Laboratorio di Elettronica e Tecniche di Acquisizione Dati
2022-2023

Analisi segnali

(cfr. http://wpage.unina.it/verdoliv/tds/appunti/Appunti_03.pdf

Luise, Vitetta, D'Amico Teoria dei segnali analogici)

Segnali e Sistemi di Acquisizione

Segnale	**Rumore**	**Sistema DAQ**
Suono di un strumento	Brusio del pubblico	Sala di incisione
Trasmissione radiofonica	Segnale del cellulare	Registratore
Movimenti di un vigile	Persone a passeggio	Occhio e cervello guidatore
Voce del professore	Chiacchere degli studenti	Occhio e cervello degli studenti

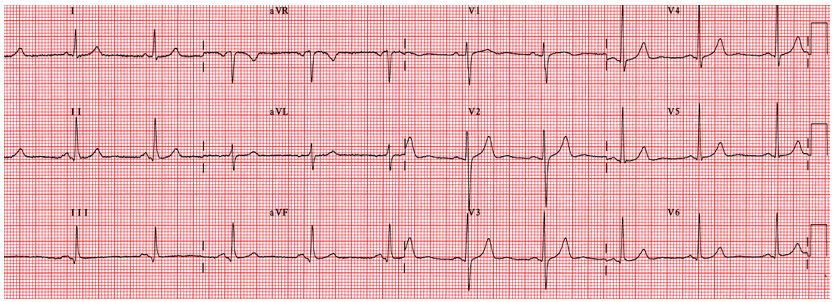
SEGNALE: Grandezza fisica variabile nel tempo a cui è associata una informazione

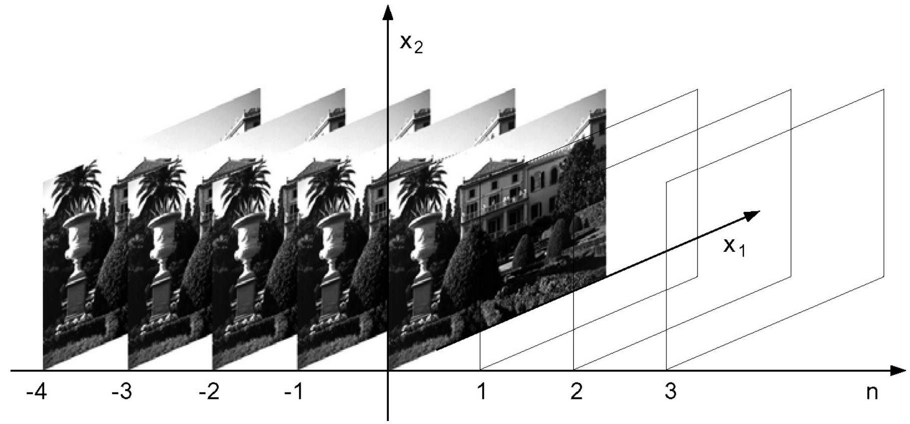
RUMORE: Variazione di una grandezza fisica non associata a una informazione

SISTEMA DAQ: Sistema per rivelare/acquisire e meorizzare la variazione di una grandezza fisica

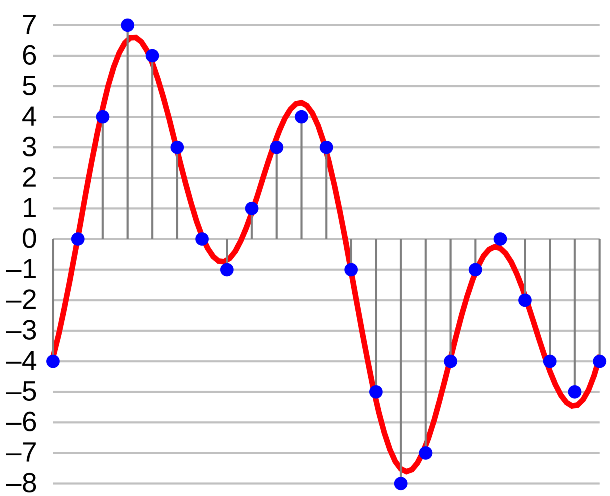
Classificazione dei segnali

Segnali a:
- **tempo continuo**: x(t), t reale
- **tempo discreto**: x[t], t intero





Segnali a:
- **ampiezza continua**
- **ampiezza discreta**



	T continuo	**T discreto**
A continua	**Analogico**	**Campionato**
A discreta		**Digitale**

Classificazione dei segnali

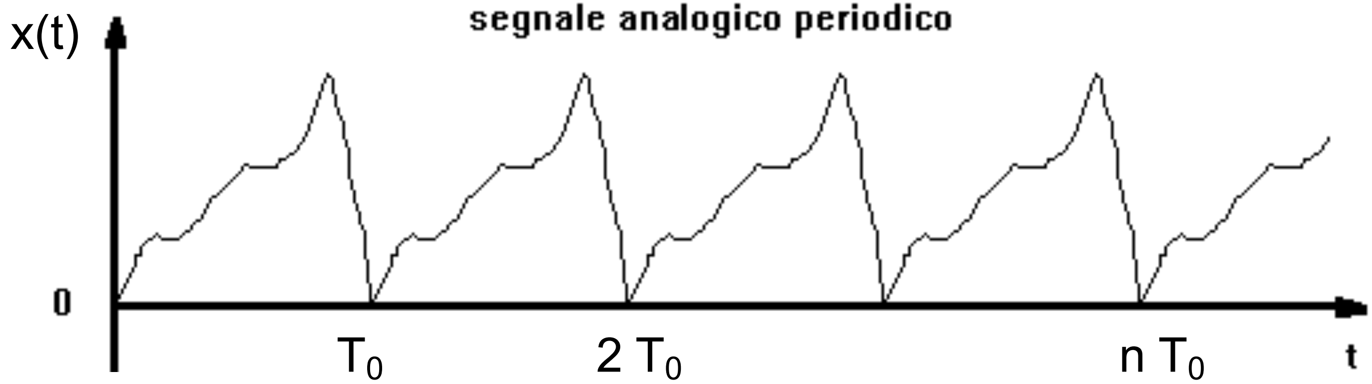
Segnali periodici:

$x(t) = x(t + T_0)$

T_0 periodo

$f_0 = 1/T_0$

frequenza portante

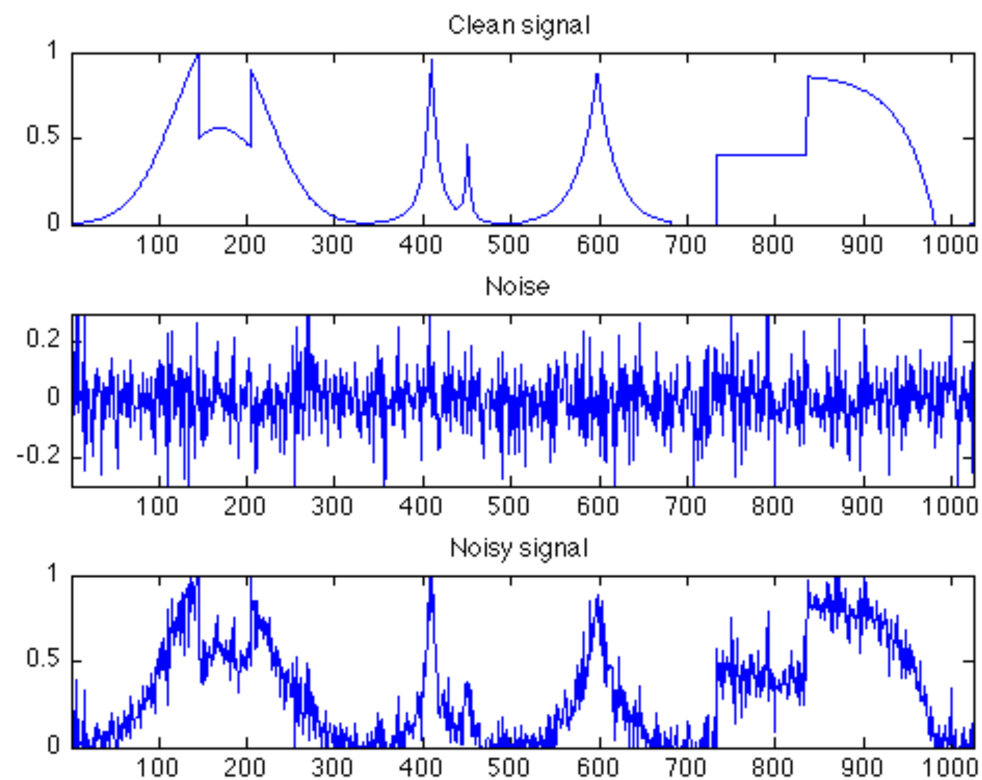


Segnali deterministici:

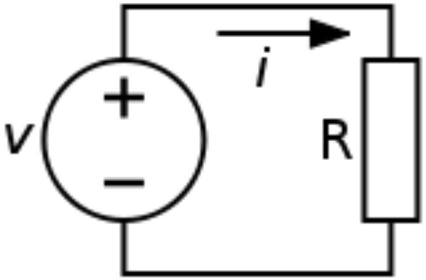
- univocamente determinabile se noti i valori delle variabili indipendenti (tempo):

Segnali aleatori:

- "imprevedibili" conoscibili solamente a posteriori, misurandoli. A priori sono note solo proprietà generali del sistema;



Potenza di un segnale

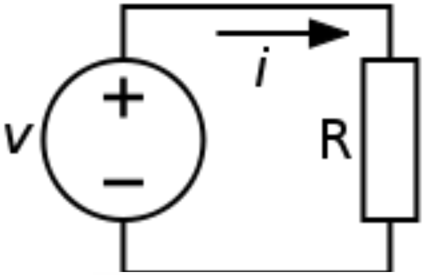


Potenza elettrica: $p(t) = R\, i^2(t)$

Energia elettrica: $E = \int_{-\infty}^{+\infty} R\, i^2(t)\, \mathrm{d}t$

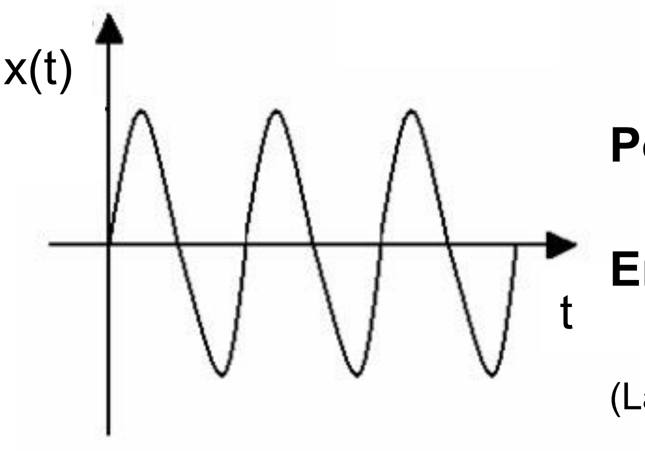
Al segnale “corrente” $i(t)$ è associata una potenza $\propto i^2(t)$
Estendiamo il concetto di potenza ed energia a un segnale generico

Potenza di un segnale



Potenza elettrica: $p(t) = R\, i^2(t)$

Energia elettrica: $E = \int_{-\infty}^{+\infty} R\, i^2(t)\, \mathrm{d}t$



Potenza istantanea: $p_x(t) = x^*(t)\ x(t) = |x(t)|^2$

Energia del segnale: $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)^2|\, \mathrm{d}t$

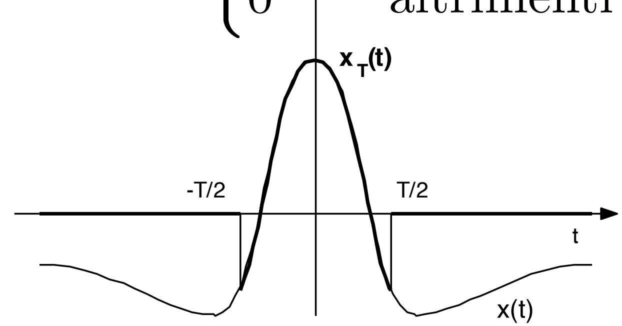
(La normalizzazione si ricava dal contesto fisico)

Tutti i segnali fisici portano energia finita.

