# Laboratorio II, modulo 2
# 2016-2017

## Segnali aperiodici

(cfr. http://wpage.unina.it/verdoliv/tds/appunti/Appunti_04.pdf

Luise, Vitetta, D'Amico Teoria dei segnali analogici)

# Equazioni di analisi e sintesi

(segnali periodici a tempo continuo)

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-i2\pi k f_0 t} dt$$

Analisi

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i2\pi k f_0 t}$$

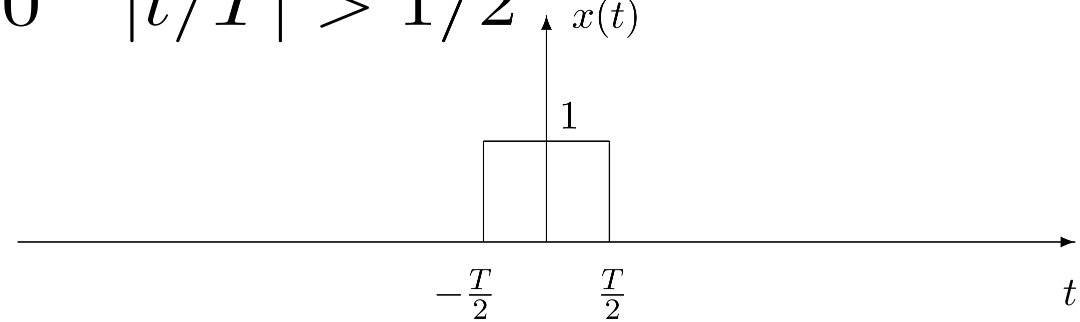
Sintesi

$$x(t) \Leftrightarrow X_k$$

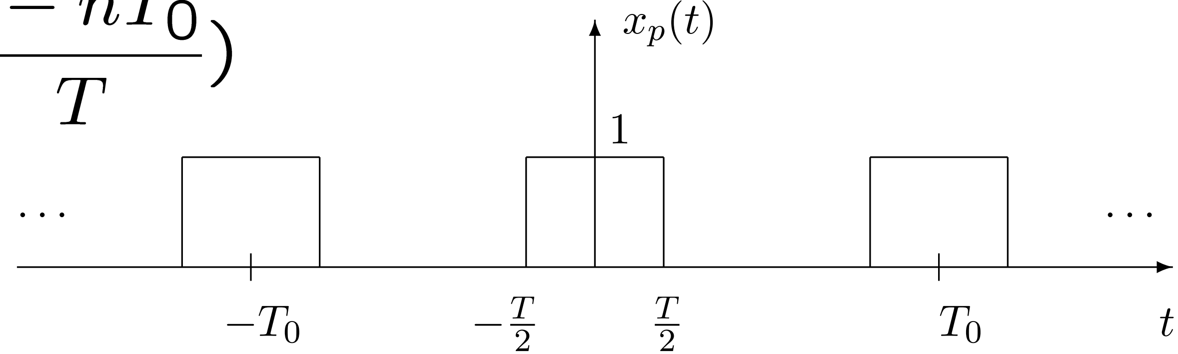
(nota: $X_k$ è in generale complessa)

# Segnali aperiodici a tempo continuo

$$x(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & |t/T| \leq 1/2 \\ 0 & |t/T| > 1/2 \end{cases}$$




$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} rect(\frac{t-nT_0}{T})$$




$$x(t) = \lim_{T_o \to \infty} x_p(t)$$

(al limite in cui il periodo di *ripetizione* è infinito)

# Segnale aperiodico a tempo continuo

Essendo $x_p(t)$ periodico lo possiamo *sviluppare* in serie di Fourier:

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} rect(\frac{t - nT_o}{T}) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} X_k e^{i2\pi k f_o t}$$

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t) e^{-i2\pi k f_0 t} dt$$

Cosa succede alla serie di Fourier e ai relativi coefficienti $X_k$ quando $T_o \rightarrow \infty$?

# $T_o \rightarrow \infty$ (1)

Definiamo:

$X_p(t)=1$ per $[-T_0/2, T_0/2]$

$$X(kf_o) \equiv T_o X_k = \int_{-T_o/2}^{T_o/2} \cancel{x_p(t)} e^{-i2\pi k f_o t} dt = T\frac{sin(kf_oT)}{kf_oT}$$

Possiamo scrivere:

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} X(kf_o) e^{i2\pi k f_o t} f_o$$

…da confrontare con: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i2\pi k f_0 t}$

# $T_0 \rightarrow \infty$ (1bis)

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t} dt \end{aligned}$$

Definiamo:

$$X(f) \stackrel{\triangle}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t} dt$$

Quindi:

$$X_k = \frac{1}{T_0} X(f)|_{f=k/T_0} = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right)$$

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right) e^{j2\pi k t/T_0}$$

# $T_o \rightarrow \infty$ (2)

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} X(kf_o)e^{i2\pi k f_o t} f_o$$

Passando al limite per $T_o \rightarrow \infty$ ($f_0 \rightarrow 0$)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{i2\pi f t} df$$

cioè la somma diventa un integrale

# Trasformata di Fourier

$$X(kf_o) \equiv T_o X_k = \int_{-T_o/2}^{T_o/2} x_p(t) e^{-i2\pi k f_o t} dt = T \frac{sin(kf_o T)}{kf_o T}$$

Passando al limite per $T_o \rightarrow \infty$

$$X(f) = \lim_{T_o \rightarrow \infty} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} x_p(t) e^{-i2\pi k f_o t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

che è la trasformata *continua* di Fourier del segnale *x(t)*

$$X(f) = A(f) e^{i\theta(f)}$$

Spettro di fase

Spettro di ampiezza

# Equazioni di sintesi (trasformata di Fourier inversa)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i2\pi k f_o t}$$

Segnale periodico

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi f t} df$$

Segnale aperiodico

Il segnale non è più sintetizzato dalla somma di *N* termini (in *k*), ma come l'integrale di infiniti termini in *f*

# Equazioni di analisi (trasformata di Fourier)

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-i2\pi k f_0 t} dt$$

Segnale periodico

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

Segnale aperiodico

Gli *N* termini dello sviluppo (in *k*) diventano una funzione continua (di *f*)

# Equazioni di analisi e sintesi

(segnali aperiodici a tempo continuo)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

Eq. di analisi

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df$$

Eq. di sintesi

$$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

# Teoremi (proprietà) della trasformata di Fourier

$$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

Teorema della linearità:

$$x(t) = ax_1(t)+bx_2(t) \Rightarrow X(f) = aX_1(f)+bX_2(f)$$

Teorema di dualità:

$$x(t) \Leftrightarrow X(f) \quad \rightarrow \quad X(t) \Leftrightarrow x(-f)$$

Teorema del ritardo:

$$y(t) = x(t - t_0) \quad \Leftrightarrow \quad Y(f) = X(f)e^{-i2\pi f t_0}$$

Teorema prodotto e convoluzione:

$$z(t) = x(t) \otimes y(t) \quad \Leftrightarrow \quad Z(f) = X(f)Y(f)$$

$$z(t) = x(t)y(t) \quad \Leftrightarrow \quad Z(f) = X(f) \otimes Y(f)$$

$$a(t) \otimes b(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\tau)b(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau$$