Laboratorio II, modulo 2
2016-2017

Segnali periodici

(cfr. http://wpage.unina.it/verdoliv/tds/appunti/Appunti_03.pdf

Luise, Vitetta, D'Amico Teoria dei segnali analogici)

Alcune definizioni (1)

- Segnale **periodico**: $x(t) = x(t+T_0)$ per qualunque t
- Segnale **determinato**: quando il suo valore è univocamente determinabile una volta fissati i valori delle variabili indipendenti (tempo) (contrario: **aleatorio**)

Alcune definizioni (1)

- Segnale **periodico**: $x(t) = x(t+T_0)$ per qualunque t
- Segnale **determinato**: quando il suo valore è univocamente determinabile una volta fissati i valori delle variabili indipendenti (tempo) (contrario: **aleatorio**)
- Potenza **istantanea** associata ad un segnale (reale) $x(t)$: $x^2(t)$

$$p_x(t) = x^*(t)\ x(t) = |x(t)|^2$$

Alcune definizioni (1bis)

$$p_x(t) = x^*(t)\ x(t) = |x(t)|^2$$

- Se il segnale fosse, *in tensione:*

$$[P] = [E][T]^{-1} \stackrel{?}{=} [V]^2 \qquad \rightarrow V^2\text{, giusto?!}$$

Alcune definizioni (1bis)

$$p_x(t) = x^*(t)\ x(t) = |x(t)|^2$$

- Se il segnale fosse, *in tensione:*

  $[P] = [E][T]^{-1} = [V]^2[R]^{-1} \rightarrow V^2/R=W$

- Il “segnale” può essere una pressione, un’ampiezza di un oscillazione, etc…

→ Per un segnale in tensione, in caso di Resistenza unitaria, i valori numerici coincidono…

Nel resto dei casi il contesto consente di risolvere l’ambiguità.

Alcune definizioni (1)

- Segnale **periodico**: $x(t) = x(t+T_0)$ per qualunque t
- Segnale **determinato**: quando il suo valore è univocamente determinabile una volta fissati i valori delle variabili indipendenti (tempo) (contrario: **aleatorio**)
- Potenza **istantanea** di segnale $x(t)$: $x^2(t)$
- Energia associata ad un segnale $x(t)$:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt$$

(nota: l'energia di un segnale fisico è finita per definizione)

Segnali periodici

$$x(t) = x(t + T_0); \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 \, \mathrm{dt}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) \, \mathrm{dt}$$

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + a_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) + \ldots$$

dove le varie ω_i dovranno essere:

$$\omega = 2\pi k f$$

(altrimenti non si ha la periodicità!)

Sviluppo in serie di Fourier (1)

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$$
$$+ \; a_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) + \ldots$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = A_o + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k cos(2\pi k f_o t + \theta_k)$$

- $A_o = a_o$
- $2A_k = a_k$
- $\omega_k = 2\pi k f_0$

- Ogni particolare x(t) è caratterizzato da particolari valori di A_k e θ_k

Sviluppo in serie di Fourier (2)

$$x(t) = A_o + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k cos(2\pi k f_o t + \theta_k)$$

$$cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$x(t) = A_o + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{e^{i(2\pi k f_o t + \theta_k)} + e^{-i(2\pi k f_o t + \theta_k)}}{2}$$

$$x(t) = A_o + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i\theta_k} e^{i2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-i\theta_k} e^{-i2\pi k f_0 t}$$

Sviluppo in serie di Fourier (3)

$$x(t) = A_o + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i\theta_k} e^{i2\pi k f_o t} + \sum_{k=-\infty}^{1} A_{-k} e^{-i\theta_{-k}} e^{i2\pi k f_o t}$$

- $X_o = A_o$
- $X_k = A_k \exp(i\theta_k)$ (k>0)
  $X_k = A_{-k} \exp(-i\theta_{-k})$ (k<0)

$$x(t) = X_o + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{i2\pi k f_o t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k e^{i2\pi k f_o t}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i2\pi k f_o t}$$

Rappresentazione in forma complessa della trasformata di Fourier

Sviluppo in serie di Fourier (4)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i2\pi k f_o t}$$

Facciamo la trasformata di Fourier e calcoliamo i coefficienti di *x(n)*:

$$\int_{-T_o/2}^{T_o/2} x(t) e^{-i2\pi n f_o t} dt = \int_{-T_o/2}^{T_o/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i2\pi k f_o t} e^{-i2\pi n f_o t} dt$$

$$\int_{-T_o/2}^{T_o/2} x(t) e^{-i2\pi n f_o t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \int_{-T_o/2}^{T_o/2} e^{i2\pi (k-n) f_o t} dt$$

Sviluppo in serie di Fourier (4bis)

$$\int_{-T_o/2}^{T_o/2} e^{i2\pi(k-n)f_o t} dt = \left. \frac{e^{i2\pi(k-n)f_o t}}{i2\pi(k-n)f_o} \right|_{-T_0/2}^{T_0/2}$$

$$= \frac{e^{i\pi(k-n)} - e^{-i\pi(k-n)}}{i2\pi(k-n)f_o} = \frac{sin[\pi(k-n)]}{\pi(k-n)f_o}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$$

$$\int_{\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{i2\pi(k-n)f_0 t} \mathrm{dt} = \begin{cases} T_0 & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

Sviluppo in serie di Fourier (5)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i2\pi k f_0 t}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i2\pi k f_0 t} e^{-i2\pi n f_0 t} dt$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi (k-n) f_0 t} dt$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt = X_n T_0$$

$$\boxed{X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-i2\pi k f_0 t} dt}$$

Equazioni di analisi e sintesi

(segnali periodici a tempo continuo)