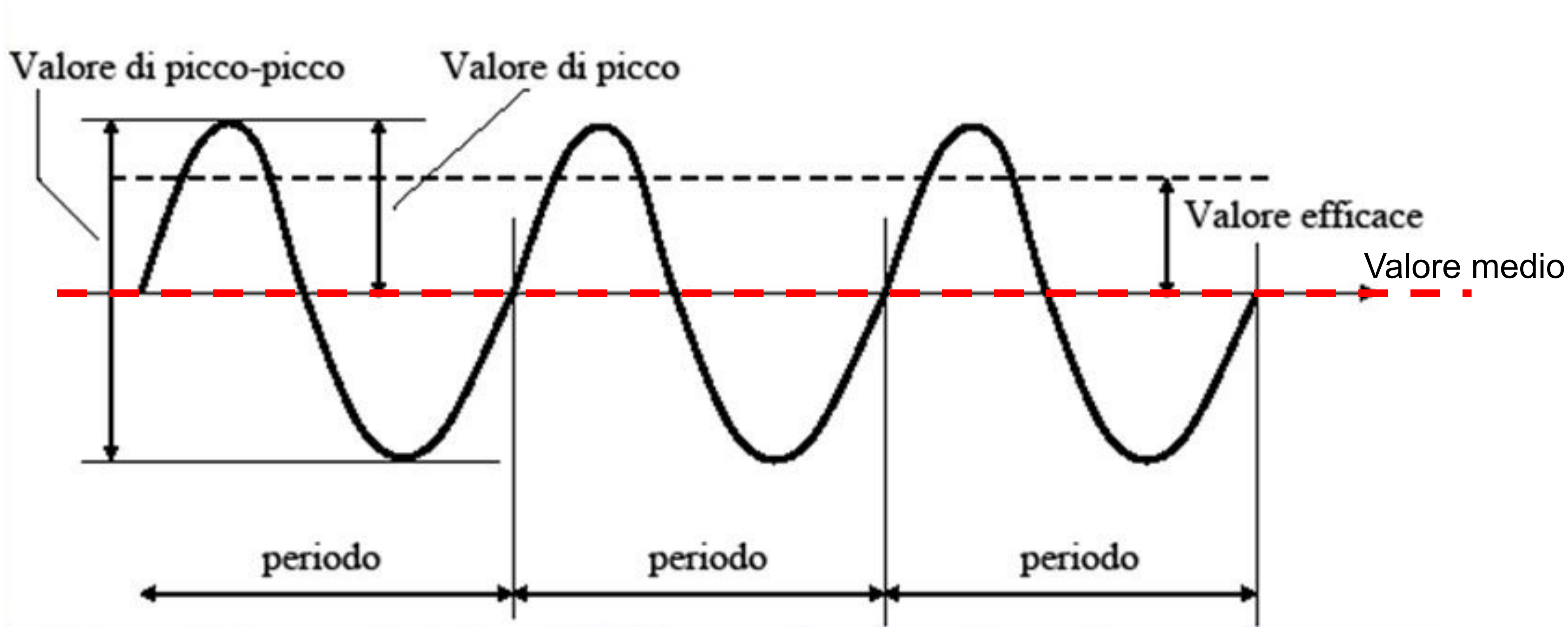
Definizione generale di potenza (per segnali “troncati)

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$p_x(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{E_x}{T} = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)^2|\, \mathrm{d}t$$



Valori notevoli di un segnale



Valore medio: $\overline{x} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\,\mathrm{d}t$ (componente “continua”)

Valore efficace: $x_{eff} = \sqrt{(P_x)}$ (“RMS” – Root mean square)

Valore efficace = Valore medio che dovrebbe assumere un segnale costante per avere la stessa potenza del segnale dato

$$x = A\sin(t) \to \overline{x} = 0; \quad x_{eff} = A/\sqrt{2}$$

Segnali Periodici

$$x(t) = x(t + T_0); \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

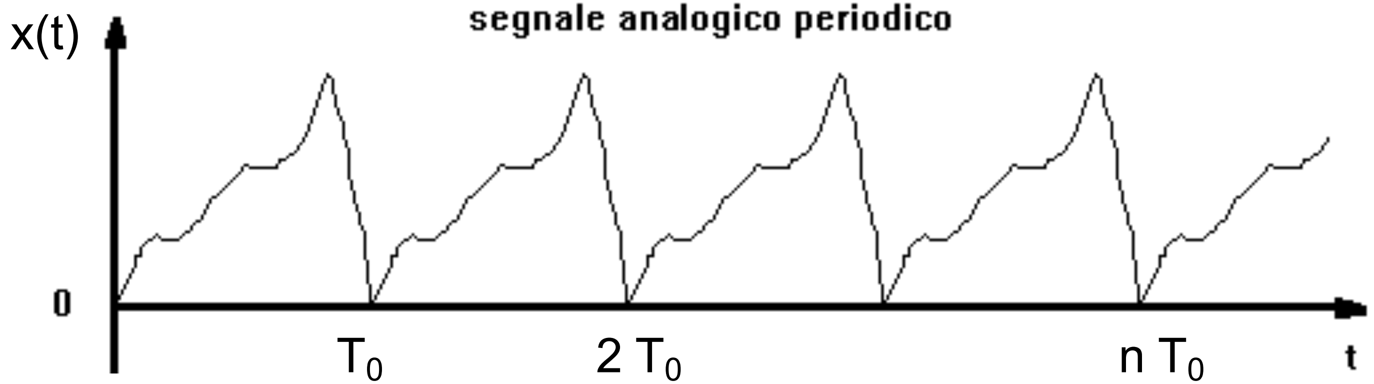
Segnali periodici:

$x(t) = x(t + T_0)$

T_0 periodo

$f_0 = 1/T_0$

frequenza portante



$$\bar{x} = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) \ \mathrm{dt} \qquad P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 \ \mathrm{dt}$$

(NB: segnali periodi generici e non fisici possono avere energia infinita ma potenza finita)

SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER: Ogni segnale reale e periodico può essere espresso come sommatoria di oscillazioni sinusoidali di ampiezza, fase e frequenza determinate

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + a_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) + \ldots$$

$\omega_k = 2\pi k f_0$ **Frequenze multipli interi della frequenza portante o fondamentale**

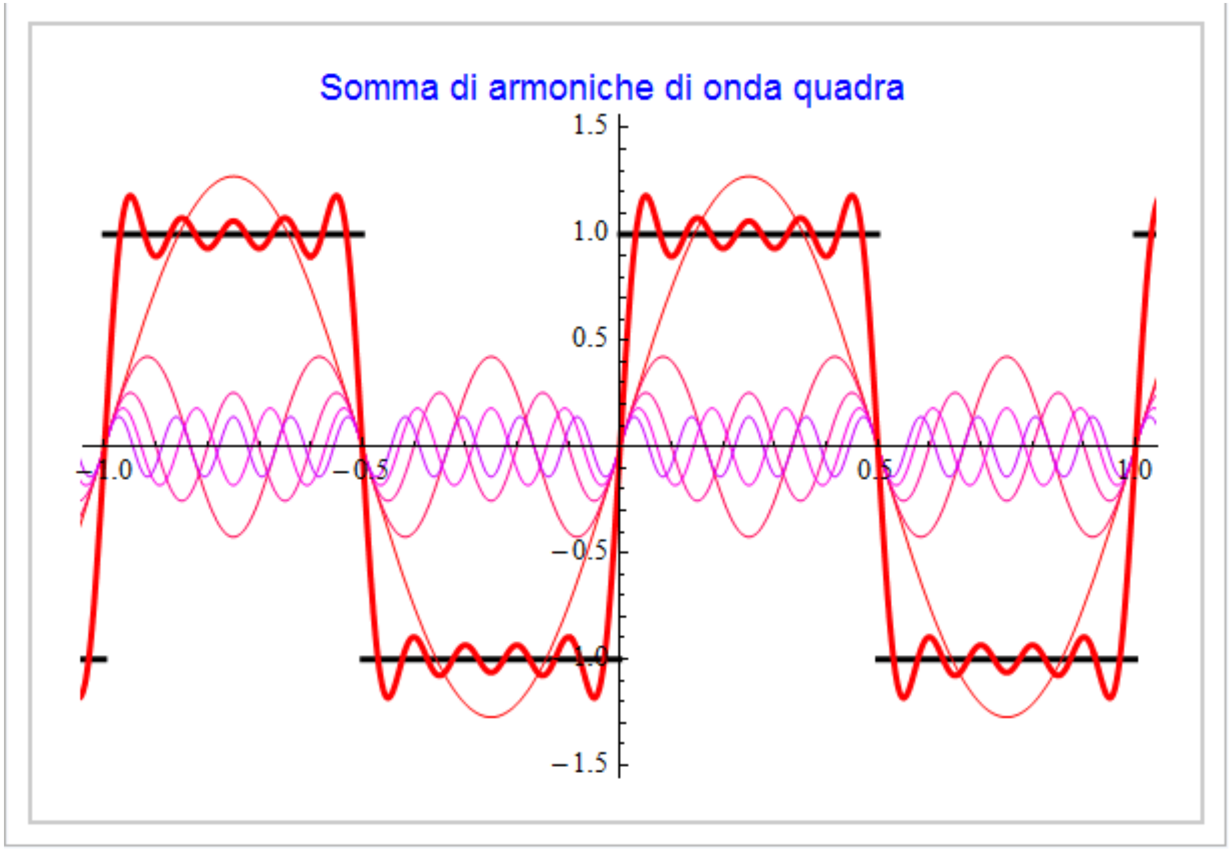
Sviluppo in Serie di Fourier per Segnali Periodici

$$x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)}$$

termine "continuo" **k-esima oscillazione armonica (o "armonica")**

$$x(t) = \lim_{N\to\infty} S_N(t)$$

$S_N(t)$ "Serie" di Fourier troncata all' N-esima armonica



Sviluppo in Serie di Fourier per Segnali Periodici

$$x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$ Forma “polare” della serie di Fourier

$$\zeta_k \equiv 2\pi k f_0 t \qquad x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\zeta_k + \phi_k)$$

$$x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\zeta_k + \phi_k) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \, \frac{e^{i(\zeta_k+\phi_k)} + e^{-i(\zeta_k+\phi_k)}}{2}$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \, e^{i\zeta_k} e^{i\phi_k} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{A_k \, e^{-i\zeta_k} e^{-i\phi_k}}$$

$$k \to -k$$

$$= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \, e^{i\zeta_k} e^{i\phi_k} + \sum_{k=-\infty}^{-1} A_{-k} \, e^{+i\zeta_k} e^{-i\phi_{-k}}$$

$$X_k = A_k \, e^{i\phi_k} \qquad k = 1, 2, ..., +\infty$$
$$X_k = A_{-k} \, e^{-i\phi_{-k}} \qquad k = -\infty, ..., -2, -1$$

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k \, e^{i\zeta_k} + \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k \, e^{i\zeta_k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \, e^{i2\pi k f_o t}$$

Forma “complessa” della serie di Fourier

Sviluppo in Serie di Fourier per Segnali Periodici

Determiniamo ora una espressione per il calcolo del coefficiente X_n, andando ad anti-trasformare:

