Laboratorio di Elettronica e Tecniche di Acquisizione Dati
2022-2023

Analisi segnali

(cfr. http://wpage.unina.it/verdoliv/tds/appunti/Appunti_03.pdf

Luise, Vitetta, D'Amico Teoria dei segnali analogici)

Segnali Periodici e Aperiodici

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \, e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \, e^{i2\pi f t} \, \mathrm{d}f$$

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) \, e^{-j2\pi k f_0 t} \, \mathrm{d}t$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \, e^{-i2\pi f t} \, \mathrm{d}t$$

$$x(t) \Longleftrightarrow X_k$$

$$x(t) \Longleftrightarrow X(f)$$

Segnale periodico:

- **Somma (serie) di componenti sinusoidali a armoniche discrete con ampiezza finita e con frequenza multipla della frequenza fondamentale**

Segnale aperiodico:

- **Somma (integrale) di componenti sinusoidali a armoniche continue con ampiezza infinitesima |*X(f)*|d*f* e con frequenza *f* variabile con continuità**

Teoremi e proprietà della trasformata di Fourier

Linearità:

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \Rightarrow X(f) = aX_1(f) + bX_2(f)$$

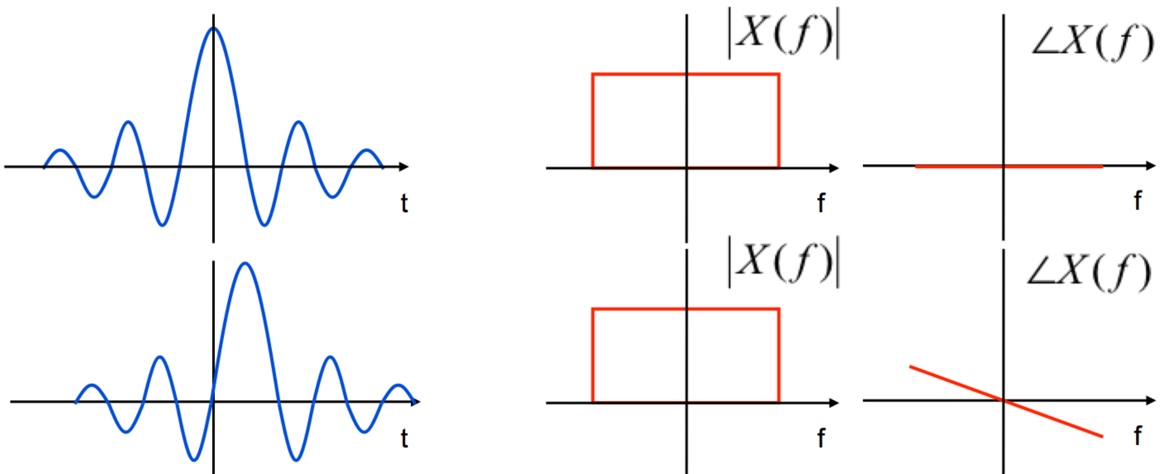
Dualità:

$$x(t) \Leftrightarrow X(f) \quad \rightarrow \quad X(t) \Leftrightarrow x(-f)$$

Teorema del ritardo:

$$y(t) = x(t - t_0) \quad \Leftrightarrow \quad Y(f) = X(f)e^{-i2\pi f t_0}$$

un ritardo temporale modifica lo spettro di fase della trasformata ma non lo spettro in ampiezza

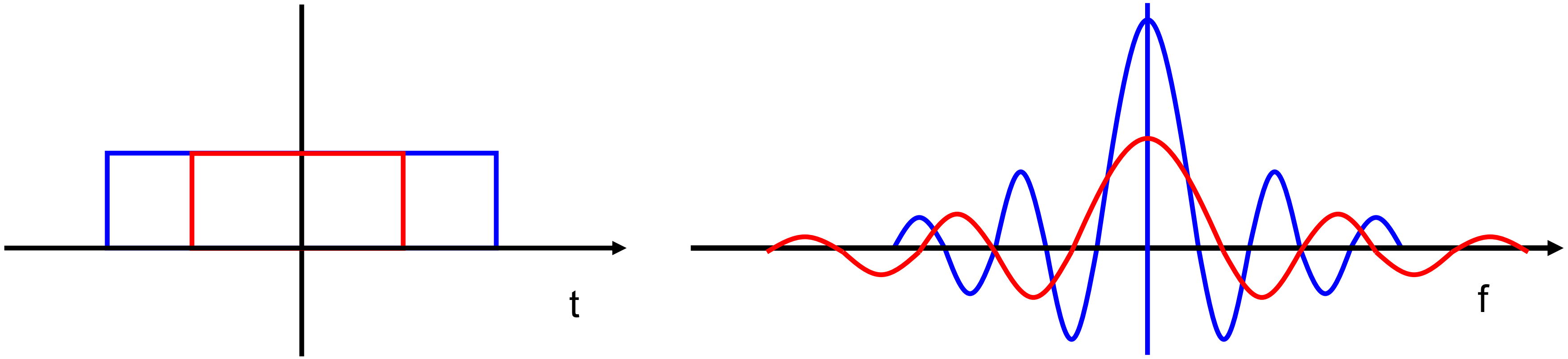


Teoremi e proprietà della trasformata di Fourier

Teorema del cambiamento di scala:

$$x(\alpha t) \Longleftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

Dilatazione dell'asse dei tempi (rallentamento del segnale) = compressione dell'asse delle frequenze (aumenta l'importanza delle basse frequenze)



Teorema di derivazione e integrazione:

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \Longleftrightarrow i2\pi f \cdot X(f)$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha \Longleftrightarrow \frac{X(f)}{i2\pi f}$$

Derivazione = soppressione basse freq.

Integrazione = soppressione alte freq.

Teoremi e proprietà della trasformata di Fourier

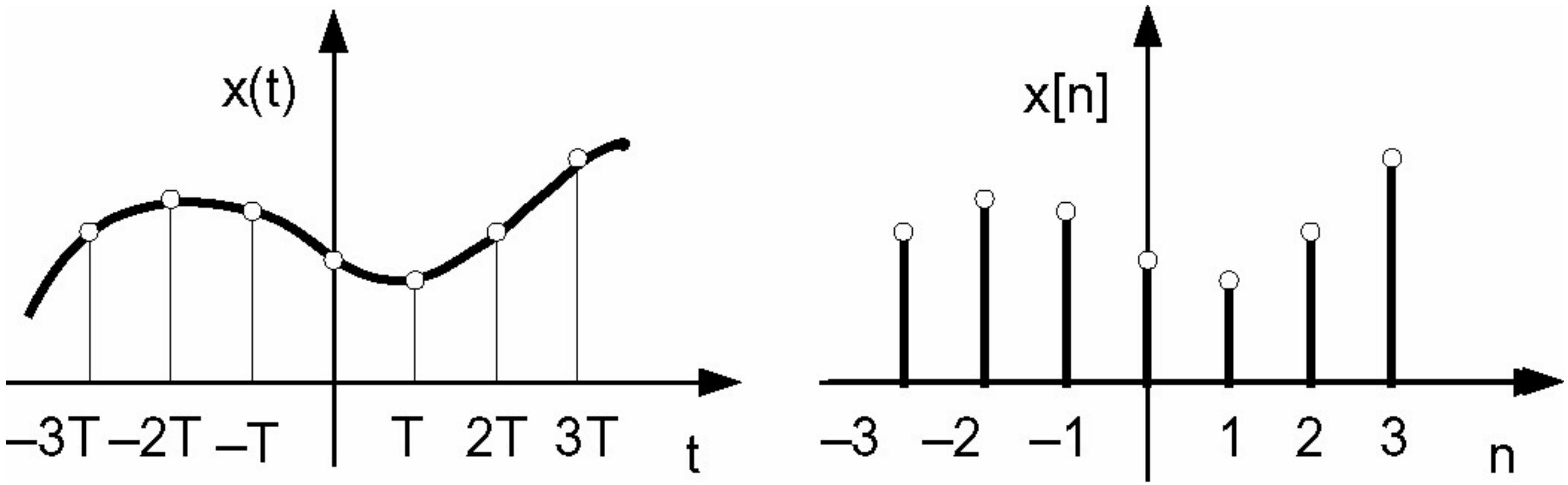
Teorema del prodotto e convoluzione:

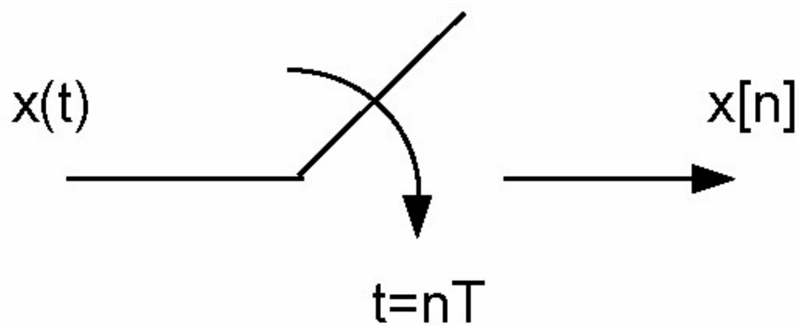
$$z(t) = x(t) \otimes y(t) \quad \Leftrightarrow \quad Z(f) = X(f)Y(f)$$

$$z(t) = x(t)y(t) \quad \Leftrightarrow \quad Z(f) = X(f) \otimes Y(f)$$

$$a(t) \otimes b(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\tau)b(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau$$

Dal tempo continuo al tempo discreto

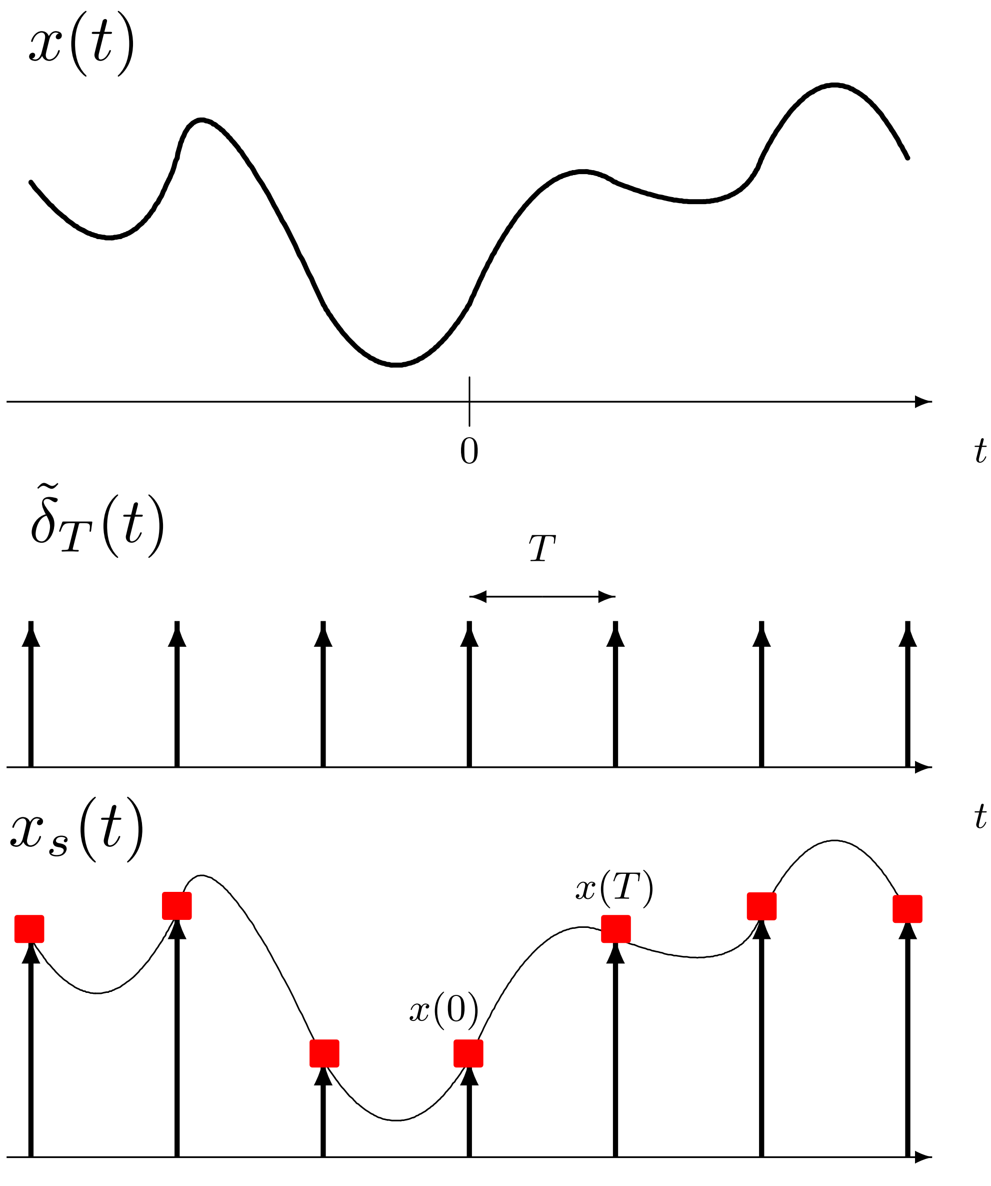




$$f_c = \frac{1}{T}$$ Frequenza di campionamento

Sistema ADC ideale: estrae il valore x(t) al tempo di campionamento
Sistema ADC reale: estrae il valore x(t) digitalizzato al tempo di campionamento

Trasformata di Fourier di una sequenza



T periodo di campionamento

$f_C = \dfrac{1}{T}$ frequenza di campionamento

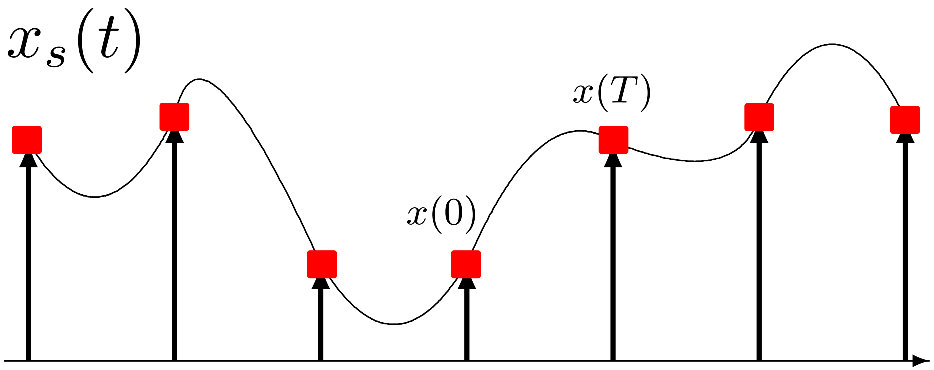
"treno di delta"

$$\tilde{\delta}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

Segnale a tempo discreto *$x_s(t)$*: sequenza di impulsi le cui ampiezze rappresentano il segnale x(t) agli istanti di campionamento

$$\boxed{x(t) \cdot \tilde{\delta}_T(t) = x_s(t)}$$

Trasformata di Fourier di una sequenza



$$x_s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t - nT)$$

"Delta" di Dirac $\delta(x) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x = f(0)$

Proprietà utile: $f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0)$

$$\mathcal{F}[f(t)\delta(t - t_0)] = f(t_0)\mathcal{F}[\delta(t - t_0)]$$

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\,\delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,\delta(t - nT)$$

Trasformata di Fourier di una sequenza

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\,\delta(t-nT)$$

$x_s(t)$ è (in generale) un segnale aperiodico → applico il formalismo noto

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{-i2\pi f t}\,\mathrm{d}t$$ (Trasformata di Fourier di un segnale aperiodico)

$$X_s(f) = \mathcal{F}\Big[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\,\delta(t-nT)\Big] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\,\mathcal{F}[\delta(t-nT)]$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,e^{-i2\pi f t}\,\mathrm{d}t = e^{-i2\pi f t}|_{t=0} = 1 \qquad \mathcal{F}[\delta(t)] = 1 \\ \mathcal{F}[x(t-t_0)] = X(f)e^{-i2\pi f t_0} \quad \text{Teorema del ritardo} \end{array}\right\} \mathcal{F}[\delta(t-nT)] = 1 \cdot e^{-i2\pi n f T}$$