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-i2\pi k f_0 t} dt$$

Analisi

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i2\pi k f_o t}$$

Sintesi

$$x(t) \Leftrightarrow X_k$$

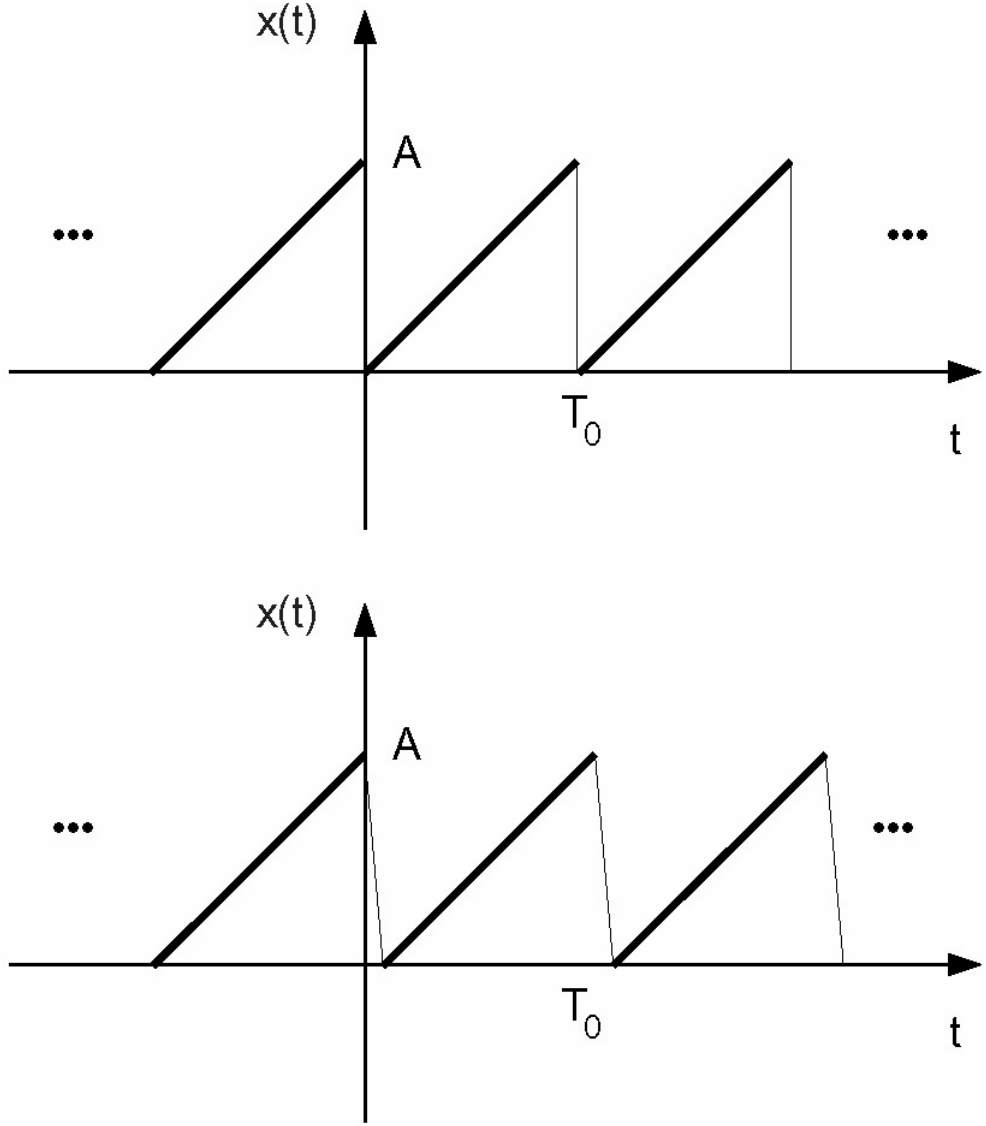
(nota: X_k è in generale complessa)

Criterio di Dirichlet

- Un segnale *x(t)* periodico è sviluppabile in serie di Fourier se:

  - è assolutamente integrabile sul periodo T_0
  - è continuo o presenta un numero finito di discontinuità
  - è derivabile rispetto al tempo nel periodo T_0, escluso al più un numero finito di punti

Segnali fisici e reali



(a)

(b)