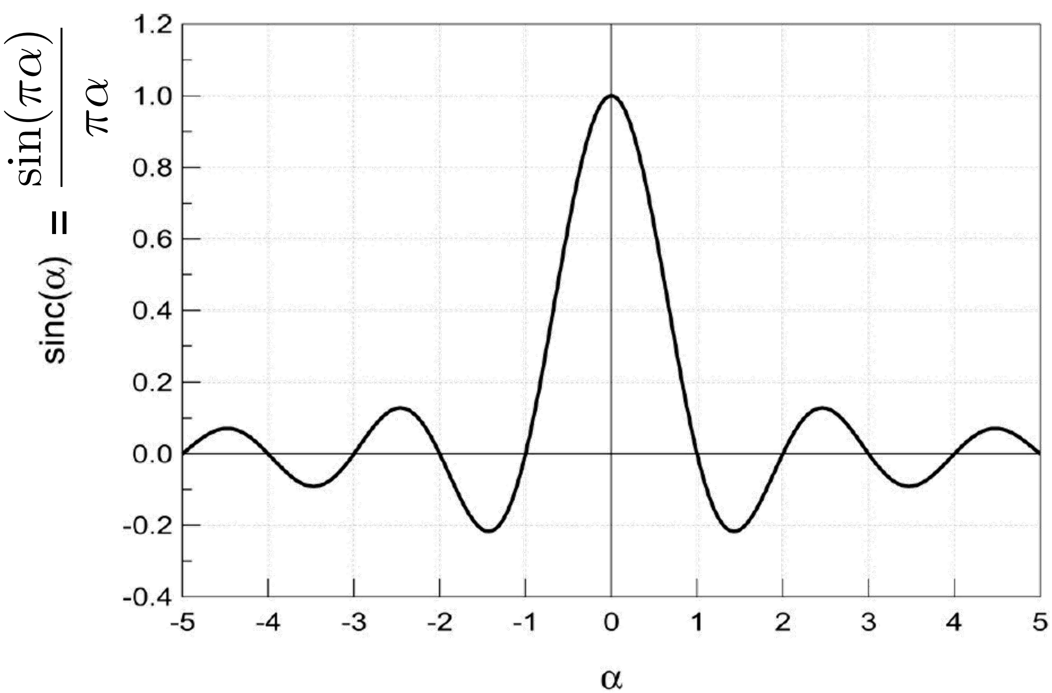
$$\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)\, e^{-i2\pi n f_0 t}\,\mathrm{d}t = \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k\, e^{i2\pi k f_0 t}\, e^{-i2\pi n f_0 t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} e^{i2\pi(k-n) f_0 t}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} e^{i2\pi(k-n) f_0 t}\,\mathrm{d}t = \left.\frac{\exp[i2\pi(k-n)f_0 t]}{i2\pi(k-n)f_0}\right|_{-T_0/2}^{+T_0/2} = \frac{\sin[\pi(k-n)]}{\pi(k-n)f_0}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

$$f_0 T_0 = 1$$

$$\frac{\sin[\pi(k-n)]}{\pi(k-n)f_0} = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ T_0 & k = n \end{cases}$$



sinc = cardinal sine

Sviluppo in Serie di Fourier per Segnali Periodici

Determiniamo ora una espressione per il calcolo del coefficiente X_n, andando ad anti-trasformare:

$$\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)\, e^{-i2\pi n f_0 t}\, \mathrm{d}t = \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k\, e^{i2\pi k f_0 t}\, e^{-i2\pi n f_0 t}\, \mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} e^{i2\pi(k-n) f_0 t}\, \mathrm{d}t$$

$$\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} e^{i2\pi(k-n) f_0 t}\, \mathrm{d}t = \left.\frac{\exp[i2\pi(k-n)f_0 t]}{i2\pi(k-n)f_0}\right|_{-T_0/2}^{+T_0/2} = \frac{\sin[\pi(k-n)]}{\pi(k-n)f_0}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

$$f_0 T_0 = 1$$

$$\frac{\sin[\pi(k-n)]}{\pi(k-n)f_0} = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ T_0 & k = n \end{cases}$$

$$\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)\, e^{-i2\pi n f_0 t}\, \mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} e^{i2\pi(k-n) f_0 t}\, \mathrm{d}t = X_n T_0$$

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)\, e^{-i2\pi n f_0 t}\, \mathrm{d}t$$

Sviluppo in Serie di Fourier per Segnali Periodici

Forma complessa della trasformata di Fourier

$$
\begin{cases}
X_k = \dfrac{1}{T_0} \displaystyle\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, \mathrm{d}t \\[2ex]
x(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k\, e^{j2\pi k f_0 t}
\end{cases}
$$

equazione di ANALISI: studio del contenuto in frequenza del segnale

equazione di SINTESI: ricostruzione del segnale a partire dalle sue armoniche

$$x(t) \Longleftrightarrow X_k$$

La conoscenza del segnale x(t) nel dominio temporale è equivalente alla conoscenza della successione dei termini di Fourier nel dominio delle frequenze

Equazione di sintesi per segnali periodici

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \, e^{j2\pi k f_0 t}$$

equazione di SINTESI: ricostruzione del segnale a partire dalle sue armoniche

Prevede l'uso di infinte armoniche per ricostruire il segnale (non fisico).

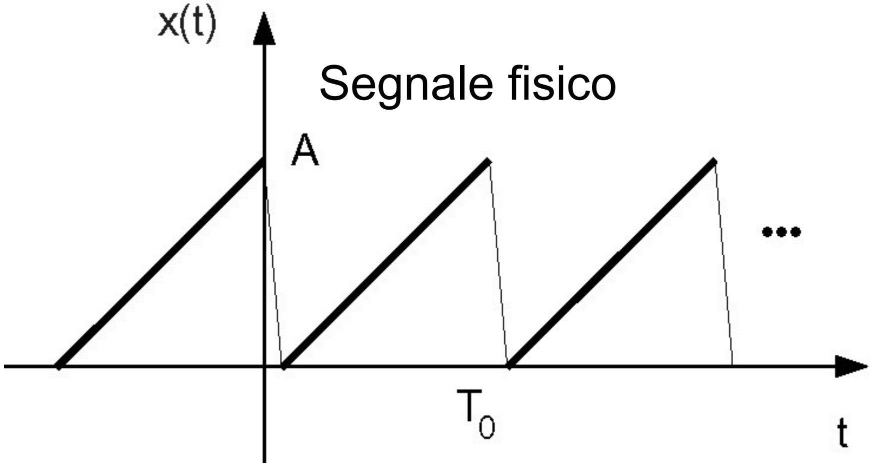
In generale possiamo ricostruire segnali a partire da un numero FINITO di armoniche.

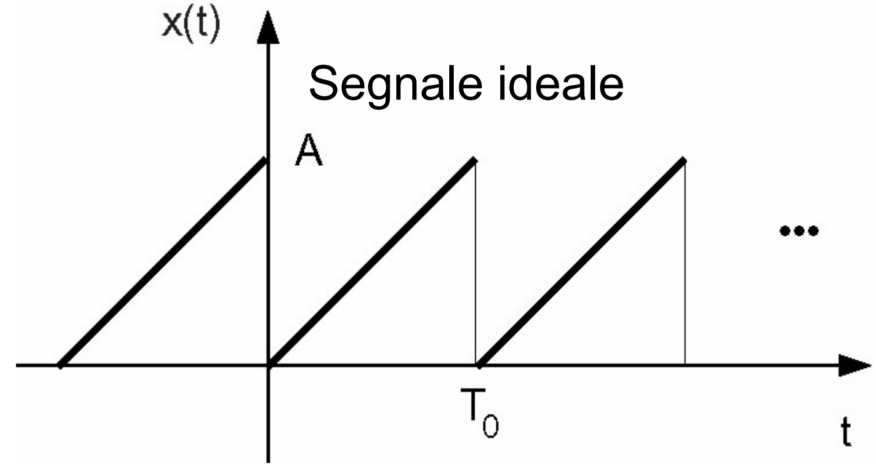
Dal criterio di convergenza delle serie sappiamo però che

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \, e^{j2\pi k f_0 t} < \infty \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} |X_k| = 0$$

cioè l'ampiezza delle armoniche con frequenze "alte" deve risultare trascurabile rispetto all'ampiezza delle armoniche a frequenze "basse".

Segnali fisici e segnali ideali





Segnali fisici spesso approssimati da segnali ideali (più semplici, ma non fisici). Chi ne garantisce la possibilità dello sviluppo in frequenza?

Criterio di Dirichlet:

Un segnale x(t) può essere sviluppato in serie di Fourier se valgono

- x(t) è assolutamente integrabile nel suo periodo $\displaystyle\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} |x(t)|\mathrm{d}t < \infty$

- x(t) è continua o presenta un numero finito di discontinuità di primo tipo

- x(t) è derivabile rispetto a t escluso al più un numero finito di punti $\Longleftrightarrow$ x(t) presenta un numero finito di massimi e minimi

Proprietà

Linearità:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) \Longleftrightarrow X_k \\ y(t) \Longleftrightarrow Y_k \\ z(t) = a\,x(t) \,+\, b\,y(t) \end{array}\right\} Z_k = a\,X_k \,+\, b\,Y_k$$

Simmetria Hermitiana:

$$X_{-k} = X_k^* \Longleftrightarrow \begin{array}{l} |X_k| = |X_{-k}| \\ \arg(X_k) = -\arg(X_{-k}) \end{array}$$

- Definisce la simmetria degli spettri in ampiezza e fase

Segnali pari e dispari

- Un segnale è *pari* se $x(t) = x(-t)$
  - $X_k = X_{-k}$

- Un segnale è *dispari* se $x(t) = -x(-t)$
  - $X_k = - X_{-k}$

Segnali pari e dispari

- Un segnale è *pari* se $x(t) = x(-t)$
  - $X_k = X_{-k}$
    esempio: *cos*

$$X_1 = X_{-1} = A/2 \quad (reali)$$

- Un segnale è *dispari* se $x(t) = -x(-t)$
  - $X_k = - X_{-k}$
    esempio: *sin*

$$X_1 = A/2\ e^{-i\pi/2},\ X_{-1} = A/2\ e^{i\pi/2} \quad (immaginari\ puri)$$

Segnali pari e dispari

- Un segnale è *pari* se $x(t) = x(-t)$
  - $X_k = X_{-k}$
    esempio: *cos*

$$X_k = \frac{2}{T_o}\int_0^{T_o/2} x(t)cos(2\pi k f_o t)dt$$

- Un segnale è *dispari* se $x(t) = -x(-t)$
  - $X_k = - X_{-k}$
    esempio: *sin*

$$X_k = -\frac{2i}{T_o}\int_0^{T_o/2} x(t)sin(2\pi k f_o t)dt$$

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, \mathrm{d}t$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cosh(ix)$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{i}\sinh(ix) = -i\sinh(ix)$$

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

$$e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$$

Proprietà

Parità:

un segnale può essere scomposto nella somma di un termine pari e uno dispari

$$x(t) = x_p(t) + x_d(t) \qquad X_k = X_{pk} + X_{dk}$$

la componente pari ha armoniche puramente reali ed è sviluppabile in serie di soli coseni

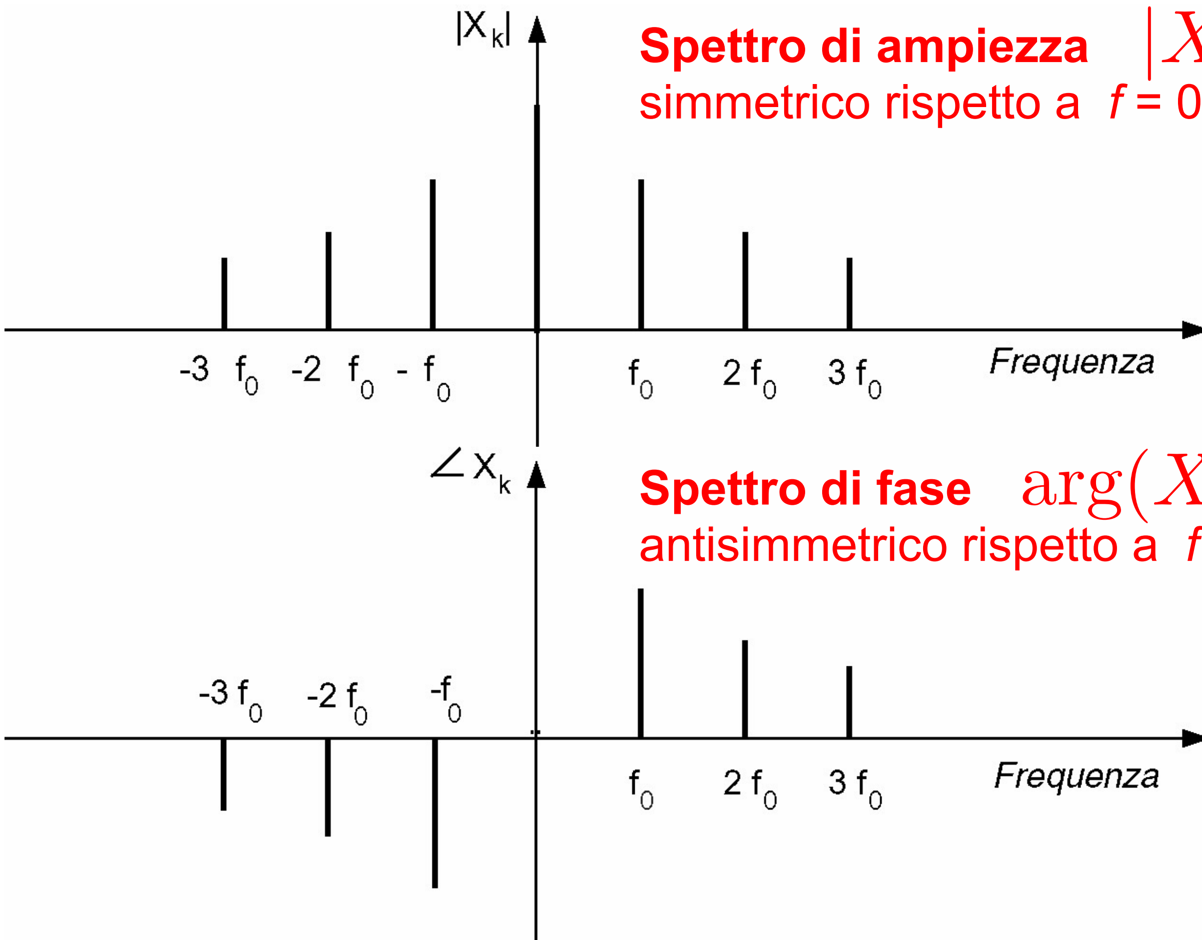
$$x_p(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \qquad X_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) \, \mathrm{d}t$$

la componente dispari ha armoniche puramente immaginarie ed è sviluppabile in serie di soli seni

$$x_d(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} \qquad X_k = \frac{-2\,j}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) \, \mathrm{d}t$$