$$X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,e^{-i2\pi n f T}$$

Trasformata di Fourier di una sequenza

Equazione di analisi per un segnale aperiodico a tempo discreto

Trasformata di Fourier di una sequenza

$$X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-i2\pi nfT}$$

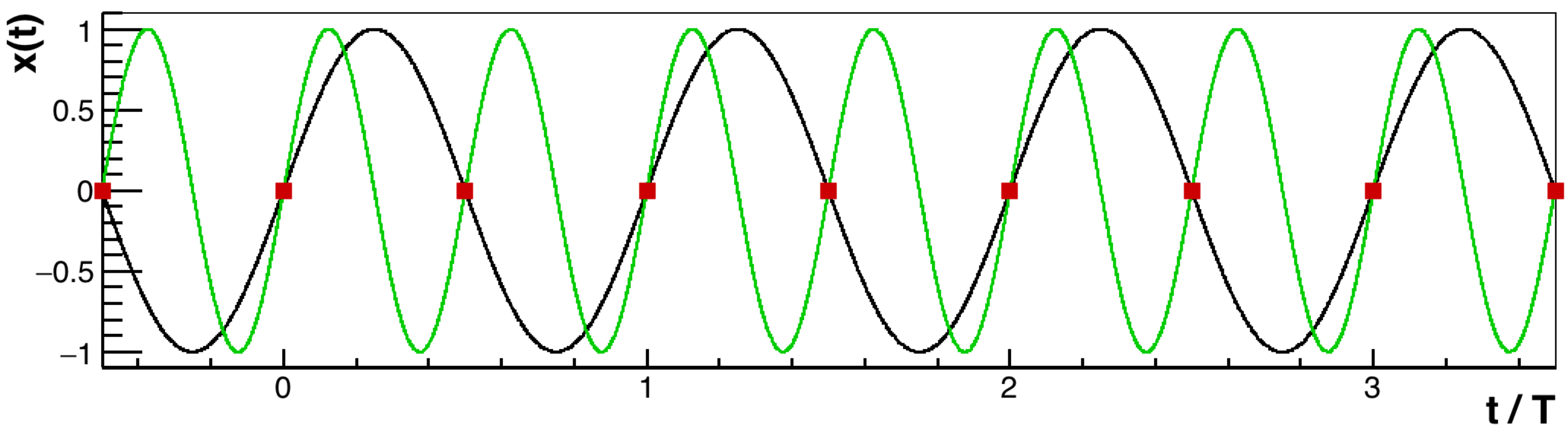
Trasformata di Fourier di una sequenza

Proprietà: periodicità con periodo $f_C = \frac{1}{T}$

$$X_s(f+\frac{1}{T}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-i2\pi nfT}\, e^{-i2\pi n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-i2\pi nfT} = X_s(f)$$

$X_s(f)$ completamente definita dal suo comportamento in $[-\frac{f_C}{2}, \frac{f_C}{2}] = [-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]$

Infatti, per segnali a tempo discreto, non si può distinguere tra due segnali sinusoidali di frequenza f_0 e f_0+k/T $\quad e^{i2\pi(f_0+m/T)nT} = e^{i2\pi(f_0 nT)} e^{i2\pi mn} = e^{i2\pi(f_0 nT)}$



Trasformata di Fourier di una sequenza

Trasformata inversa: moltiplico per un fattore di fase e integro nel periodo di base

$$\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} X_s(f)\, e^{i2\pi fnT}\,\mathrm{d}f = \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)\, e^{-i2\pi fkT}\, e^{i2\pi fnT}\,\mathrm{d}f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} e^{i2\pi f(n-k)T}\,\mathrm{d}f$$

$$\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} e^{i2\pi f(n-k)T}\,\mathrm{d}f = \frac{\sin(\pi(n-k))}{\pi(n-k)T} = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \frac{1}{T} & k = n \end{cases}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} e^{i2\pi f(n-k)T}\,\mathrm{d}f = x(nT)\cdot\frac{1}{T}$$

$$x(nT) = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} X_s(f)\, e^{i2\pi fnT}\,\mathrm{d}f$$

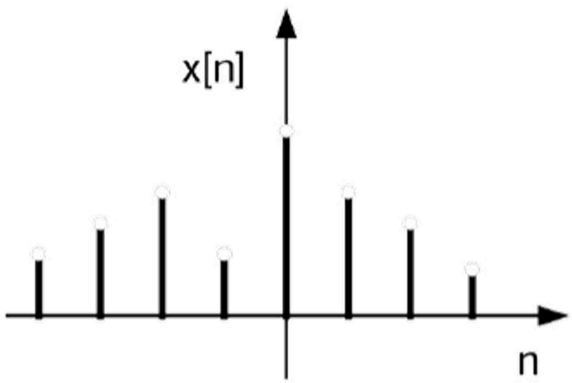
Antitrasformata di Fourier di una sequenza

Equazione di sintesi per un segnale aperiodico a tempo discreto

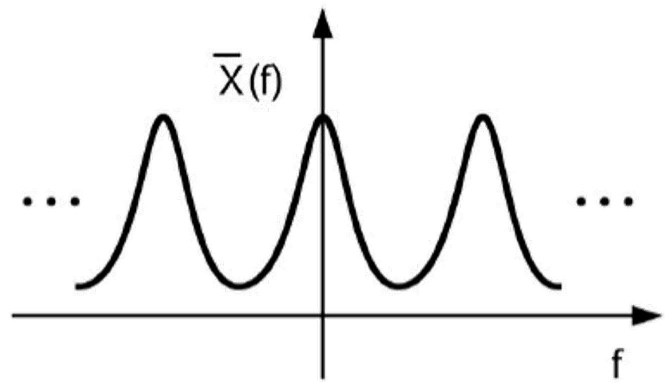
Per esprimere una sequenza campionata con frequenza f_c=1/*T* sono necessarie solamente le frequenze nell'intervallo [0,1/*T*]

Segnali aperiodici a tempo discreto e continuo

$$x(nT) = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} X_s(f)\, e^{i2\pi fnT}\, \mathrm{d}f \qquad X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-i2\pi nfT}$$



Segnale a tempo discreto aperiodico

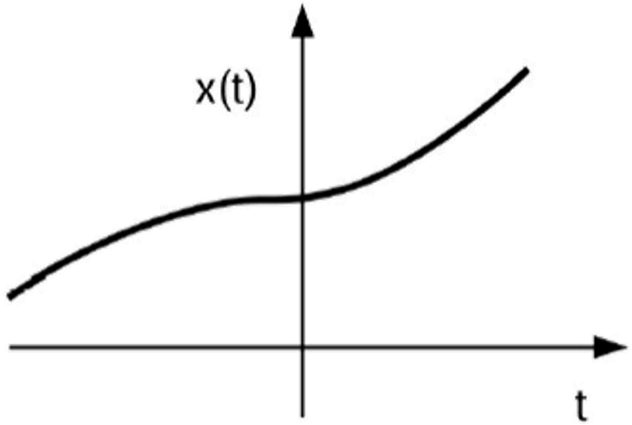


Spettro continuo periodico

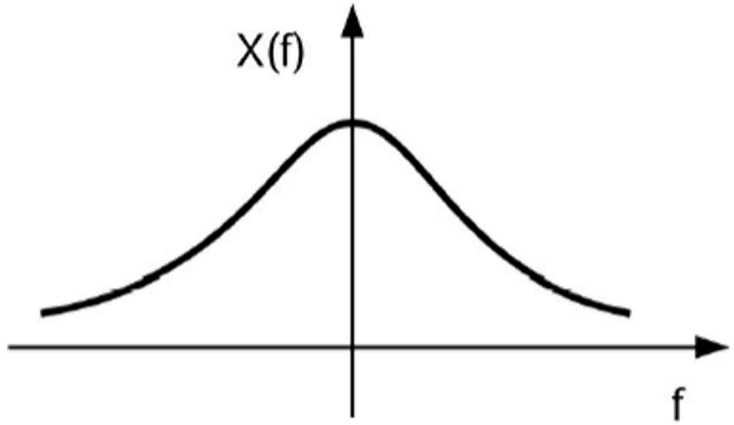
Segnale aperiodico a tempo discreto → spettro in frequenza periodico

Segnali aperiodici a tempo discreto e continuo

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{i2\pi f t}\, \mathrm{d}f \qquad X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-i2\pi f t}\, \mathrm{d}t$$



Segnale a tempo continuo aperiodico



Spettro continuo aperiodico

Segnale aperiodico a tempo continuo → spettro in frequenza aperiodico

Trasformata discreta di Fourier (DFT)

Finora abbiamo trattato sequenze con numero infinito di termini.
I sistemi di acquisizione ADC acquisiscono un numero limitato di campioni.

