali Periodici

Determiniamo ora una espressione per il calcolo del coefficiente  $X_n$ , andando ad anti-trasformare:

$$\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt = \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{i2\pi k f_0 t} e^{-i2\pi n f_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} e^{i2\pi(k-n)f_0 t} dt$$

$$\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} e^{i2\pi(k-n)f_0 t} dt = \frac{\exp[i2\pi(k-n)f_0 t]}{i2\pi(k-n)f_0} \Big|_{-T_0/2}^{+T_0/2} = \frac{\sin[\pi(k-n)]}{\pi(k-n)f_0} \quad \begin{aligned} \sin(\alpha) &= \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \\ f_0 T_0 &= 1 \end{aligned}$$

$$\frac{\sin[\pi(k-n)]}{\pi(k-n)f_0} = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ T_0 & k = n \end{cases}$$



sinc = cardinal sine

# Sviluppo in Serie di Fourier per Segnali Periodici

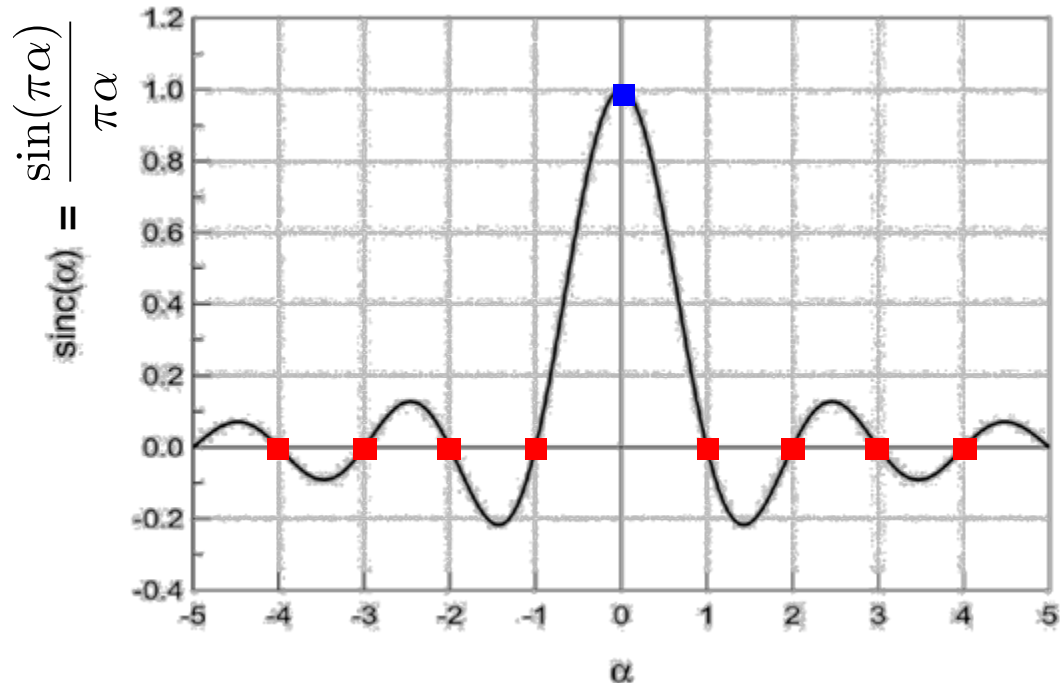
Determiniamo ora una espressione per il calcolo del coefficiente  $X_n$ , andando ad anti-trasformare:

$$\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt = \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{i2\pi k f_0 t} e^{-i2\pi n f_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} e^{i2\pi(k-n)f_0 t} dt$$

$$\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} e^{i2\pi(k-n)f_0 t} dt = \frac{\exp[i2\pi(k-n)f_0 t]}{i2\pi(k-n)f_0} \Big|_{-T_0/2}^{+T_0/2} = \frac{\sin[\pi(k-n)]}{\pi(k-n)f_0} \quad \sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

$f_0 T_0 = 1$

$$\frac{\sin[\pi(k-n)]}{\pi(k-n)f_0} = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ T_0 & k = n \end{cases}$$



sinc = cardinal sine

# Sviluppo in Serie di Fourier per Segnali Periodici

Determiniamo ora una espressione per il calcolo del coefficiente  $X_n$ , andando ad anti-trasformare:

$$\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt = \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{i2\pi k f_0 t} e^{-i2\pi n f_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} e^{i2\pi(k-n)f_0 t} dt$$

$$\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} e^{i2\pi(k-n)f_0 t} dt = \frac{\exp[i2\pi(k-n)f_0 t]}{i2\pi(k-n)f_0} \Big|_{-T_0/2}^{+T_0/2} = \frac{\sin[\pi(k-n)]}{\pi(k-n)f_0} \quad \sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$
$$f_0 T_0 = 1$$

$$\frac{\sin[\pi(k-n)]}{\pi(k-n)f_0} = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ T_0 & k = n \end{cases}$$

$$\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} e^{i2\pi(k-n)f_0 t} dt = X_n T_0$$

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt$$

# Sviluppo in Serie di Fourier per Segnali Periodici

Forma complessa della trasformata di Fourier

$$\left\{ \begin{array}{l} X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\ x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \end{array} \right.$$

**equazione di ANALISI:** studio del contenuto in frequenza del segnale

**equazione di SINTESI:** ricostruzione del segnale a partire dalle sue armoniche

$$x(t) \Longleftrightarrow X_k$$

**La conoscenza del segnale  $x(t)$  nel dominio temporale è equivalente alla conoscenza della successione dei termini di Fourier nel dominio delle frequenze**

# Sviluppo in Serie di Fourier per Segnali Periodici

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

Che dimensioni fisiche ha  $X_k$ ?

- l'argomento dell'esponenziale (chiamiamola  $A$ ) deve essere adimensionale! → ok!

-  $1/T_0$  per l'integrale in  $dt$ :

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) A dt$$

→ stesse dimensioni di  $x(t)$

# Equazione di sintesi per segnali periodici

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

**equazione di SINTESI:** ricostruzione del segnale a partire dalle sue armoniche

Prevede l'uso di infinite armoniche per ricostruire il segnale (non fisico).

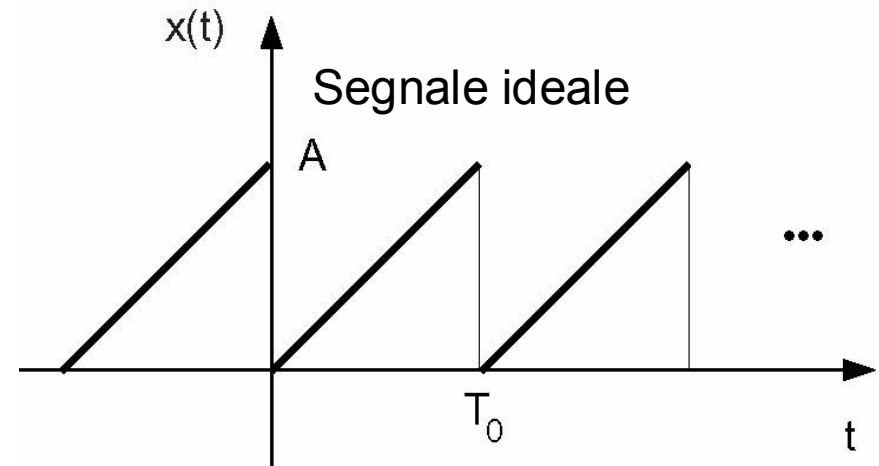
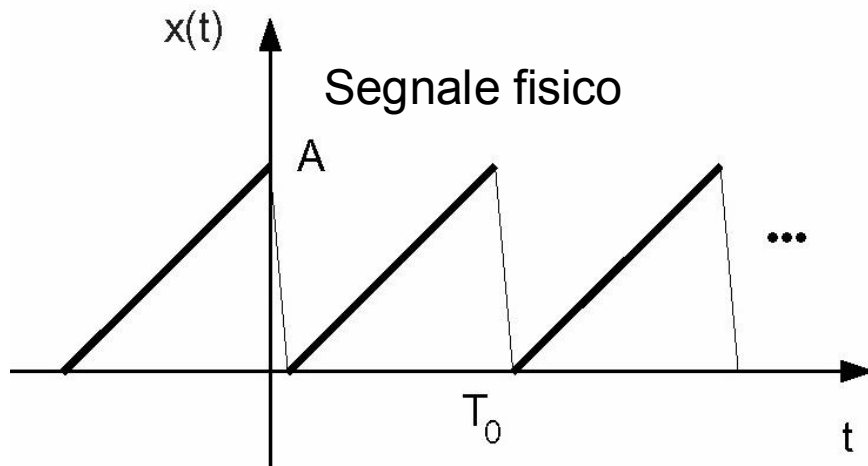
In generale possiamo ricostruire segnali a partire da un numero FINITO di armoniche.

Dal criterio di convergenza delle serie sappiamo però che

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} < \infty \implies \lim_{k \rightarrow \infty} |X_k| = 0$$

cioè l'ampiezza delle armoniche con frequenze “alte” deve risultare trascurabile rispetto all'ampiezza delle armoniche a frequenze “basse”.

# Segnali fisici e segnali ideali

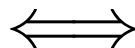


Segnali fisici spesso approssimati da segnali ideali (più semplici, ma non fisici).  
Chi ne garantisce la possibilità dello sviluppo in frequenza?

## Criterio di Dirichlet:

Un segnale  $x(t)$  può essere sviluppato in serie di Fourier se valgono

- $x(t)$  è assolutamente integrabile nel suo periodo  $\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} |x(t)| dt < \infty$
- $x(t)$  è continua o presenta un numero finito di discontinuità di primo tipo
- $x(t)$  è derivabile rispetto a  $t$  escluso al più un numero finito di punti



$x(t)$  presenta un numero finito di massimi e minimi

# Proprietà

## Linearità:

$$\left. \begin{array}{l} x(t) \Longleftrightarrow X_k \\ y(t) \Longleftrightarrow Y_k \\ z(t) = a x(t) + b y(t) \end{array} \right\} Z_k = a X_k + b Y_k$$

## Simmetria Hermitiana:

$$\begin{aligned} X_{-k} = X_k^* &\Longleftrightarrow |X_k| = |X_{-k}| \\ &\arg(X_k) = -\arg(X_{-k}) \end{aligned}$$

- Definisce la simmetria degli spettri in ampiezza e fase

# Spettri di segnali notevoli

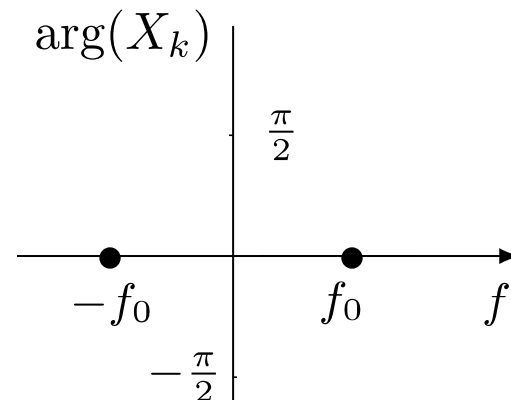
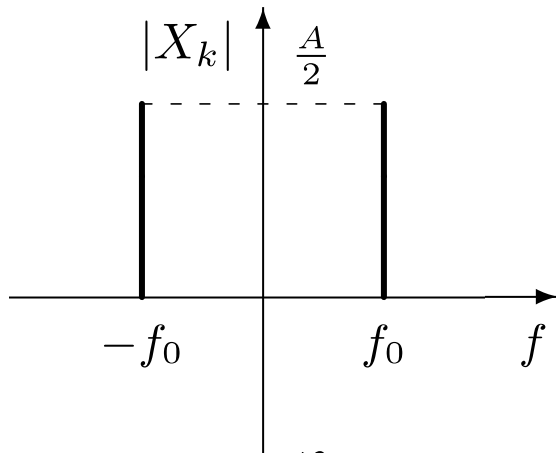
$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$$

$$x(t) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad \begin{aligned} X_k &= A_k e^{i\phi_k} & k &= 1, 2, \dots, +\infty \\ X_k &= A_{-k} e^{-i\phi_{-k}} & k &= -\infty, \dots, -2, -1 \end{aligned}$$

$$A_1 = A/2, \phi_1 = 0; \quad A_k, \phi_k = 0 \quad \forall k \neq 1$$

$$X_1 = A/2, X_{-1} = A/2; \quad X_k, \phi_k = 0 \quad \forall k \neq 1$$



# Spettri di segnali notevoli

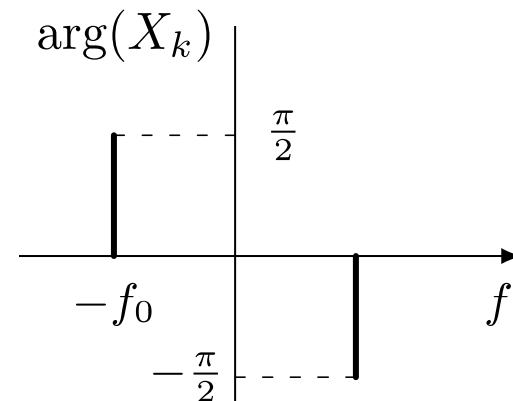
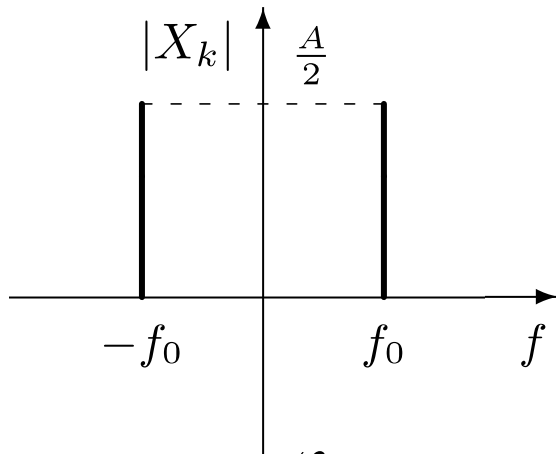
$$x(t) = A \sin(2\pi f_0 t) = A \cos(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2})$$

$$x(t) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad \begin{aligned} X_k &= A_k e^{i\phi_k} & k &= 1, 2, \dots, +\infty \\ X_k &= A_{-k} e^{-i\phi_{-k}} & k &= -\infty, \dots, -2, -1 \end{aligned}$$

$$A_1 = A/2, \phi_1 = -\frac{\pi}{2}; \quad A_k, \phi_k = 0 \quad \forall k \neq 1$$

$$X_1 = A/2 e^{-j\frac{\pi}{2}}, \quad X_{-1} = A/2 e^{j\frac{\pi}{2}}; \quad X_k, \phi_k = 0 \quad \forall k \neq 1$$



# Segnali pari e dispari

- Un segnale è *pari* se  $x(t) = x(-t)$ 
  - $X_k = X_{-k}$
- Un segnale è *dispari* se  $x(t) = -x(-t)$ 
  - $X_k = -X_{-k}$

# Segnali pari e dispari

- Un segnale è *pari* se  $x(t) = x(-t)$ 
  - $X_k = X_{-k}$   
esempio: *cos*

$$X_1 = X_{-1} = A/2 \quad (\text{reali})$$

- Un segnale è *dispari* se  $x(t) = -x(-t)$ 
  - $X_k = -X_{-k}$   
esempio: *sin*

$$X_1 = A/2 e^{-i\pi/2}, X_{-1} = A/2 e^{i\pi/2} \quad (\text{immaginari puri})$$

# Segnali pari e dispari

- Un segnale è *pari* se  $x(t) = x(-t)$

- $X_k = X_{-k}$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

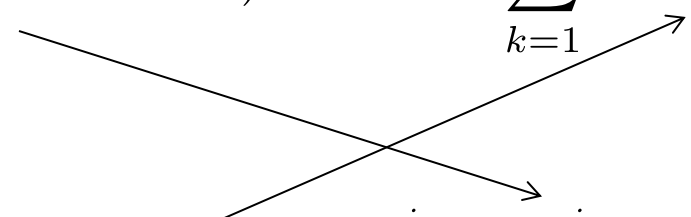
siccome  $X_k$  è reale:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

siccome  $X_k = -X_{-k}$

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k (e^{j2\pi k f_0 t} + e^{-j2\pi k f_0 t}) = X_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} X_k \cos(2\pi k f_0 t)$$

cioè in soli coseni


$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

# Segnali pari e dispari

- Un segnale è *dispari* se  $x(t) = -x(-t)$

- $X_k = -X_{-k}$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

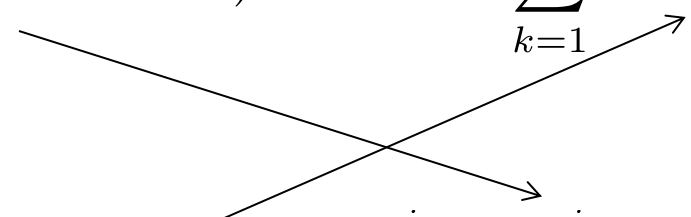
siccome  $X_k$  è reale:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

siccome  $X_k = -X_{-k}$

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k (e^{j2\pi k f_0 t} - e^{-j2\pi k f_0 t}) = X_0 + 2i \sum_{k=1}^{\infty} X_k \sin(2\pi k f_0 t)$$

cioè in soli seni


$$\sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

# Segnali pari e dispari

- Un segnale è *pari* se  $x(t) = x(-t)$ 
  - $X_k = X_{-k}$

oppure, in alternativa, sviluppando l'esponenziale in sin e cos:

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

otteniamo

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt - \frac{j}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt$$

# Segnali pari e dispari

- Un segnale è *pari* se  $x(t) = x(-t)$

- $X_k = X_{-k}$

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt - \frac{j}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt$$

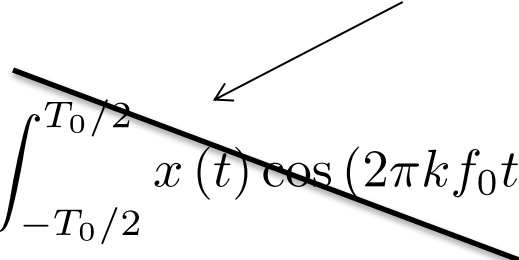
cioè:

$$X_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt$$

# Segnali pari e dispari

- Un segnale è *dispari* se  $x(t) = -x(-t)$

- $X_k = -X_{-k}$


$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt - \frac{j}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt$$

cioè:

$$X_k = -\frac{2j}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt$$

# Proprietà

## Parità:

un qualsiasi segnale reale può essere scomposto nella somma di un termine pari e uno dispari

$$x(t) = x_p(t) + x_d(t) \quad X_k = X_{pk} + X_{dk}$$

la componente pari ha armoniche puramente reali ed è sviluppabile in serie di soli coseni

$$x_p(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \quad X_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt$$

la componente dispari ha armoniche puramente immaginarie ed è sviluppabile in serie di soli seni

$$x_d(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} \quad X_k = \frac{-2j}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt$$

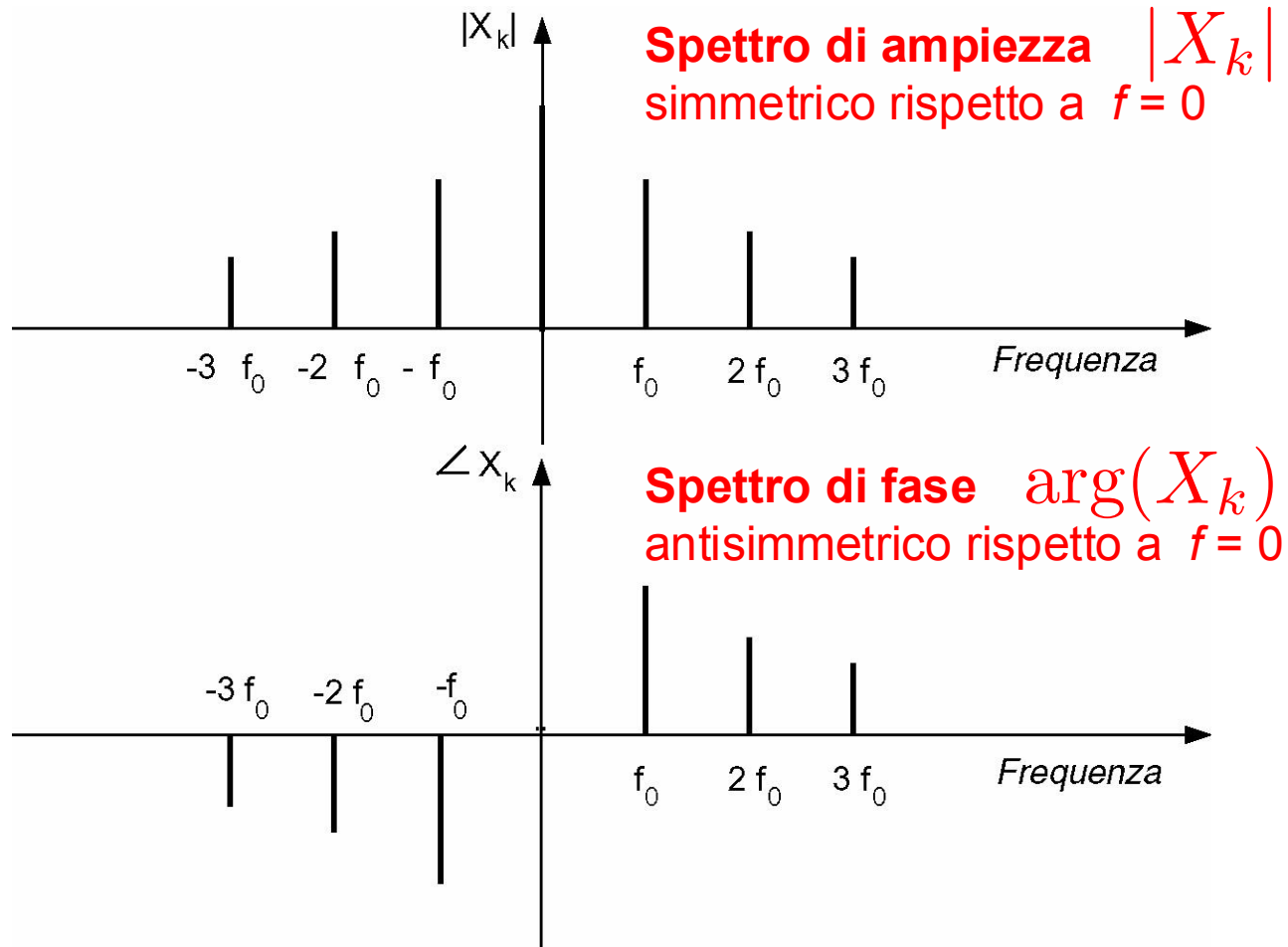
segnale è *pari*:  $x(t) = x(-t)$

segnale è *dispari*:  $x(t) = -x(-t)$

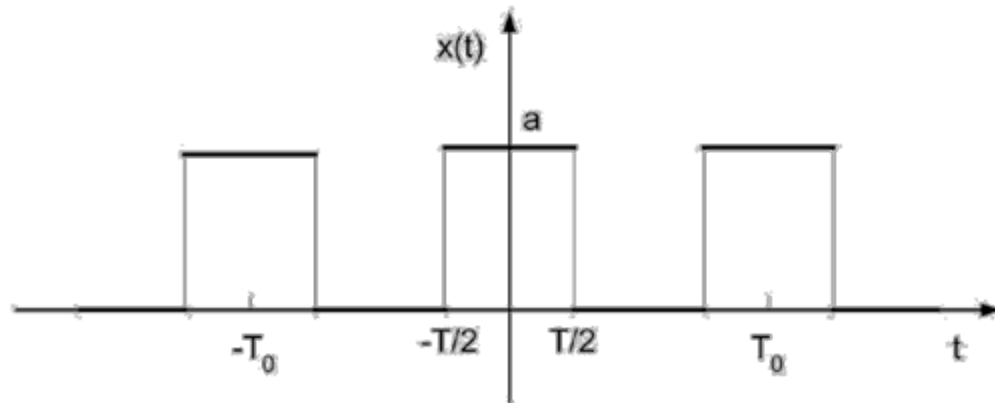
\*\*  $x_p$  e  $x_d$  sono *definite* andando a "cancellare" la parte dispari o quella pari, lasciando solo l'altra