Spettri di ampiezza e di fase

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, \mathrm{d}t$$



Spettro di ampiezza $|X_k|$
simmetrico rispetto a $f = 0$

Spettro di fase $\arg(X_k)$
antisimmetrico rispetto a $f = 0$

Spettri di segnali notevoli

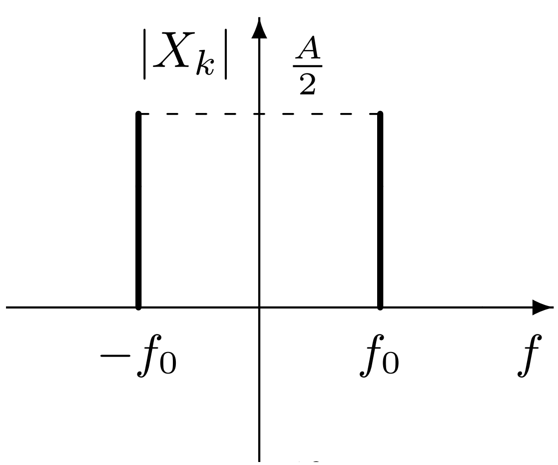
$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$$

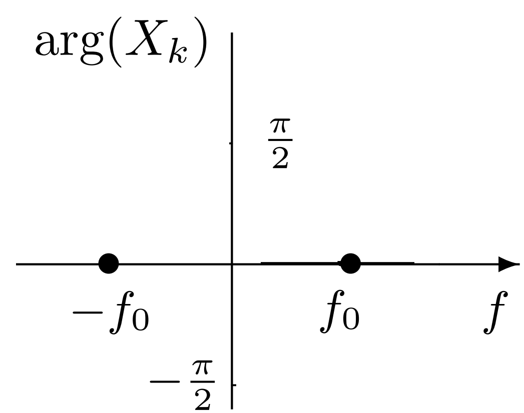
$$x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \, e^{j2\pi k f_0 t} \qquad \begin{array}{ll} X_k = A_k \, e^{i\phi_k} & k = 1, 2, ..., +\infty \\ X_k = A_{-k} \, e^{-i\phi_{-k}} & k = -\infty, ..., -2, -1 \end{array}$$

$$A_1 = A/2,\ \phi_1 = 0; \quad A_k,\ \phi_k = 0\ \forall k \neq 1$$

$$X_1 = A/2,\ X_{-1} = A/2; \quad X_k,\ \phi_k = 0\ \forall k \neq 1$$





Spettri di segnali notevoli

$$x(t) = A\sin(2\pi f_0 t) = A\cos(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2})$$

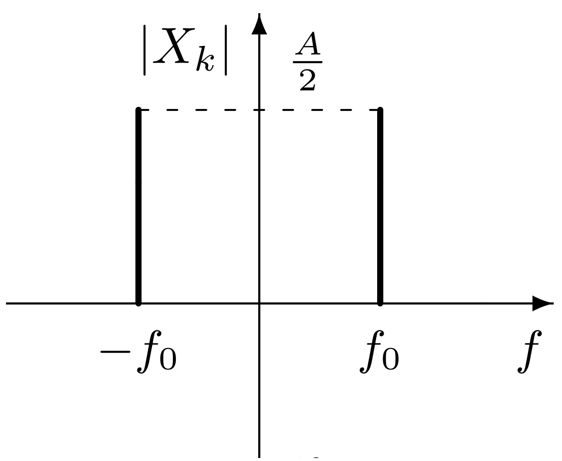
$$x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

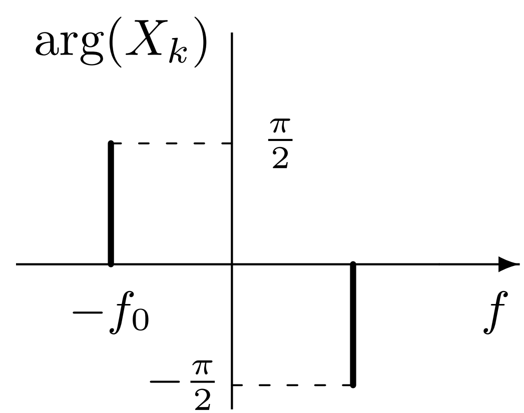
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k\, e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$X_k = A_k\, e^{i\phi_k} \quad k = 1, 2, ..., +\infty$$
$$X_k = A_{-k}\, e^{-i\phi_{-k}} \quad k = -\infty, ..., -2, -1$$

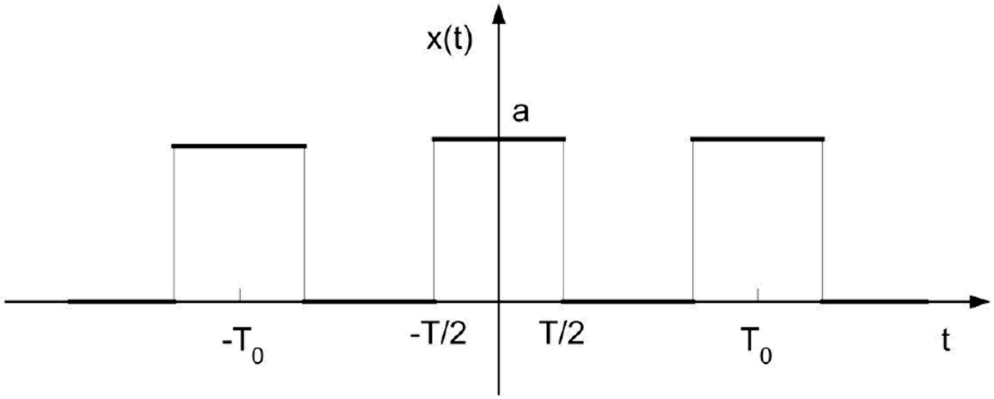
$$A_1 = A/2,\ \phi_1 = -\frac{\pi}{2}; \quad A_k,\ \phi_k = 0\ \forall k \neq 1$$

$$X_1 = A/2\, e^{-j\frac{\pi}{2}},\ X_{-1} = A/2\, e^{j\frac{\pi}{2}}; \quad X_k,\ \phi_k = 0\ \forall k \neq 1$$





Spettri di segnali notevoli



Treno di impulsi

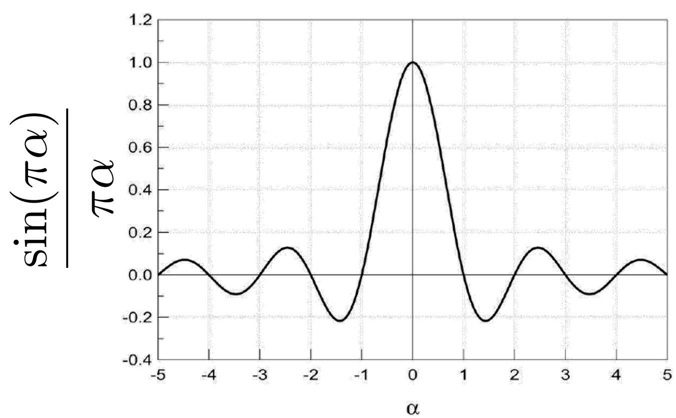
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t - nT_0}{T}\right)$$

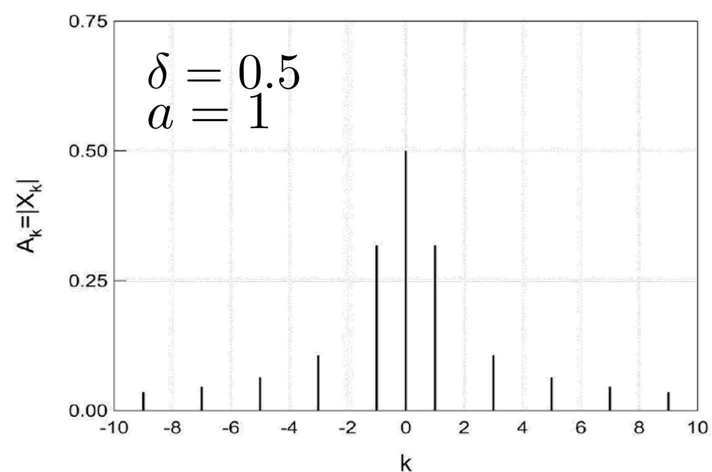
$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Duty factor: $\delta = T/T_0$

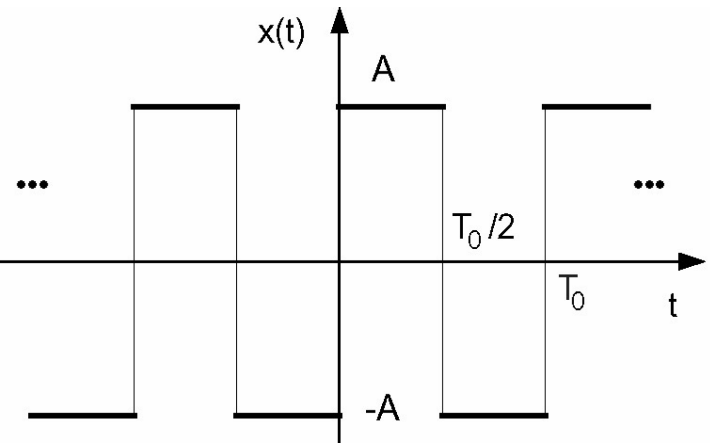
$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} a \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi k f_0 t}\, \mathrm{d}t = \frac{a}{T_0} \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-j2\pi k f_0 t}\, \mathrm{d}t$$

$$= \frac{a}{T_0} \frac{\sin(\pi k f_0 T)}{\pi k / T_0} = \frac{aT}{T_0} \frac{\sin(\pi k T/T_0)}{\pi k T/T_0} = a\delta \frac{\sin(\pi k \delta)}{\pi k \delta}$$