- sequenza infinita → intervallo di campionamento infinito → df → 0
- sequenza finita → interfallo di campionamento finito, T_0 → $\Delta f = 1/T^0$

Nel caso di un segnale campionato con N_0 campioni con frequenza $f_c=1/T$, identifichiamo la sequenza periodica, con periodo N_0, $x[n] = x[n + N_0]$ con un insieme di N_0 numeri reali $[x_0, x_1, .. x_{N-1}]$

$$X_{s,k} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]\, e^{-i2\pi nk/N_0}$$

equazione di ANALISI: studio del contenuto in frequenza del segnale

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} X_{s,k}\, e^{i2\pi nk/N_0}$$

equazione di SINTESI: ricostruzione del segnale a partire dalle sue armoniche

Nel caso di sequenze periodiche la rappresentazione mediante antitrasformata discreta consiste in una somma con un numero finito di addendi

Trasformata discreta di Fourier (DFT)

$$X_{s,k} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]\, e^{-i2\pi nk/N_0}$$

equazione di ANALISI: studio del contenuto in frequenza del segnale

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} X_{s,k}\, e^{i2\pi nk/N_0}$$

equazione di SINTESI: ricostruzione del segnale a partire dalle sue armoniche

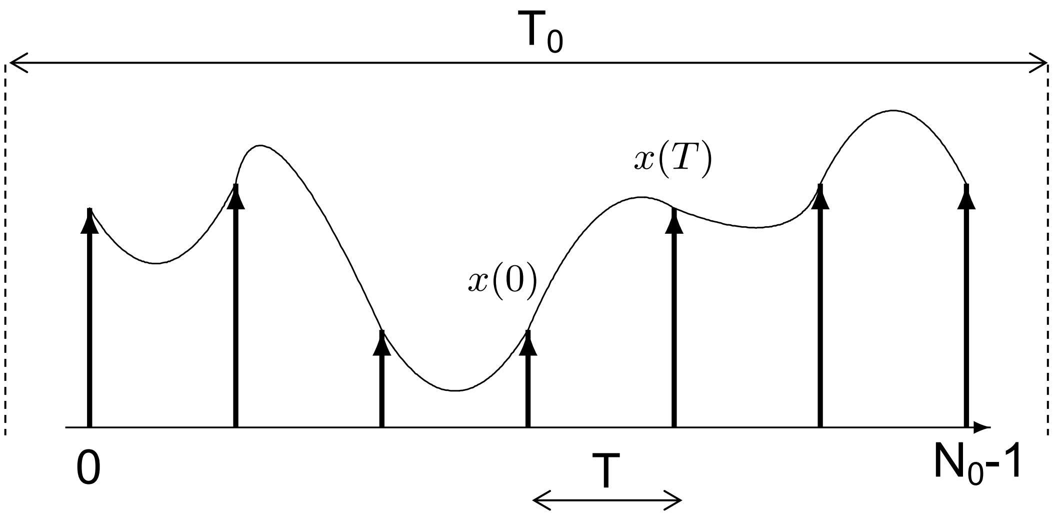
Nel caso di sequenze periodiche la rappresentazione mediante antitrasformata discreta consiste in una somma con un numero finito di addendi

Infatti la trasformata di una sequenza periodica di periodo N_0 è essa stessa periodica con il medesimo periodo:

$$X_{s,k+N_0} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]\, e^{-i2\pi n(k+N_0)/N_0} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]\, e^{-i2\pi nk/N_0}\, e^{-i2\pi n} =$$

$$= \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]\, e^{-i2\pi nk/N_0} = X_{s,k}$$

Trasformata discreta di Fourier (DFT)



$$N_0 T = T_0$$

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{N_0 T}$$ **frequenza fondamentale**

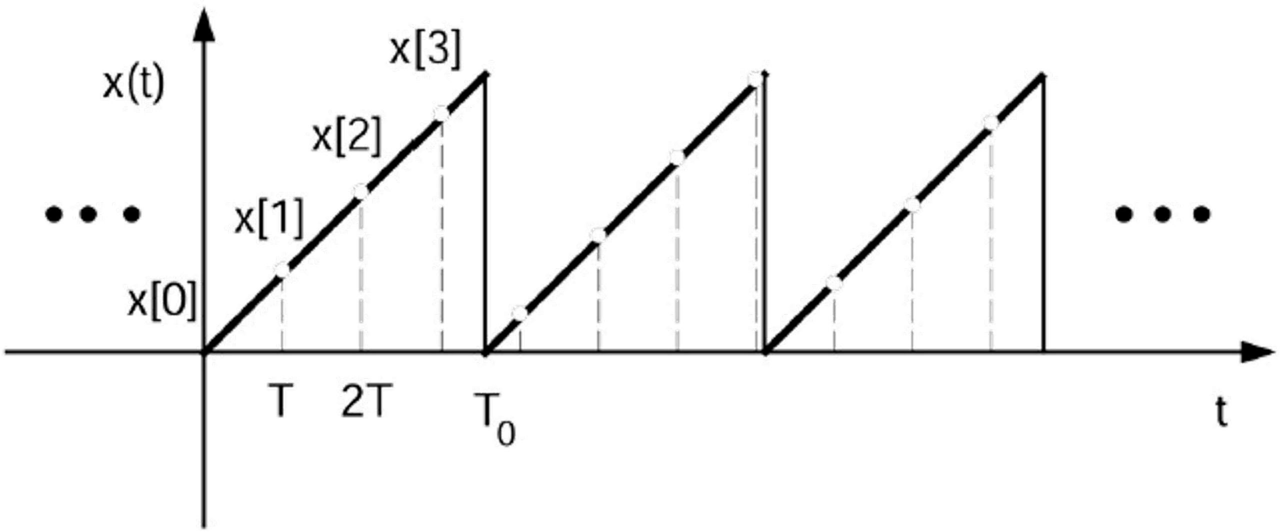
$$f_{\max} = \frac{1}{T}$$ **frequenza massima**

$$x(nT) = \sum_{k=0}^{N_0-1} X_{s,k}\, e^{i2\pi nk/N_0} = \sum_{k=0}^{N_0-1} X_{s,k}\, e^{i2\pi \frac{k}{N_0 T} nT}$$

x[n] può essere espressa come somma <u>finita</u> di N_0 termini esponenziali complessi che oscillano con frequenze $f_k = (k / N_0 T)$, dette armoniche, multiple della frequenza fondamentale $f_0 = 1 / N_0 T$

Campionamento di un segnale periodico

Campionamento di segnale analogico periodico $\not\Rightarrow$ **Sequenza periodica**



Affinché si abbia una sequenza periodica è necessario che un numero intero N_0 di intervalli di campionamento sia esattamente pari a un qualche numero intero m di periodi di ripetizione T_0 del segnale originario: $N_0T=mT_0$

Per fare questo, l'ADC deve essere "sincronizzato" con il segnale da acquisire

Teorema del campionamento

$$x[n] = x(nT)$$ Segnale campionato

$$X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-i2\pi n f T}$$

$$x(t = nT) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu)\, e^{i2\pi\nu nT}\, \mathrm{d}\nu$$

Trasformata del segnale continuo *x*(*t*) associato al segnale campionato *x[n]*

$$X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} X(\nu)\, e^{i2\pi\nu nT}\, \mathrm{d}\nu \right] e^{-i2\pi n f T} = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi(f-\nu)nT}\, \mathrm{d}\nu$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi k t f}$$

Applico la trasformata di Fourier al “treno di delta”

Transformo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-i2\pi n f T} = f_C \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k f_C)$$

Sostituisco la serie di esponenziali complessi con la serie di delta di Dirac

$$X_s(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - (f - k f_C))\, \mathrm{d}\nu = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - k f_C)$$

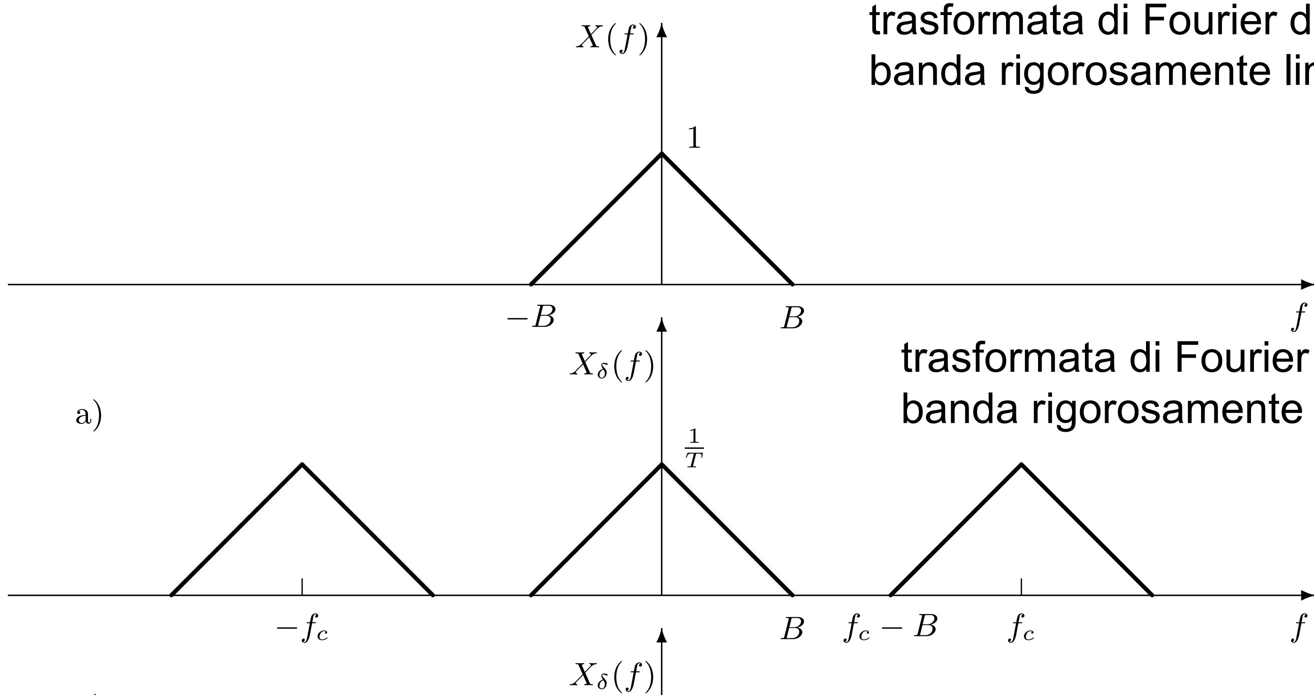
Teorema del campionamento

$$X_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kf_C) \quad \text{con } f_C = \frac{1}{T}$$