# Spettri di ampiezza e di fase

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$



# Spettri di segnali notevoli



Treno di impulsi

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a \cdot \text{rect} \left( \frac{t - nT_0}{T} \right)$$

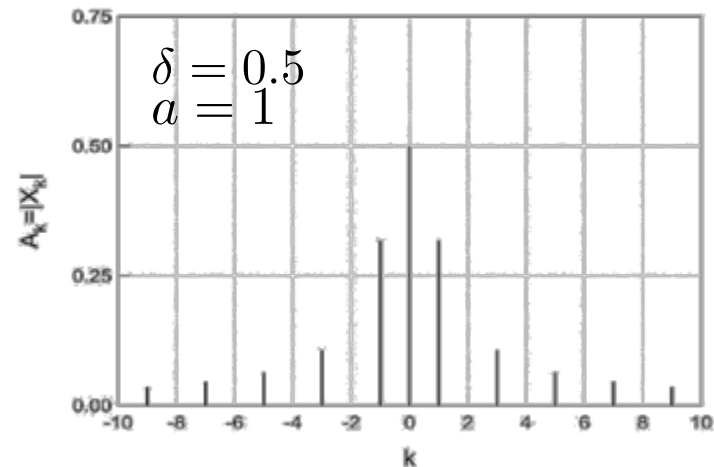
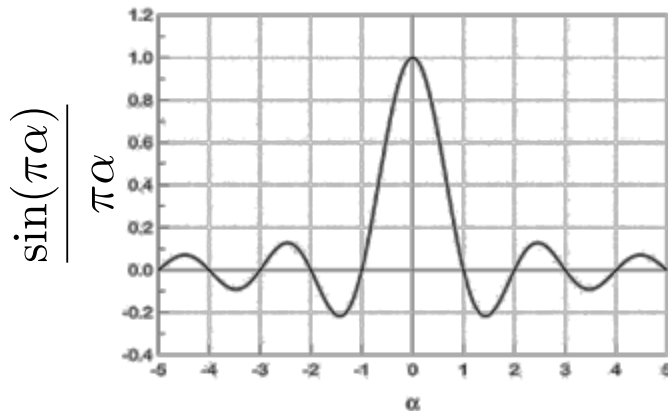
$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

periodo

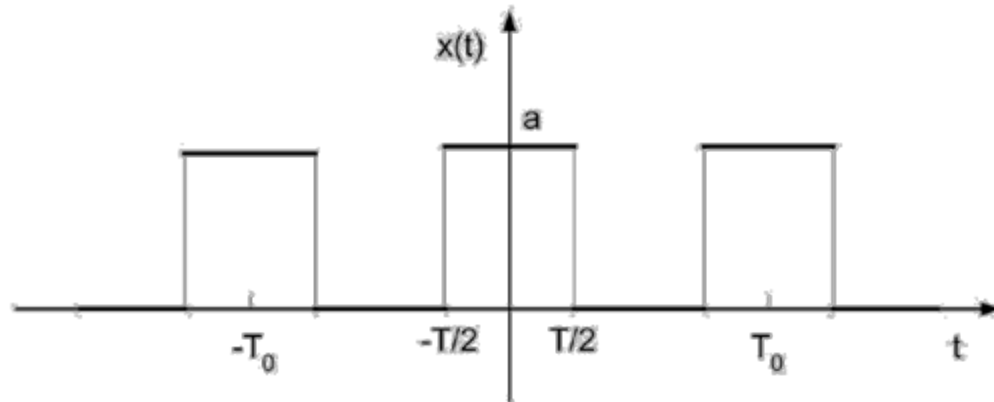
durata  
temporale  
della parte  
"alta"  
della  
quadra

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} a \cdot \text{rect} \left( \frac{t}{T} \right) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{a}{T_0} \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\ &= \frac{a}{T_0} \frac{\sin(\pi k f_0 T)}{\pi k / T_0} = \frac{aT}{T_0} \frac{\sin(\pi k T / T_0)}{\pi k T / T_0} = a\delta \frac{\sin(\pi k \delta)}{\pi k \delta} \end{aligned}$$

Duty factor:  $\delta = T/T_0$



# Spettri di segnali notevoli



Treno di impulsi

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a \cdot \text{rect} \left( \frac{t - nT_0}{T} \right)$$

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

periodo  
durata temporale della parte "alta" della quadra

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} a \cdot \text{rect} \left( \frac{t}{T} \right) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{a}{T_0} \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

$$= \frac{a}{T_0} \frac{\sin(\pi k f_0 T)}{\pi k / T_0} = \frac{aT}{T_0} \frac{\sin(\pi k T / T_0)}{\pi k T / T_0} = a\delta \frac{\sin(\pi k \delta)}{\pi k \delta}$$

Duty factor:  $\delta = T/T_0$

$\delta = 0.5$

$a = 1$

$k=0 \rightarrow 0.5 \cdot 1$

$k=1 \rightarrow 0.5 \cdot \sin(\pi \cdot 0.5) / (\pi \cdot 0.5) = 0.5 \cdot 1 / (\pi \cdot 0.5) = 1/\pi = 1/k\pi$

$k=2 \rightarrow 0.5 \cdot \sin(\pi) / \pi = 0$

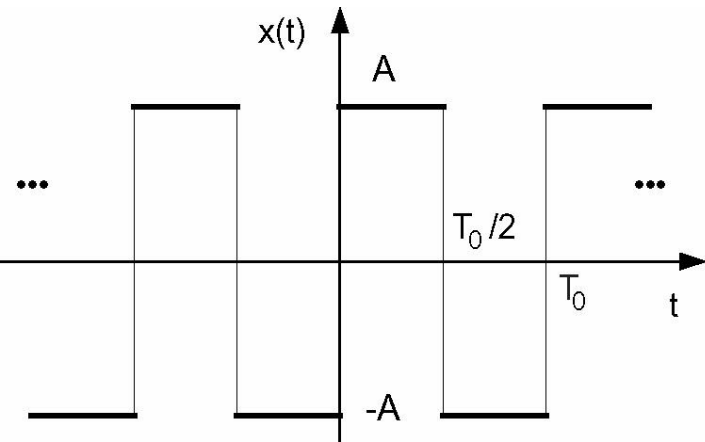
$k=3 \rightarrow 0.5 \cdot \sin(\pi \cdot 1.5) / (\pi \cdot 3 \cdot 0.5) = 0.5 \cdot -1 / (\pi \cdot 3 \cdot 0.5) = -1/(3\pi) = -1/k\pi$

$k=4 \rightarrow 0.5 \cdot \sin(2\pi) / 2\pi = 0$

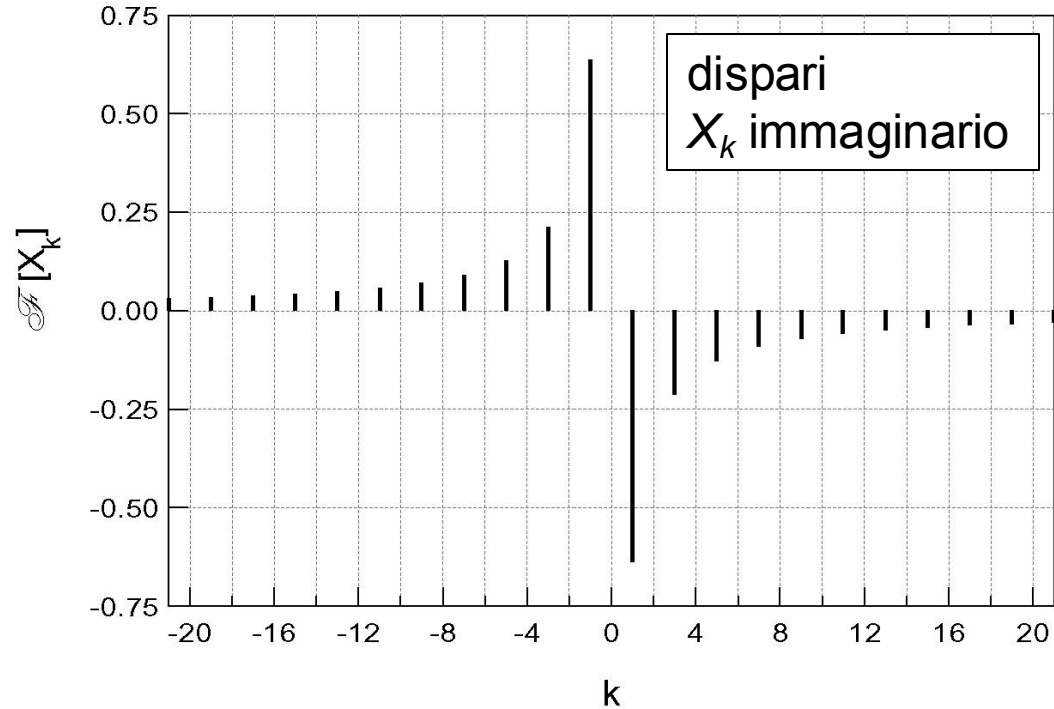
$k=5 \rightarrow 0.5 \cdot \sin(\pi \cdot 2.5) / (\pi \cdot 5 \cdot 0.5) = 0.5 \cdot 1 / (\pi \cdot 5 \cdot 0.5) = 1/(5\pi) = 1/k\pi$

$\rightarrow |X_k| \propto 1/k \quad k \text{ dispari e } k=0$

# Spettri di segnali notevoli



$$x(t) = A \quad t \in \left[0, \frac{T_0}{2}\right]$$

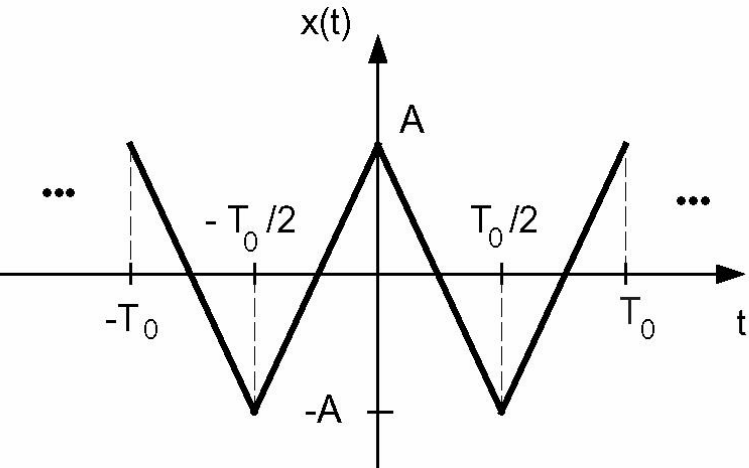


Segnale dispari: possiamo utilizzare  $X_k = \frac{-2j}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt$

$$X_k = \frac{-2iA}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} \sin(2\pi k f_0 t) dt = \frac{2iA}{2\pi k f_0 T_0} \cos(2\pi k f_0 t) \Big|_0^{\frac{T_0}{2}}$$

$$X_k = \frac{iA}{\pi k} [\cos(\pi k) - 1] = \frac{iA}{\pi k} [(-1)^k - 1] = \frac{2A}{i\pi k}, \quad k \text{ dispari}$$

# Spettri di segnali notevoli

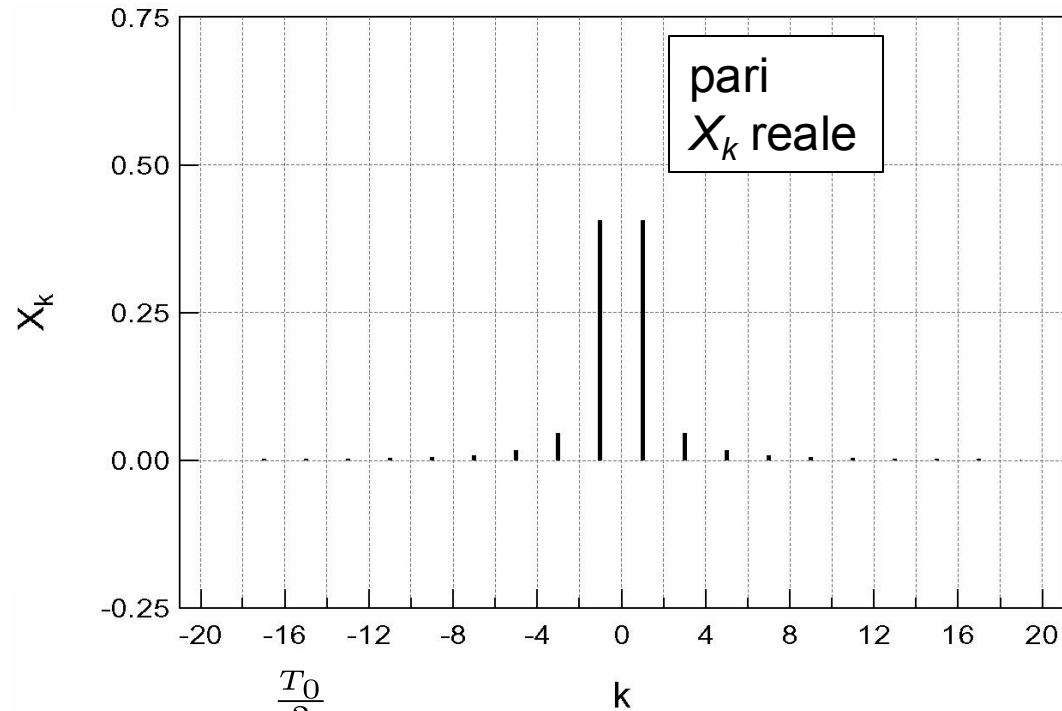


$$x(t) = A - 4A \frac{t}{T_0} \quad t \in \left[0, \frac{T_0}{2}\right]$$

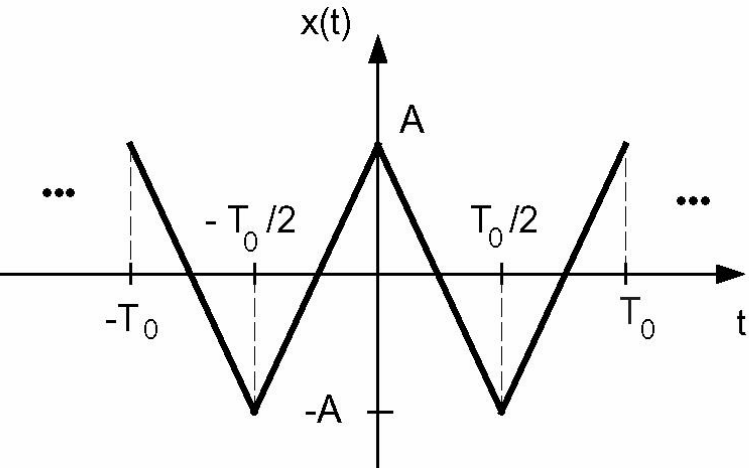
Segnale pari: possiamo utilizzare

$$X_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt$$

$$X_k = -\frac{8A}{T_0} \int_0^{T_0/2} \frac{t}{T_0} \cos(2\pi k f_0 t) dt + \boxed{\frac{2A}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} \cos(2\pi k f_0 t) dt} = 0$$



# Spettri di segnali notevoli



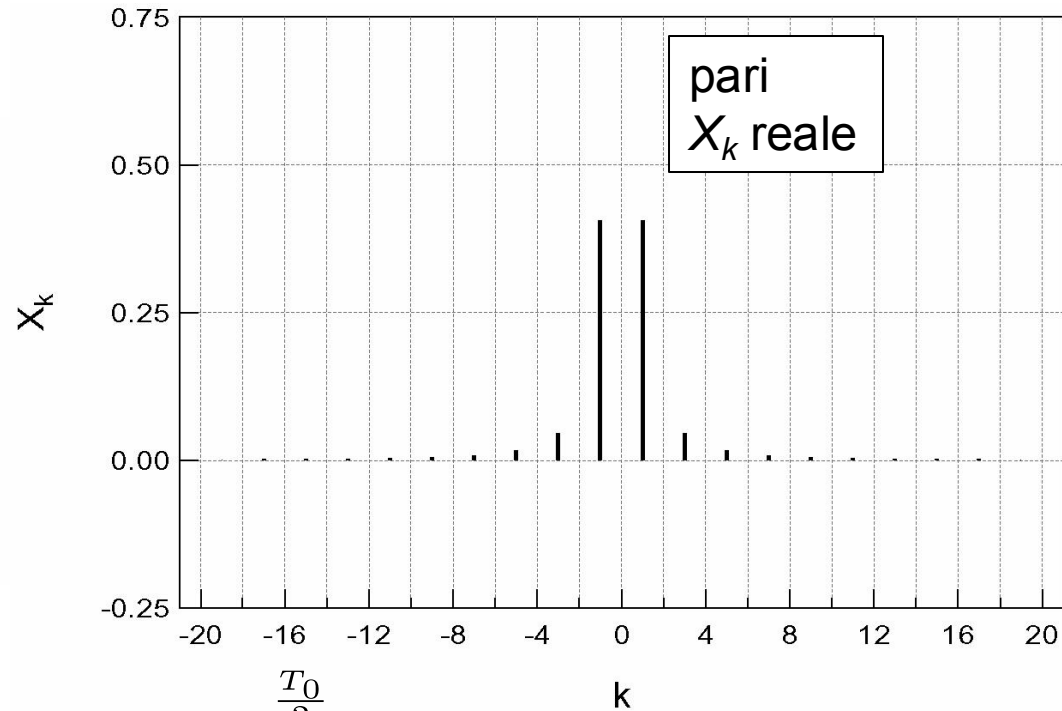
$$x(t) = A - 4A \frac{t}{T_0} \quad t \in \left[0, \frac{T_0}{2}\right]$$

Segnale pari: possiamo utilizzare

$$X_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt$$

$$X_k = -\frac{8A}{T_0} \int_0^{T_0/2} \frac{t}{T_0} \cos(2\pi k f_0 t) dt$$

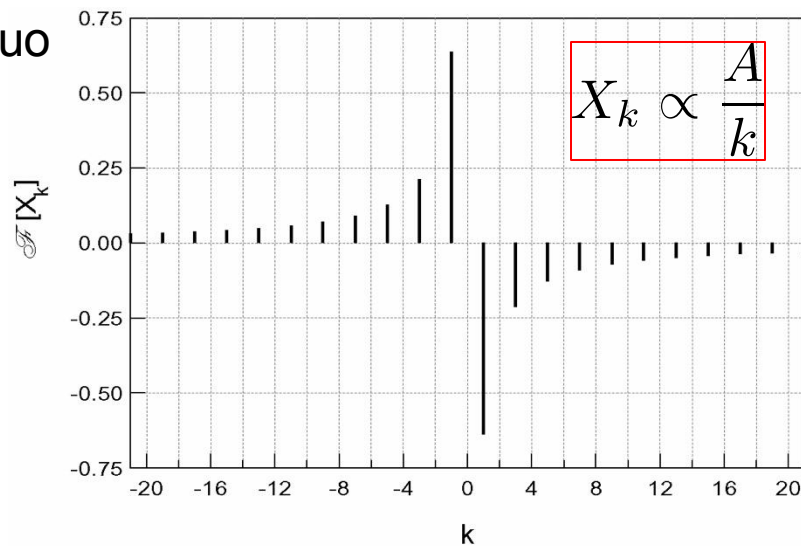
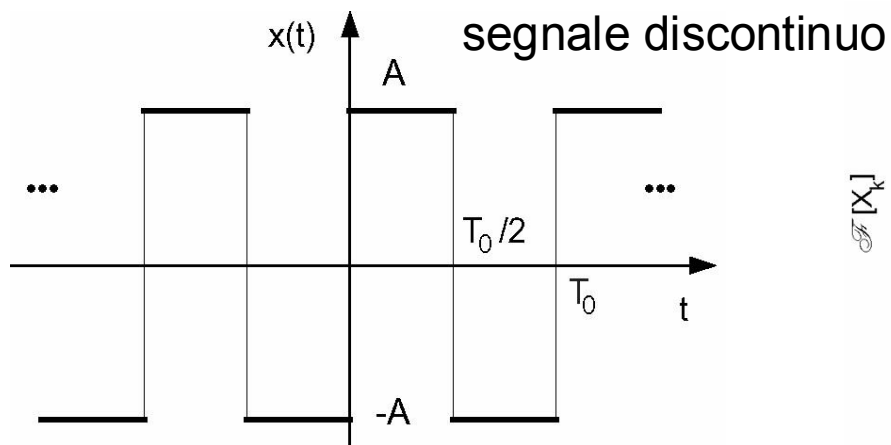
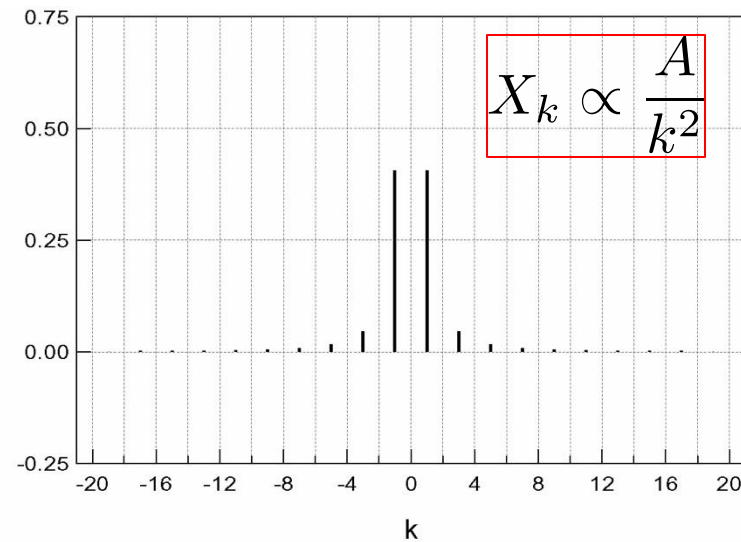
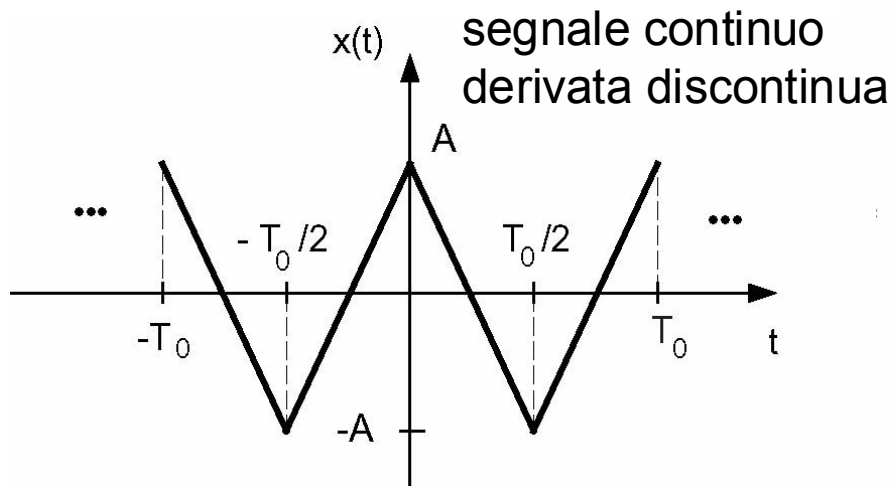
$$= -\frac{8A}{T_0} \frac{T_0}{(2\pi k)^2} \left[ (-1)^k - 1 \right] = \frac{4A}{(\pi k)^2}, \quad k \text{ dispari}$$