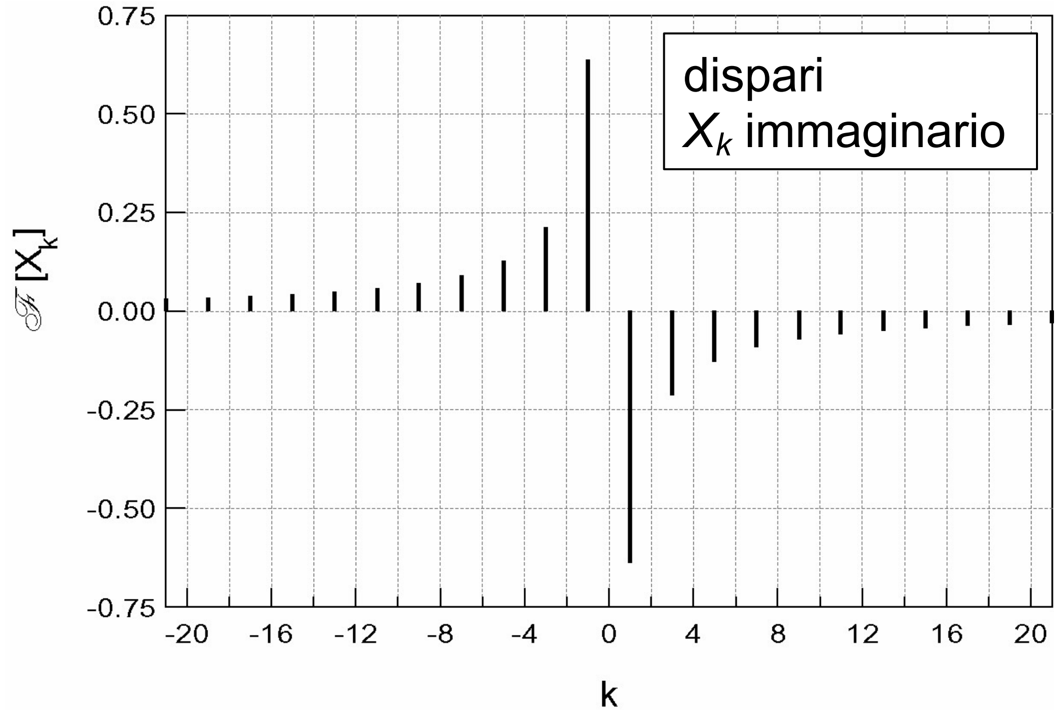




Spettri di segnali notevoli



$$x(t) = A \quad t \in \left[0, \frac{T_0}{2}\right]$$

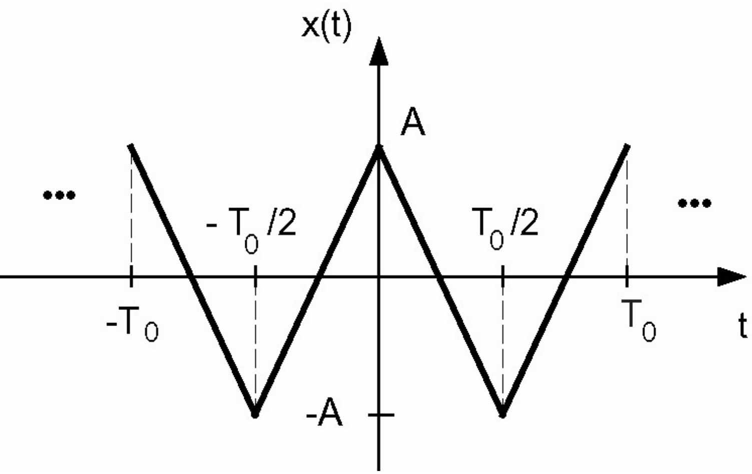


Segnale dispari: possiamo utilizzare $X_k = \dfrac{-2\,j}{T_0} \displaystyle\int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t)\sin(2\pi k f_0 t)\,\mathrm{d}t$

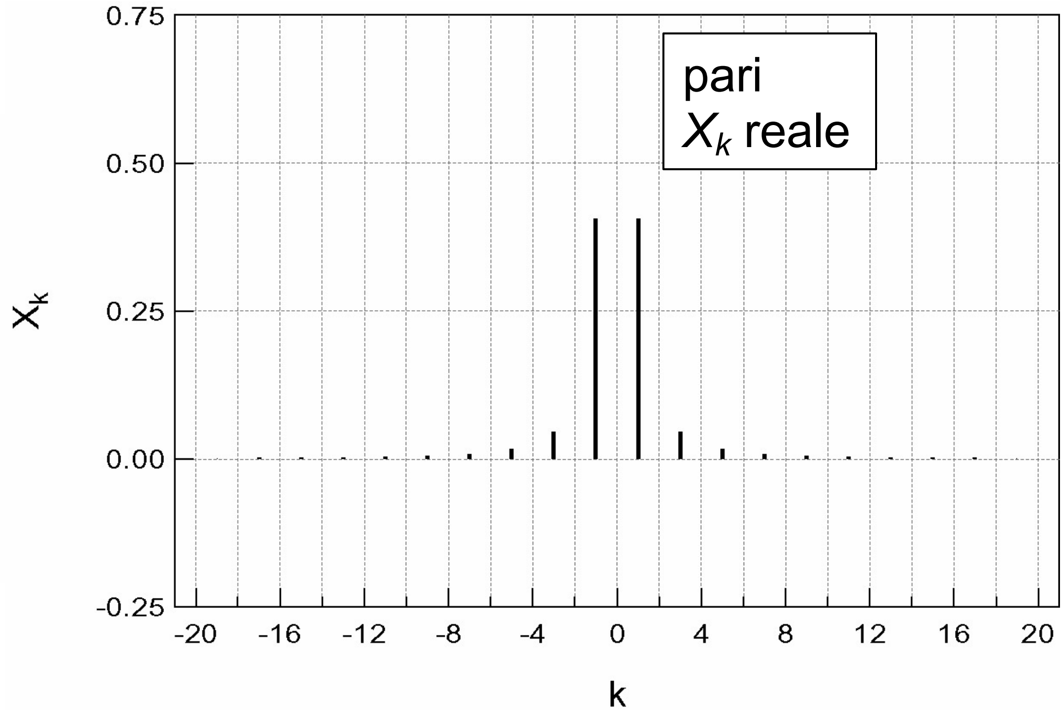
$$X_k = \frac{-2iA}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} \sin(2\pi k f_0 t)\,\mathrm{d}t = \frac{2iA}{2\pi k f_0 T_0}\cos(2\pi k f_0 t)\Big|_0^{\frac{T_0}{2}}$$

$$X_k = \frac{iA}{\pi k}[\cos(\pi k) - 1] = \frac{iA}{\pi k}[(-1)^k - 1] = \frac{2A}{i\pi k}, \quad k \text{ dispari}$$

Spettri di segnali notevoli



$$x(t) = A - 4A\frac{t}{T_0} \quad t \in \left[0, \frac{T_0}{2}\right]$$



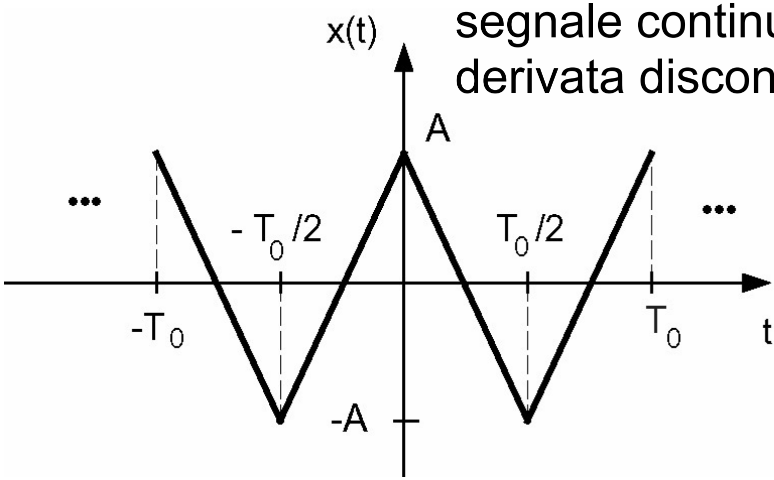
Segnale pari: possiamo utilizzare $X_k = \frac{2}{T_0}\int\limits_0^{\frac{T_0}{2}} x(t)\cos(2\pi k f_0 t)\,\mathrm{d}t$

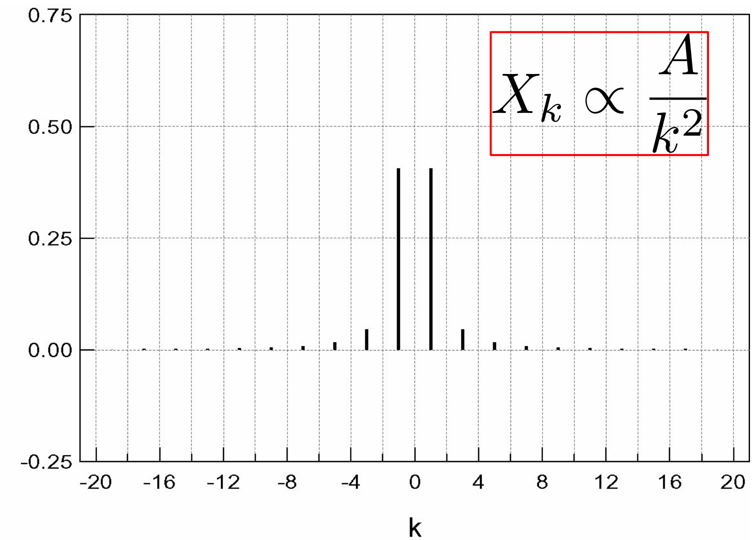
$$X_k = -\frac{8A}{T_0}\int_0^{T_0/2}\frac{t}{T_0}\cos\left(2\pi k f_0 t\right)dt + \underbrace{\boxed{\frac{2A}{T_0}\int\limits_0^{\frac{T_0}{2}}\cos(2\pi k f_0 t)\,\mathrm{d}t}}_{=0}$$

$$= -\frac{8A}{T_0}\frac{T_0}{\left(2\pi k\right)^2}\left[\left(-1\right)^k - 1\right] = \frac{4A}{\left(\pi k\right)^2}, \quad k \text{ dispari}$$

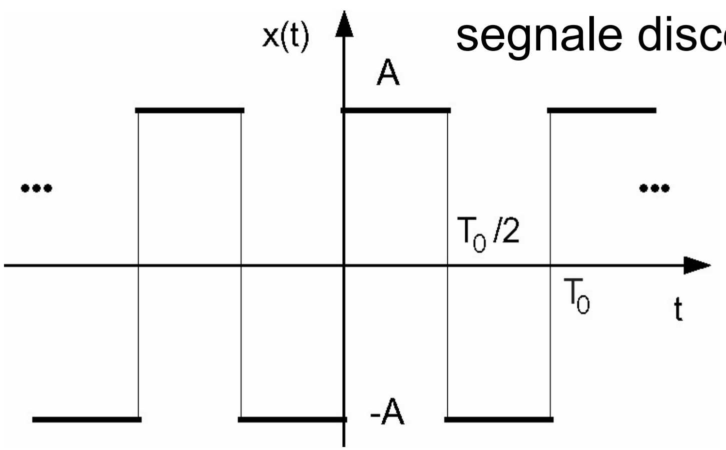
Contributo delle armoniche nella sintesi