Equazioni di analisi e sintesi

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-i2\pi k f_0 t} dt$$

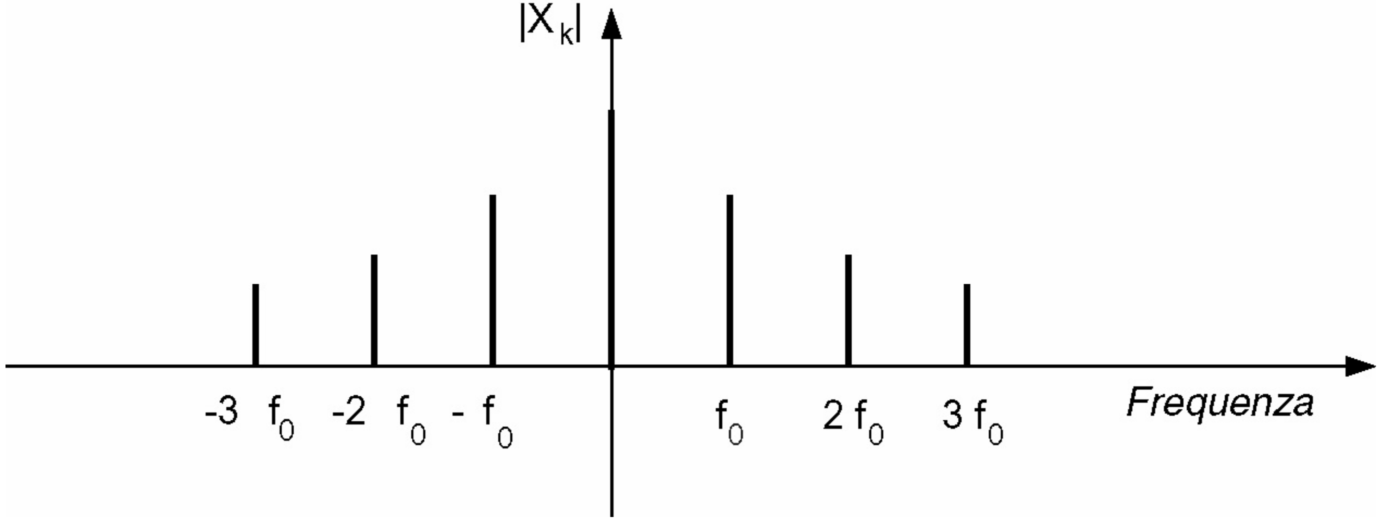
Analisi

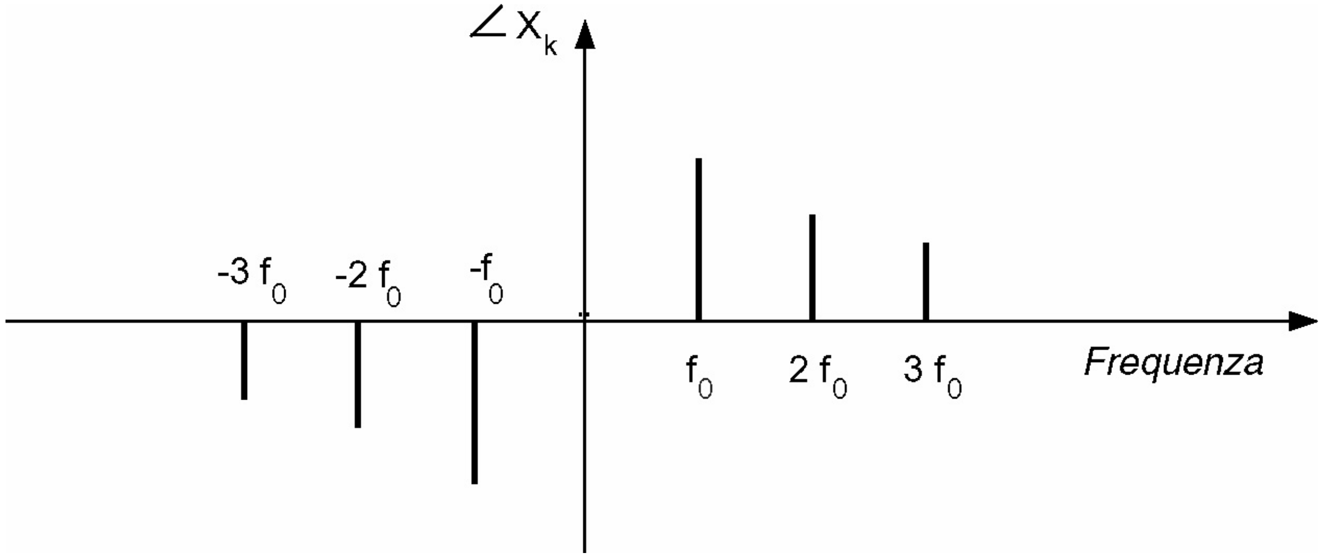
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i2\pi k f_o t}$$

Sintesi

$$x(t) \Leftrightarrow X_k$$

Spettro di ampiezza e di fase





Spettro di ampiezza e di fase

Trasformata del segnale $x(t) = A\ cos(2\pi f_o t)$

$$x(t) = A_o + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k cos(2\pi k f_o t + \theta_k)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i2\pi k f_o t}$$

$X_o = A_o$; $X_k = A_k \exp(i\theta_k)$; $X_k = A_{-k} \exp(-i\theta_{-k})$

- $A_0 = X_0 = 0;\ \theta_0 = 0$
- $2A_1 = A \rightarrow |X_{|1|}| = A/2;\ \theta_{|1|} = 0 \rightarrow exp(\pm i\theta_0) = 1$
  $\rightarrow\ \ X_1 = X_{-1} = A/2$ *(reali)*
- $|X_n| = 0;\ \theta_0 = 0$ per ogni $n \neq 1$

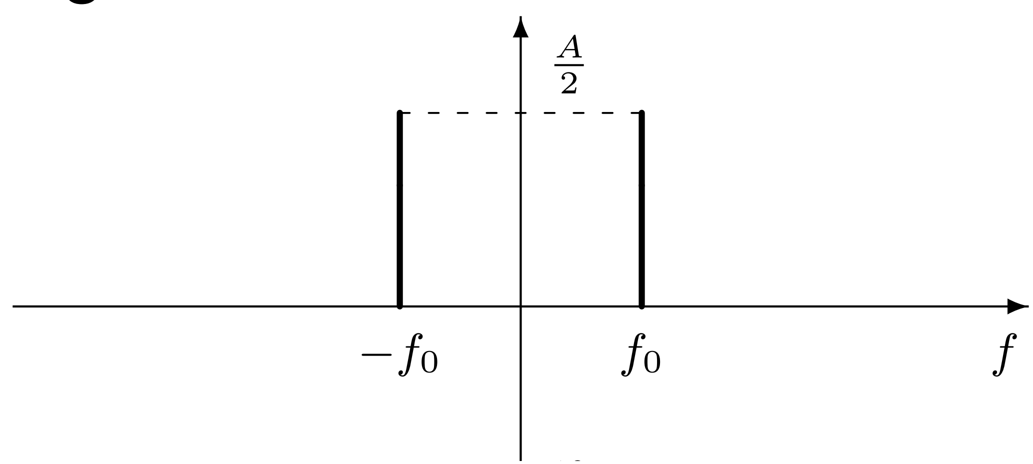
Spettro di ampiezza e di fase

Trasformata del segnale $x(t) = A\cos(2\pi f_o t)$

$$x(t) = A_o + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k cos(2\pi k f_o t + \theta_k)$$