perchè valutato in due punti  
multipli del periodo

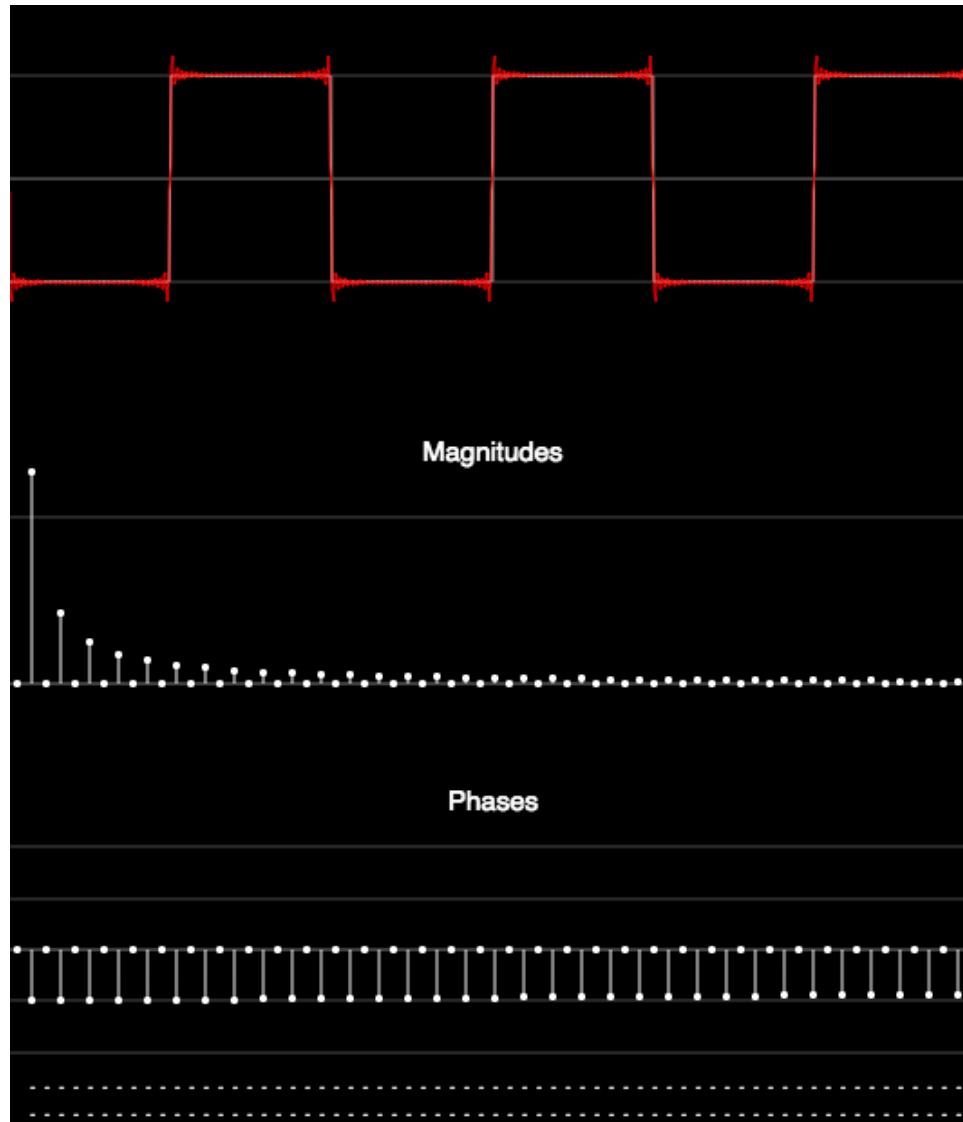
$$\int t \cos(kt) dt = \frac{kt \sin(kt) + \cos(kt)}{k^2} + \text{constant}$$

# Contributo delle armoniche nella sintesi



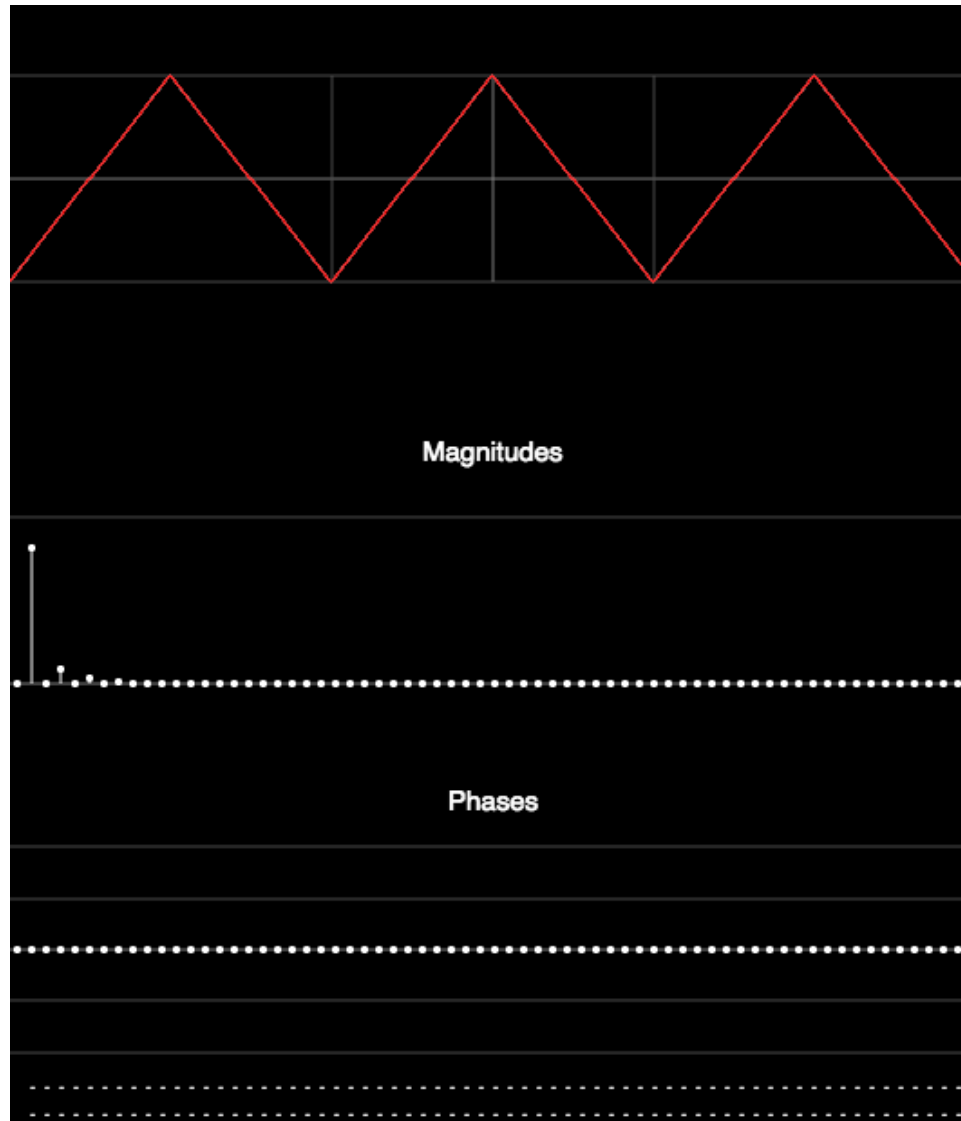
**L'errore di sintesi dovuto al numero finito di armoniche utilizzate nella ricostruzione aumenta per segnali con "velocità di variazione" maggiori**

# Contributo delle armoniche nella sintesi



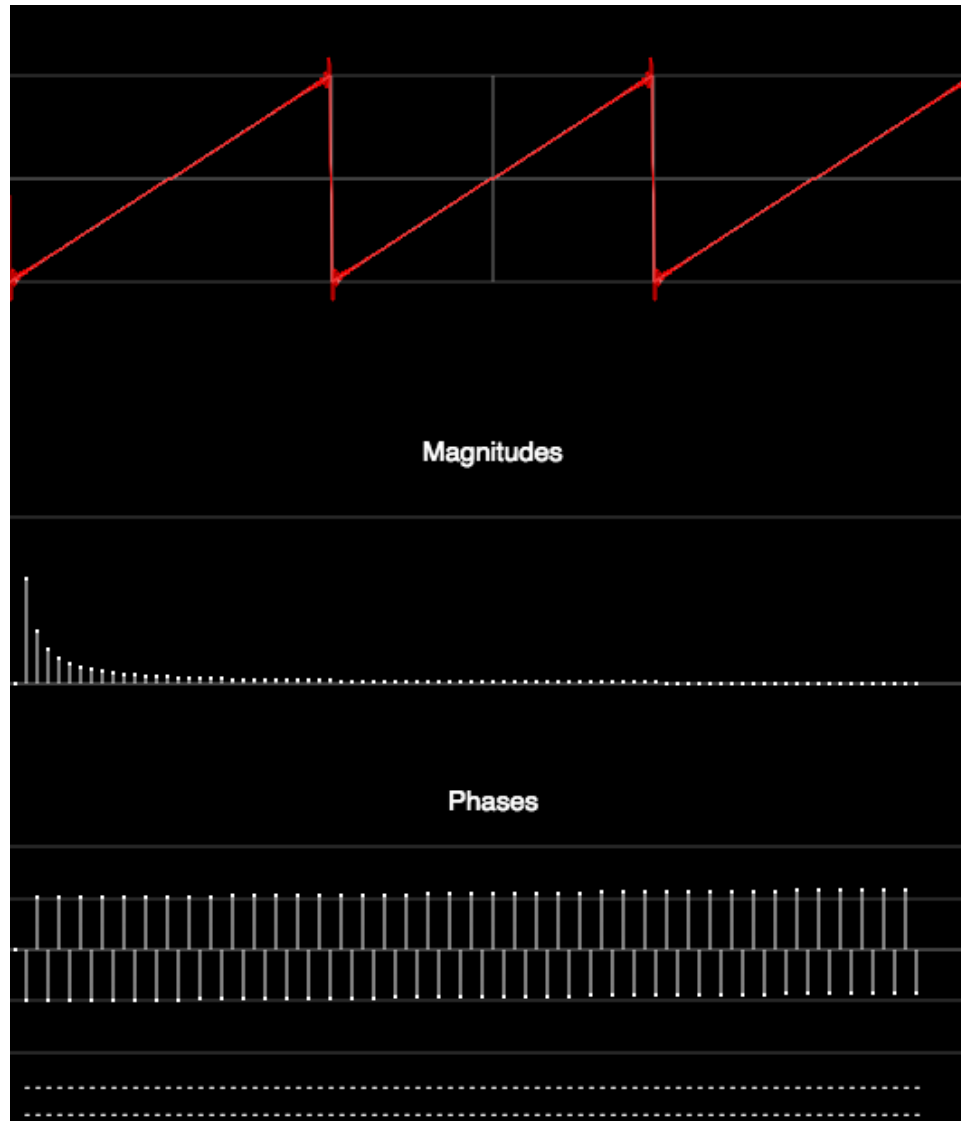
<http://www.falstad.com/fourier/>

# Contributo delle armoniche nella sintesi



<http://www.falstad.com/fourier/>

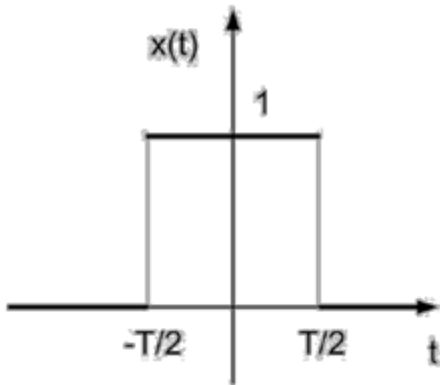
# Contributo delle armoniche nella sintesi



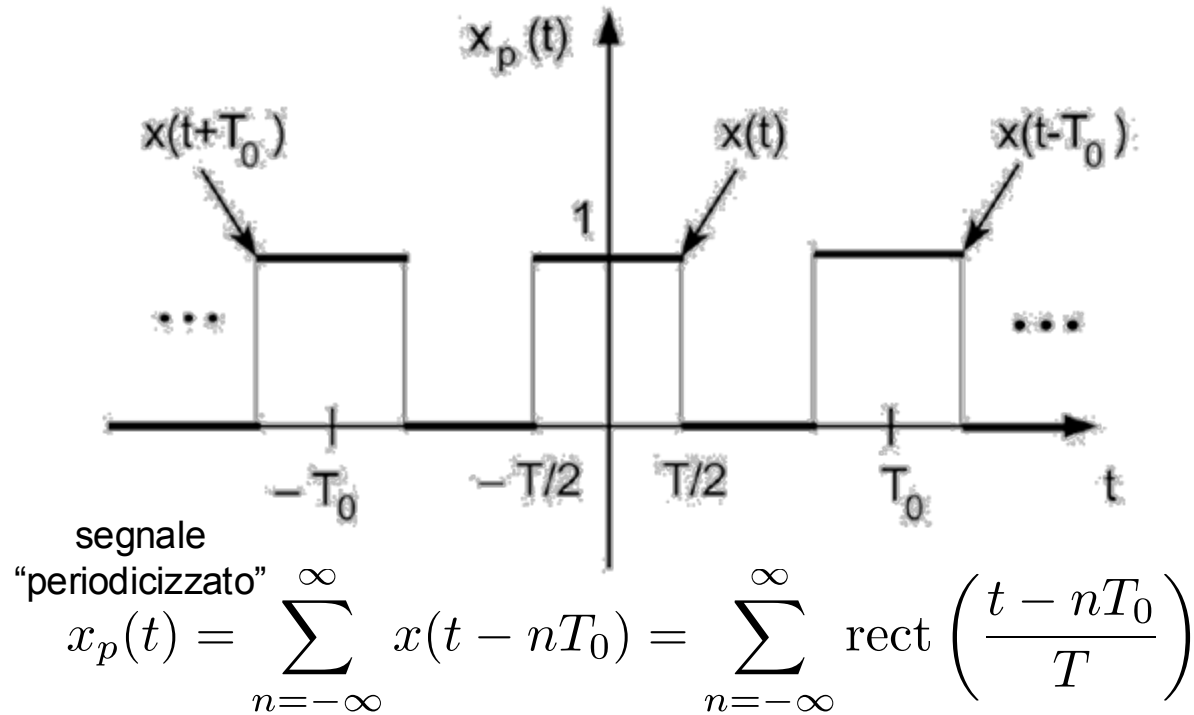
<http://www.falstad.com/fourier/>

# Segnali Aperiodici

Possiamo esprimere un segnale aperiodico come sovrapposizione di segnali sinusoidali?



$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$



$$x(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_p(t)$$

(al limite in cui il periodo di *ripetizione* è infinito)

**Un segnale APERIODICO può essere considerato il caso limite di un segnale periodico nel limite in cui il periodo di ripetizione è infinito**

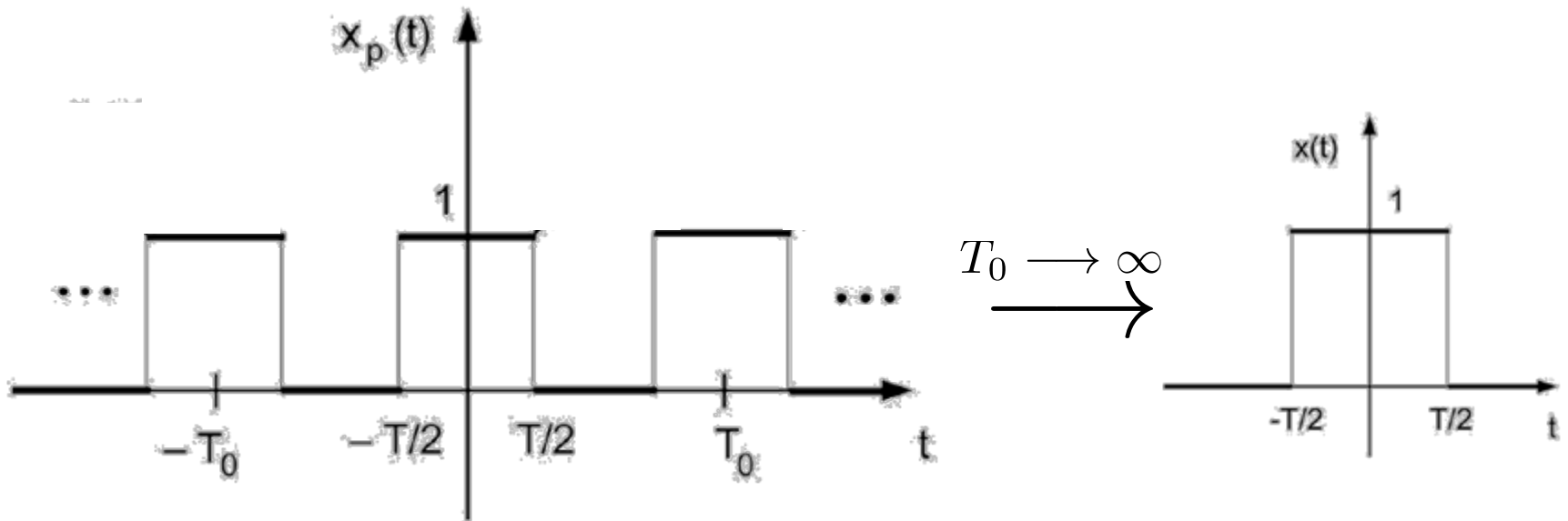
# Segnali Aperiodici

$x_p(t)$  periodico, quindi posso sviluppare in serie di Fourier

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t - nT_0}{T}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i2\pi k f_0 t}$$

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t) e^{-i2\pi k f_0 t} dt$$

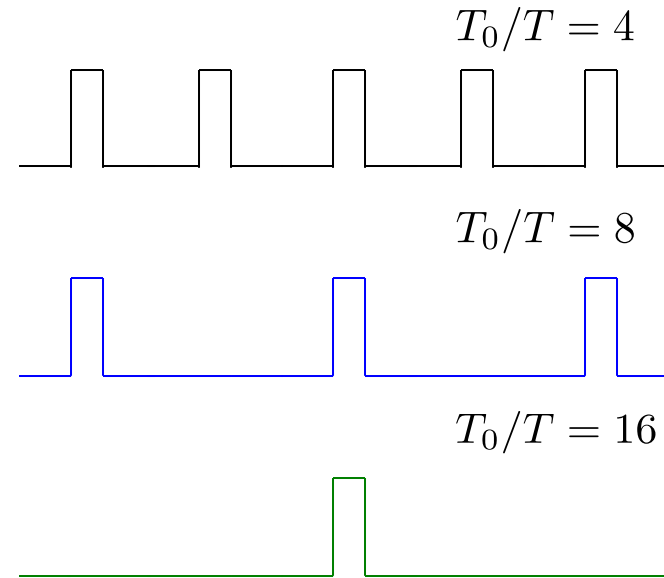
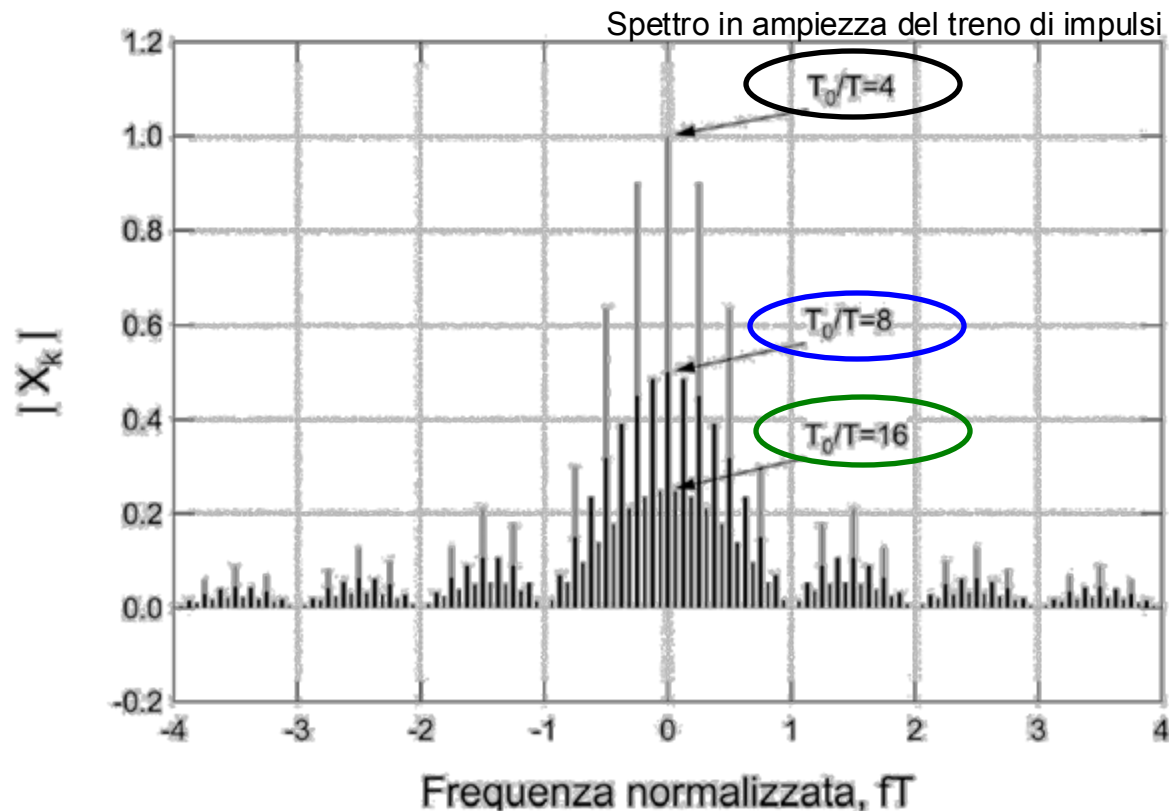
Cosa succede allo spettro di ampiezza per  $T_0 \rightarrow \infty$ ?