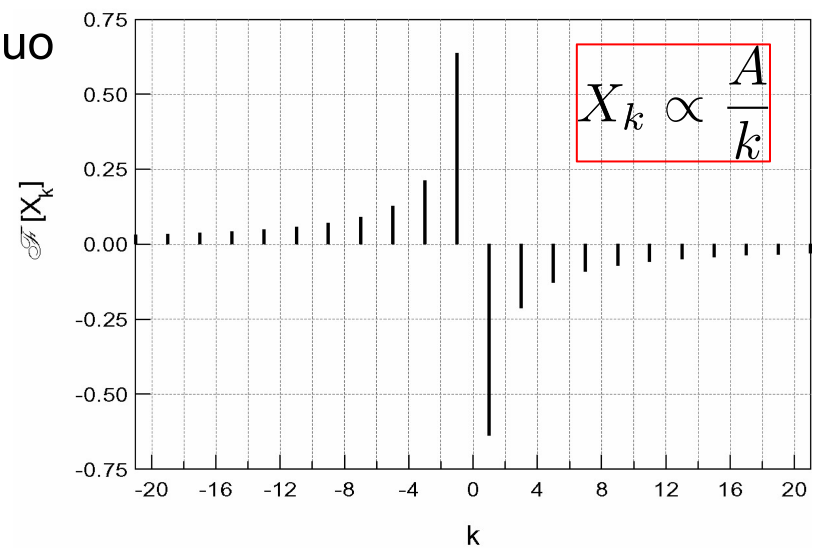
segnale continuo
derivata discontinua





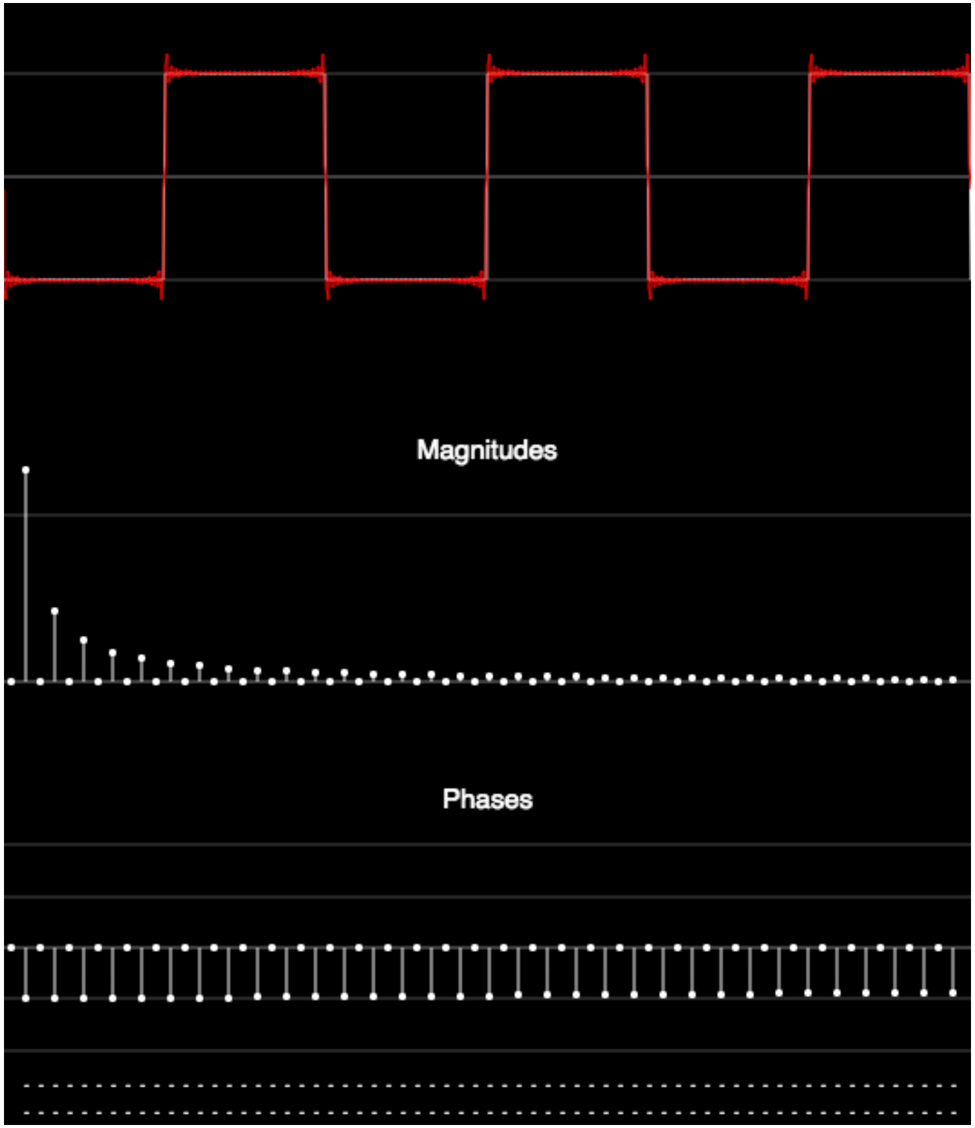
segnale discontinuo





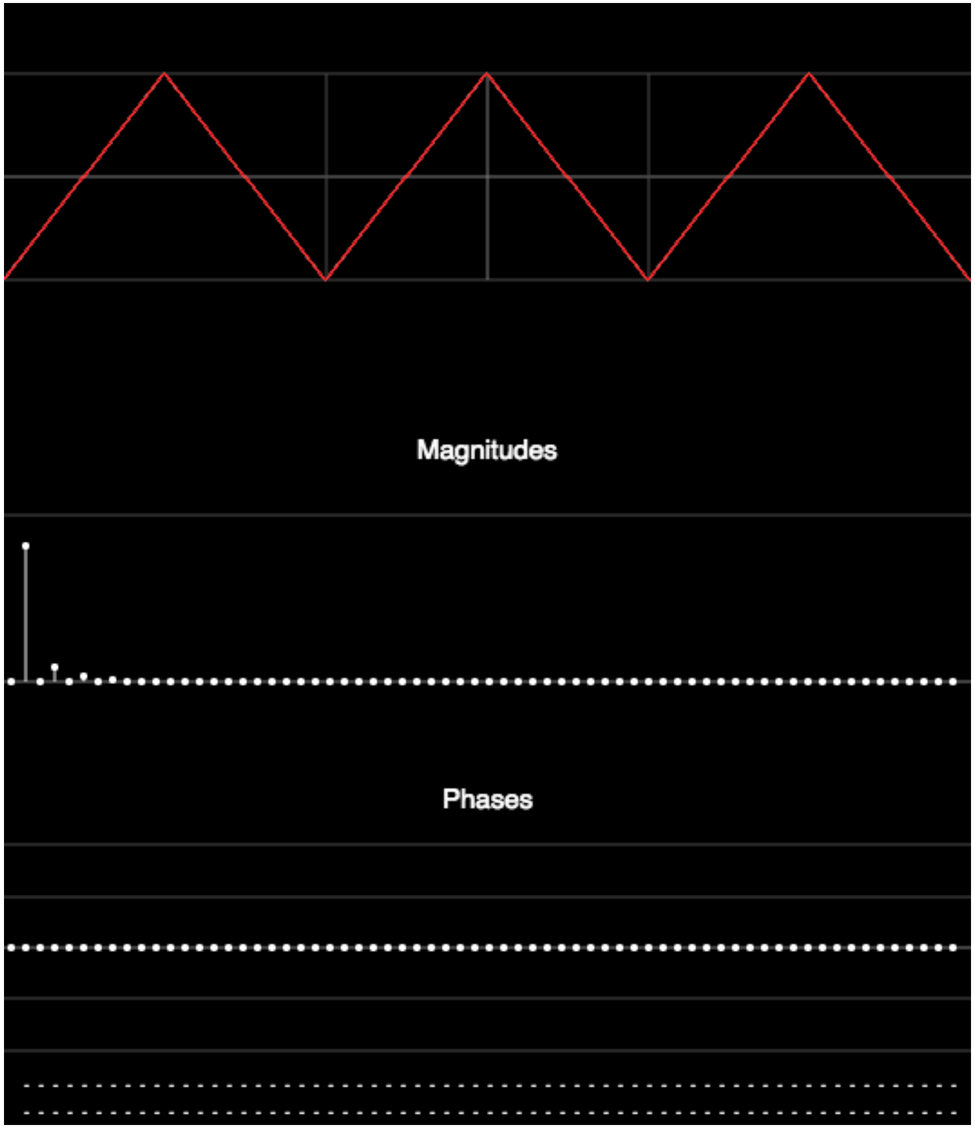
L'errore di sintesi dovuto al numero finito di armoniche utilizzate nella ricostruzione aumenta per segnali con "velocità di variazione" maggiori

Contributo delle armoniche nella sintesi



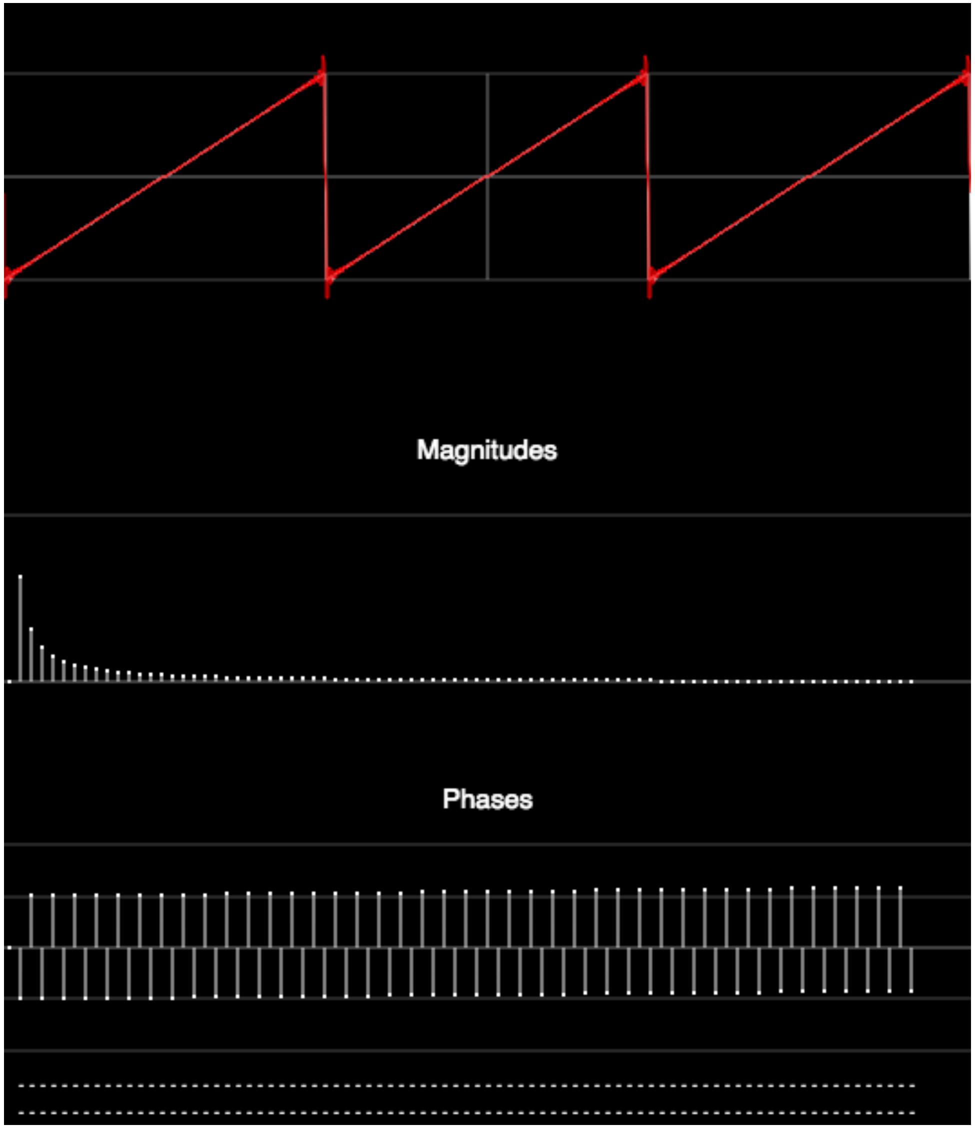
http://www.falstad.com/fourier/

Contributo delle armoniche nella sintesi



http://www.falstad.com/fourier/

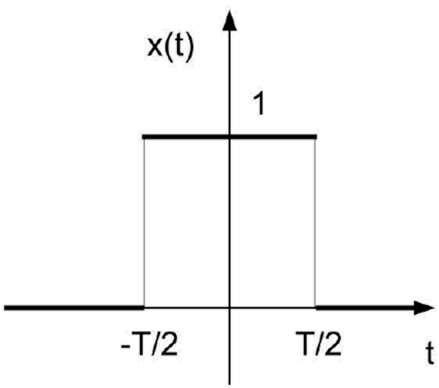
Contributo delle armoniche nella sintesi