- $X_0 = 0; \theta_0 = 0$
- $X_1 = A/2; X_{-1} = A/2$
- $|X_n| = 0; \theta_0 = 0$ per ogni $n \neq 1$

spettro di ampiezza:



Spettro di ampiezza e di fase

Trasformata del segnale $x(t) = A\ cos(2\pi f_o t)$

$$x(t) = A_o + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k cos(2\pi k f_o t + \theta_k)$$

- $X_0 = 0; \theta_0 = 0$
- $X_1 = A/2; X_{-1} = A/2$
- $|X_n| = 0; \theta_0 = 0$ per ogni $n \neq 1$

spettro di fase: nullo (i termini di fase sono nulli per ogni *n*)

Spettro di ampiezza e di fase

Trasformata del segnale $x(t) = A \sin(2\pi f_o t)$
visto che $A \sin(2\pi f_o t) = A \cos(2\pi f_o t - \pi/2)$

$$x(t) = A_o + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k cos(2\pi k f_o t + \theta_k)$$

$X_o = A_o$; $X_k = A_k \exp(i\theta_k)$; $X_k = A_{-k} \exp(-i\theta_{-k})$

- $X_0 = 0; \theta_0 = 0$
- $|X_1| = A/2; \theta_1 = - \pi/2, \theta_{-1} = \pi/2$
  $\rightarrow$ $X_1 = A/2\ e^{-i\pi/2}, X_{-1} = A/2\ e^{i\pi/2}$ *(immaginari puri)*
- $|X_n| = 0; \theta_0 = 0$ per ogni $n \neq 1$

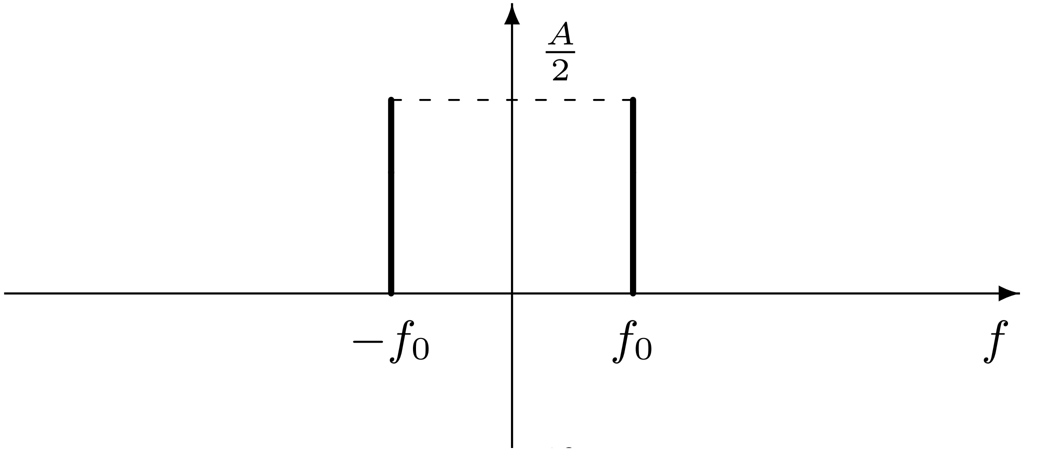
Spettro di ampiezza e di fase

Trasformata del segnale $x(t) = A\ sin(2\pi f_o t)$

$$x(t) = A_o + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k cos(2\pi k f_o t + \theta_k)$$

- $X_0 = 0; \theta_0 = 0$
- $\theta_1 = -\pi/2, \theta_{-1} = \pi/2; X_1 = A/2\ e^{-i\pi/2}, X_{-1} = A/2\ e^{i\pi/2}$
- $|X_n| = 0; \theta_0 = 0$ per ogni $n \neq 1$

spettro di ampiezza:



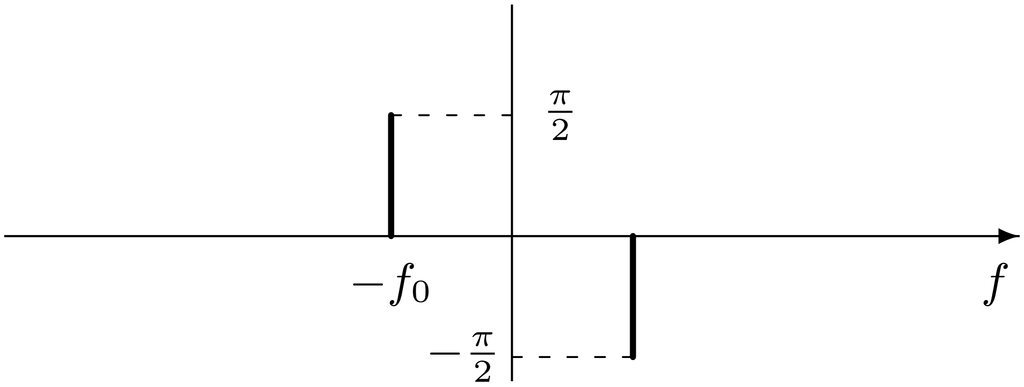
Spettro di ampiezza e di fase

Trasformata del segnale $x(t) = A\ sin(2\pi f_o t)$

$$x(t) = A_o + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k cos(2\pi k f_o t + \theta_k)$$