La trasformata di Fourier di una sequenza *x*[*n*] ottenuta per campionamento del segnale continuo *x*(*t*) si ricava dalla periodicizzazione della trasformata di *x*(*t*) con periodo di ripetizione in frequenza pari alla frequenza di campionamento f_C

trasformata di Fourier di un segnale a banda rigorosamente limitata

trasformata di Fourier di un segnale a banda rigorosamente limitata campionato



Densità spettrale di energia e di potenza

Segnale a energia finita $$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t) \, \mathrm{d}t = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t) \left[\int_{f=-\infty}^{\infty} X^*(f) e^{-i2\pi f t} \, \mathrm{d}f \right] \mathrm{d}t$$

$$= \int_{f=-\infty}^{\infty} X^*(f) \left[\int_{t=-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} \, \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}f = \int_{f=-\infty}^{\infty} X^*(t) X(f) \, \mathrm{d}f = \int_{f=-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 \, \mathrm{d}f$$

Teorema di Parseval

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 \, \mathrm{d}f$$

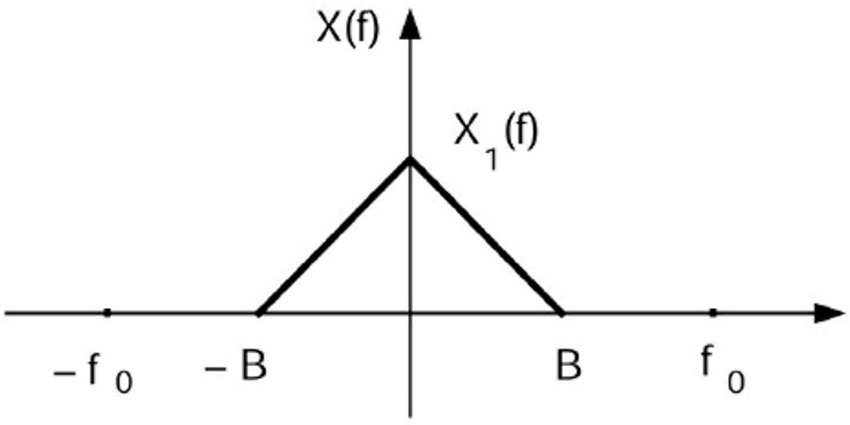
$|X(f)|^2$ **Densità spettrale di energia**: indica quali frequenze contribuiscono a definire l'energia totale del segnale (si misura in $[u]^2$/Hz)

Lo spettro in ampiezza determina l'energia di un segnale x(t), lo spettro in fase è ininfluente

Se vogliamo che l'energia si conservi durante un filtraggio, è necessario conservare le frequenze che contribuiscono maggiormente all'energia

Banda e durata di un segnale

L'analogo del concetto di durata temporale nel dominio del tempo è il concetto di banda



Si definiscono:

- Segnali a banda rigorosamente limitata (solo i seni…)
- Segnali a banda illimitata
- Segnali a banda praticamente limitata

$$\int_{-B_L}^{B_U} |X(f)|^2 \mathrm{d}f = \alpha E_x$$

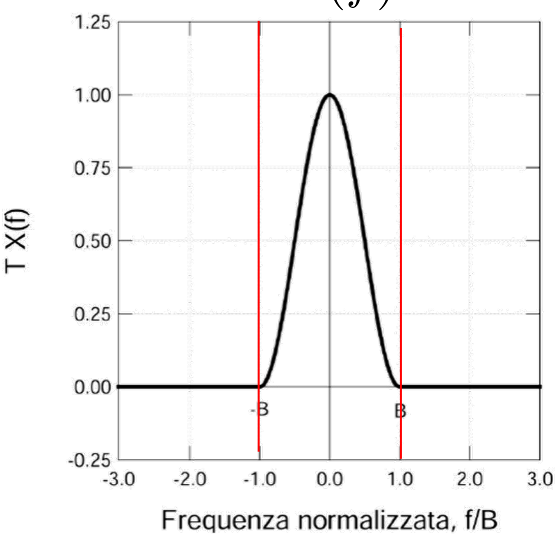
con 0<α<1 (es. 0.9: "banda al 90% dell'energia")

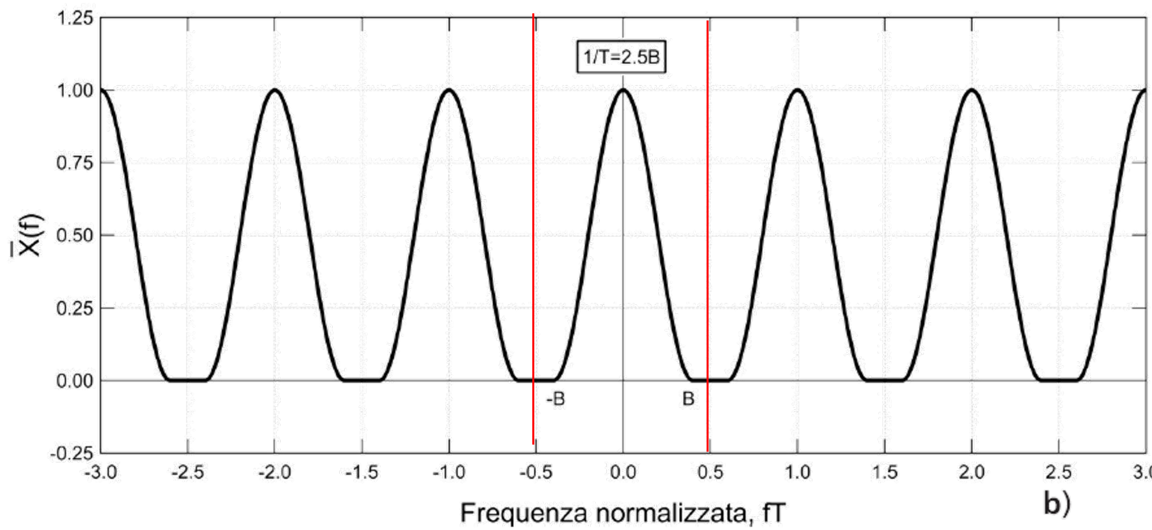
Teorema del campionamento

$$X_s(f) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - k f_C) \quad \text{con } f_C = \frac{1}{T}$$

La trasformata di Fourier di una sequenza *x*[*n*] ottenuta per campionamento del segnale continuo *x*(*t*) si ricava dalla periodicizzazione della trasformata di *x*(*t*) con periodo di ripetizione in frequenza pari alla frequenza di campionamento f_C

$X(f)$ $\xrightarrow{\text{Campionamento}}$ $X_s(f),\ \ f_C = 2.5\,B$





"Banda": intervallo di frequenze in cui lo spettro è non nullo

Per frequenze di campionamento "alte", il periodo frequenziale base contiene una copia non distorta della trasformata del segnale originario

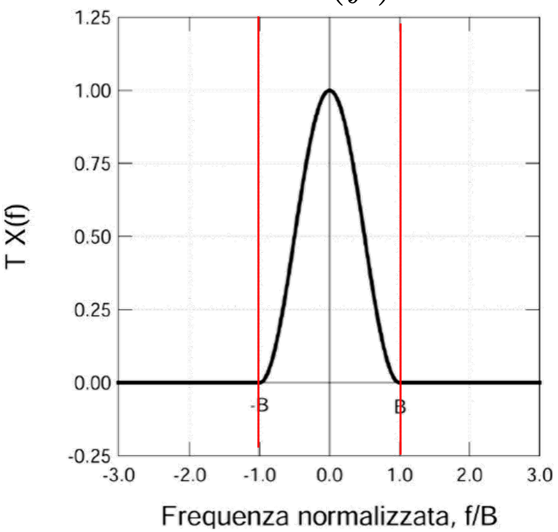
Teorema del campionamento

$$X_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - k f_C) \quad \text{con } f_C = \frac{1}{T}$$