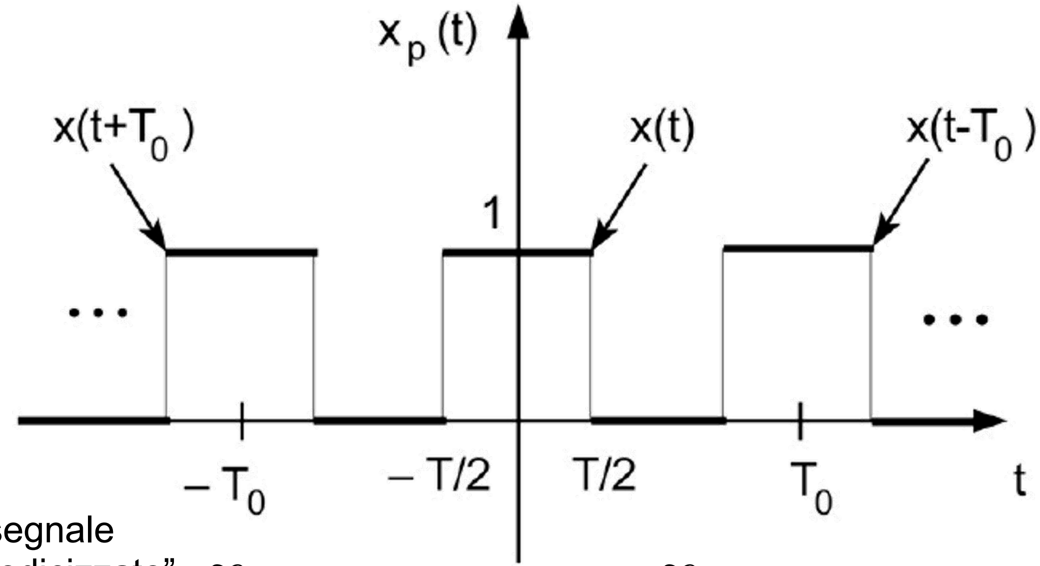


http://www.falstad.com/fourier/

Segnali Aperiodici

Possiamo esprimere un segnale aperiodico come sovrapposizione di segnali sinusoidali?





$$x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

segnale "periodicizzato"

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t - nT_0}{T}\right)$$

$$\boxed{x(t) = \lim_{T_0 \to \infty} x_p(t)}$$

(al limite in cui il periodo di *ripetizione* è infinito)

Un segnale APERIODICO può essere considerato il caso limite di un segnale periodico nel limite in cui il periodo di ripetizione è infinito

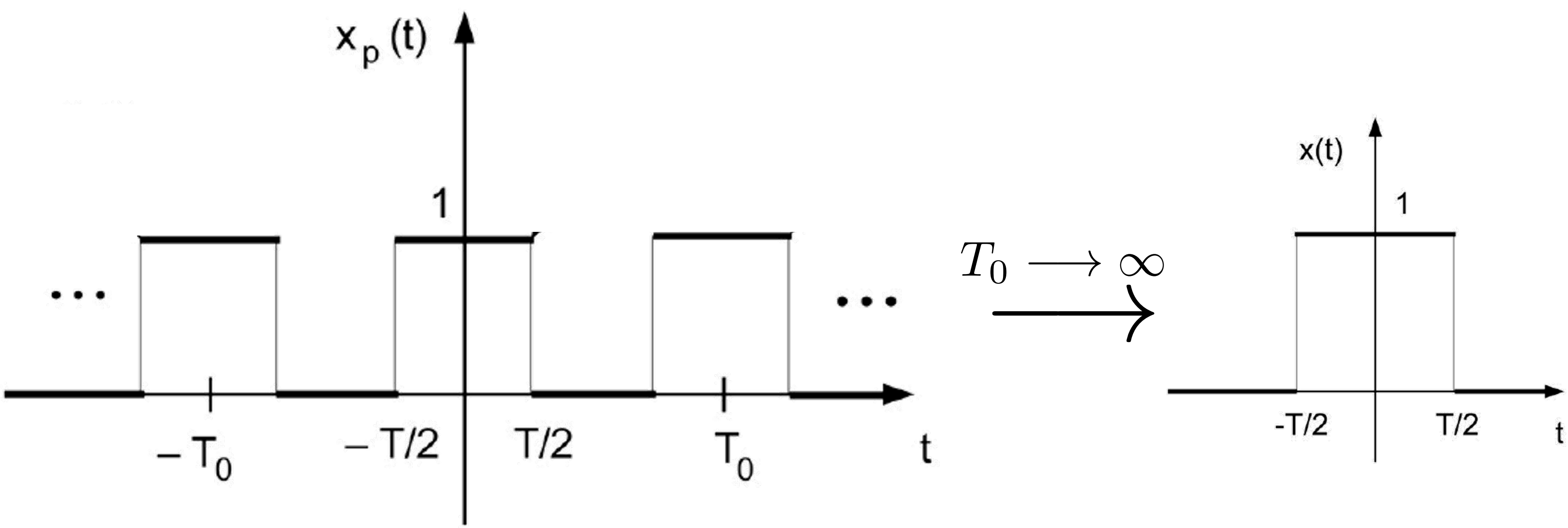
Segnali Aperiodici

$x_p(t)$ periodico, quindi posso sviluppare in serie di Fourier

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t-nT_0}{T}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i2\pi k f_o t}$$

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t) e^{-i2\pi k f_0 t} dt$$

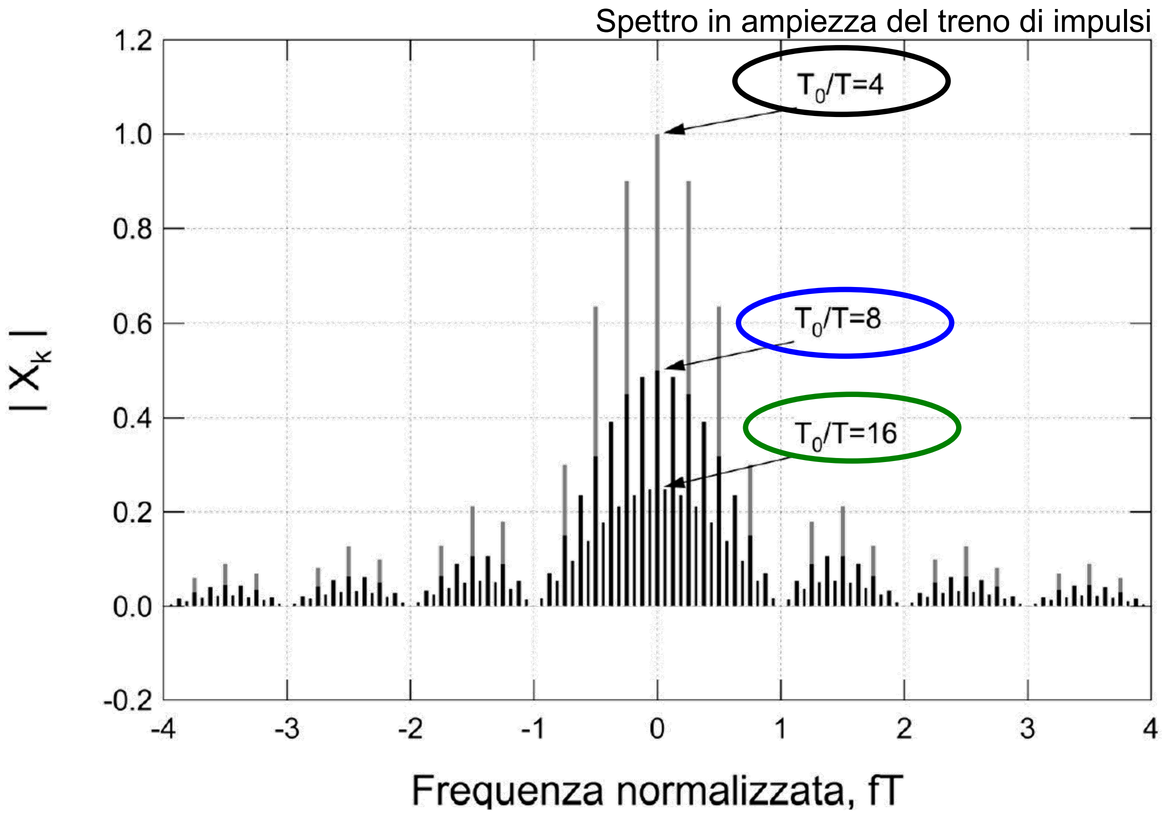
Cosa succede allo spettro di ampiezza per $T_0 \longrightarrow \infty$?

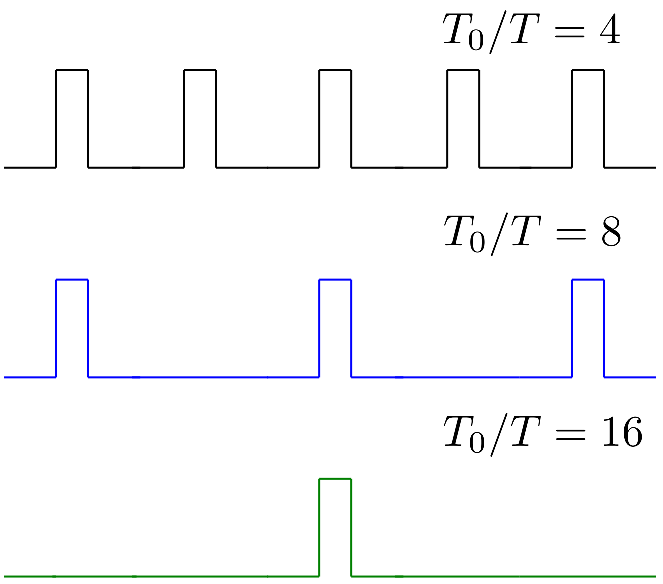


Segnali Aperiodici

Cosa succede allo spettro di ampiezza per $T_0 \longrightarrow \infty$?

- diminuisce f_0, le righe si avvicinano
- aumenta T_0, diminisce l'ampiezza delle righe