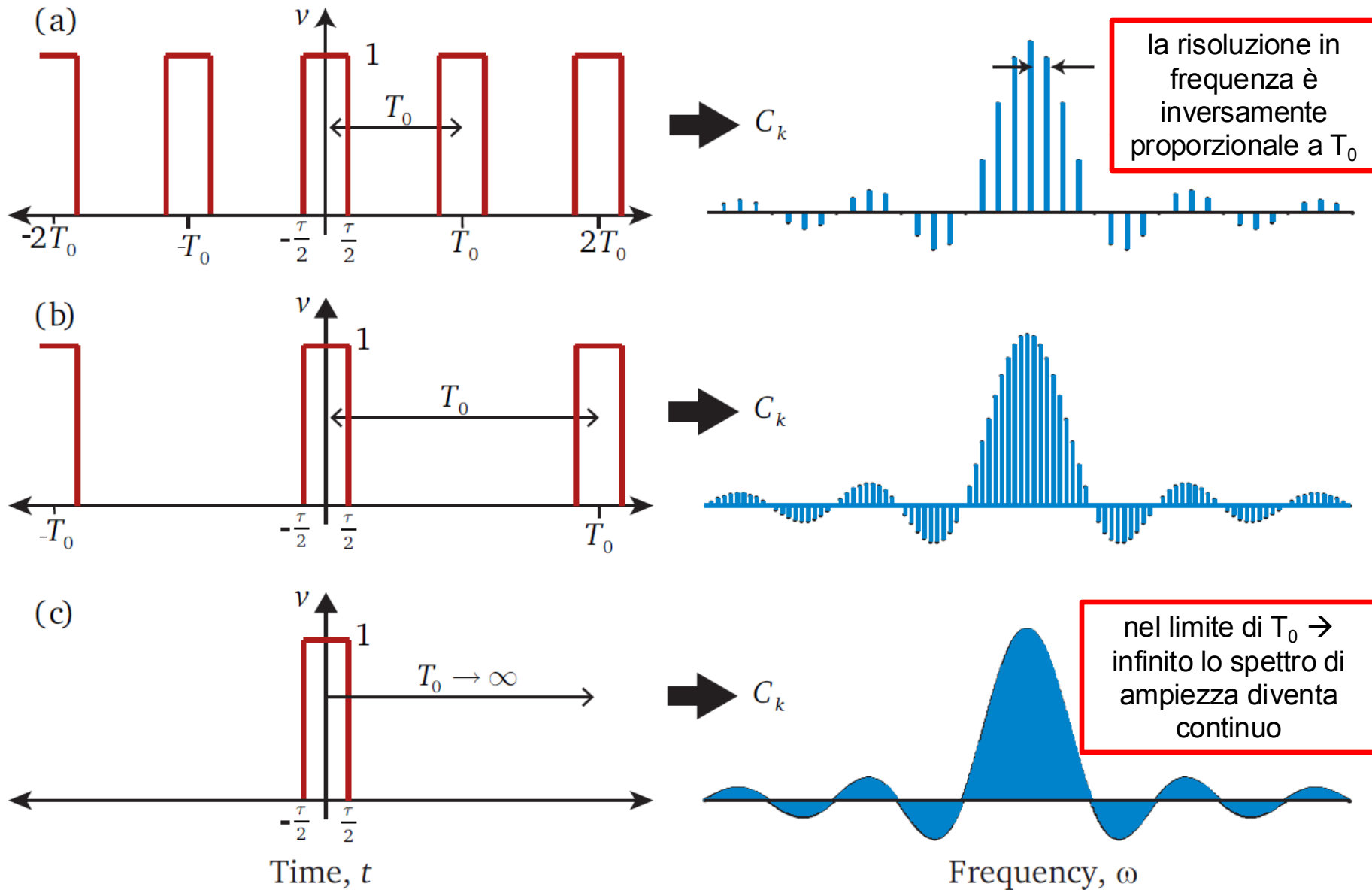
# Segnali Aperiodici

Cosa succede allo spettro di ampiezza per  $T_0 \rightarrow \infty$  ?

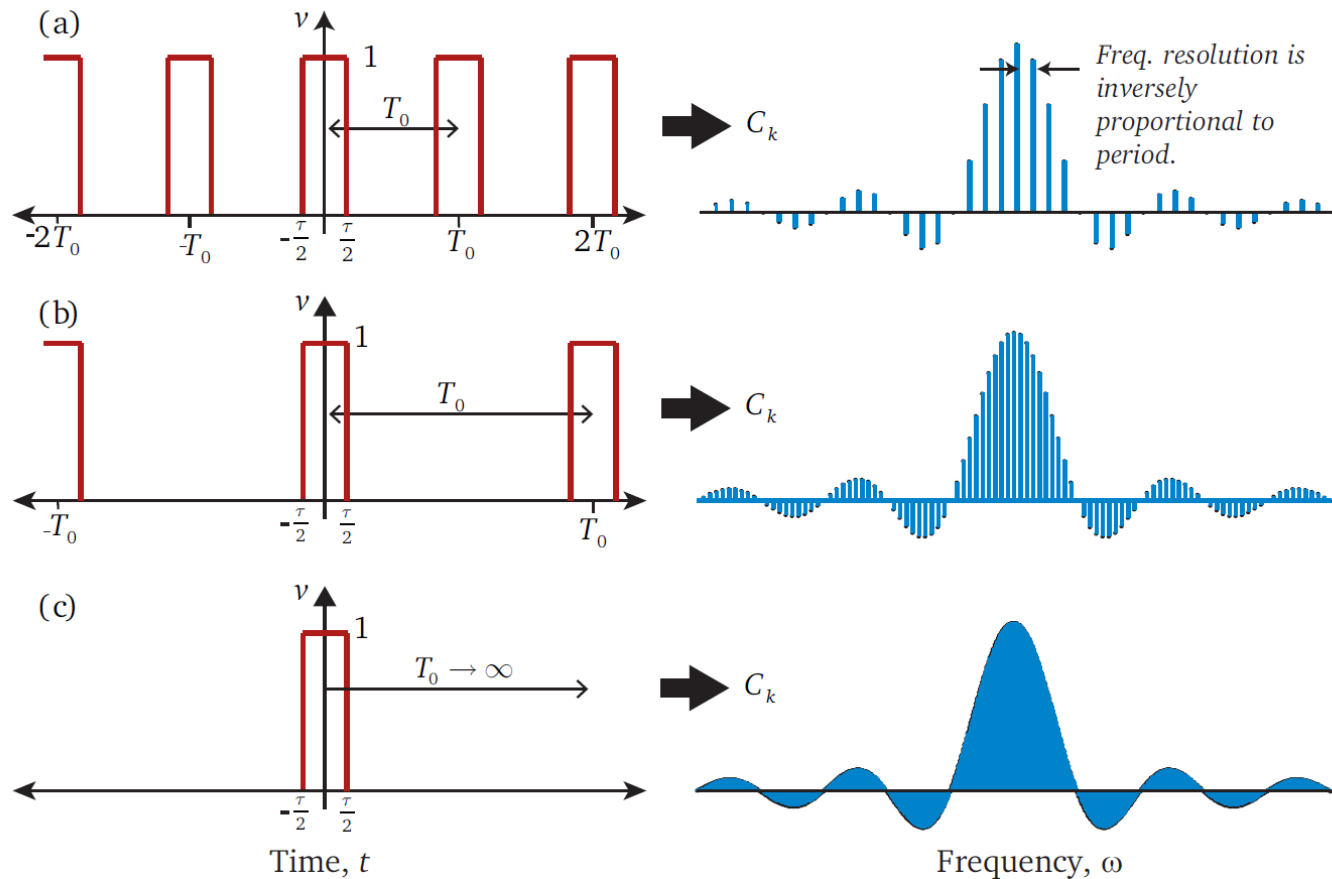
- diminuisce  $f_0$ , le righe si avvicinano
- aumenta  $T_0$ , diminuisce l'ampiezza delle righe



# Segnali Aperiodici



# Segnali Aperiodici

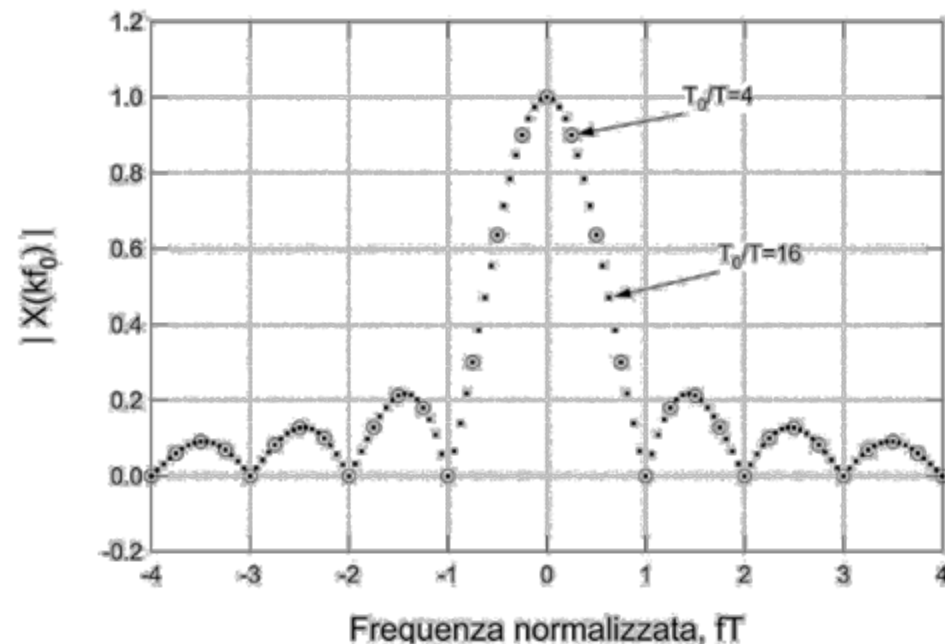
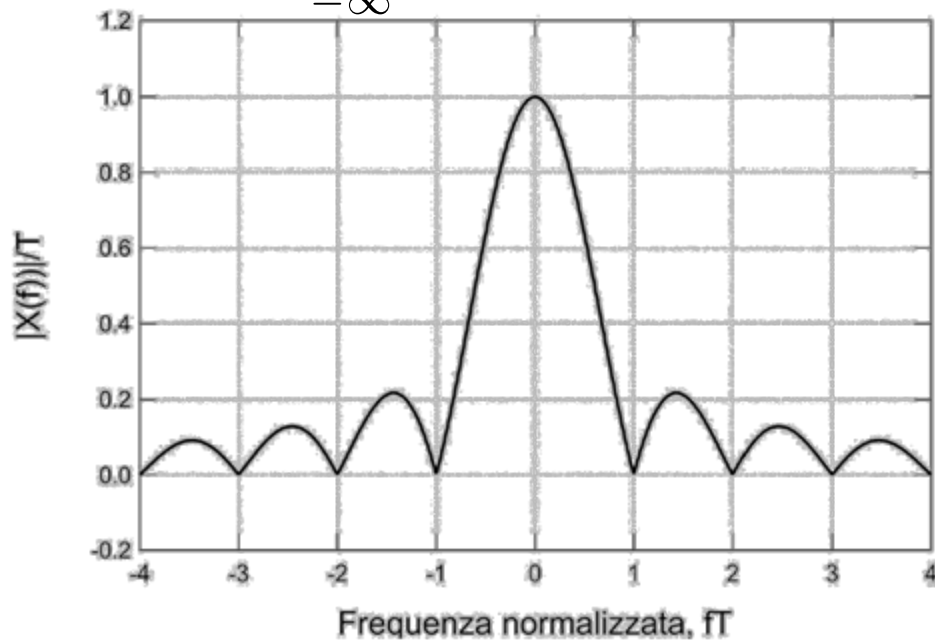


$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad \Rightarrow \quad X(f) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

# Segnali Aperiodici

Definiamo un coefficiente di Fourier modificato la cui ampiezza non sia infinitesima

$$X(f) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \implies X_k = \frac{1}{T_0} X(f)|_{f=\frac{k}{T_0}} = f_0 X(kf_0)$$



$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \underbrace{X(kf_0)}_{\substack{T_0 \rightarrow \infty \\ f_0 \rightarrow 0 \\ X(f)}} e^{i2\pi k f_0 t} \underbrace{f_0}_{\substack{T_0 \rightarrow \infty \\ f_0 \rightarrow 0 \\ df}}$$

Diagram illustrating the limit process of the Fourier series expansion for aperiodic signals. The expression shows the periodic signal  $x_p(t)$  as a sum of Fourier coefficients  $X(kf_0)$  multiplied by complex exponentials  $e^{i2\pi k f_0 t}$  and the fundamental frequency  $f_0$ . The limit process is indicated by arrows and labels:  $T_0 \rightarrow \infty$  and  $f_0 \rightarrow 0$  lead to the continuous spectrum  $X(f)$  and the differential frequency  $df$ .

# Segnali Aperiodici

$$\begin{array}{c}
 T_0 \rightarrow \infty \\
 f_0 \rightarrow 0 \\
 \swarrow \\
 x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \underbrace{X(kf_0)}_{\substack{T_0 \rightarrow \infty \\ f_0 \rightarrow 0 \\ \downarrow \\ X(f)}} e^{i2\pi k f_0 t} \underbrace{f_0}_{\substack{T_0 \rightarrow \infty \\ f_0 \rightarrow 0 \\ \searrow \\ df}}
 \end{array}
 \quad \begin{array}{c}
 \swarrow \\
 x(t)
 \end{array}$$

Somma di valori di una funzione valutata su punti equispaziati e moltiplicati per il valore della distanza tra due punti infinitesima = integrale

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{i2\pi f t} df \quad \text{Integrale di Fourier}$$

Per determinare X(f) effettuo il limite per il coefficiente di Fourier modificato

$$X(f) = \lim_{\substack{T_0 \rightarrow \infty \\ f_0 \rightarrow 0}} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t) e^{-i2\pi k f_0 t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt \quad \text{Trasformata di Fourier}$$

# Segnali Aperiodici

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df$$

**equazione di SINTESI:**

ricostruzione del segnale a partire dalle sue armoniche

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

**equazione di ANALISI:** studio del contenuto in frequenza del segnale

$$x(t) \Longleftrightarrow X(f) \quad \text{oppure} \quad \begin{aligned} x(t) &= \mathcal{F}^{-1}(X(f)) \\ X(f) &= \mathcal{F}(x(t)) \end{aligned}$$

**La conoscenza del segnale  $x(t)$  nel dominio temporale è equivalente alla conoscenza della trasformata di Fourier nel dominio delle frequenze**

# Segnali Aperiodici

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

$$X(f) = A(f) e^{i\phi(f)}$$

$$A(f) = |X(f)| \quad \text{spettro in ampiezza}$$

$$\phi(f) = \arg(X(f)) \quad \text{spettro in fase}$$

$$x(t) \Longleftrightarrow X(f)$$

Cosa abbiamo fatto?

Abbiamo schematizzato un segnale aperiodico come un segnale periodico con periodo di ripetizione infinito e quindi con frequenza fondamentale infinitesima.

## Segnale periodico:

- Somma (serie) di componenti sinusoidali ad armoniche discrete con ampiezza finita e con frequenza multipla della frequenza fondamentale

## Segnale aperiodico:

- Somma (integrale) di componenti sinusoidali ad armoniche continue con ampiezza infinitesima  $|X(f)|df$  e con frequenza  $f$  variabile con continuità

# Segnali Periodici e Aperiodici

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

$$x(t) \Longleftrightarrow X_k$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{i2\pi f t} df$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

$$x(t) \Longleftrightarrow X(f)$$

## Segnale periodico:

- Somma (serie) di componenti sinusoidali a armoniche discrete con ampiezza finita e con frequenza multipla della frequenza fondamentale

## Segnale aperiodico:

- Somma (integrale) di componenti sinusoidali a armoniche continue con ampiezza infinitesima  $|X(f)|df$  e con frequenza  $f$  variabile con continuità

# Teoremi e proprietà della trasformata di Fourier

## Linearità:

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \Rightarrow X(f) = aX_1(f) + bX_2(f)$$

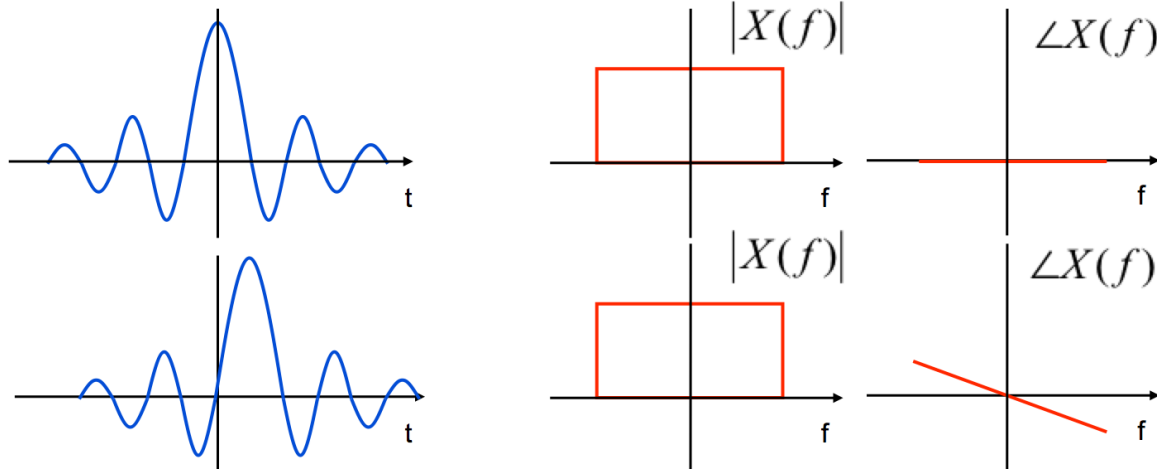
## Dualità:

$$x(t) \Leftrightarrow X(f) \rightarrow X(t) \Leftrightarrow x(-f)$$

## Teorema del ritardo:

$$y(t) = x(t - t_0) \Leftrightarrow Y(f) = X(f)e^{-i2\pi ft_0}$$

un ritardo temporale modifica lo spettro di fase della trasformata (cambia la "parità"...) ma non lo spettro in ampiezza

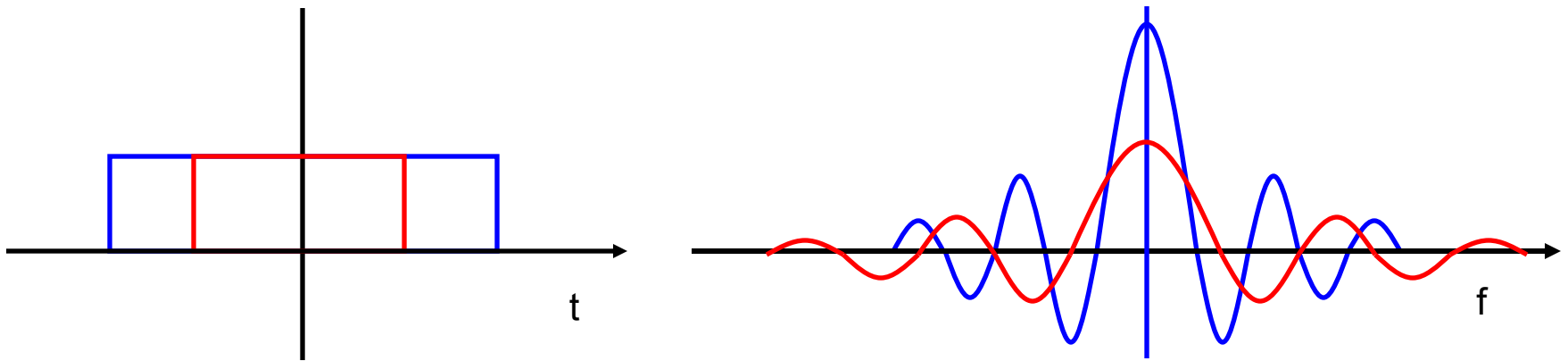


# Teoremi e proprietà della trasformata di Fourier

## Teorema del cambiamento di scala:

$$x(\alpha t) \Longleftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

Dilatazione dell'asse dei tempi (rallentamento del segnale) = compressione dell'asse delle frequenze (aumenta l'importanza delle basse frequenze)



## Teorema di derivazione e integrazione:

$$\frac{dx(t)}{dt} \Longleftrightarrow i2\pi f \cdot X(f)$$

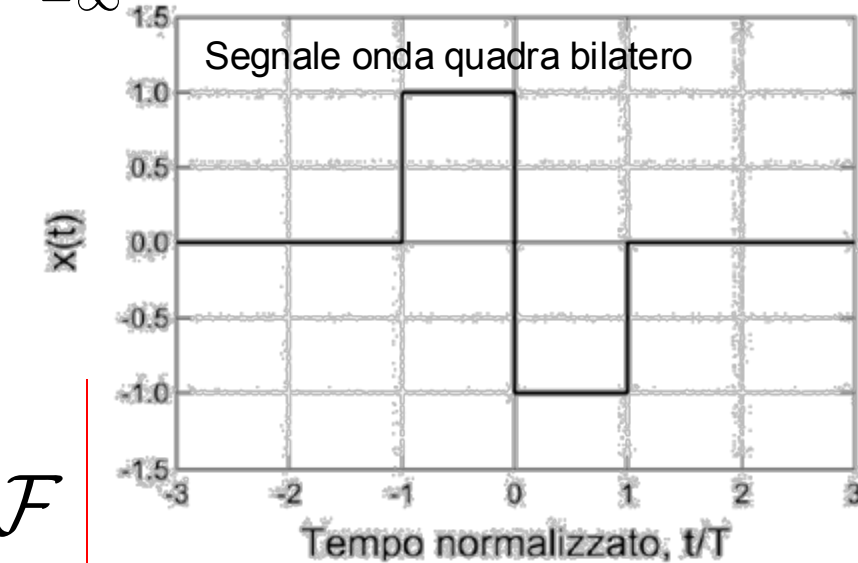
$$\int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha \Longleftrightarrow \frac{X(f)}{i2\pi f}$$