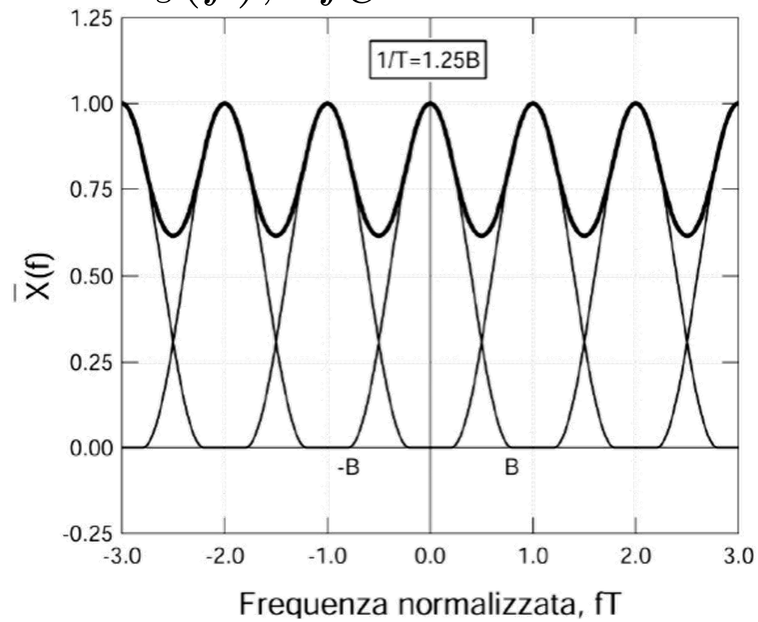
La trasformata di Fourier di una sequenza *x*[*n*] ottenuta per campionamento del segnale continuo *x*(*t*) si ricava dalla periodicizzazione della trasformata di *x*(*t*) con periodo di ripetizione in frequenza pari alla frequenza di campionamento f_C

Campionamento $\longrightarrow$

$X(f)$

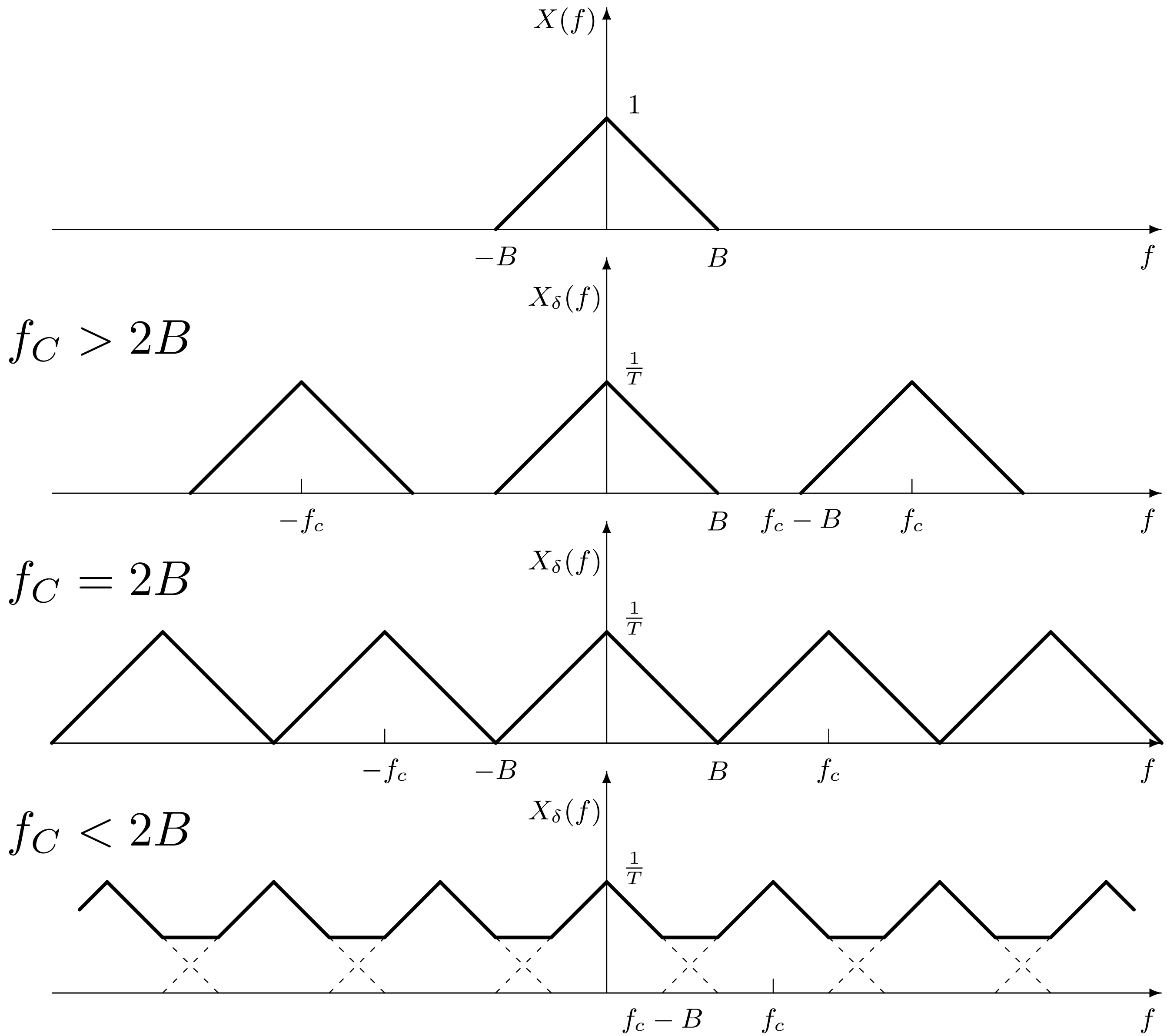


$X_s(f), \quad f_C = 1.25\, B$



Per frequenze di campionamento “basse”, il periodo frequenziale base contiene una copia DISTORTA della trasformata del segnale originario

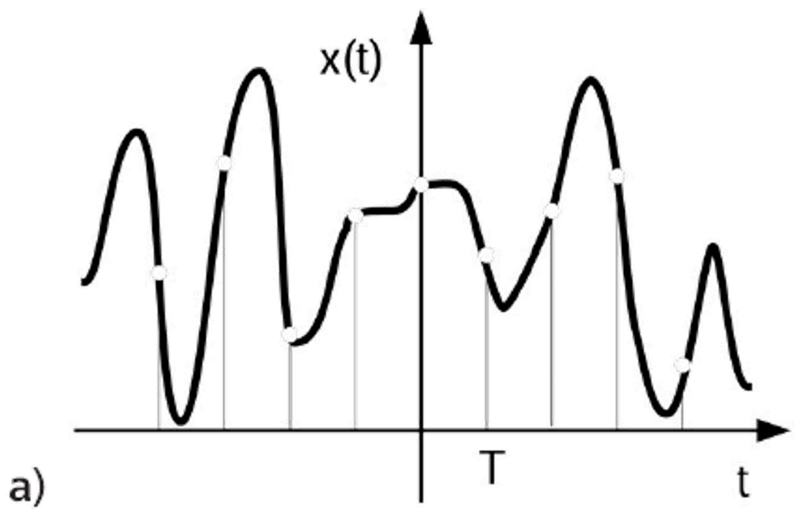
Teorema del campionamento



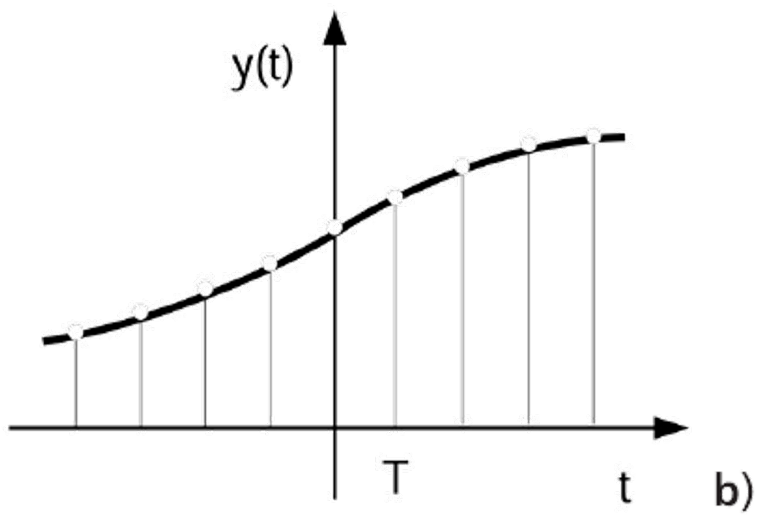
Teorema del campionamento

Teorema di Nyquist-Shannon: dato un segnale x(t) a banda limitata, la minima frequenza necessaria per campionare il segnale x(t) evitando aliasing e quindi ricostruire il segnale originale senza perdita di informazione è data dal doppio della banda del segnale.