Segnali Aperiodici

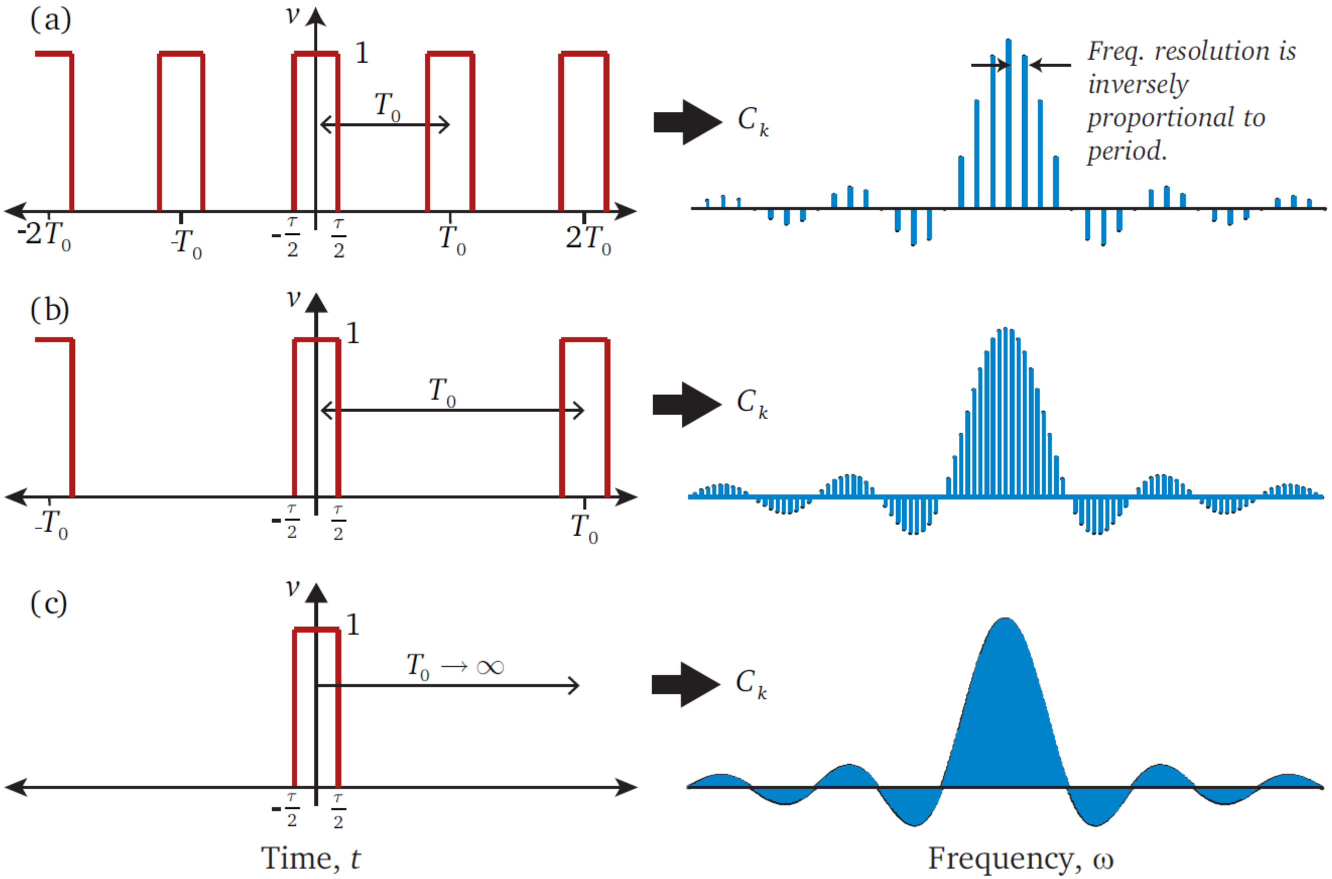
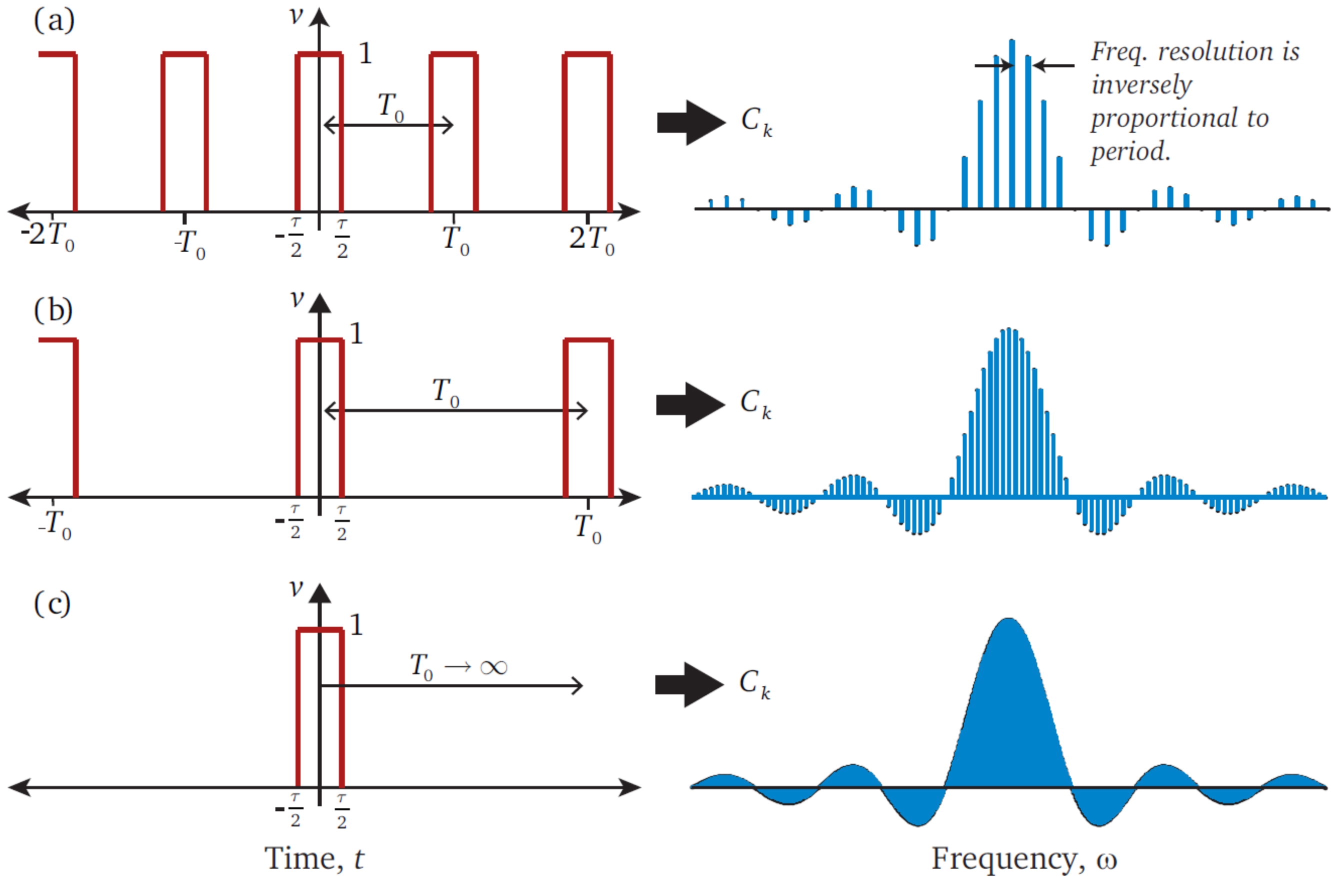


Figure 4.3: Take the pulse train in (a), as we increase its period, i.e., allow more time between the pulses, the fundamental frequency gets smaller, which makes the spectral lines move closer together as in (c). In the limiting case, where the period goes to ∞, the spectrum would become continuous.

Segnali Aperiodici

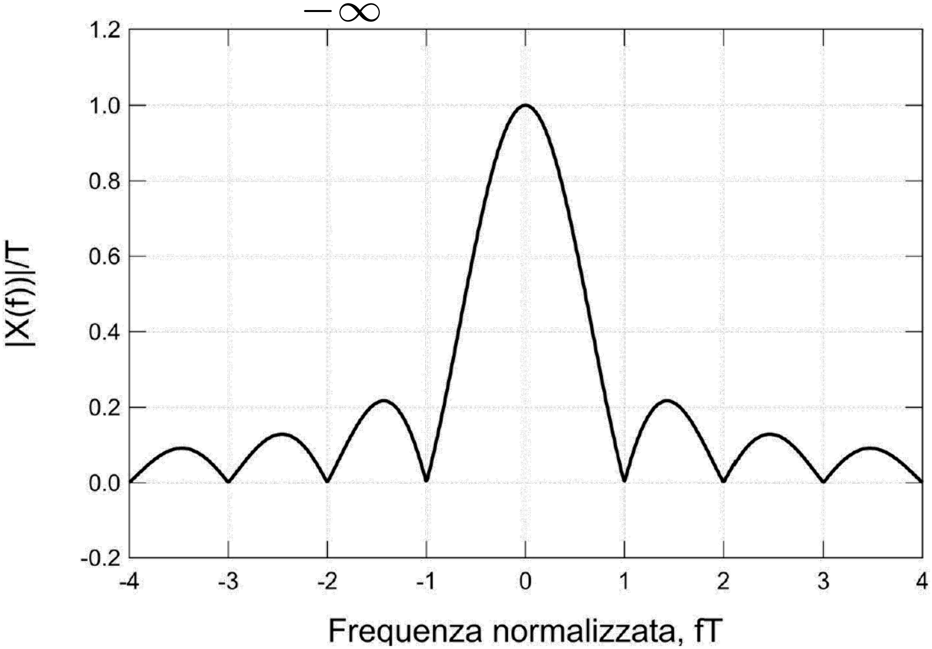


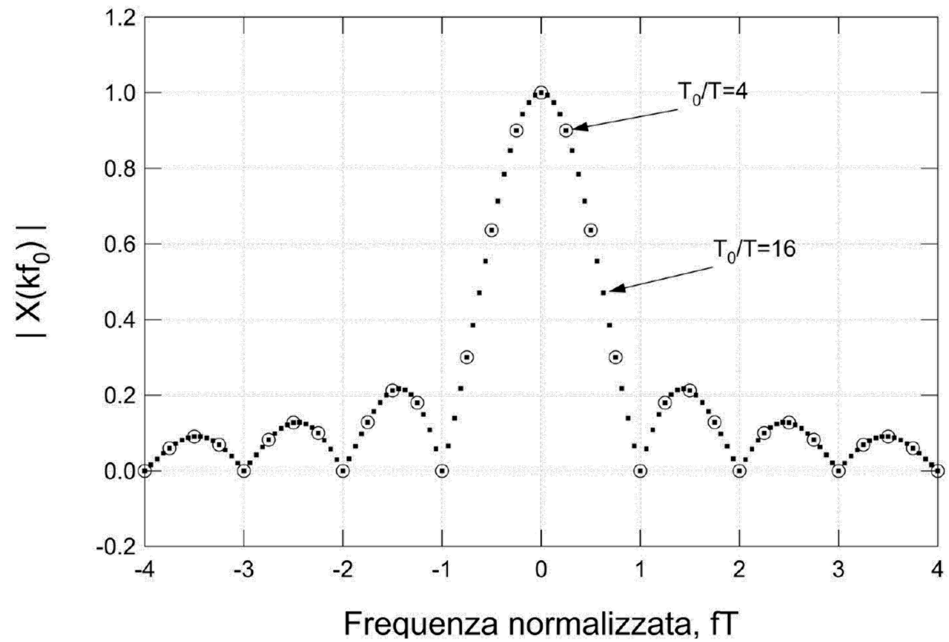
$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, \mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad X(f) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, \mathrm{d}t$$

Segnali Aperiodici

Definiamo un coefficiente di Fourier modificato la cui ampiezza non sia infinitesima

$$X(f) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\,\mathrm{d}t \Longrightarrow X_k = \frac{1}{T_0} X(f)\big|_{f=\frac{k}{T_0}} = f_0 X(k f_0)$$





$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \underbrace{X(kf_o)}_{\substack{T_0 \to \infty \\ f_0 \to 0 \\ \downarrow \\ X(f)}} e^{i2\pi k f_o t} f_o$$

$x_p(t)$: $T_0 \to \infty$, $f_0 \to 0$ $\;\to\; x(t)$

f_o: $T_0 \to \infty$, $f_0 \to 0$ $\;\to\; \mathrm{d}f$

Segnali Aperiodici

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \underbrace{X(kf_o)}_{\substack{T_0 \to \infty \\ f_0 \to 0}} e^{i2\pi k f_o t} f_o$$

$$x_p(t) \xrightarrow[f_0 \to 0]{T_0 \to \infty} x(t) \qquad X(kf_o) \xrightarrow[f_0 \to 0]{T_0 \to \infty} X(f) \qquad f_o \xrightarrow[f_0 \to 0]{T_0 \to \infty} \mathrm{d}f$$

Somma di valori di una funzione valutata su punti equispaziati e moltiplicati per il valore della distanza tra due punti infinitesima = integrale

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{i2\pi f t}\, \mathrm{d}f$$ Integrale di Fourier

Per determinare X(f) effettuo il limite per il coefficiente di Fourier modificato

$$X(f) = \lim_{\substack{T_0 \to \infty \\ f_0 \to 0}} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t} dt$$ Trasformata di Fourier

Segnali Aperiodici

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{i2\pi f t}\, \mathrm{d}f$$

equazione di SINTESI: ricostruzione del segnale a partire dalle sue armoniche

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-i2\pi f t}\, \mathrm{d}t$$

equazione di ANALISI: studio del contenuto in frequenza del segnale

$$x(t) \Longleftrightarrow X(f)$$

oppure

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}(X(f))$$
$$X(f) = \mathcal{F}(x(t))$$

La conoscenza del segnale x(t) nel dominio temporale è equivalente alla conoscenza della trasformata di Fourier nel dominio delle frequenze

Segnali Aperiodici

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{i2\pi f t}\, \mathrm{d}f \qquad X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-i2\pi f t}\, \mathrm{d}t$$

$$X(f) = A(f)\, e^{i\phi(f)}$$

$$x(t) \Longleftrightarrow X(f)$$

$$A(f) = |X(f)| \qquad \phi(f) = \arg(X(f))$$

spettro in ampiezza spettro in fase

Cosa abbiamo fatto?
Abbiamo schematizzato un segnale aperiodico come un segnale periodico con periodo di ripetizione infinito e quindi con frequenza fondamentale infinitesima.

Segnale periodico:

- **Somma (serie) di componenti sinusoidali a armoniche discrete con ampiezza finita e con frequenza multipla della frequenza fondamentale**

Segnale aperiodico:

- **Somma (integrale) di componenti sinusoidali a armoniche continue con ampiezza infinitesima $|X(f)|\mathrm{d}f$ e con frequenza f variabile con continuità**