**Derivazione = soppressione basse freq.**

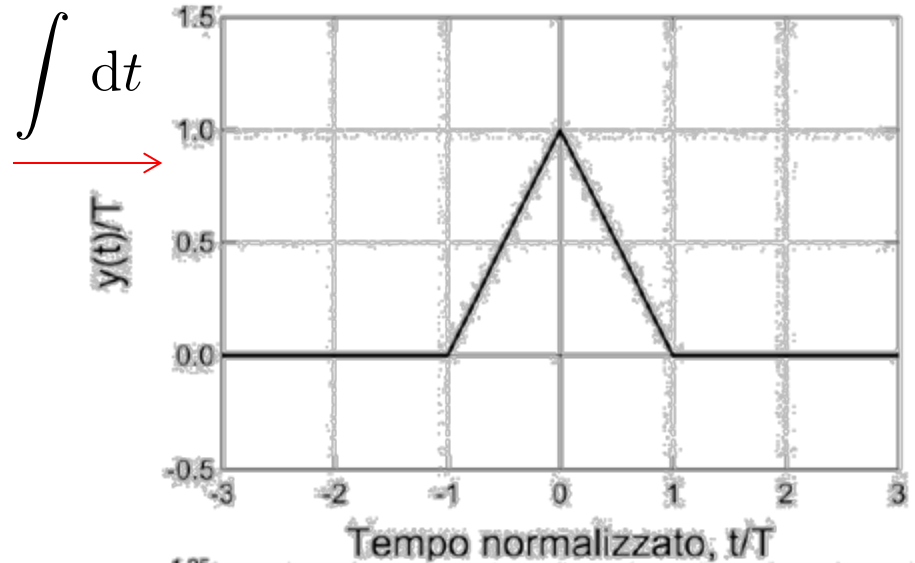
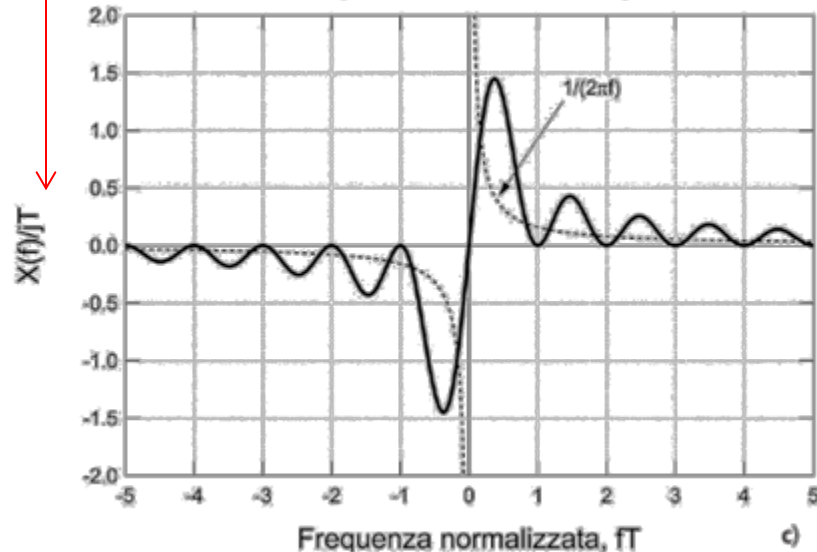
**Integrazione = soppressione alte freq.**

# Teoremi e proprietà della trasformata di Fourier

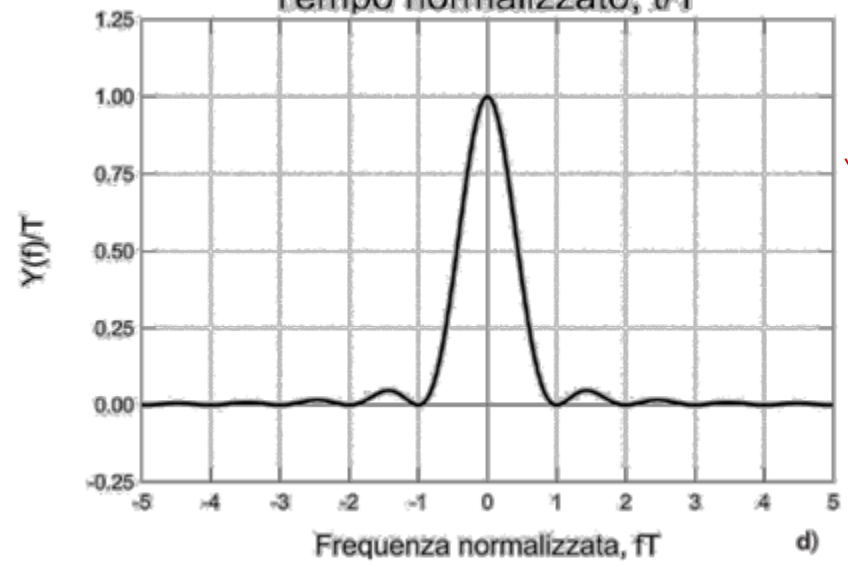
$$\int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha \iff \frac{X(f)}{i2\pi f} \quad \text{Integrazione = soppressione alte freq.}$$



$\mathcal{F}$

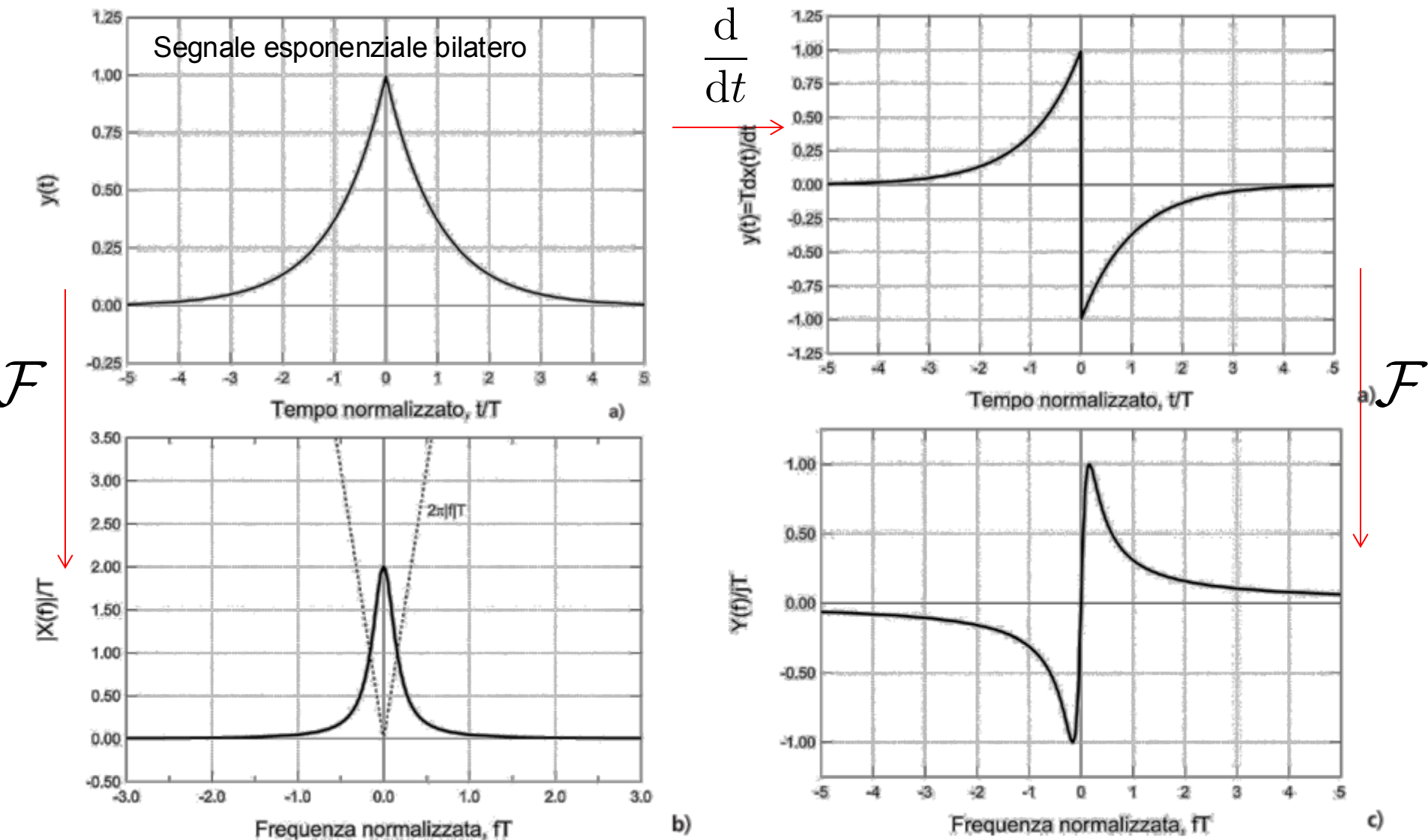


$\mathcal{F}$



# Teoremi e proprietà della trasformata di Fourier

$$\frac{dx(t)}{dt} \Longleftrightarrow i2\pi f \cdot X(f) \quad \text{Derivazione = soppressione basse freq.}$$



# Teoremi e proprietà della trasformata di Fourier

**Teorema del prodotto e convoluzione:**

$$z(t) = x(t) \otimes y(t) \quad \Leftrightarrow \quad Z(f) = X(f)Y(f)$$

$$z(t) = x(t)y(t) \quad \Leftrightarrow \quad Z(f) = X(f) \otimes Y(f)$$

$$a(t) \otimes b(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\tau)b(t - \tau) \, d\tau$$

# Teoremi e proprietà della trasformata di Fourier

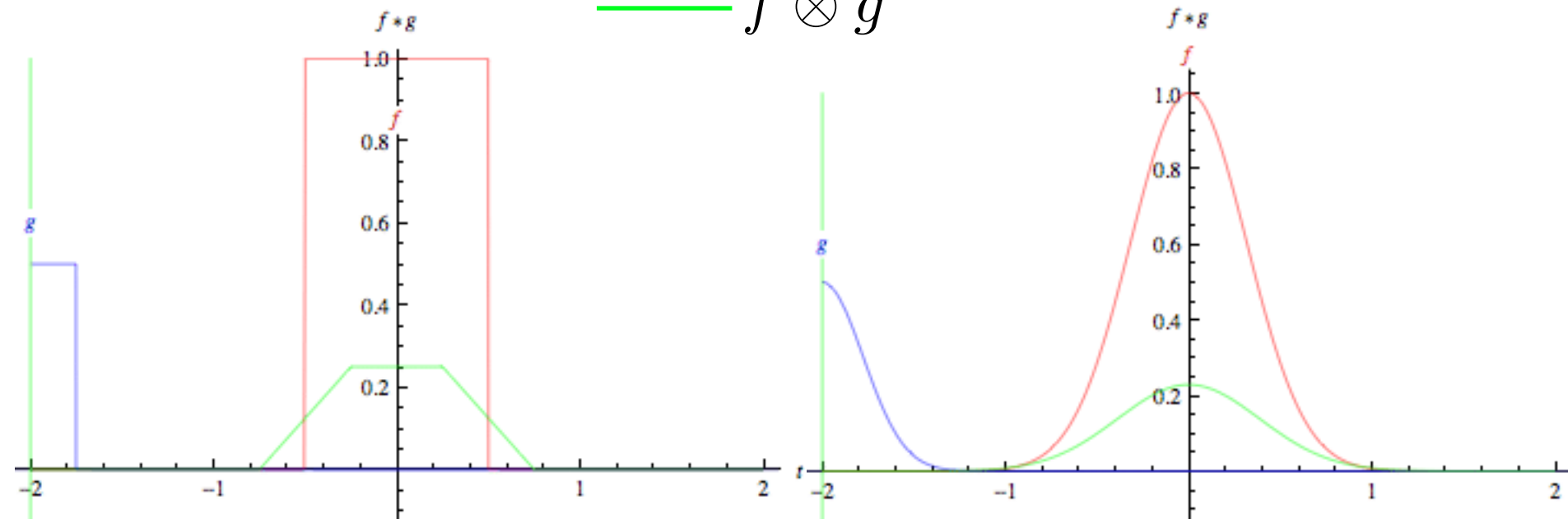
## Teorema del prodotto e convoluzione:

$$z(t) = x(t) \otimes y(t) \Leftrightarrow Z(f) = X(f)Y(f)$$

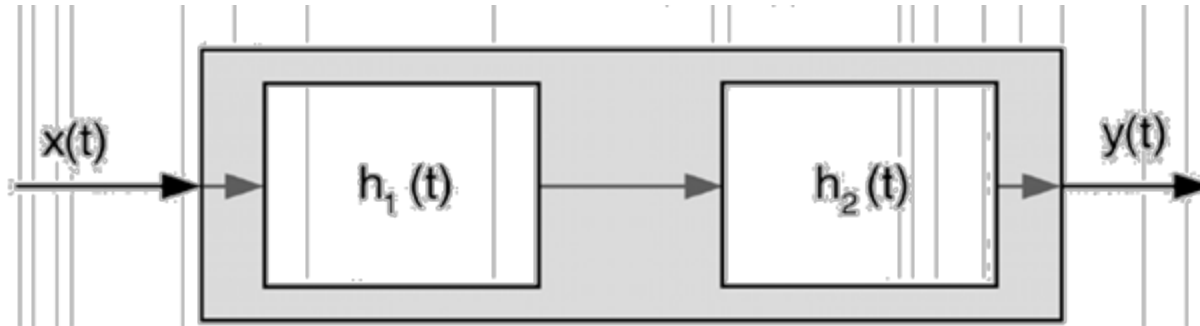
$$z(t) = x(t)y(t) \Leftrightarrow Z(f) = X(f) \otimes Y(f)$$

$$a(t) \otimes b(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\tau)b(t - \tau) d\tau$$

—  $f \otimes g$



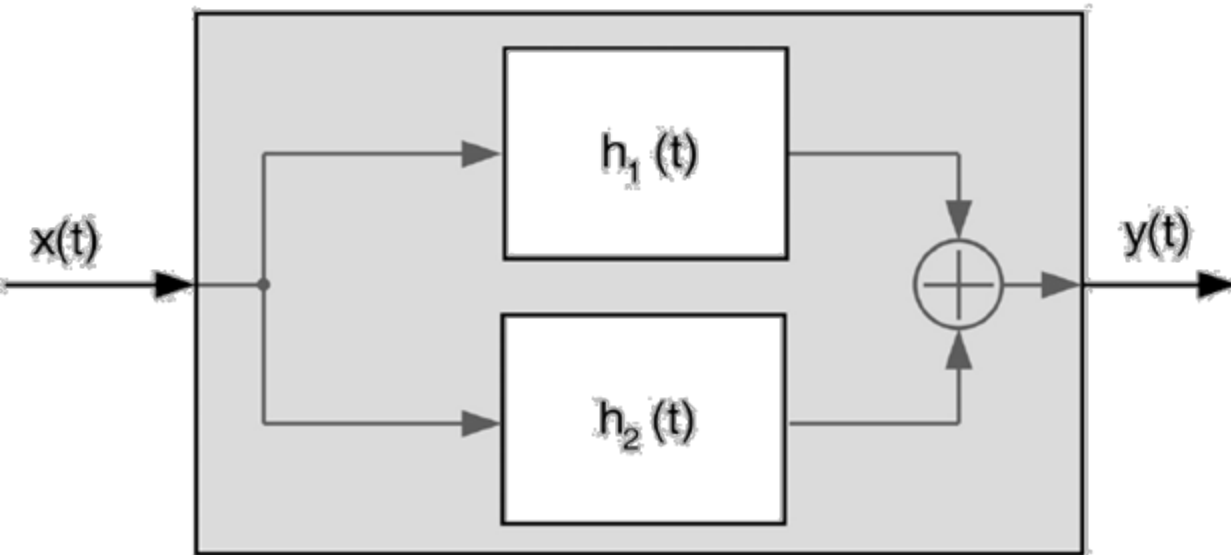
## Sistemi in cascata e in parallelo



$$h(t) = h_1(t) \otimes h_2(t)$$

$$H(f) = H_1(f) \cdot H_2(f)$$

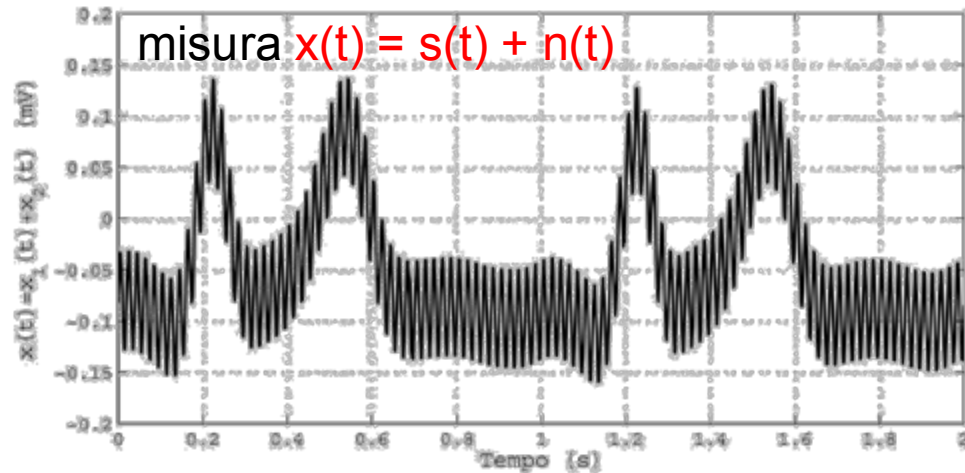
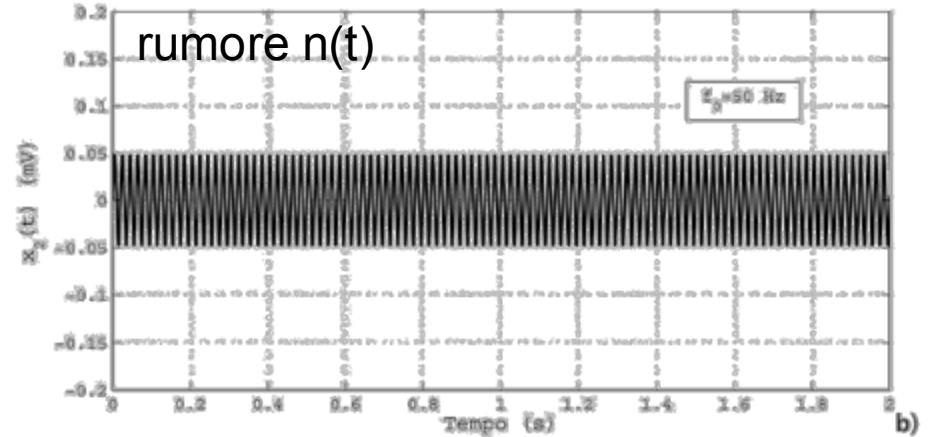
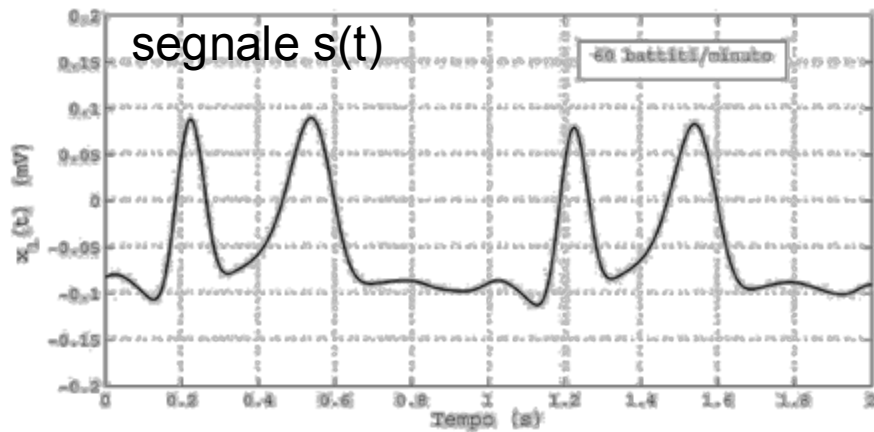
(questo è vero se i circuiti sono disaccoppiati, ovvero se la loro risposta impulsiva è uguale a quella che avrebbero in configurazione isolata)



$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

$$H(f) = H_1(f) + H_2(f)$$

# Sovrapposizione di segnali



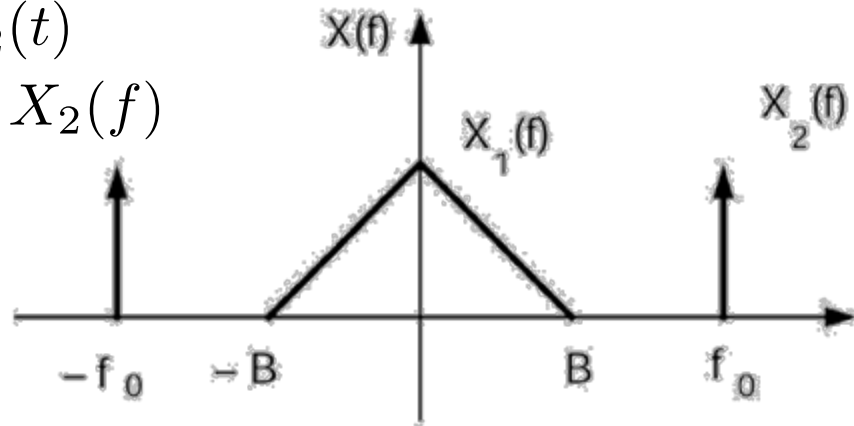
Nel dominio del tempo, dalla misura non è immediato estrarre il segnale

Se invece osservo nel dominio delle frequenze....