$$f_C = \frac{1}{T} \geq 2B$$

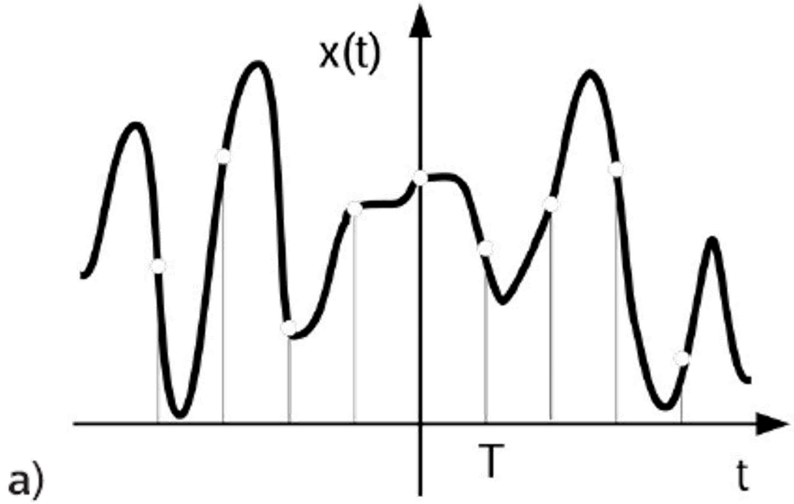


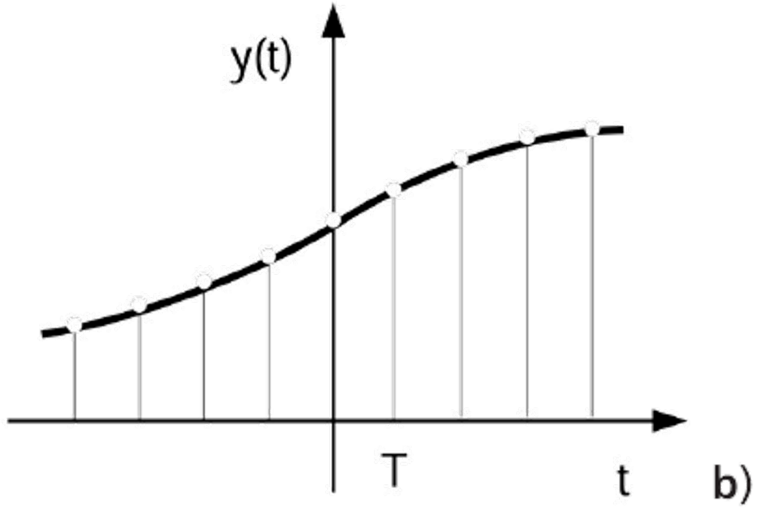
Alta rapidità di variazione → larga banda.
Segnale sottocampionato



Segnale campionato correttamente

Teorema del campionamento





Alta rapidità di variazione → larga banda.
Segnale sottocampionato

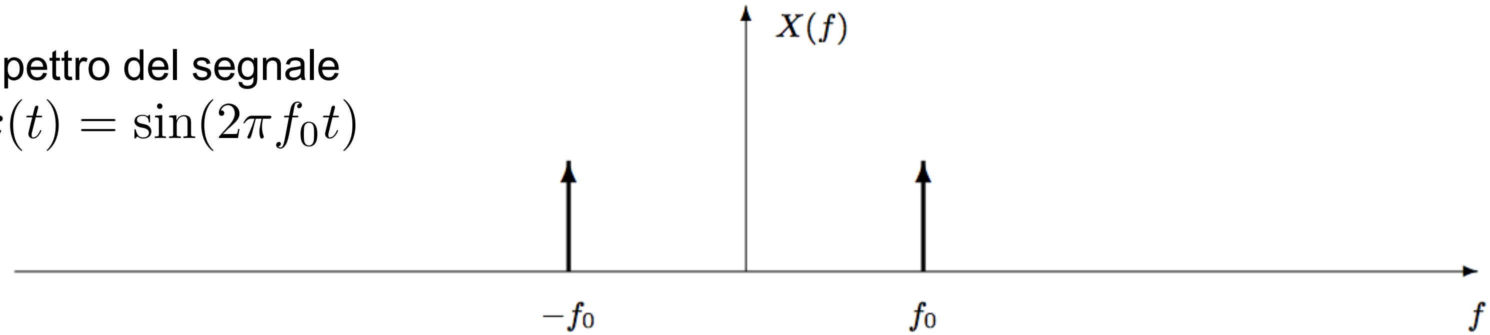
Segnale campionato correttamente

Il periodo di campionamento deve essere scelto in funzione della banda del segnale analogico *x*(*t*).

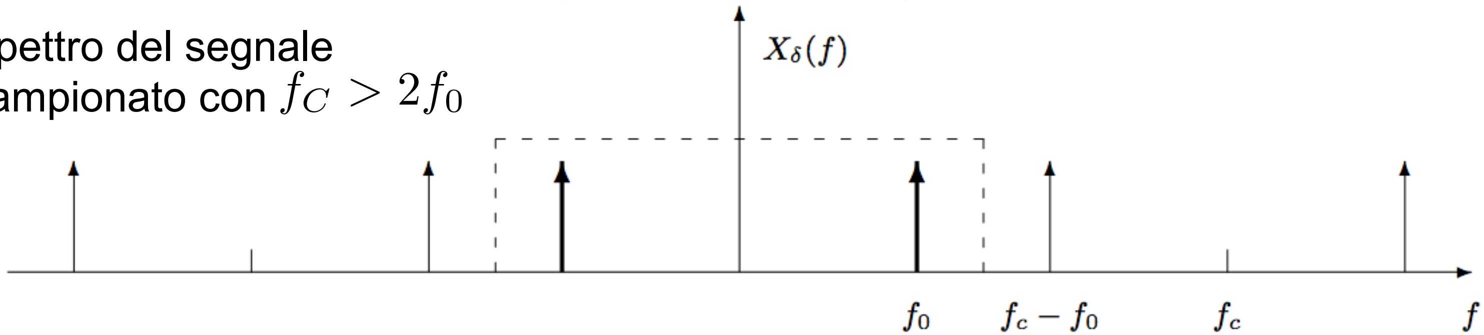
Teorema del campionamento

Esempio: campionamento di un segnale sinusoidale

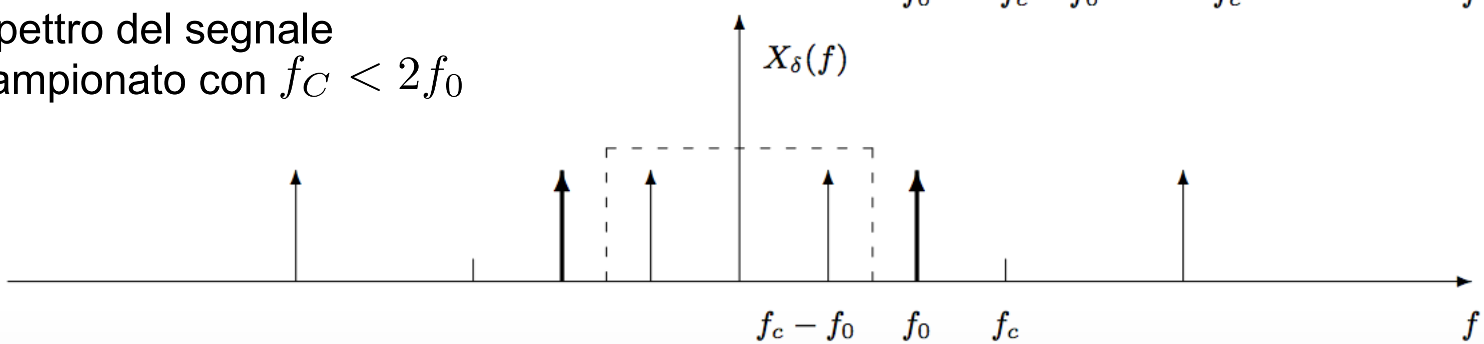
Spettro del segnale
$x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$