- $X_0 = 0;\ \theta_0 = 0$
- $\theta_1 = -\ \pi/2,\ \theta_{-1} = \pi/2;\ X_1 = A/2\ e^{-i\pi/2},\ X_{-1} = A/2\ e^{i\pi/2}$
- $|X_n| = 0;\ \theta_0 = 0$ per ogni $n \neq 1$

spettro di fase:



Segnali pari e dispari

- Un segnale è *pari* se $x(t) = x(-t)$
  - $X_k = X_{-k}$

- Un segnale è *dispari* se $x(t) = -x(-t)$
  - $X_k = - X_{-k}$

Segnali pari e dispari

- Un segnale è *pari* se $x(t) = x(-t)$
  - $X_k = X_{-k}$

  esempio: *cos*

$$X_1 = X_{-1} = A/2 \quad (reali)$$

- Un segnale è *dispari* se $x(t) = -x(-t)$
  - $X_k = - X_{-k}$

  esempio: *sin*

$$X_1 = A/2\, e^{-i\pi/2},\ X_{-1} = A/2\, e^{i\pi/2} \quad (immaginari\ puri)$$

Segnali pari e dispari

- Un segnale è *pari* se x(t) = x(-t)
  - $X_k = X_{-k}$

$$X_k = \frac{2}{T_o}\int_0^{T_o/2} x(t)cos(2\pi k f_o t)dt$$

- Un segnale è *dispari* se x(t) = -x(-t)
  - $X_k = - X_{-k}$

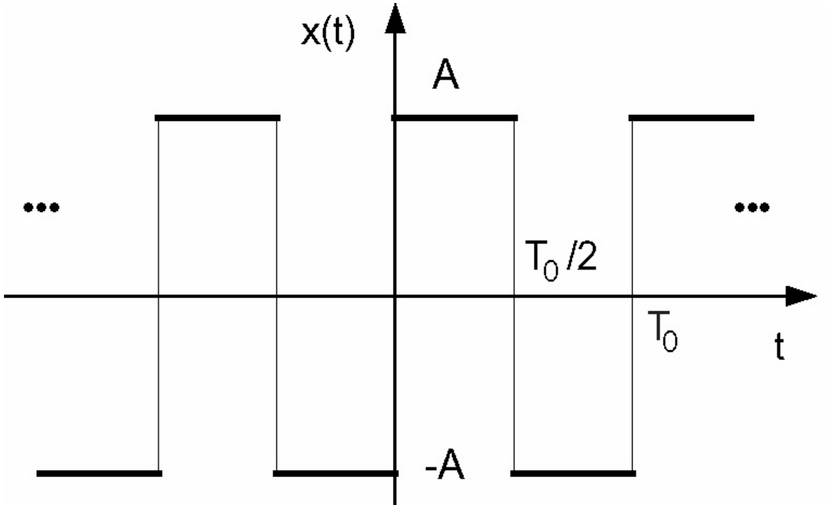
$$X_k = -\frac{2i}{T_o}\int_0^{T_o/2} x(t)sin(2\pi k f_o t)dt$$

Per un segnale arbitrario: la parte **reale** del coefficiente di Fourier rappresenta il coefficiente dello sviluppo della sua parte **pari**, mentre la parte **immaginaria** la sua parte **dispari**

Trasformata del segnale onda quadra

Il segnale è dispari, quindi possiamo utilizzare direttamente la:

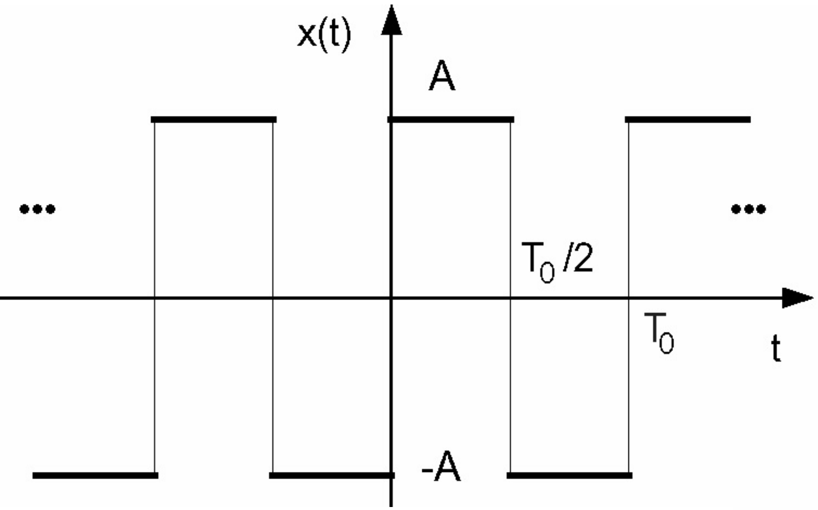
$$X_k = -\frac{2i}{T_o}\int_0^{T_o/2} x(t) sin(2\pi k f_o t)dt$$