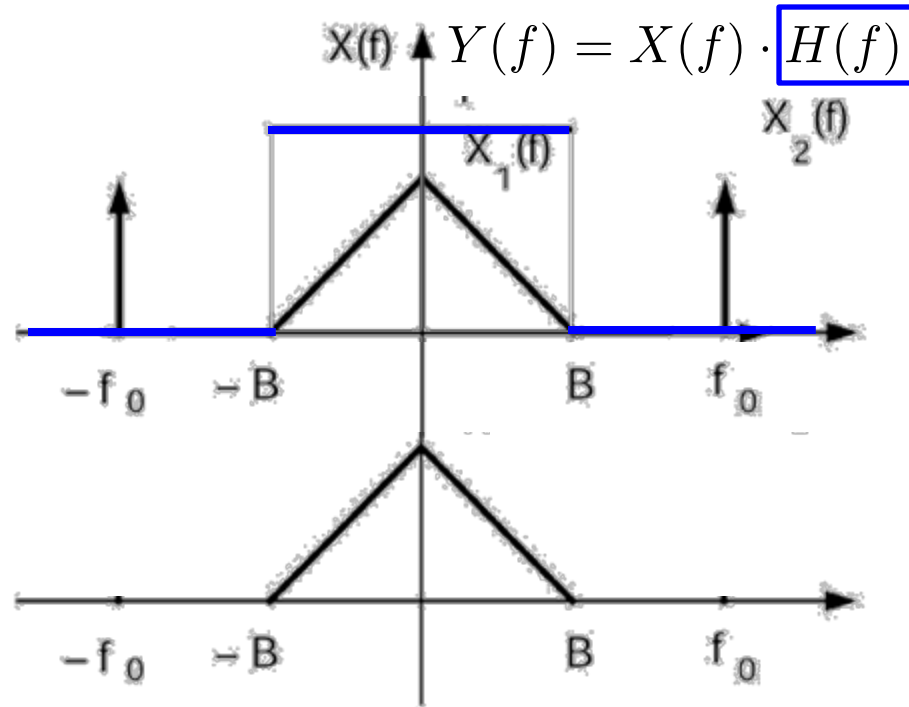
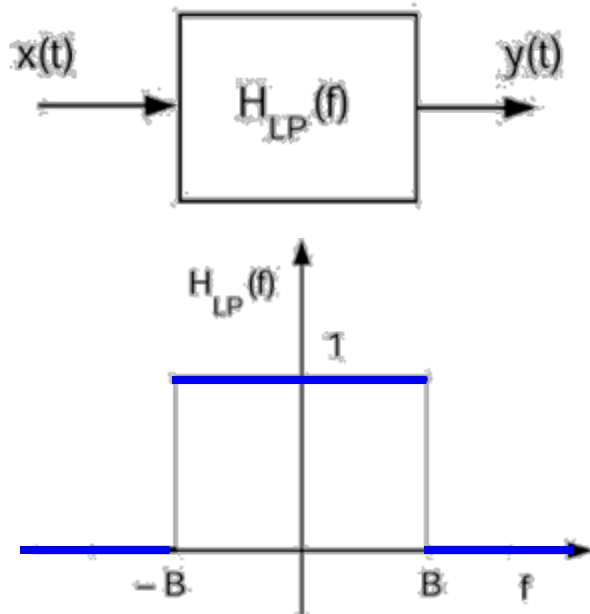
# Sovrapposizione di segnali

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

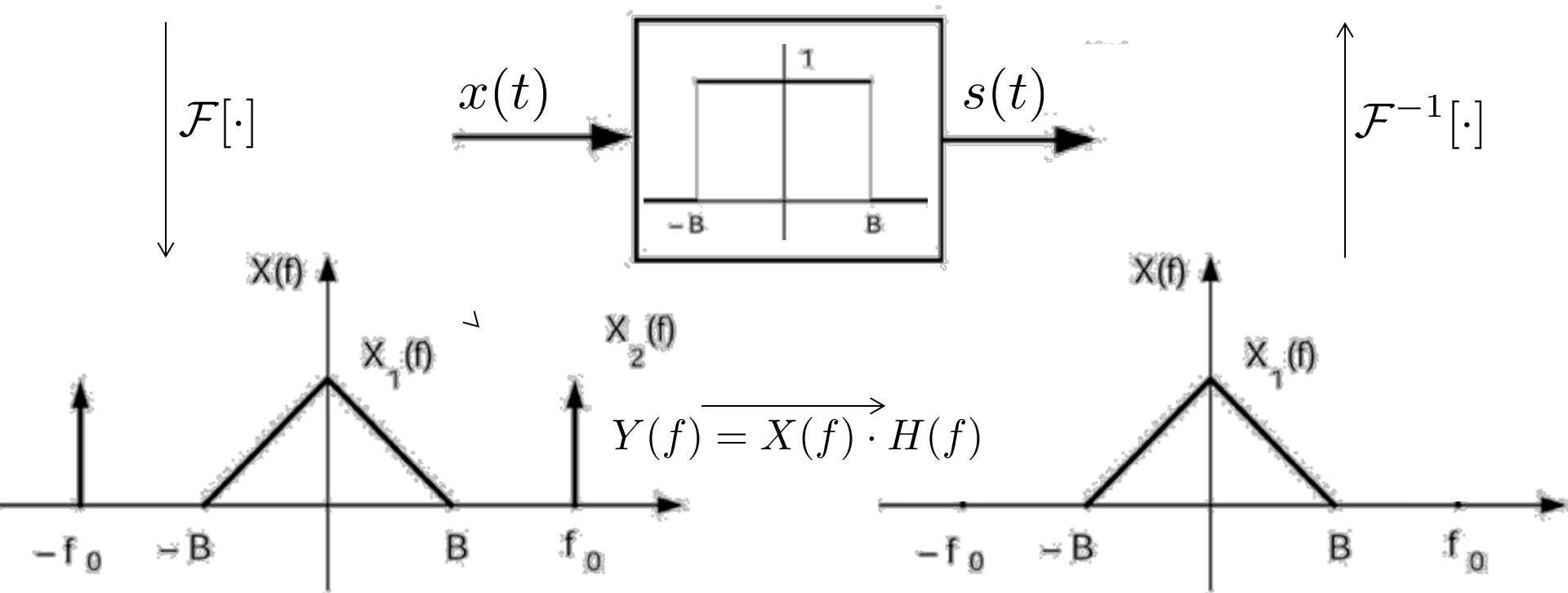
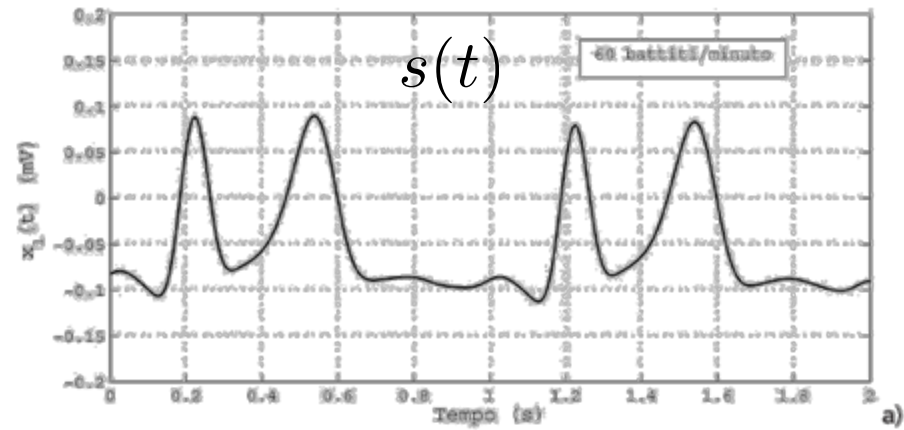
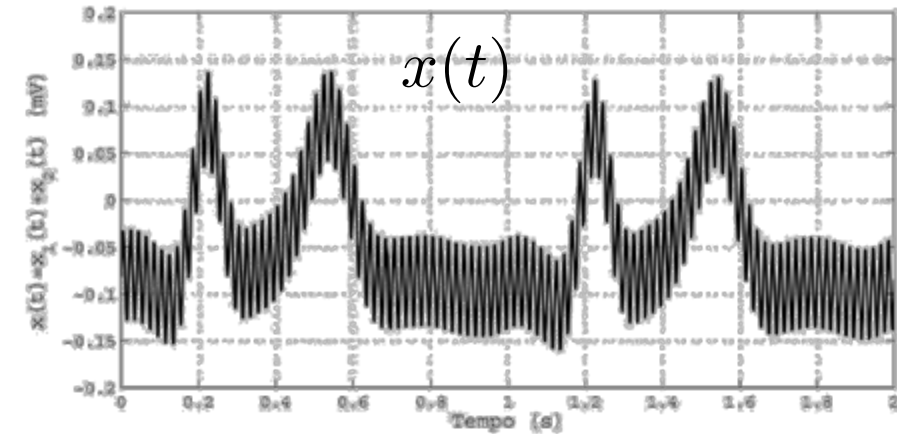
$$X(f) = X_1(f) + X_2(f)$$



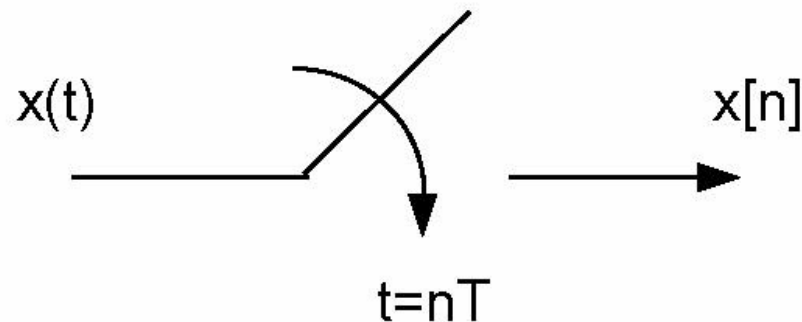
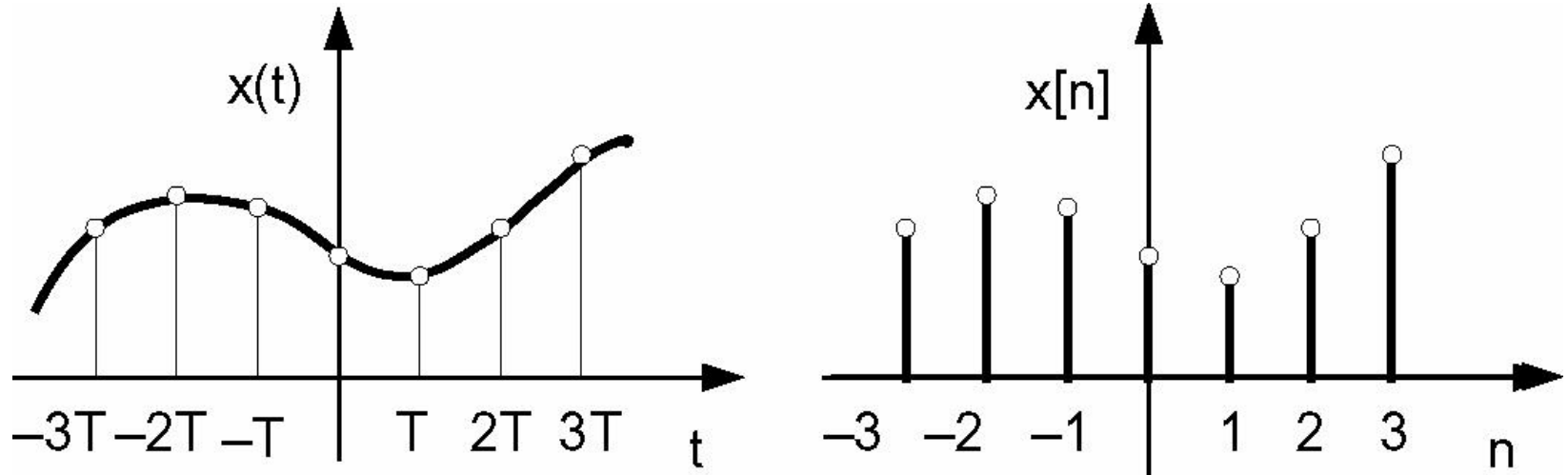
Segnale e rumore insistono su due regimi di frequenze distinte. Posso applicare un **filtro**



# Sovrapposizione di segnali



# Dal tempo continuo al tempo discreto

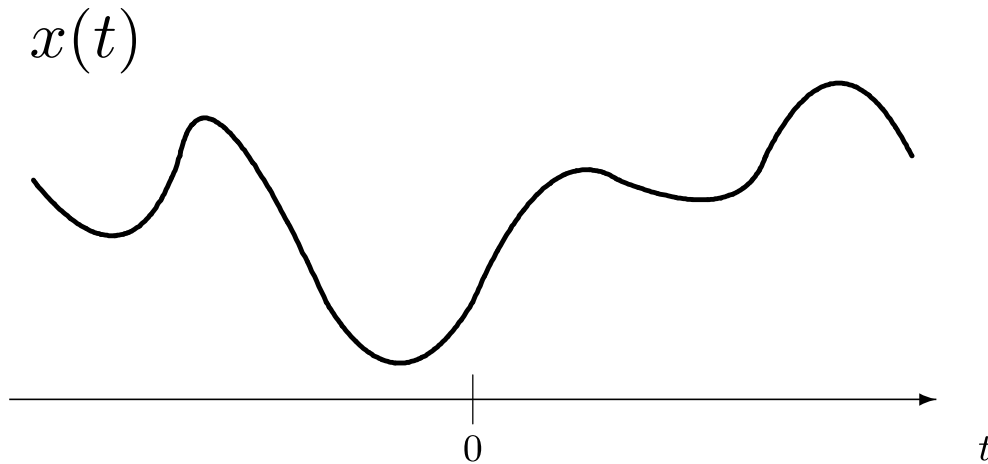


$$f_c = \frac{1}{T} \quad \text{Frequenza di campionamento}$$

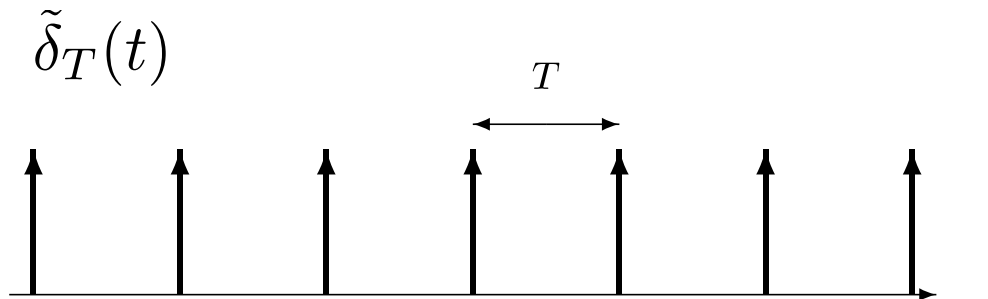
Sistema ideale: estrae il valore  $x(t)$  al tempo di campionamento

Sistema (ADC) reale: estrae il valore  $x(t)$  digitalizzato al tempo di campionamento

# Trasformata di Fourier di una sequenza

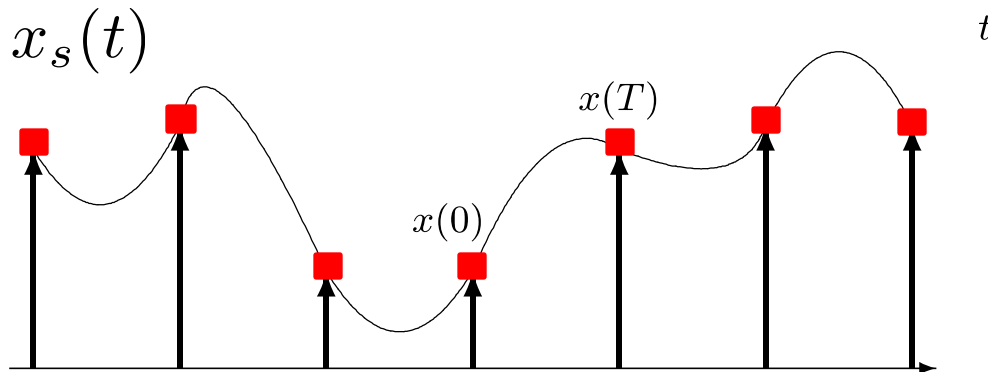


$$T \quad \text{periodo di campionamento}$$
$$f_C = \frac{1}{T} \quad \text{frequenza di campionamento}$$



“treno di delta”

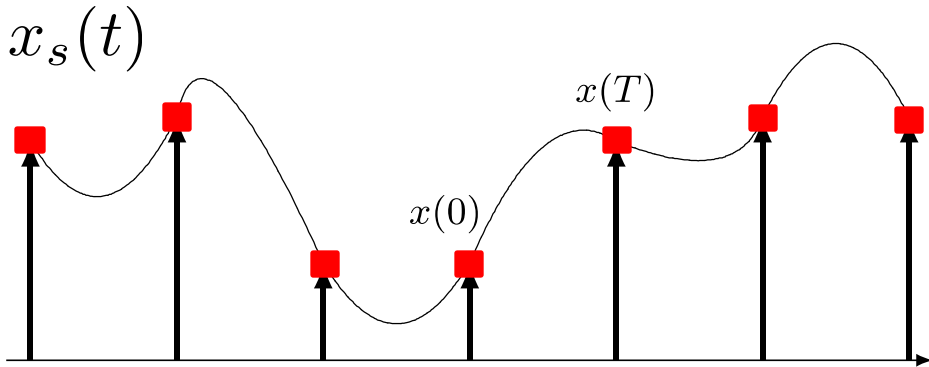
$$\tilde{\delta}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$



**Segnale a tempo discreto  $x_s(t)$ :**  
sequenza di impulsi le cui  
ampiezze rappresentano il segnale  
 $x(t)$  agli istanti di campionamento

$$x(t) \cdot \tilde{\delta}_T(t) = x_s(t)$$

# Trasformata di Fourier di una sequenza



$$x_s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \delta(t - nT)$$

“Delta” di Dirac  $\delta(x) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$

Proprietà utile:  $f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0)$

$$\mathcal{F}[f(t)\delta(t - t_0)] = f(t_0)\mathcal{F}[\delta(t - t_0)]$$

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \delta(t - nT)$$

# Trasformata di Fourier di una sequenza

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \delta(t - nT)$$

$x_s(t)$  è (in generale) un segnale aperiodico  $\rightarrow$  applico il formalismo noto

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (\text{Trasformata di Fourier di un segnale aperiodico})$$

$$X_s(f) = \mathcal{F}\left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \delta(t - nT) \right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \mathcal{F}[\delta(t - nT)]$$

$$\left. \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-i2\pi ft} dt = e^{-i2\pi ft}|_{t=0} = 1 \\ \mathcal{F}[\delta(t)] = 1 \\ \mathcal{F}[x(t - t_0)] = X(f)e^{-i2\pi ft_0} \quad \text{Teorema del ritardo} \end{array} \right\} \mathcal{F}[\delta(t - nT)] = 1 \cdot e^{-i2\pi n f T}$$

$$X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-i2\pi n f T}$$

**Trasformata di Fourier di una sequenza**

**Equazione di analisi per un segnale aperiodico a tempo discreto**

# Trasformata di Fourier di una sequenza

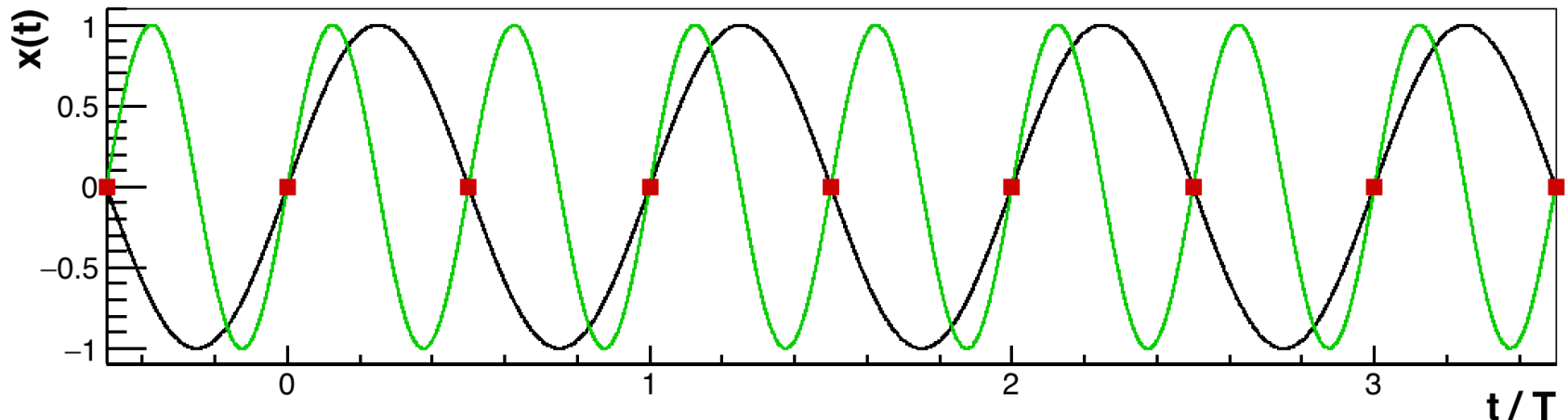
$$X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-i2\pi n f T} \quad \text{Trasformata di Fourier di una sequenza}$$

$$X_s\left(f + \frac{1}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-i2\pi n f T} e^{-i2\pi n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-i2\pi n f T} = X_s(f)$$

**Proprietà: periodicità con periodo**  $f_C = \frac{1}{T}$

$X_s(f)$  completamente definita dal suo comportamento in  $\left[-\frac{f_C}{2}, \frac{f_C}{2}\right] = \left[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right]$

Infatti, per segnali a tempo discreto, non si può distinguere tra due segnali sinusoidali di frequenza  $f_0$  e  $f_0 + k/T$

$$e^{i2\pi(f_0 + m/T)nT} = e^{i2\pi(f_0 nT)} e^{i2\pi mn} = e^{i2\pi(f_0 nT)}$$


# Trasformata di Fourier di una sequenza

Trasformata inversa: multiplico per un fattore di fase e integro nel periodo di base

$$\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} X_s(f) e^{i2\pi f n T} df = \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) e^{-i2\pi f k T} e^{i2\pi f n T} df = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} e^{i2\pi f (n-k) T} df$$

$$\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} e^{i2\pi f (n-k) T} df = \frac{\sin(\pi(n-k))}{\pi(n-k)T} = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \frac{1}{T} & k = n \end{cases}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} e^{i2\pi f (n-k) T} df = x(nT) \cdot \frac{1}{T}$$

$$x(nT) = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} X_s(f) e^{i2\pi f n T} df$$

**Antitrasformata di Fourier di una sequenza**

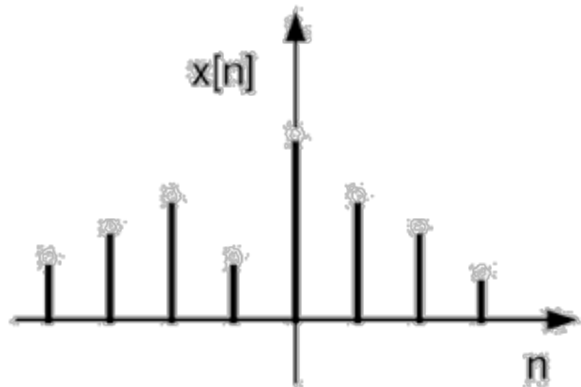
**Equazione di sintesi per un segnale aperiodico a tempo discreto**