Spettro del segnale
campionato con $f_C > 2f_0$

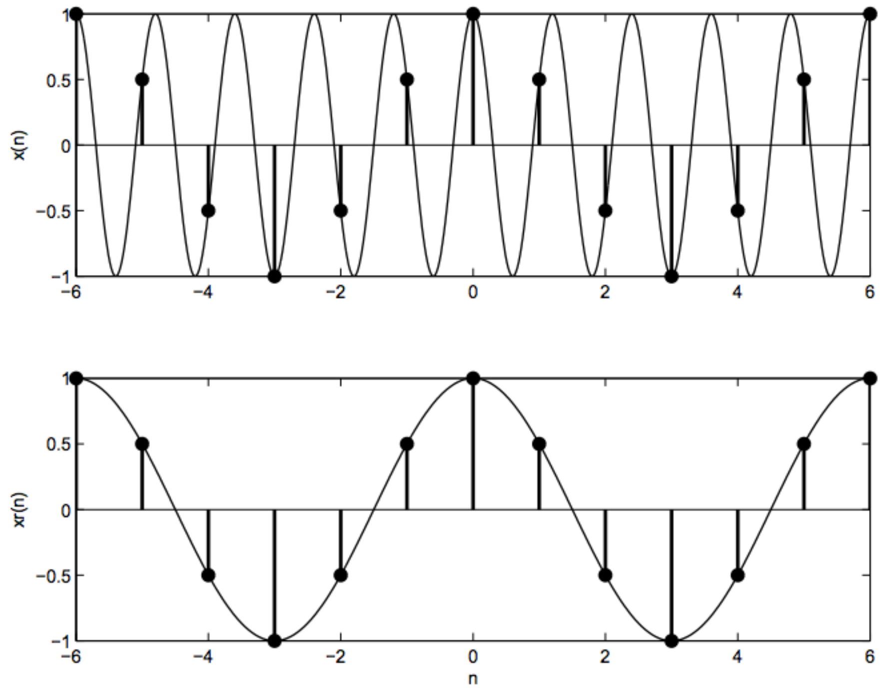


Spettro del segnale
campionato con $f_C < 2f_0$



Teorema del campionamento

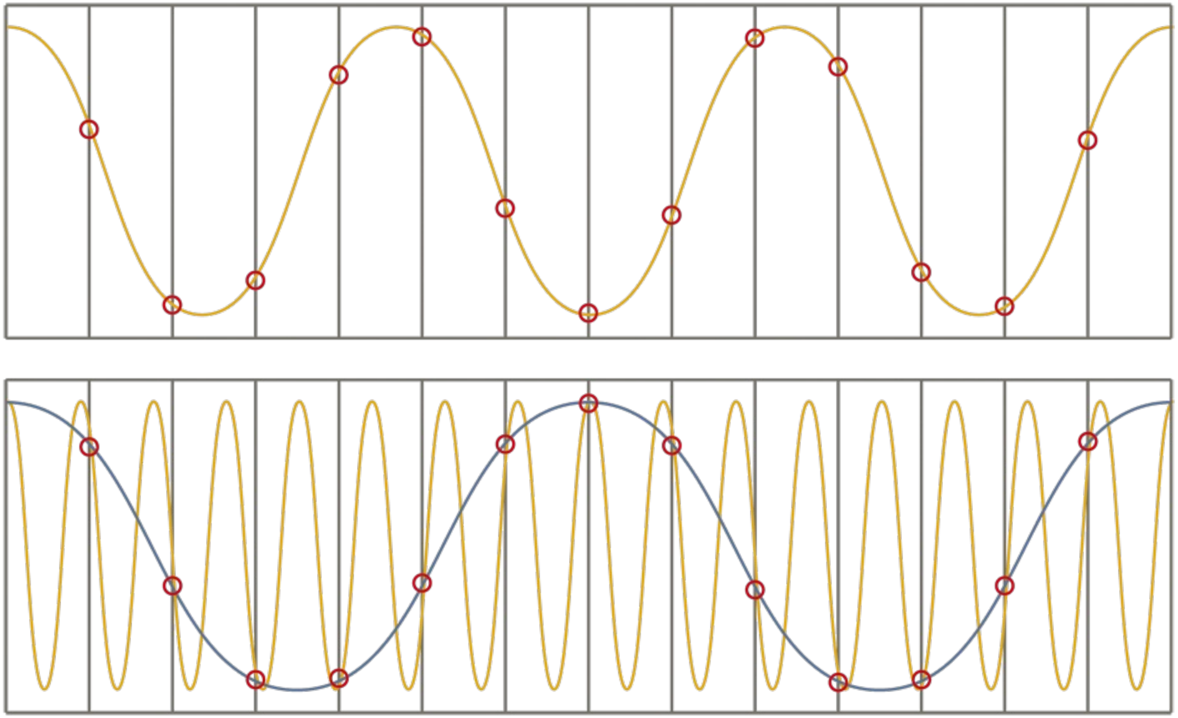
Esempio: campionamento di un segnale sinusoidale



Segnale originale (in alto) e segnale ricostruito (in basso) nell'ipotesi in cui $f_0 = \frac{5}{6} f_c$.

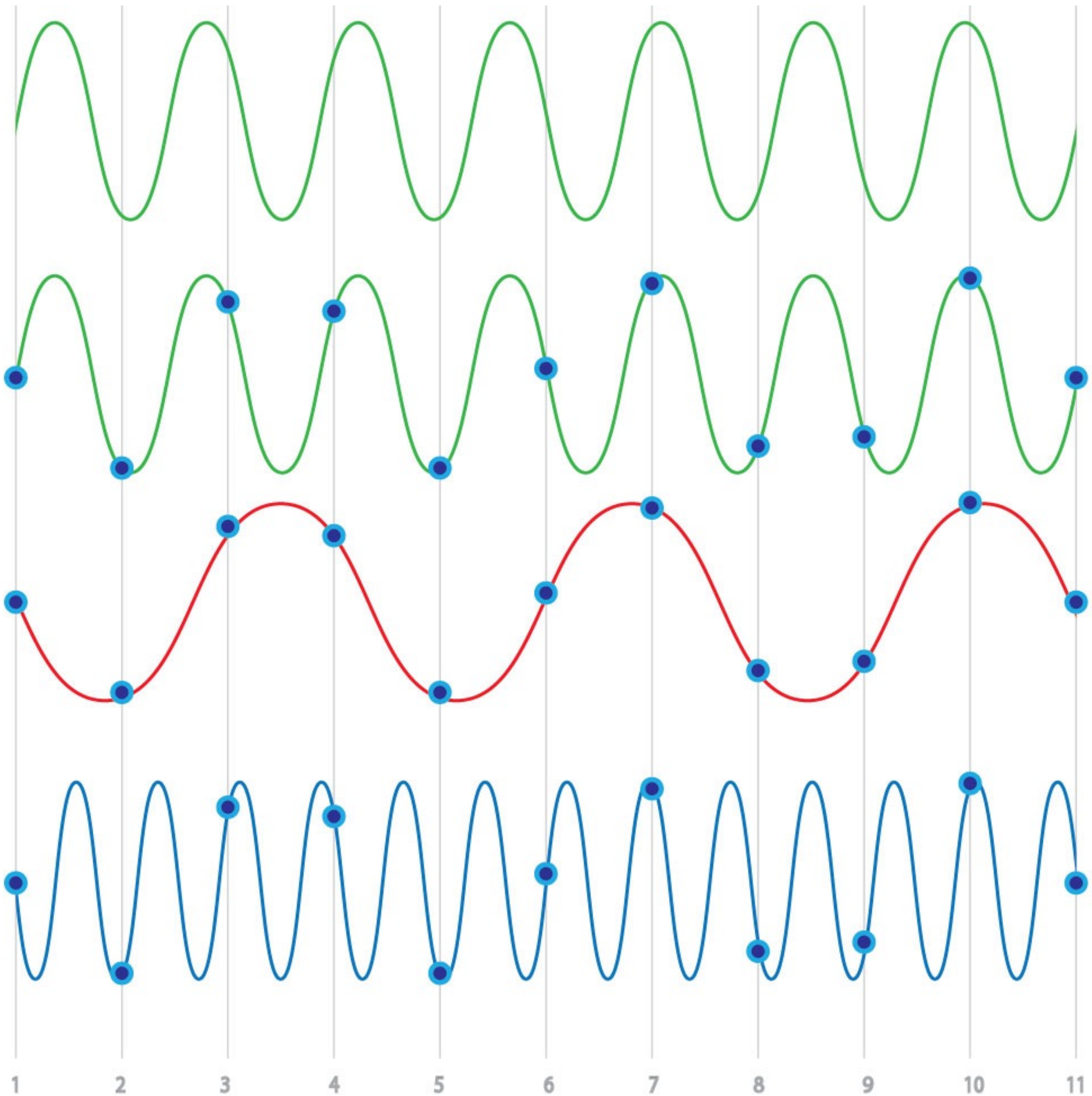
Nel caso di sottocampionamento di un segnale sinusoidale, viene ricostruita ancora una sinusoide, ma a frequenza diversa da quella originale e senza evidente effetto di distorsione nel segnale: ALIASING

Aliasing



Wagon wheel effect
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/ef/The_wagon-wheel_effect.ogv

Aliasing



Segnale
f_0 = 7 kHz

Campionamento
f_C = 10 kHz < 14 kHz

Segnale ricostruito
f_1 = 3 kHz

Segnale ricostruito
f_2 = 13 kHz