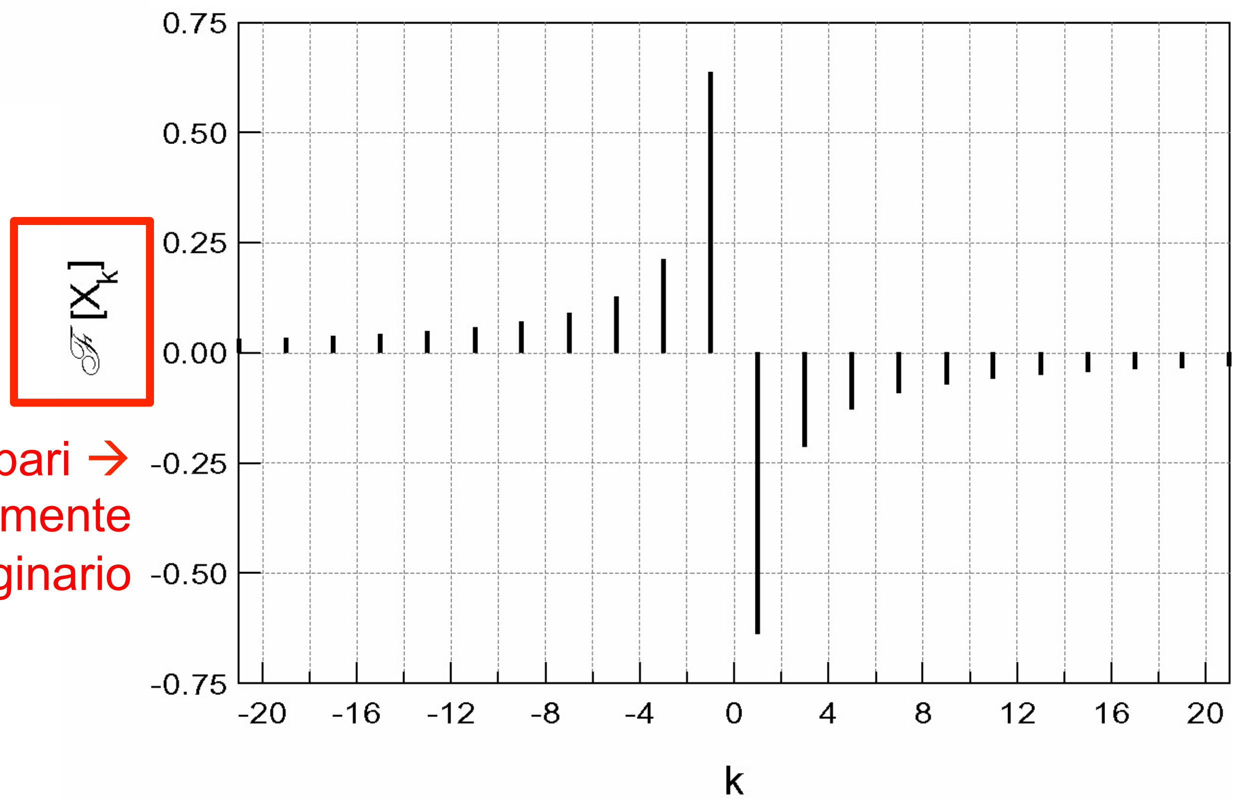


$$X_k = -\frac{2iA}{T_o}\int_0^{T_o/2} sin(2\pi k f_o t)dt = \frac{2iA}{2\pi k f_o T_o} cos(2\pi k f_o t)|_{t=0}^{t=T_o/2}$$

$$X_k = \frac{iA}{\pi k}[cos(\pi k) - 1] = \frac{iA}{\pi k}[(-1)^k - 1] = \frac{2A}{i\pi k}$$ k dispari

Trasformata del segnale onda quadra



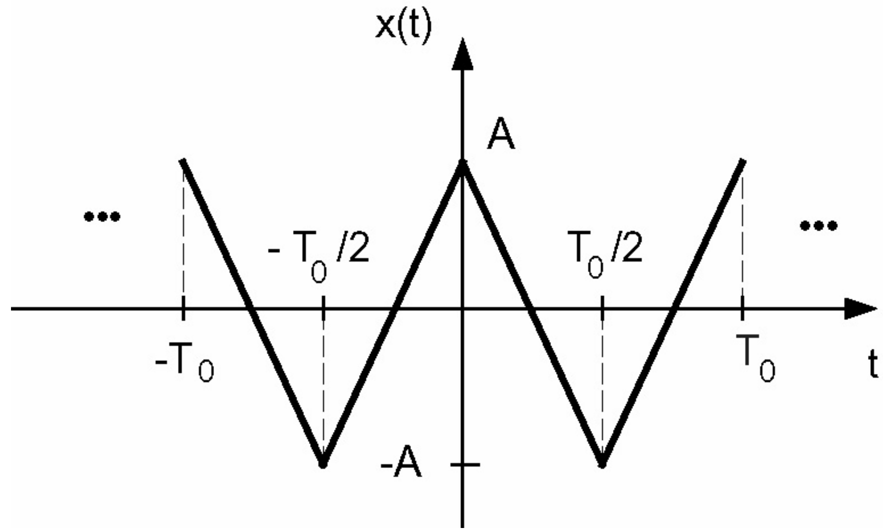


dispari → puramente immaginario

Trasformata del segnale onda triangolare

Il segnale è pari, quindi possiamo utilizzare direttamente la:

$$X_k = \frac{2}{T_o}\int_0^{T_o/2} x(t) cos(2\pi k f_o t) dt$$



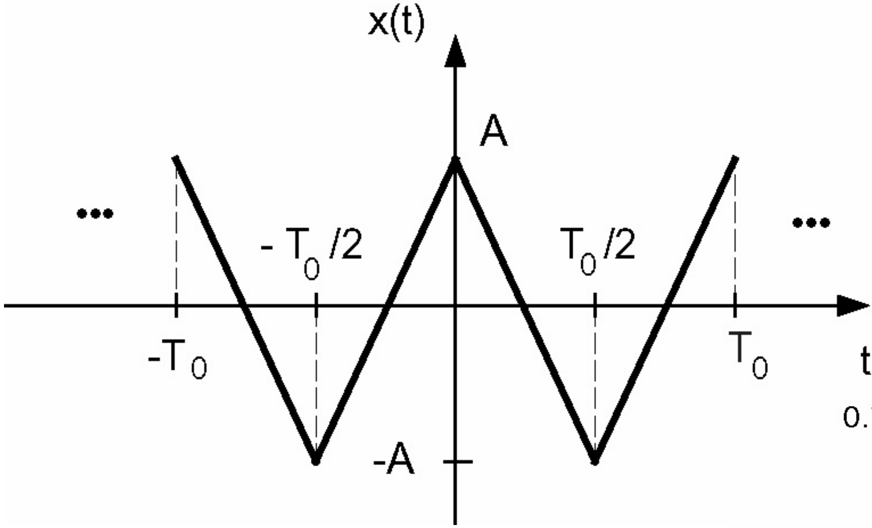
$$X_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2} A\left(1 - \frac{4t}{T_0}\right)\cos\left(2\pi k f_0 t\right) dt$$

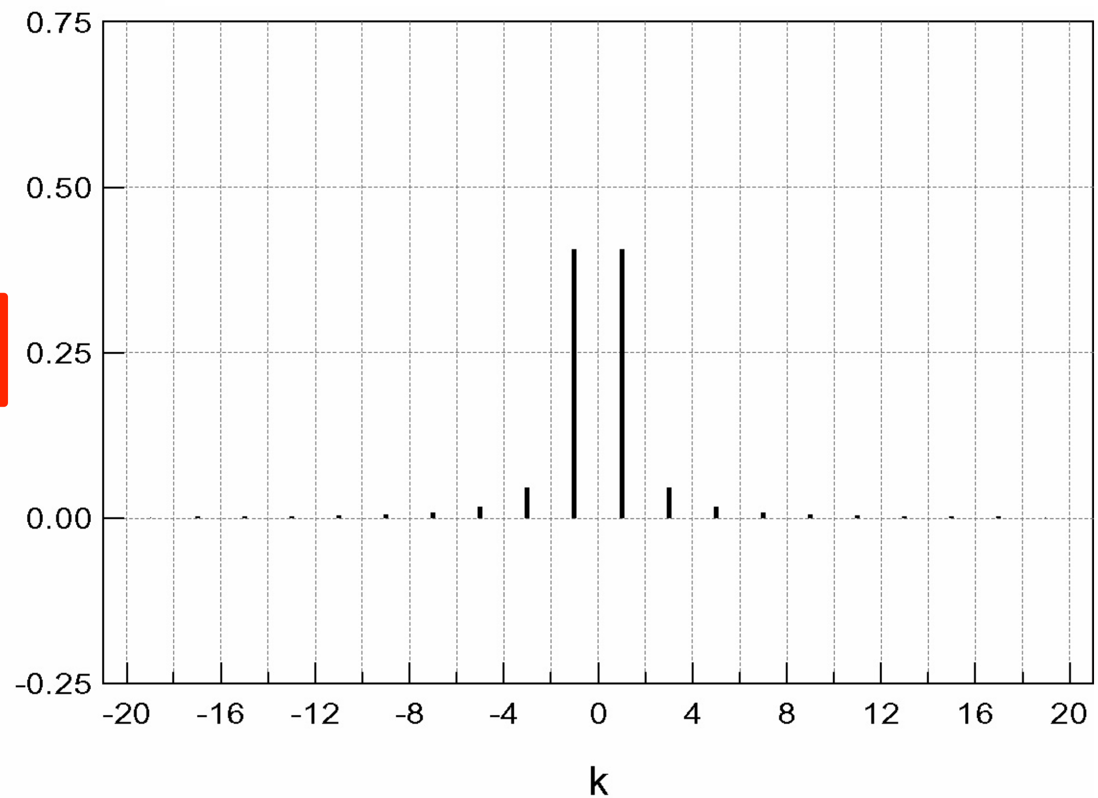
$$X_k = -\frac{8A}{T_0}\int_0^{T_0/2} \frac{t}{T_0}\cos\left(2\pi k f_0 t\right) dt$$

$$= -\frac{8A}{T_0}\frac{T_0}{\left(2\pi k\right)^2}\left[\left(-1\right)^k - 1\right] = \frac{4A}{\left(\pi k\right)^2}$$