**Per esprimere una sequenza campionata con frequenza  $f_c=1/T$  sono necessarie solamente le frequenze nell'intervallo  $[0, 1/T]$**

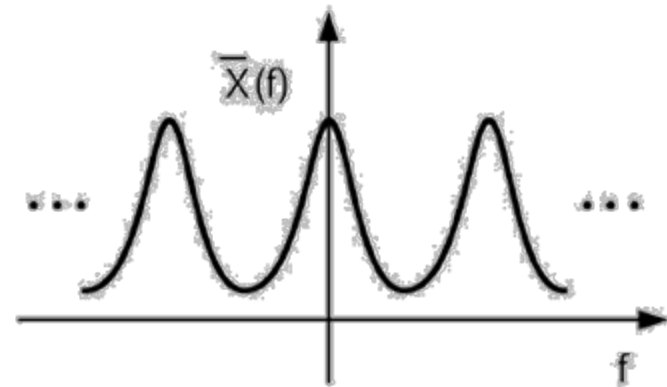
# Segnali aperiodici a tempo discreto e continuo

$$x(nT) = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} X_s(f) e^{i2\pi f nT} df$$

$$X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-i2\pi n f T}$$



Segnale a tempo discreto aperiodico



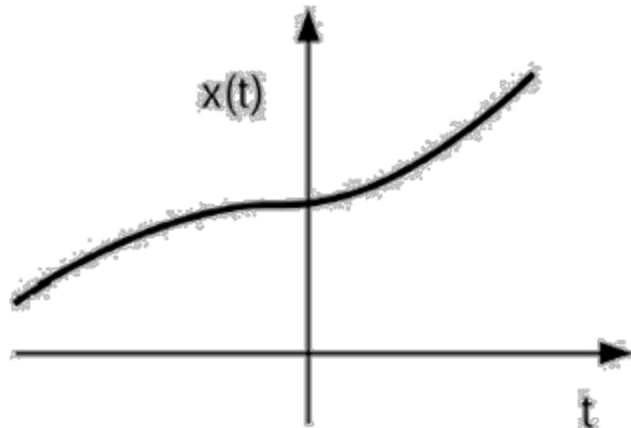
Spettro continuo periodico

**segnale aperiodico a tempo discreto → spettro in frequenza periodico**

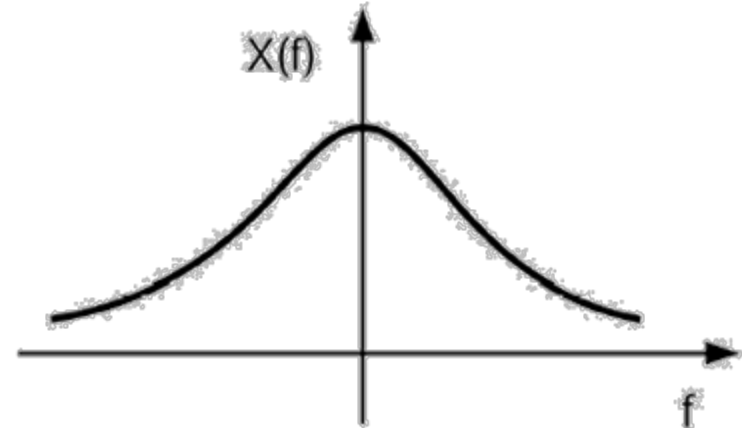
# Segnali aperiodici a tempo discreto e continuo

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt$$



Segnale a tempo continuo aperiodico



Spettro continuo aperiodico

**Segnale aperiodico a tempo continuo → spettro in frequenza aperiodico**

# Trasformata discreta di Fourier (DFT)

Finora abbiamo trattato sequenze con numero infinito di termini.

**I sistemi di acquisizione ADC acquisiscono un numero limitato di campioni.**

- sequenza infinita  $\rightarrow$  intervallo di campionamento infinito  $\rightarrow df \rightarrow 0$
- sequenza finita  $\rightarrow$  intervallo di campionamento finito,  $T_0$   $\rightarrow \Delta f = 1/T_0$

Nel caso di un segnale campionato con  $N_0$  campioni con frequenza  $f_c = 1/T$ , identifichiamo la sequenza periodica, con periodo  $N_0$ ,  $x[n] = x[n + N_0]$  con un insieme di  $N_0$  numeri reali  $[x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]$

$$X_{s,k} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-i2\pi nk/N_0}$$

**equazione di ANALISI:**  
studio del contenuto in frequenza del segnale

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} X_{s,k} e^{i2\pi nk/N_0}$$

**equazione di SINTESI:**  
ricostruzione del segnale a partire dalle sue armoniche

**Nel caso di sequenze periodiche la rappresentazione mediante antitrasformata discreta consiste in una somma con un numero finito di addendi**

# Trasformata discreta di Fourier (DFT)

$$X_{s,k} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-i2\pi nk/N_0}$$

**equazione di ANALISI:**  
studio del contenuto in frequenza  
del segnale

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} X_{s,k} e^{i2\pi nk/N_0}$$

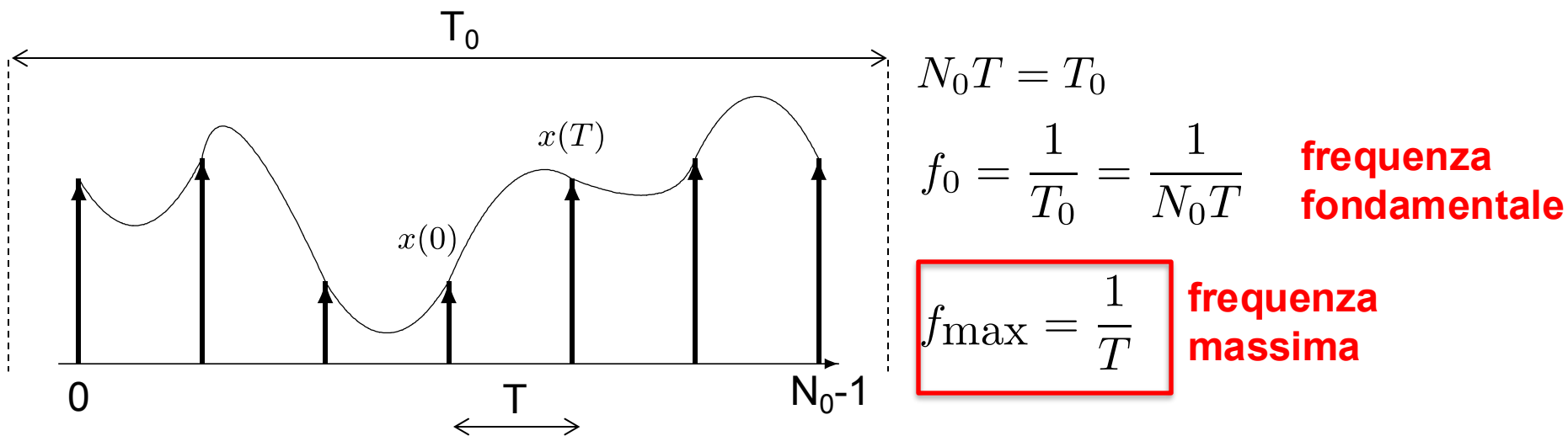
**equazione di SINTESI:**  
ricostruzione del segnale a partire  
dalle sue armoniche

**Nel caso di sequenze periodiche la rappresentazione mediante antitrasformata discreta consiste in una somma con un numero finito di addendi**

Infatti la trasformata di una sequenza periodica di periodo  $N_0$  è essa stessa periodica con il medesimo periodo:

$$\begin{aligned} X_{s,k+N_0} &= \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-i2\pi n(k+N_0)/N_0} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-i2\pi nk/N_0} e^{-i2\pi n} = \\ &= \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-i2\pi nk/N_0} = X_{s,k} \end{aligned}$$

# Trasformata discreta di Fourier (DFT)

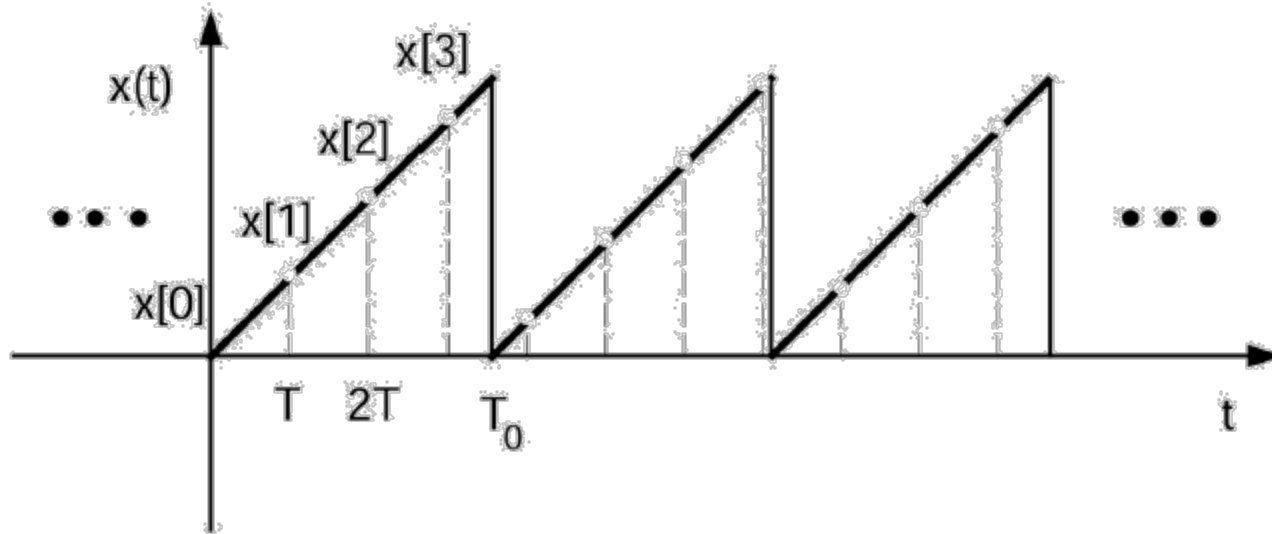


$$x(nT) = \sum_{k=0}^{N_0-1} X_{s,k} e^{i2\pi nk/N_0} = \sum_{k=0}^{N_0-1} X_{s,k} e^{i2\pi \frac{k}{N_0 T} nT}$$

$x[n]$  può essere espressa come somma finita di  $N_0$  termini esponenziali complessi che oscillano con frequenze  $f_k = (k / N_0 T)$ , dette armoniche, multiple della frequenza fondamentale  $f_0 = 1 / N_0 T$

# Campionamento di un segnale periodico

Campionamento di segnale analogico periodico  $\Rightarrow$  Sequenza periodica



Affinché si abbia una sequenza periodica è necessario che un numero intero  $N_0$  di intervalli di campionamento sia esattamente pari a un qualche numero intero  $m$  di periodi di ripetizione  $T_0$  del segnale originario:  $N_0 T = m T_0$

Per fare questo, l'ADC deve essere "sincronizzato" con il segnale da acquisire


# Teorema del campionamento

$$x[n] = x(nT) \quad \text{Segnale campionato} \quad X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-i2\pi n f T}$$

$$x(t = nT) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) e^{i2\pi \nu n T} d\nu \quad \text{Trasformata del segnale continuo } x(t) \text{ associato al segnale campionato } x[n]$$

$$X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) e^{i2\pi \nu n T} d\nu \right] e^{-i2\pi n f T} = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi (f - \nu) n T} d\nu$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi k t f} \quad \text{Applico la trasformata di Fourier al "treno di delta"}$$

 Transformo  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-i2\pi n f T} = f_C \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k f_C)$  Sostituisco la serie di esponenziali complessi con la serie di delta di Dirac

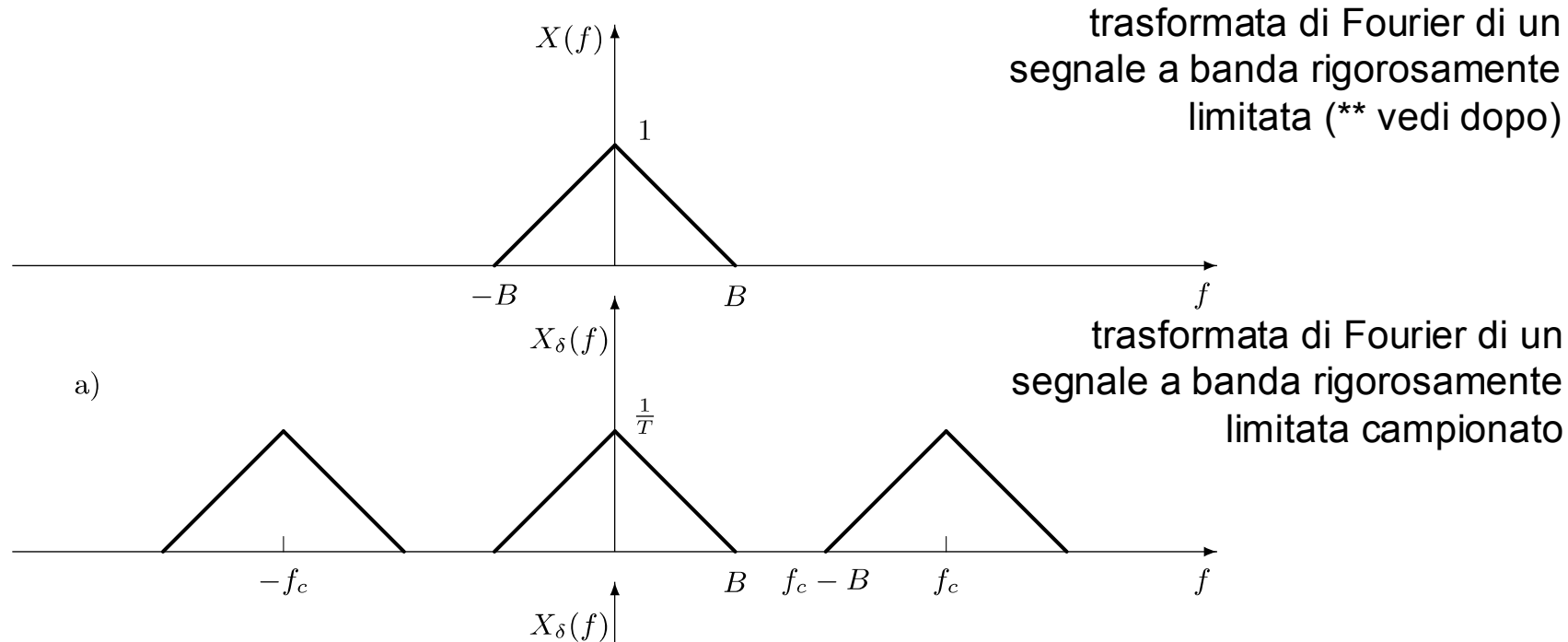
$$X_s(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - (f - k f_C)) d\nu = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - k f_C)$$

praticamente è un "treno" di trasformate  
(del segnale continuo  $x(t)$ )

# Teorema del campionamento

$$X_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kf_C) \quad \text{con } f_C = \frac{1}{T}$$

**La trasformata di Fourier di una sequenza  $x[n]$  ottenuta per campionamento del segnale continuo  $x(t)$  si ricava dalla periodizzazione della trasformata di  $x(t)$  con periodo di ripetizione in frequenza pari alla frequenza di campionamento  $f_C$**



# Densità spettrale di energia e di potenza

Segnale a energia finita  $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t) dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t) \left[ \int_{f=-\infty}^{\infty} X^*(f)e^{-i2\pi ft} df \right] dt \\ &= \int_{f=-\infty}^{\infty} X^*(f) \left[ \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt \right] df = \int_{f=-\infty}^{\infty} X^*(f)X(f) df = \int_{f=-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \end{aligned}$$

## Teorema di Parseval

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

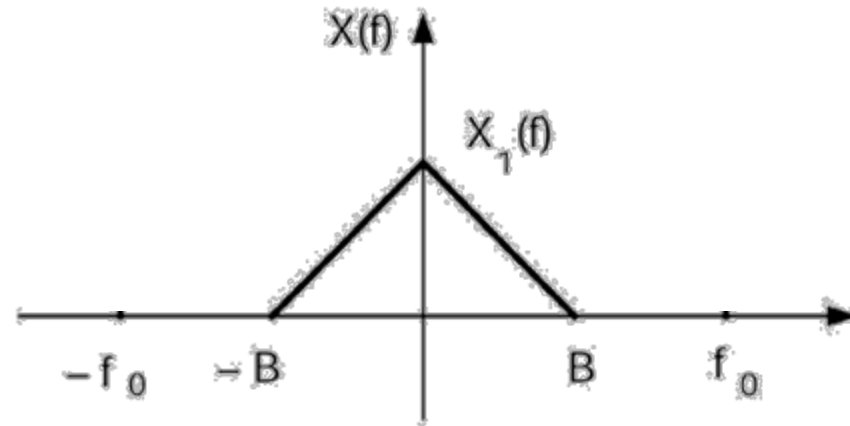
$|X(f)|^2$  **Densità spettrale di energia:** indica quali frequenze contribuiscono a definire l'energia totale del segnale (si misura in  $[u]^2/\text{Hz}$ )

**Lo spettro in ampiezza determina l'energia di un segnale  $x(t)$ , lo spettro in fase è influente**

**Se vogliamo che l'energia si conservi durante un filtraggio, è necessario conservare le frequenze che contribuiscono maggiormente all'energia**

# Banda e durata di un segnale

L'analogo del concetto di durata temporale nel dominio del tempo è il concetto di banda



Si definiscono:

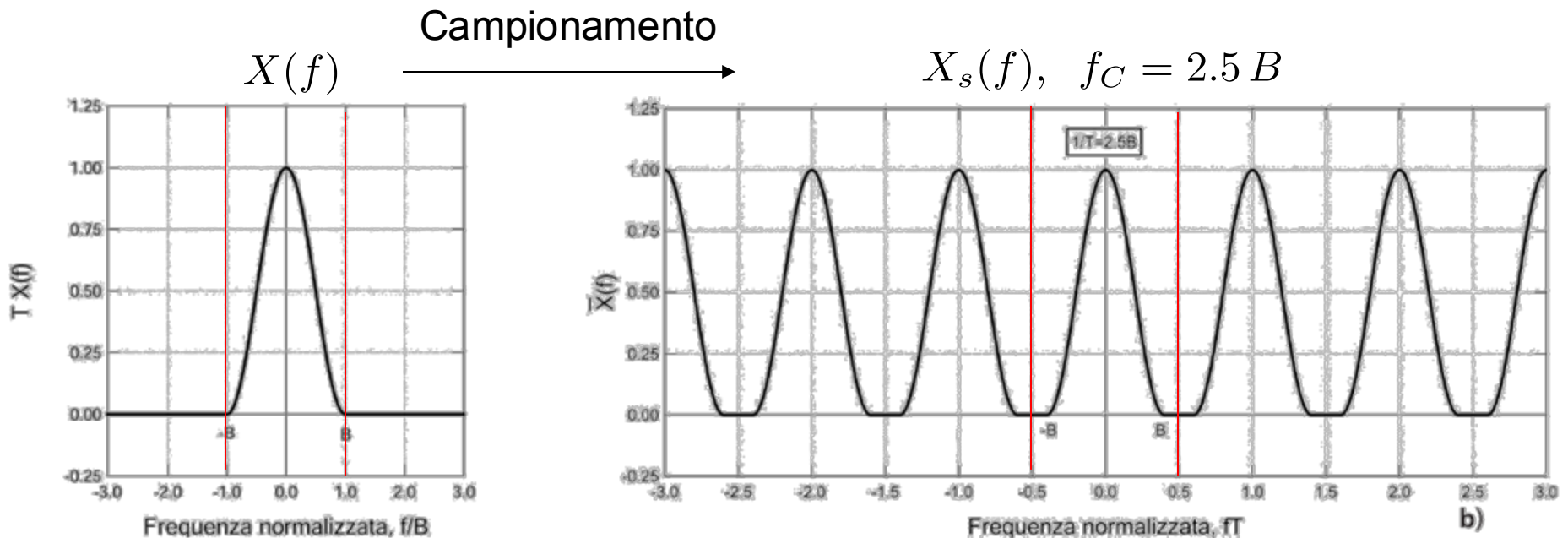
- Segnali a banda rigorosamente limitata (solo i seni...)
- Segnali a banda illimitata
- Segnali a banda praticamente limitata

$$\int_{-B_L}^{B_U} |X(f)|^2 df = \alpha E_x \quad \text{con } 0 < \alpha < 1 \text{ (es. 0.9: "banda al 90\% dell'energia")}$$

# Teorema del campionamento

$$X_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - k f_C) \quad \text{con } f_C = \frac{1}{T}$$

La trasformata di Fourier di una sequenza  $x[n]$  ottenuta per campionamento del segnale continuo  $x(t)$  si ricava dalla periodizzazione della trasformata di  $x(t)$  con periodo di ripetizione in frequenza pari alla frequenza di campionamento  $f_C$



“Banda”: intervallo di frequenze in cui lo spettro è non nullo

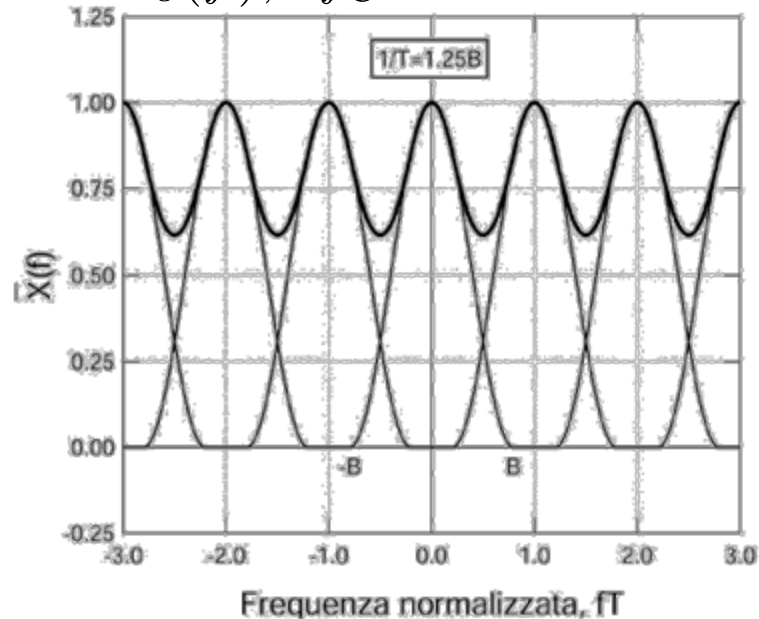
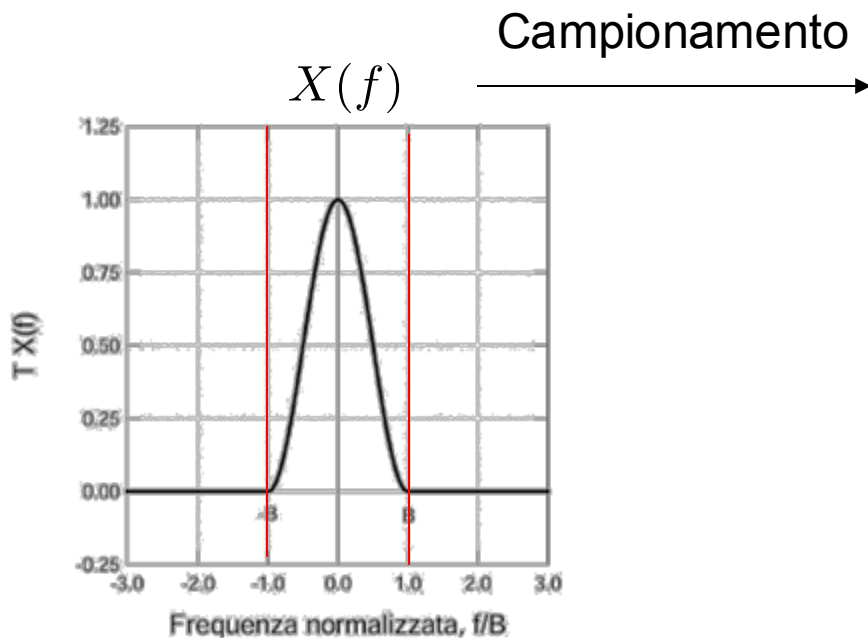
Per frequenze di campionamento “alte”, il periodo frequenziale base contiene una copia non distorta della trasformata del segnale originario

# Teorema del campionamento

$$X_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - k f_C) \quad \text{con } f_C = \frac{1}{T}$$

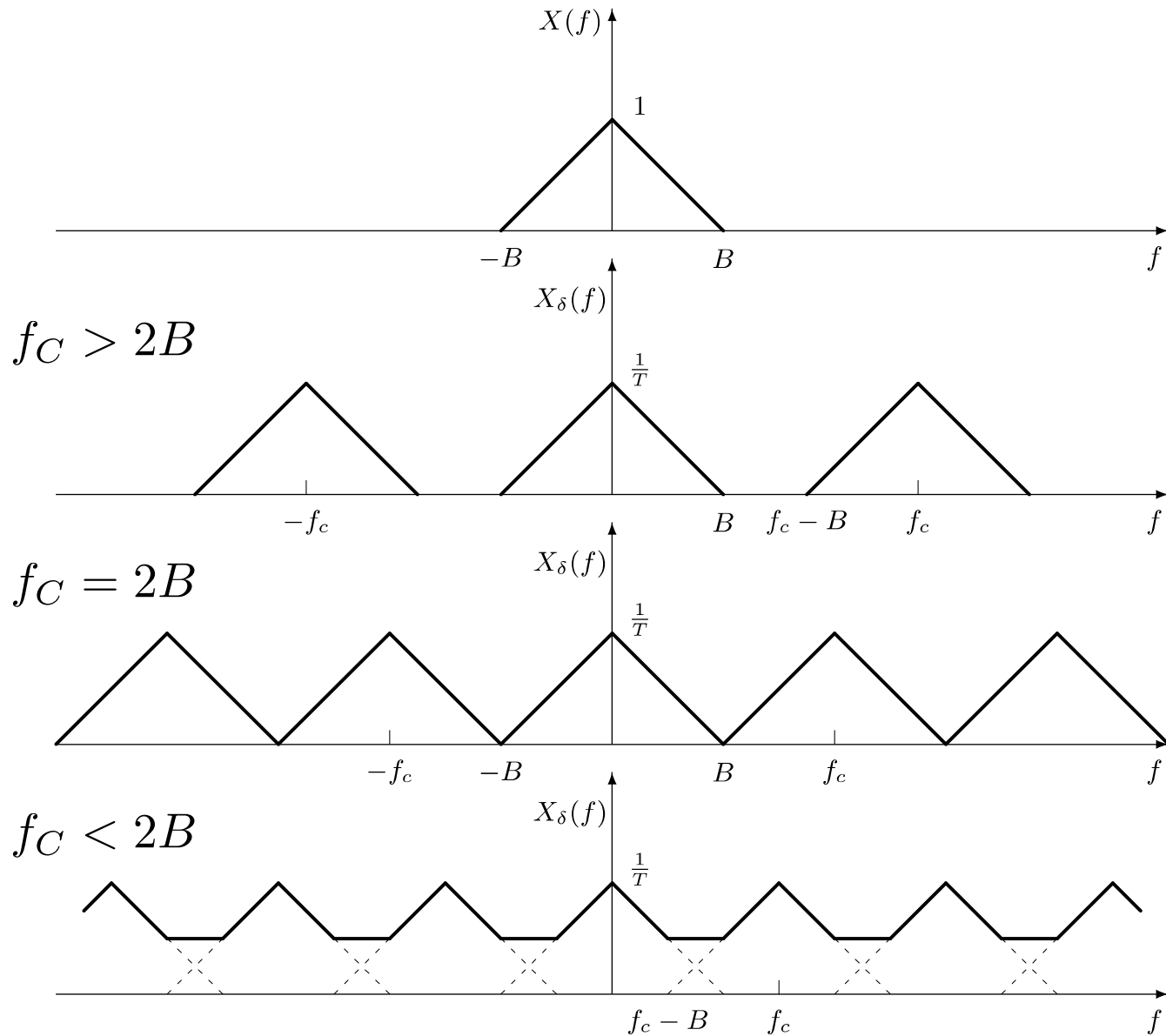
La trasformata di Fourier di una sequenza  $x[n]$  ottenuta per campionamento del segnale continuo  $x(t)$  si ricava dalla periodizzazione della trasformata di  $x(t)$  con periodo di ripetizione in frequenza pari alla frequenza di campionamento  $f_C$

$$X_s(f), \quad f_C = 1.25 B$$



Per frequenze di campionamento “basse”, il periodo  
frequenziale base contiene una copia DISTORTA  
della trasformata del segnale originario

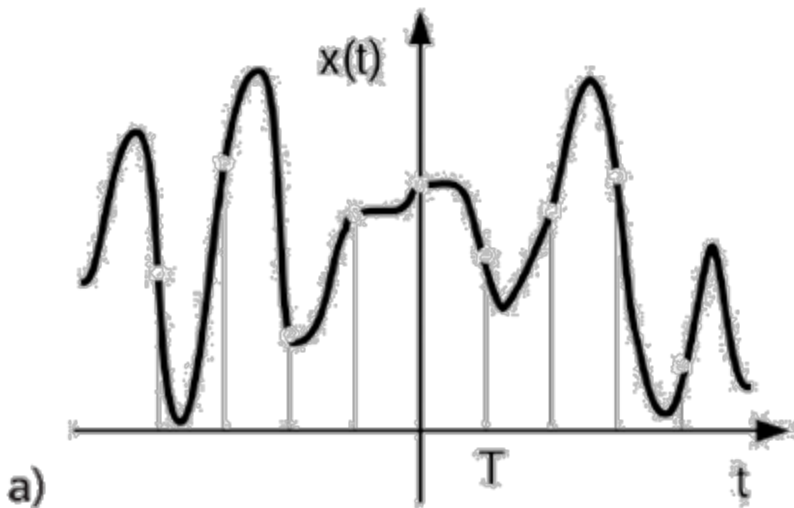
# Teorema del campionamento



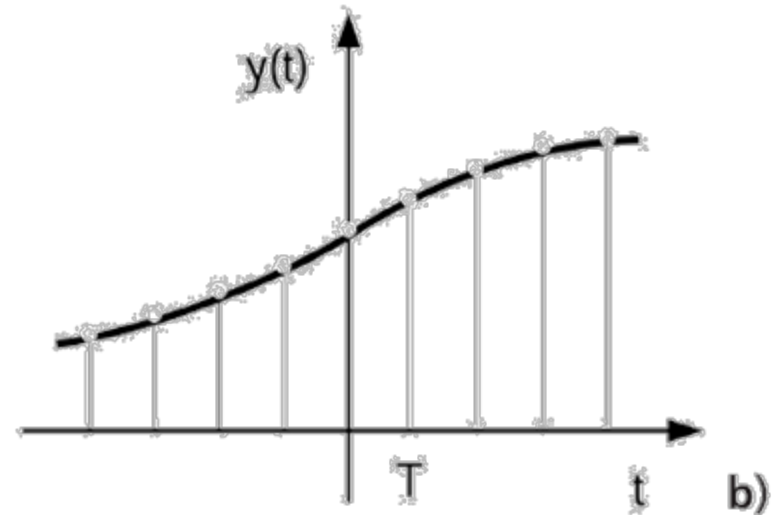
# Teorema del campionamento

**Teorema di Nyquist-Shannon:** dato un segnale  $x(t)$  a banda limitata, la minima frequenza necessaria per campionare il segnale  $x(t)$  evitando aliasing e quindi ricostruire il segnale originale senza perdita di informazione è data dal doppio della banda del segnale.

$$f_C = \frac{1}{T} \geq 2B$$

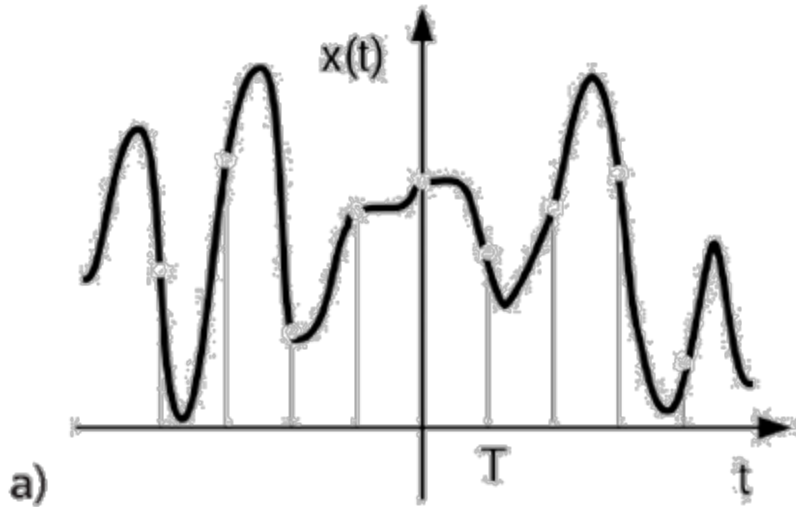


Alta rapidità di variazione  $\rightarrow$  larga banda.  
Segnale sottocampionato

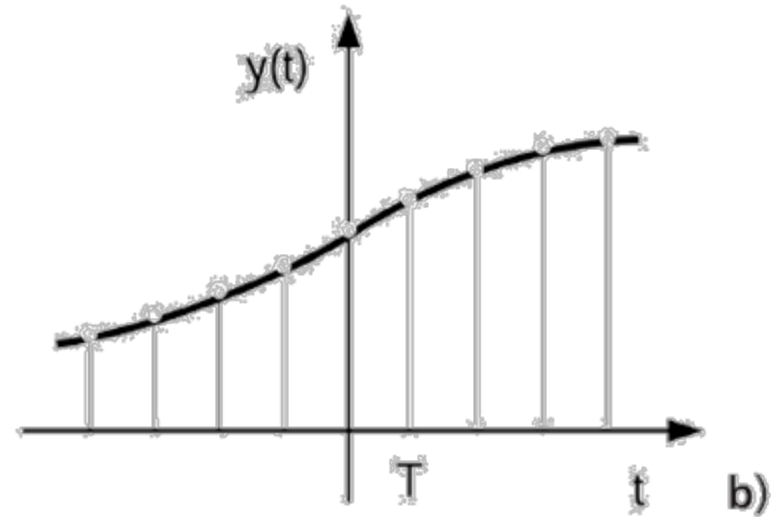


Segnale campionato correttamente

# Teorema del campionamento



Alta rapidità di variazione  $\rightarrow$  larga banda.  
Segnale sottocampionato



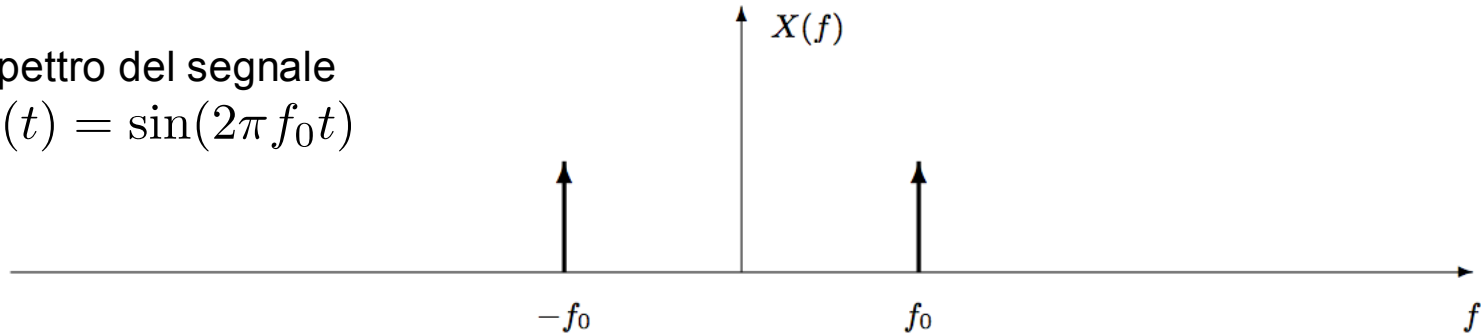
Segnale campionato correttamente

**Il periodo di campionamento deve essere scelto in funzione della banda del segnale analogico  $x(t)$**

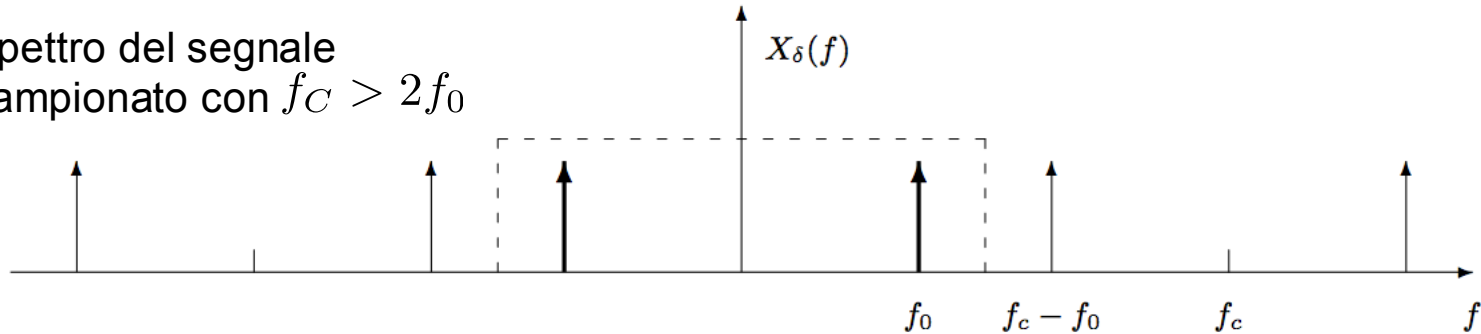
# Teorema del campionamento

## Esempio: campionamento di un segnale sinusoidale

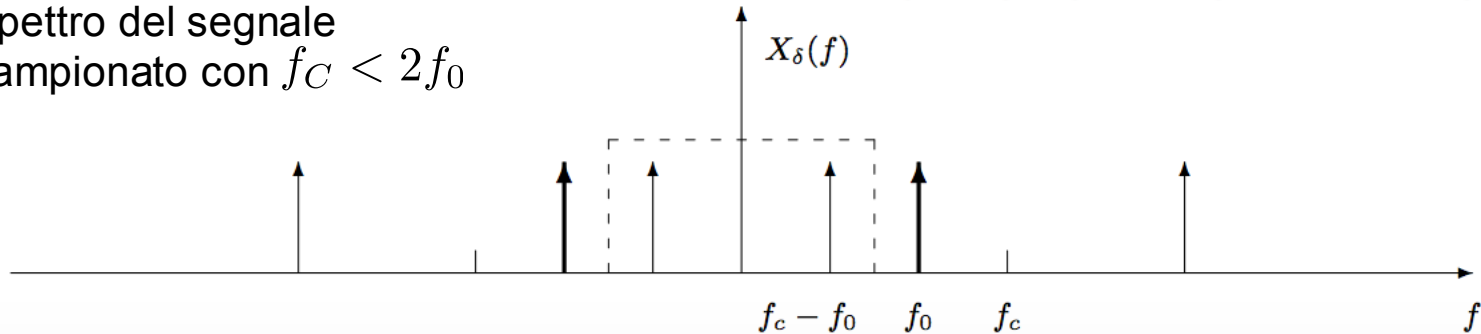
Spettro del segnale  
 $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$



Spettro del segnale  
campionato con  $f_C > 2f_0$

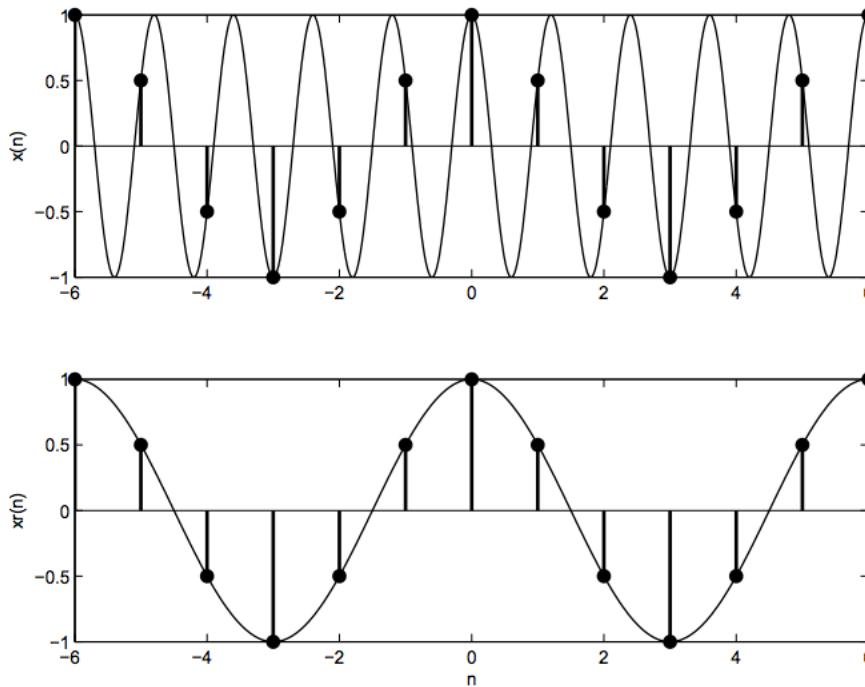


Spettro del segnale  
campionato con  $f_C < 2f_0$



# Teorema del campionamento

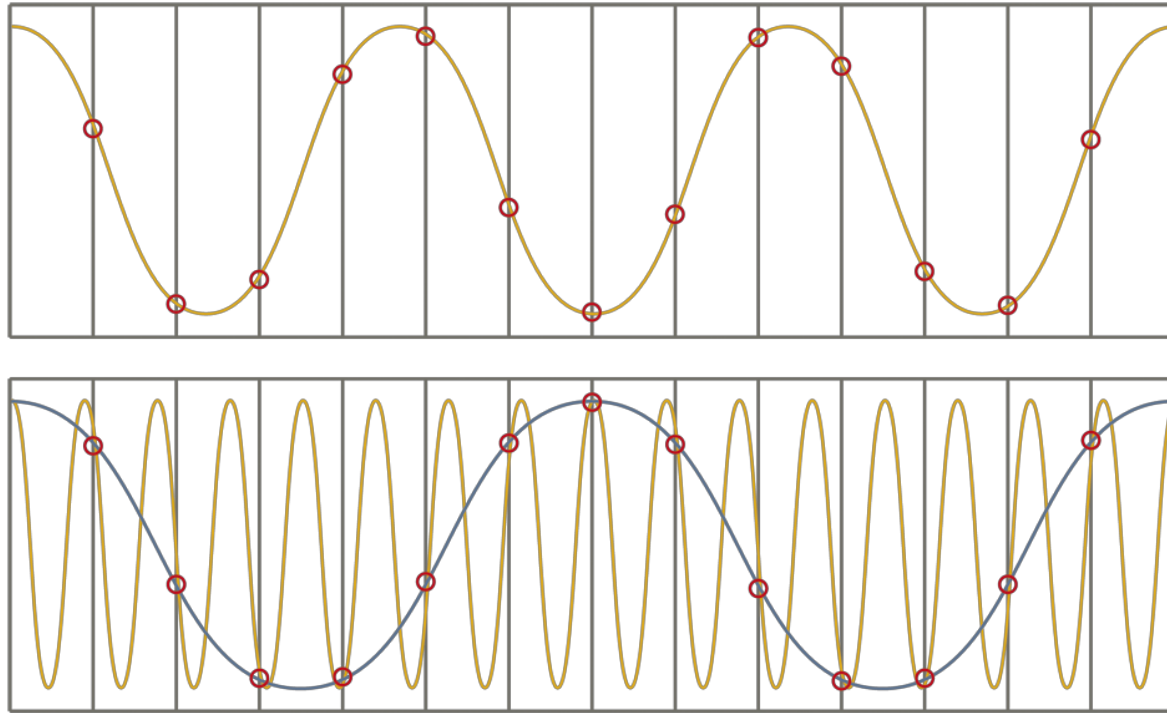
## Esempio: campionamento di un segnale sinusoidale



Segnale originale (in alto) e segnale ricostruito (in basso) nell'ipotesi in cui  $f_0 = \frac{5}{6}f_c$ .

**Nel caso di sottocampionamento di un segnale sinusoidale, viene ricostruita ancora una senoide, ma a frequenza diversa da quella originale e senza evidente effetto di distorsione nel segnale: **ALIASING****

# Aliasing



Wagon wheel effect:  
[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/ef/The\\_wagon-wheel\\_effect.ogv](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/ef/The_wagon-wheel_effect.ogv)

# Aliasing

Segnale  
 $f_0 = 7 \text{ kHz}$

Campionamento  
 $f_c = 10 \text{ kHz} < 14 \text{ kHz}$

Segnale ricostruito  
 $f_1 = 3 \text{ kHz}$

Segnale ricostruito  
 $f_2 = 13 \text{ kHz}$