k dispari

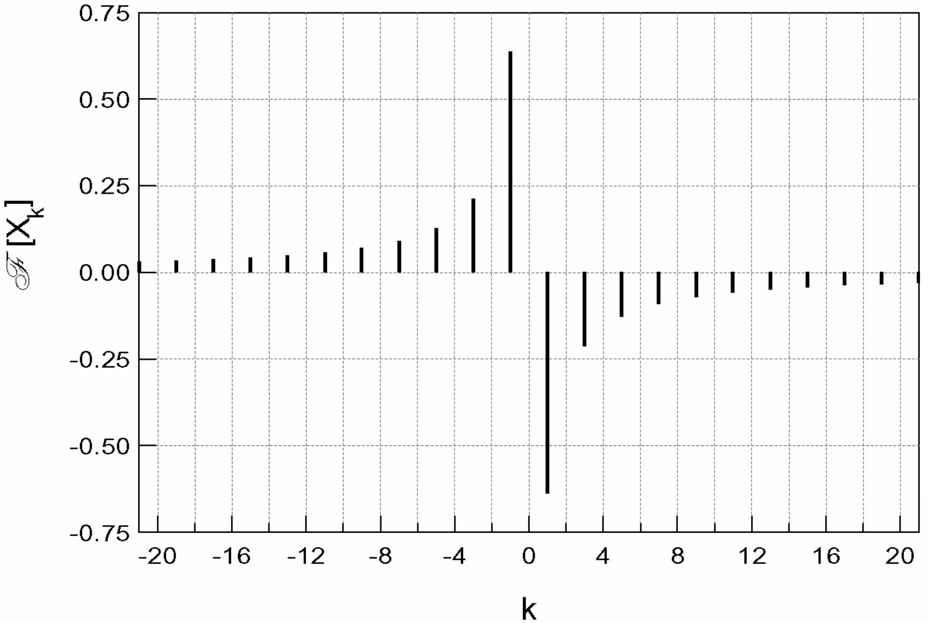
Trasformata dell'onda triangolare

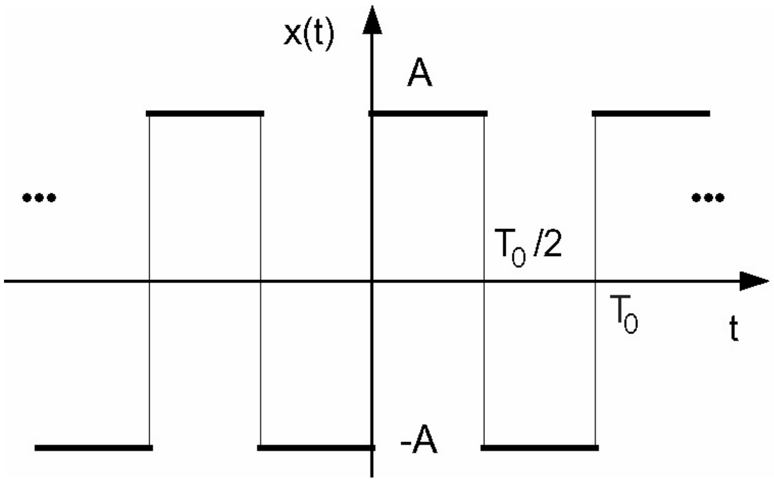


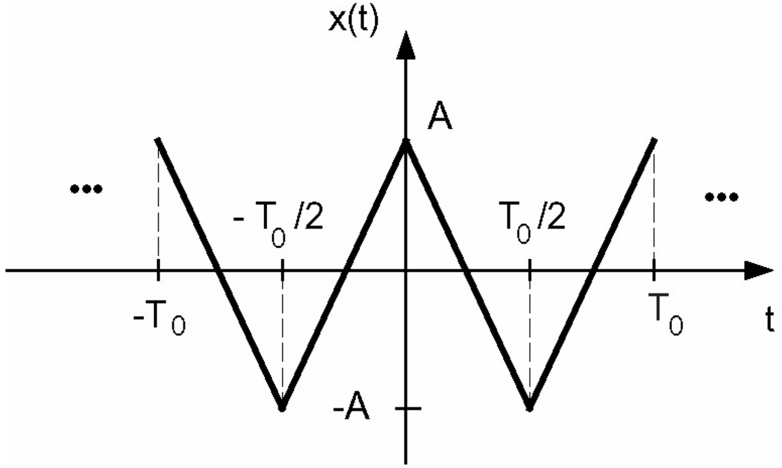


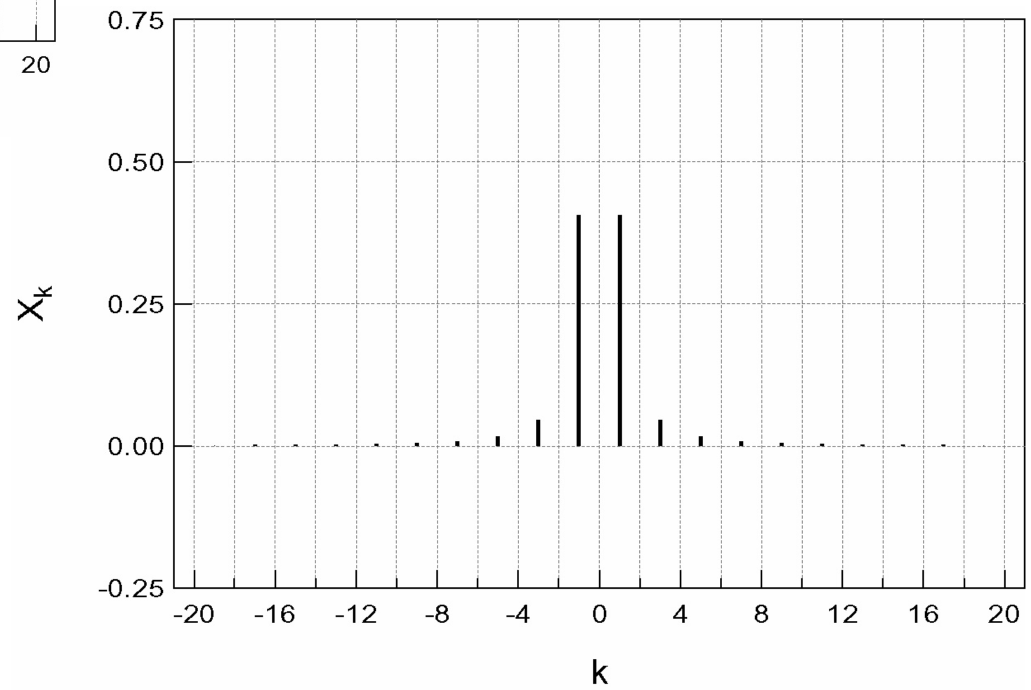
pari → puramente reale

Identificazione…









Esercizio n° X

- Si scriva un VI per:
  - sintetizzare un segnale di onda quadra a partire di suoi coefficenti di Fourier
  - sintetizzare un segnale di onda triangolare a partire di suoi coefficenti di Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i2\pi k f_o t}$$

Sintesi